

## ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.45

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТОЛЩИНЫ ЛЕДОПОРОДНОГО ОГРАЖДЕНИЯ ПРИ ПРОХОДКЕ СТВОЛОВ

Л. Ю. Левин, М. А. Семин, О. С. Паршаков

*Горный институт УрО РАН, E-mail: aerolog\_lev@mail.ru,  
ул. Сибирская, 78-а, 614007, г. Пермь, Россия*

Проведен анализ задачи Стефана для случая замораживания породного массива при проходке стволов. Показано, что скорость протекания тепловой диффузии в породном массиве сопоставима со скоростью перемещения границы фазового перехода. Получено решение задачи Стефана для одиночной скважины с использованием метода конечных разностей. Усовершенствована методика обобщения результатов расчета толщины ледопородного ограждения одиночной скважины на случай множества скважин. Проведен расчет толщины ледопородного ограждения, образующегося вокруг контура замораживающих колонок, для условий шахтного ствола № 1 рудника Петриковского горно-обогатительного комбината ОАО «Беларуськалий».

*Ледопородное ограждение, проходка стволов, задача Стефана, диффузионная теплопроводность, фазовый переход, математическое моделирование*

Одним из наиболее универсальных и надежных способов проведения вертикальных шахтных стволов в сложных гидрогеологических условиях является искусственное замораживание горных пород [1]. Суть способа заключается в бурении кольца замораживающих скважин вокруг проектируемого сечения ствола, после чего в скважинах монтируются замораживающие колонки, по которым циркулирует хладоноситель. Цель искусственного замораживания — создание вокруг будущей выработки шахтного ствола временного защитного ограждения из мерзлой водонасыщенной породы, предохраняющего выработку от поступления подземных вод при ее строительстве. Эффективность ледопородного ограждения (ЛПО) в сложных гидрогеологических условиях зависит от его герметичности и толщины.

В отечественной и зарубежной литературе имеется множество исследований закономерностей формирования ЛПО [1–15]. Раннюю методологию исследований (50–60 гг. XX в.) можно условно разделить на две части: использование упрощенного метода электротепловой аналогии [2–5] и решение квазистационарного уравнения теплопроводности с фазовым переходом около одной скважины [6, 7], т. е. цилиндрической задачи Стефана [8]. В последние десятилетия благодаря развитию вычислительной техники практикуется новый метод исследования — численное моделирование [9], позволяющее получать нестационарное решение для задач с множеством скважин с учетом различных физических процессов.

В [10–12] представлен подробный обзор численных методов, применяемых для решения задачи Стефана. Отдельного внимания заслуживает работа [13], в которой приводится аналитическое решение стационарного уравнения теплопроводности в плоском разрезе массива для произвольного количества замораживающих скважин с помощью суперпозиции комплексных потенциалов источников, позволяющее получить неравномерное распределение температур по радиальной и угловой координатам. Для учета неоднородного нестационарного распределения температур в центральной части области, оконтуренной замораживающими скважинами, также используется комплексный потенциал стока, что не совсем обосновано ввиду стационарного характера решения, получаемого с помощью данного потенциала.

В [6, 7] решается нестационарная одномерная задача теплопереноса в породном массиве около одной скважины с учетом миграции влаги и ее фазового перехода в твердое состояние. Рассмотрен теплоперенос только в радиальном направлении. Система уравнений задачи сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое решается численно и определяется зависимостью  $r(t)$  для радиуса ледопородного ограждения. Для записи решения уравнения теплопроводности в талой зоне используется функция ошибок  $\text{Erf}(x)$  вместо более корректной для цилиндрической задачи интегральной показательной функции  $\text{Ei}(x)$  [14], а для уравнения теплопроводности в зоне льда — функция логарифма, соответствующая квазистационарному случаю.

Упрощенные аналитические методы расчета толщины ЛПО [2–7, 10, 13] имеют по сравнению с методами численного двух- и трехмерного моделирования возможность проведения оперативной оценки качества ЛПО. Однако в упрощенных методах не учитываются важные физические процессы: нестационарность тепловой диффузии, конечная скорость фазового перехода, наличие скрытой теплоты фазового перехода, что приводит к существенным погрешностям.

