

## Численный анализ экспериментальных схем по обнаружению моментных эффектов при статических и динамических внешних воздействиях

Корепанов В.В.

Даны основные понятия о теории континуума Коссера и некоторые исторические аспекты ее развития. Рассмотрены особенности теории и основные этапы, связанные с разработкой экспериментальных схем для обнаружения моментных эффектов на основе решения двумерных и трехмерных задач в рамках несимметричной теории упругости. Проведены численные исследования, направленные на оценку влияния различных факторов в изготовлении образца, схеме нагружения и выборе материала на уровень величин, измеряемых в эксперименте. Такие исследования позволяют оценить перспективность планируемых экспериментов, направленных на установление фактов моментного поведения материалов при статических и динамических внешних воздействиях.

**В** 1909 году была опубликована книга французских исследователей Эжена и Франсуа Коссера (Cosserat) «Теория деформируемых тел» [1], заложившая основы механики обобщенных континуумов.

Одной из основных гипотез классической механики сплошных сред (МСС) является принцип напряжений Коши, устанавливающий эквивалентность действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию их равнодействующей, приложенной к центру площадки. Однако в общем случае действие произвольной системы сил эквивалентно действию главного вектора и главного момента. При этом в среде возникают не только напряжения  $\sigma_{ij}$ , но и моментные напряжения  $\mu_{ij}$ , образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры (рис. 1, а). Чтобы учесть эти факторы, необходимо допустить в среде наличие дополнительных степеней свободы и рассмотреть физически бесконечно малый объем (по которому ведется усреднение свойств среды) не как материальную точку, а как более сложный объект,

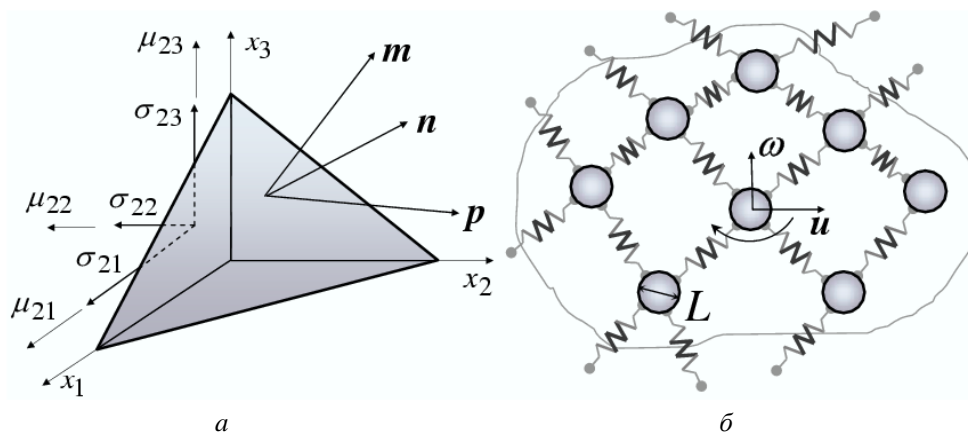


Рис. 1. Модель среды Коссера

---

обладающий новыми степенями свободы: ротационными, осцилляторными или способностью к микродеформации. Таким образом, для расширения спектра свойств сплошной среды необходимо предположить у физически бесконечно малого объема существование внутренней структуры (микроструктуры), обусловленной зернистостью или волокнистостью строения реальных материалов.

Среду, моделируемую таким образом, называют средой Коссера, а из-за появления моментных несимметричных напряжений эту теорию называют моментной, несимметричной или микрополярной теорией упругости. В силу того, что нагрузка на элементарный объем тела осуществляется также и посредством момента сил, для среды вводится независимая кинематическая характеристика, с которой связана работа данного вращающего момента. Этой характеристикой является вектор поворота  $\omega$ . Можно предложить следующую модельную интерпретацию логики введения этого вектора. Пусть произвольная область тела (рис. 1, б) состоит из абсолютно твердых частиц, имеющих, в отличие от классической теории упругости, линейный размер  $L$  и связанных между собой упруго, но эти связи действуют на внешний край частиц. В этом случае кинематика частицы будет определяться вектором перемещения центра масс  $u$  и вектором поворота  $\omega$ . В случае континуума Коссера эти вектора являются непрерывными функциями. То есть каждой материальной точке приписываются свойства частицы, имеющей масштаб и ориентацию. Таким образом, в среде появляются дополнительные физические параметры, характеризующие линейный размер и момент инерции частиц, а также свойства связей относительно вращения.

Можно сказать, что появление модели континуума Коссера знаменовало собой начало перехода в МСС от механики Ньютона, исходным объектом которой является материальная точка, к механике Эйлера, имеющей в качестве исходного объекта твердое тело.

До недавних пор считалось [2], что работа Коссера существует как бы «в вакууме», не имея ни предшественников, ни, долгое время, последователей. Но это не соответствует действительности. «Отцами-основателями» сред Коссера можно считать Якоба Бернулли, который в 1686 году ввел в рассмотрение момент количества движения, и Леонарда Эйлера, в 1765 году описавшего кинематику твердого тела конечных размеров.

До конца 19-го века физиками разрабатывались две теории эфира – теория квазизжидкого (газоподобного) эфира и теория квазитвердого эфира. За разработкой квазизжидкого эфира стояли такие известные ученые, как Р. Декарт, Дж. Максвелл, Г. Лоренц. Они предполагали, что в эфире существуют вихри из каких-то очень мелких частиц. Потoki этих частиц образуют магнитные поля, а движения частиц от одного заряженного тела к другому обеспечивают электростатическое взаимодействие. Последовательными сторонниками теории квазитвердого эфира выступали Дж. Мак-Куллаг, В. Томсон (лорд Кельвин) и Дж. Стокс. Согласно их теориям магнитные и электрические поля возникают в эфире в результате определенного вида деформаций.

В 1839 году Дж. Мак-Куллаг предложил модель эфирной среды как упругого тела, невосприимчивого к деформациям сжатия и изменения формы, но реагирующего на деформацию кручения относительно абсолютного пространства [3].

Вслед за Дж. Мак-Куллагом В. Кельвин смоделировал эфир с помощью волчков, то есть рассмотрел полярную среду, состоящую из вращающихся осесимметричных частиц, способных совершать большие повороты и перемещения общего вида [4]. В работе [5] найдена аналогия определяющих уравнений среды Кельвина и упругих непроводящих ферромагнетиков в состоянии насыщения.

Затем на протяжении нескольких десятилетий не было практически ни одной работы, посвященной континууму Коссера. И только приблизительно через полвека после выхода знаменитой работы братьев Коссера появились яркие труды, касающиеся возможностей применения положений микрополярного континуума в раз-

личных областях механики сплошных сред [6–10]. В значительной степени они посвящены концептуальным вопросам – описанию кинематики точки континуума, построению физических соотношений. Эти работы внесли большой вклад в развитие данной области знаний и послужили основой для дальнейших исследований. Но в 70–80-х годах прошлого века, судя по количеству публикаций, наблюдается некоторое «затишье» в изучении обобщенных континуумов.

Возможно, бурное развитие микромеханики в целом, а также достижения в сфере нанотехнологий послужили в конце XX века причиной новой волны интереса к теории обобщенного континуума. За прошедшие годы опубликованы тысячи работ, отражающих ее развитие и применение к описанию особенностей поведения как жидких сред, так и деформируемых твердых тел. Так, в работах [11, 12] теория микрополярного континуума используется для описания нелинейно-упругих сред с учетом больших деформаций. В [13] предложен вариант построения континуума Коссера, позволяющий учитывать вязкоупругие свойства материала. Особенности волновых процессов в микрополярных средах посвящены статьи [14–20]. Необходимость учета кинематики внутренней структуры геоматериалов на различных линейных масштабах при динамических процессах отмечается в книге [21]. В работах [22–25] представлены интересные результаты исследований, связанных с особенностями волновых процессов в хиральных материалах, взаимодействующих с микрополярными упругими средами. В статьях [26–30] развиваются численные методы и алгоритмы решения статических и динамических краевых задач континуума Коссера.

Следует отметить, что во всем многообразии публикаций, посвященных микрополярным средам, экспериментальные исследования, особенно эксперименты, в которых удастся зарегистрировать проявление моментных свойств материалов, занимают ничтожно малую часть.