Цель настоящей работы — совершенствование метода расчета толщины ледопородного ограждения при проходке стволов, предложенного в [2], путем точного учета нестационарной тепловой диффузии в талой и мерзлой зонах, а также учета теплового влияния соседних скважин на формирование ЛПО.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЛЩИНЫ ЛЕДОПОРОДНОГО ОГРАЖДЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ СКВАЖИНЫ

В соответствии с терминологией [3], зону грунта с отрицательной температурой, в которой заполняющая поры массива вода (или рассол) обращена в лед, будем называть зоной льда. Остальную зону грунта, охлажденную вследствие действия замораживающей колонки до температур, превышающих температуру кристаллизации воды, — зоной охлаждения.

Рассматривается расчетная область породного массива в виде полого цилиндра (рис. 1). Внутренняя стенка цилиндра соответствует контакту с замораживающей скважиной, внешняя стенка — непо потревоженному породному массиву. Внутри породного массива имеется контур радиусом  $R_{ph}$ , разделяющий зону льда и зону охлаждения.

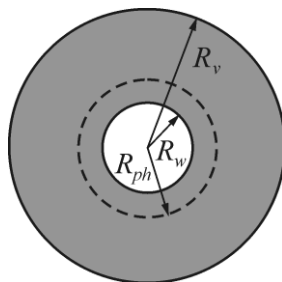


Рис. 1. Расчетная область породного массива с замораживающей скважиной в центре

Используется гипотеза об осевой симметрии, однородности и изотропности физических свойств исследуемой среды, что позволяет свести трехмерную задачу к одномерной и рассмотреть зависимость температуры от единственной пространственной координаты — радиальной координаты  $r$ .

Одномерная задача Стефана в цилиндрических координатах задается следующей системой уравнений [6], записанной в энтальпийном виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_s, & T < T_{ph}, \\ \lambda_l, & T \geq T_{ph}, \end{cases} \quad (2)$$

$$T = T_{ph} + \begin{cases} \frac{H}{\rho c_s}, & H < 0, \\ 0, & 0 \leq H < \rho Lw, \\ \frac{H - \rho Lw}{\rho c_l}, & H \geq \rho Lw, \end{cases} \quad (3)$$

$$t = 0: H = \begin{cases} \rho c_s (T_0 - T_{ph}), & T_0 \leq T_{ph}, \\ \rho c_l (T_0 - T_{ph}) + \rho Lw, & T_0 > T_{ph}, \end{cases} \quad (4)$$

$$t = 0: T = T_0, \quad (5)$$

$$r = R_w: T = T_w, \quad (6)$$

$$r = R_v: T = T_0, \quad (7)$$

где  $H$  — энтальпия, Дж/м<sup>3</sup>;  $\lambda_s$  — теплопроводность среды в зоне льда, Вт/(м·К);  $\lambda_l$  — теплопроводность среды в зоне охлаждения, Вт/(м·К);  $c_s$  — удельная теплоемкость среды в зоне льда, Дж/(кг·К);  $c_l$  — удельная теплоемкость среды в зоне охлаждения, Дж/(кг·К);  $\rho$  — плотность среды, кг/м<sup>3</sup>;  $T_{ph}$  — температура фазового перехода, °С;  $L$  — удельная теплота плавления льда, Дж/кг;  $w$  — влагосодержание массива, кг/кг;  $R_w$  — радиус замораживающей скважины, м;  $R_v$  — внешняя граница расчетной области, м;  $T_w$  — температура стенок замораживающей скважины, °С;  $T_0$  — температура непоколебленного породного массива на удалении, °С.

При обезразмеривании системы (1)–(7) получено, что ее решение будет зависеть от числа Стефана:

$$St = \frac{c\Delta T}{\tilde{L}} = \frac{c\Delta T}{Lw}, \quad (8)$$

в котором  $\tilde{L}$  — удельная теплота фазового перехода доли  $w$  грунтовой воды, содержащейся в единице массы породного массива;  $\Delta T$  — диапазон изменения температур.

Для условий Петриковского участка Старобинского месторождения калийных солей получено, что число Стефана варьирует в диапазоне 0.25–0.5. Поскольку число Стефана является в определенном смысле соотношением инертности среды к протеканию тепловой диффузии и инертности фазового перехода, можно сделать следующий вывод: скорость протекания тепло-

вой диффузии в породном массиве сопоставима со скоростью перемещения границы фазового перехода. Поэтому при моделировании необходимо учитывать как нестационарное перемещение границы фазового перехода, так и тепловую диффузию в породном массиве. По этой причине в настоящей работе решается задача Стефана в наиболее общем виде.

Температура стенок замораживающей скважины принимается переменной во времени и определяется на основании экспериментальных данных, полученных для ствола № 1 строящегося рудника Петриковского горно-обогатительного комплекса ОАО «Беларуськалий». Температуры подачи и обратки рассола замораживающих скважин, замеренные в процессе мониторинга замораживания массива в окрестности ствола № 1, приведены на рис. 2.

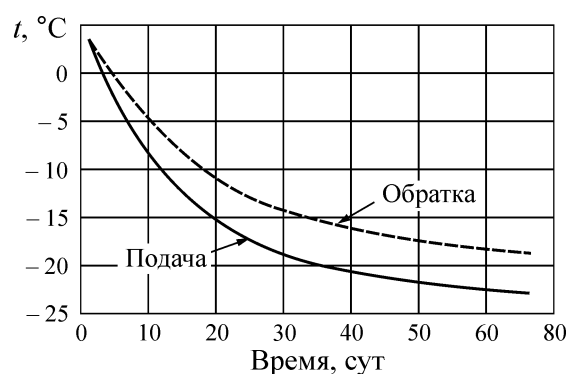


Рис. 2. Зависимость температуры подачи и обратки рассола замораживающих скважин от времени

Численное решение системы уравнений (1)–(7) методом конечных разностей с использованием явной схемы первого порядка по времени и второго порядка по пространству представлено на рис. 3. Данное решение сравнивается с решениями задачи формирования ЛПО в рамках различных упрощенных подходов: квазистационарного подхода [6], метода электротепловой аналогии [2], расчета стационарной диффузионной теплопроводности с учетом теплоты фазового перехода и расчета нестационарной диффузионной теплопроводности без учета теплоты фазового перехода. В отличие от [11, 12], в которых дан сравнительный анализ численных схем решения задачи Стефана, в данной работе делается физический анализ различных упрощенных моделей решения цилиндрической задачи Стефана для случая формирования ЛПО.



Рис. 3. Динамика границы фазового перехода грунтовых вод: 1 — задача Стефана в общем виде; 2 — квазистационарный подход; 3 — нестационарная диффузионная теплопроводность без учета теплоты фазового перехода; 4 — стационарная диффузионная теплопроводность с учетом теплоты фазового перехода; 5 — метод электротепловой аналогии

Параметры, использованные при решении задачи, взяты из исходных данных для проекта проходки шахтных стволов рудника Петриковского участка Старобинского месторождения калийных солей для слоя аргиллитовой глины: теплопроводность среды в зоне льда  $1.25 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ; теплопроводность среды в зоне охлаждения  $1.03 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ; теплоемкость среды в зоне льда  $756 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ ; теплоемкость среды в зоне охлаждения  $756 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ ; плотность среды  $1960 \text{ кг/м}^3$ ; температура фазового перехода  $-1.45^\circ\text{C}$ ; удельная теплота плавления льда  $333\,730 \text{ Дж/кг}$ ; радиус замораживающей скважины  $0.073 \text{ м}$ ; внешняя граница расчетной области  $2.5 \text{ м}$ ; температура непо потревоженного породного массива на удалении  $8.85^\circ\text{C}$ . Внешняя граница расчетной области  $R_v$  рассчитывается на основании формулы, предложенной в [17].