В экспериментах по идентификации физических параметров симметричной теории упругости обычно наблюдается стремление обеспечить однородность напряженно-деформированного состояния и создать его определенный тип (чистый сдвиг, одноосное растяжение и т.п.). Однако из теоретических предпосылок микрополярного континуума известно, что моментные свойства среды имеют возможность проявить себя в виде отклика на макроуровне лишь в условиях неоднородного напряженного состояния и при достаточно высоком уровне градиентов напряжений и деформаций [31]. Это обстоятельство принципиально отличает необходимые условия экспериментального определения материальных параметров для физических уравнений микрополярного континуума. Обеспечение условий неоднородности и градиентности является одним из основных факторов, затрудняющих идентификацию материальных констант. Но это только одна из причин. Другая, не менее значимая и в не меньшей степени затрудняющая реализацию эксперимента причина состоит в том, что моментные свойства материала проявляются на линейных масштабах, близких к масштабам его структурных компонент (зерен – для металлов, сферолитов – для полимеров, зернистых и волокнистых включений – для композитов и т.п.). Последнее обстоятельство обуславливает необходимость тщательного анализа и выбора измеряемого макропараметра, а также предъявляет высокие требования к точности измерений.

Попытки определения материальных параметров для континуума Коссера на основе статических экспериментов можно найти в работах [32–35], описывающих испытание образцов на изгиб и кручение. Изгиб и кручение – это те «наипростейшие» виды напряженно-деформированного состояния, при которых в процессе деформирования могут быть зафиксированы и моментные параметры материала, но, в силу отсутствия при этом высоких градиентов напряжений и деформаций, зависимость измеряемых макропараметров от моментных свойств материала будет незначитель-

ной, что и подтверждается обобщающим выводом, сделанным в работе [31]. В статье [36] отмечается перспективность проведения динамических экспериментов для определения материальных параметров на основе анализа дисперсионных зависимостей. Такой подход к нахождению упругих параметров континуума Коссера используется в работе [37].

На основе вышеизложенного можно отметить, что на сегодняшний день остаются открытыми вопросы о четком обосновании экспериментов по поиску моментных эффектов. В связи с этим актуальными являются всесторонний анализ выбранных макропараметров, характеризующих моментное поведение материалов, оценка точности их измерения, а также разработка методов определения выбранных макропараметров в реальных физических экспериментах и средств их измерения.

Основные шаги для решения этой проблемы можно разделить на два этапа: анализ выбранных макропараметров из решения статических задач несимметричной (моментной) теории упругости и анализ выбранных макропараметров из решения динамических задач.

Первый этап состоит из следующих задач:

- определение набора макропараметров из анализа сравнения решений двумерных и трехмерных задач о статическом деформировании в рамках несимметричной и классической теорий упругости. Аналитические решения двумерных плоских задач приведены в работах [38–40], численные – в [26–30]. В работе [30] рассматриваются численные решения трехмерных задач.

Задачи второго этапа:

- определение набора макропараметров из анализа сравнения решений двумерных и трехмерных задач о свободных колебаниях.

На основании сформулированных задач первого и второго этапов необходимо:

- в каждой из рассмотренных задач оценить чувствительность выбранных макропараметров в зависимости от новых («моментных») физических констант материала и характерных размеров (масштабов);

- для каждого выбранного макропараметра оценить точность его измерения;

- предложить возможные методы определения выбранных макропараметров в реальных физических экспериментах и средства их измерения.

На первом этапе была рассмотрена серия двумерных плоских задач об одноосном растяжении пластины с отверстиями различных конфигураций с позиций их использования в качестве экспериментальных схем для идентификации механических параметров в модели континуума Коссера и установления факта моментного поведения при упругом деформировании материалов.

На основе анализа решений задач несимметричной теории упругости были определены такие значения параметров (характерные геометрические размеры, их соотношение и т.п.), при которых отклик моментных свойств материала на какую-либо макровеличину (экспериментально измеряемую), максимален.

В качестве такой макровеличины выбран макропараметр, определяющий степень искажения контура отверстий в двух взаимно перпендикулярных направлениях:

$$D = \left| \frac{u_y(0; R)}{u_x(R; 0)} \right|. \quad (1)$$

Здесь  $u_x(R; 0)$ ,  $u_y(0; R)$  – компоненты вектора перемещений в соответствующих точках на контуре отверстия.

Величина  $D$  привлекательна тем, что в классической (симметричной) теории упругости она постоянна, т.е. не зависит от механических свойств материала, размеров отверстий и величины прикладываемой нагрузки.

В качестве меры сравнения решений несимметричной теории упругости и классической, характеризующей моментный эффект, введем относительную величину

$$\delta = \left| \frac{D - D^*}{D^*} \right|, \quad (2)$$

где  $D$  – решение в рамках несимметричной теории упругости,  $D^*$  – в рамках классической (симметричной) теории упругости.

Например, для задачи об одноосном растяжении бесконечной пластины (задача Кирша, рис. 2, а) в рамках классической теории упругости макропараметр  $D$  всегда равен 3. В несимметричной теории упругости эта величина зависит от радиуса  $R$  и механических характеристик материала, т.е. появляется некий характерный размер (масштаб) (в данной задаче – радиус отверстия  $R$ ), от которого будет зависеть решение задачи. Рассматриваемая задача может быть использована для экспериментальных исследований. Измеряя при нагружении в области линейного поведения материала изменение диаметров в двух взаимно перпендикулярных направлениях, можно рассчитывать при соответствующей точности измерения и изготовления образца на проявление эффекта моментного поведения материала, связанного с отличием макровеличины  $D$  от трех. На рис. 2, б представлена зависимость изменения величины отклика  $\delta$  (2) на моментные свойства от характерного размера (радиуса отверстия  $R$ ). Видно, что при уменьшении радиуса отверстия  $R$  моментный эффект стано-

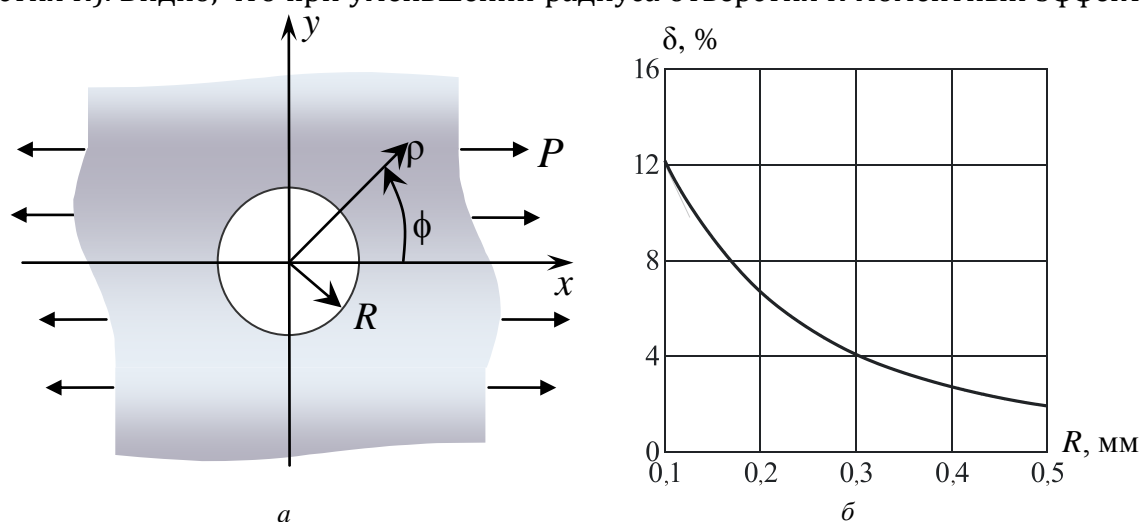


Рис. 2. Задача о растяжении бесконечной пластины с круговым отверстием (задача Кирша) (а); зависимость меры отклика  $\delta$  на моментные свойства от радиуса отверстия (б)

вится более «ярким».

Также рассмотрен ряд задач о растяжении пластин с отверстиями различных конфигураций, в частности, в виде двух правильных многоугольников – квадрата (рис. 3, а и рис. 3, б) и восьмиугольника, различным образом ориентированных относительно направления внешних усилий.