Результаты численного моделирования показывают, что отклонение прогнозного значения времени формирования ледопородного ограждения заданной толщины, полученного для квазистационарного подхода, от решения задачи Стефана (1)–(7) в общем виде составляет около  $10\%$ . Для остальных подходов отклонение прогнозного значения времени формирования ледопородного ограждения заданной толщины существенно выше: для подхода нестационарной диффузионной теплопроводности без учета теплоты фазового перехода —  $25\%$ , для метода электротепловой аналогии и подходов стационарной диффузионной теплопроводности с учетом теплоты фазового перехода —  $55\%$ . Таким образом, можно сделать вывод, что пренебрежение теплотой фазового перехода в модели формирования ЛПО ведет к занижению прогнозного значения времени формирования ЛПО на  $25\%$ , пренебрежение нестационарностью диффузионной теплопроводности в охлажденной зоне — к занижению на  $55\%$ , пренебрежение нестационарностью диффузионной теплопроводности в мерзлой зоне — к занижению на  $10\%$ .

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЛЩИНЫ ЛЕДОПОРОДНОГО ОГРАЖДЕНИЯ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ СКВАЖИН

Полученное численное решение задачи формирования ледопородного ограждения для одиночной замораживающей скважины может быть использовано для расчета толщины ледопородного ограждения вокруг контура из произвольного количества скважин. Идея расчета толщины ледопородного ограждения для множества скважин на основании результатов расчета для одиночной скважины заключается в следующем — определить толщину  $\delta$  “перешейка” зоны льда между двумя замораживающими скважинами как функцию диаметра  $D$  внешнего контура ледогрунтового цилиндра одиночной скважины и расстояния  $L$  между скважинами (рис. 4).

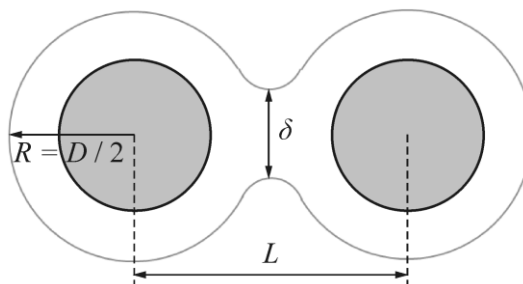


Рис. 4. Схема расчета толщины ледопородного ограждения

Подобная идея впервые предложена в [2], однако в ней не учтено взаимное влияние тепловых полей различных скважин, а для расчета диффузионной теплопроводности использован приближенный метод электротепловой аналогии. В новом методе расчета толщины ледопородного ограждения предлагается учесть взаимное влияние тепловых полей различных скважин, а также использовать решение задачи Стефана в наиболее общей постановке с учетом нестационарного теплообмена в зонах льда и охлаждения.

Функция  $\delta(R, L)$  находится из анализа комплексного потенциала теплового потока в поле двух источников (стоков) равной интенсивности  $q$ , удаленных друг от друга на расстояние  $L$ :

$$W(z) = \frac{q}{2\pi\lambda_s} \ln\left(z + \frac{L}{2}\right) + \frac{q}{2\pi\lambda_s} \ln\left(z - \frac{L}{2}\right). \quad (9)$$

Его действительная часть

$$\operatorname{Re}[W(z)] = \frac{q}{4\pi\lambda_s} \ln\left[\left(x^2 - \frac{L^2}{4} - y^2\right)^2 + 4x^2y^2\right]. \quad (10)$$

Согласно [11], выражение (10) является решением диффузионной задачи теплопроводности в поле двух тепловых источников. Графическое представление действительной части (10) показано на рис. 5.