Для этих задач в качестве макропараметра принимается величина, определяемая соотношением (1), где в качестве  $R$  выступает радиус вписанной в квадрат и описанной вокруг квадрата (или восьмиугольника) окружности.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что по величине отклика  $\delta$  на моментные свойства эти задачи являются сопоставимыми с задачей Кирша.

Также была рассмотрена задача для пластины с центральной трещиной. Здесь в качестве макропараметра выбрано перемещение  $D = u_y$  в точке, характеризующее раскрытие трещины.

На основе найденных решений получена оценка проявления моментных эффектов по величине  $\delta$ . Данный вариант по сравнению с пластиной с круговым отверсти-

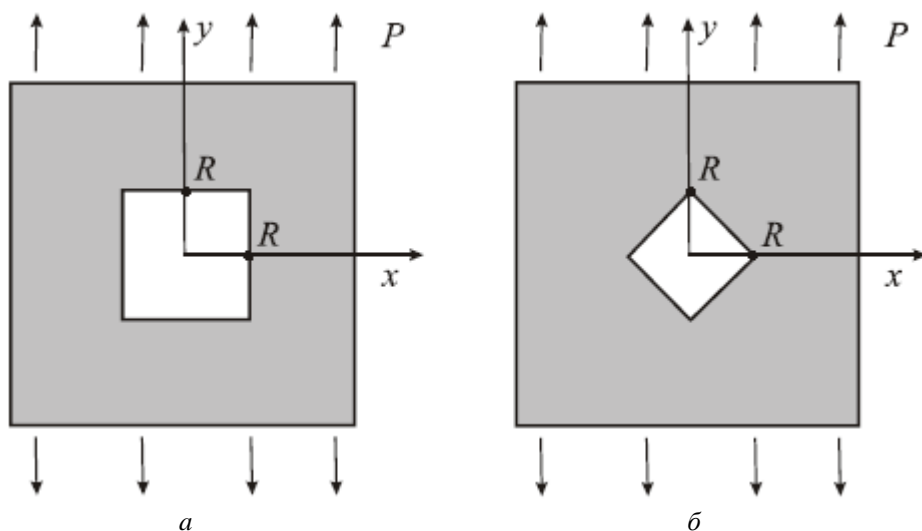


Рис. 3. Задача о растяжении пластины с отверстиями квадратного сечения, различным образом ориентированных относительно действия внешней нагрузки  $P$

ем представляется менее предпочтительным для анализа моментных эффектов по макропараметру  $D$  в силу меньшего отличия от классического решения и больших сложностей при экспериментальной реализации. Вместе с тем эта задача иллюстрирует, что наличие зоны ярко выраженной концентрации напряжений в вершине трещины, где должны проявляться моментные эффекты, слабо влияет на интегральные характеристики, определяющие раскрытие трещины.

Проводя численные расчеты для поиска моментных эффектов в той или иной схеме эксперимента, нужно оценивать границы применимости решения двумерных задач. В соответствии с этим для любого реального образца следует проводить оценку влияния его толщины на решение задачи, т.е. необходимо исследовать распределение макропараметра по толщине образца.

Поэтому была рассмотрена задача о растяжении пластины с круговым отверстием в трехмерной постановке. Получено распределение макропараметра  $D$  по толщине пластины для различных соотношений толщины пластины и радиуса отверстия в рамках классической теории упругости на основе трехмерной постановки задачи. Аналогичные результаты получены в рамках несимметричной теории упругости. Если для классической теории упругости в двумерной постановке макропараметр  $D$  совпадает для плосконапряженного и плоскодеформированного состояний, то в несимметричной теории упругости такого совпадения нет.

Также в рамках трехмерных постановок была рассмотрена задача о растяжении пластины с трещиной. Аналогичные результаты распределения макропараметра  $D = u_y$  по толщине пластины получены для классической и несимметричной теорий упругости.

Результаты сравнения решений в двумерной и трехмерной постановках позволяют определить границы применимости двумерных решений с позиций их приложений для соответствующих экспериментов. Если расчеты, полученные в рамках трехмерной постановки, приводят к изменениям макропараметра  $D$ , которые находятся в пределах погрешности эксперимента, то двумерные решения приемлемы для интерпретации экспериментальных данных. Если данное условие не выполняется, то необходимо использовать результаты расчетов на основе трехмерных постановок задач и измерение макропараметра  $D$  следует проводить с учетом значений координаты  $Z$ .