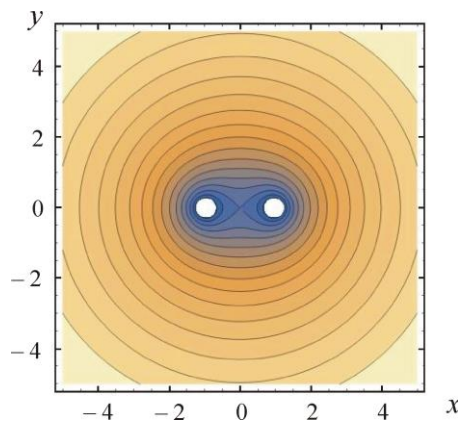


Рис. 5. Потенциальное поле двух тепловых стоков

Внешний контур ледопородного ограждения, образованного двумя скважинами, находится из решения уравнения

$$\left(x^2 - \frac{L^2}{4} - y^2\right)^2 + 4x^2y^2 = C^2, \quad (11)$$

где  $C$  — константа, рассчитываемая исходя из температуры кристаллизации грунтовых рассолов и граничных условий задачи.

Толщина  $\delta = 2y$  “перешейка” определяется из решения уравнения (11) относительно  $y$  при  $x = 0$ :

$$\left(\frac{L^2}{4} + y^2\right)^2 = C^2. \quad (12)$$

Для исключения константы  $C$  из (12) используется допущение о том, что толщина ледопородного ограждения системы двух скважин вдоль оси, соединяющей скважины (см. радиус  $R$  на рис. 4), равна радиусу  $R = D/2$  ледогрунтового цилиндра единичной скважины. В этом случае радиус  $R = x - L/2$  находится из решения уравнения (11) относительно  $x$  при  $y = 0$ :

$$\left(\frac{L^2}{4} - x^2\right)^2 = C^2. \quad (13)$$

Из (12) и (13) исключаем константу  $C$  и после преобразований получаем выражение

$$\delta = \sqrt{D^2 + 2DL - L^2}. \quad (14)$$

При нулевом расстоянии  $L$  между скважинами толщина “перешейка” равна диаметру  $D$  внешнего контура ледогрунтового цилиндра. При увеличении расстояния  $L$  между скважинами толщина “перешейка” уменьшается и достигает нулевого значения при критическом значении:

$$L = D(1 + \sqrt{2}) \approx 2.4D. \quad (15)$$

При бóльших  $L$  герметичное ледопородное ограждение отсутствует, а формула (14) неприменима.

На рис. 6 представлена зависимость (14) в безразмерных координатах  $L/D$  и  $\delta/D$ . При расстояниях  $L < D$  увеличение  $L$  приводит к росту толщины ледопородного ограждения, в то время как при  $L > D$  дальнейшее увеличение  $L$  ведет к уменьшению толщины ледопородного ограждения.

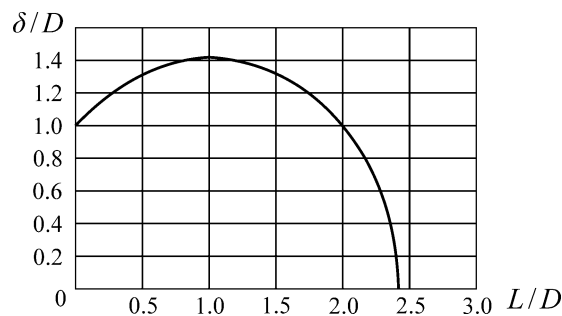


Рис. 6. Зависимость безразмерной толщины ледопородного ограждения от безразмерного расстояния между скважинами

Таким образом, существует оптимальное соотношение между удаленностью  $L$  скважин друг от друга и толщиной  $D$  ледопородного ограждения отдельной скважины по критерию максимальной толщины  $\delta$  ледопородного ограждения комплекса скважин.

Полученная формула (15) использована для прогнозирования состояния ледопородного ограждения при проходке ствола № 1 рудника Петриковского горно-обогатительного комбината ОАО “Беларуськалий”.

На основании расчета формирования ледопородного ограждения водоносных слоев породного массива для одиночной замораживающей скважины рассчитана толщина ледопородного ограждения, образованного контуром из 41 замораживающей скважины на момент времени 85 сут после начала замораживания (таблица).

Расчет толщины ледопородного ограждения для ствола № 1

Слой, см	Толщина ЛПО, см	
	модельная	проектная
Глина (глубина 0–23.2)	186	160
Алеврит (глубина 23.2–58.0)	261	190
Песок (глубина 58.0–85.0)	298	250
Мел (глубина 85.0–136.0)	252	185
Песчаник (глубина 136.0–146.0)	330	250
Песок глинистый (глубина 146.0–255.8)	200	200
Глина аргиллитовая (глубина 255.8–275.0)	157	150

Получено, что для данного момента времени по всей глубине замораживающих колонок толщина ледопородного ограждения достигнет проектного значения, рассчитанного исходя из критерия Домке по напряжениям и деформационного критерия Вялова [4].

**ВЫВОДЫ**

Выполнен физический анализ различных упрощенных моделей решения цилиндрической задачи Стефана для случая формирования ледопородного ограждения. Показано, что при моделировании необходимо учитывать как нестационарное перемещение границы фазового перехода, так и тепловую диффузию в породном массиве. Пренебрежение теплотой фазового перехода в модели ведет к занижению прогнозного значения времени формирования ледопородного ограждения.

Получено численное решение теплораспределения вокруг контура из произвольного количества замораживающих скважин. Определено оптимальное соотношение между удаленностью скважин друг от друга и толщиной ледопородного ограждения отдельной скважины по критерию максимальной толщины ледопородного ограждения комплекса скважин.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Роменский А. А.** Обоснование параметров проходнического цикла и ледопородного ограждения при строительстве вертикальных стволов: дис. ... канд. техн. наук. — М., 1983. — 227 с.
2. **Трупак Н. Г.** Замораживание горных пород при проходке стволов. — М.: Углетехиздат, 1954. — 896 с.
3. **Трупак Н. Г.** Замораживание грунтов в подземном строительстве. — М.: Недра, 1974. — 280 с.
4. **Маньковский Г. И.** Специальные способы проходки горных выработок. — М.: Углетехиздат, 1958. — 454 с.
5. **Долгов О. А.** Методика расчета процесса замораживания горных пород при проходке стволов шахт способом замораживания на большую глубину // Замораживание горных пород при проходке стволов шахт. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 9–64.
6. **Дмитриев А. П., Гончаров С. А.** Термодинамические процессы в горных породах. — М.: Недра, 1990. — 360 с.
7. **Гончаров С. А.** Термодинамика: учебник для вузов по направлению “Горное дело”. — 2-е изд. — М.: Изд-во МГУ, 2002. — 441 с.
8. **Венгеров И. Р.** Теплофизика шахт и рудников. Т. 1. Математические модели. — Донецк: Норд-Пресс, 2008. — 632 с.
9. **Мейрманов А. М.** Задача Стефана. — Новосибирск: Наука, 1986. — 240 с.
10. **Вабищевич П. Н., Васильева М. В., Павлова Н. В.** Численное моделирование термостабилизации фильтрующих грунтов // Мат. моделирование. — 2014. — Т. 26. — № 9. — С. 111–125.
11. **Мусакаев Н. Г., Романюк С. Н., Бородин С. Л.** Численное исследование закономерностей движения фронта фазового перехода в многолетнемерзлых породах // Изв. вузов. Нефть и газ. — 2011. — № 6. — С. 122–128.
12. **Бородин С. Л.** Численные методы решения задачи Стефана // Вестн. Тюмен. гос. ун-та. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. — 2015. — Т. 1. — № 3. — С. 164–175.
13. **Бельферман М. У.** Температурное поле ледопородного ограждения шахтных стволов при двухрядном расположении замораживающих колонок // Вопросы организации и механизации горнопроходческих работ. — М.: ИГД им. А. А. Скочинского, 1976. — С. 109–116.
14. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 488 с.
15. **Andersland O. B., Ladanyi B.** An introduction to frozen ground engineering, Springer US, 1994. — 352 p.
16. **Harris J. S.** Ground freezing in practice, Thomas Telford Limited, 1995. — 290 p.
17. **Левин Л. Ю., Семин М. А., Зайцев А. В.** Разработка математических методов прогнозирования микроклиматических условий в сети горных выработок произвольной топологии // ФТПРПИ. — 2014. — № 2. — С. 154–161.

*Поступила в редакцию 26/IX 2016*