Еще один важный фактор, влияющий на точность измерения выбранных макропараметров – оценка влияния отклонения в образце формы отверстия от окружности на результат эксперимента. Для моделирования и оценки этого фактора были проведены численные эксперименты.

Для оценки влияния отклонения формы отверстия от окружности была рассмотрена задача о растяжении пластины с отверстием, радиус которой изменяется по закону

$$R_r = R + A (\sin(n\varphi) + \cos(m\varphi)). \quad (3)$$

Здесь  $R$  – радиус окружности, величина  $A$  характеризует максимальную степень отклонения геометрии от окружности, а  $n, m = 1, 2, 3, \dots$  В данном случае макропараметр  $D$  определяет отношение изменения диаметров в направлении осей  $y$  и  $x$ .

Результаты численного моделирования позволили сделать вывод о значениях допусков на отклонение геометрии от окружности, при которых степень проявления моментных эффектов существенно превышает влияние на величину  $D$  неправильной геометрии. В частности, для использованных в работе значений механических характеристик материала отклонение геометрии от правильной окружности ( $A/R$ ) в пределах 1 %, вносит изменения на величину  $\delta$ , определяющую уровень проявления моментных эффектов, в пределах 2 %.

В качестве динамических задач были рассмотрены двумерные и трехмерные задачи о собственных колебаниях в рамках несимметричной теории упругости. Из решения большинства рассматриваемых задач следует, что спектры собственных частот, полученных в рамках классической (симметричной) теории упругости, практически совпадают со спектром собственных частот несимметричной теории упругости. Наиболее информативной оказалась задача о собственном колебании упругого кольца с жестким диском, вставленного внутрь этого кольца (рис. 4). Так, например, значение третьей собственной частоты в рамках классической теории упругости  $p^* = 3349$  Гц, в рамках несимметричной теории  $p = 4203$  Гц.

В качестве трехмерных задач была рассмотрена задача о собственном колебании плиты, закрепленной по одному из торцов, которая в отличие от двумерной задачи о собственном колебании пластины имеет большую информативность за счет появления крутильной формы колебаний, соответствующей третьей собственной частоте  $p^* = 214$  Гц в рамках классической теории упругости и  $p = 199$  Гц – несимметричной теории упругости.

Спектр собственных частот в рамках классической и несимметричной теорий упругости определялся при разных характерных размерах для каждой из задач. В качестве характерных размеров выступали один из геометрических размеров пластины (плиты) и радиус жесткого включения  $R_0$  (рис. 4).

Таким образом, в результате расчета двумерных и трехмерных задач в рамках симметричной и несимметричной теорий упругости были найдены спектры собственных частот. Получено, что, как и в случае статических задач, проявление моментных свойств наиболее ярко реализуется по мере уменьшения линейного характерного размера задачи. Спектр собственных частот – экспериментально измеряемый макропараметр, откликающийся на моментные свойства среды. Поэтому анализ со-

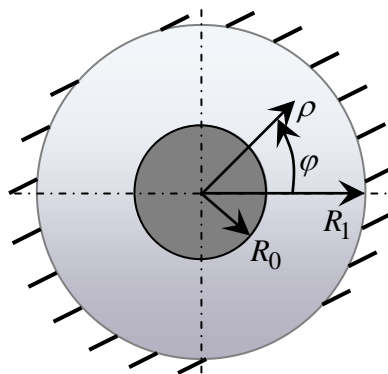


Рис. 4. Задача о собственном колебании упругого кольца с жестким диском

---

поставления спектра полученных частот соответственно для классической среды и континуума Коссера позволит определить принципиальные схемы экспериментов, демонстрирующих моментные свойства.

Для рассмотренных задач проведена оценка чувствительности выбранных макропараметров в зависимости от «моментных» констант и характерных размеров (масштабов). Показано, что при уменьшении характерного размера высокой чувствительностью обладают «моментные» константы, входящие в определяющие соотношения для тензора моментных напряжений.

## Библиографический список

1. *Cosserat E. et F.* Theorie des corps deformables. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – 226 p.
2. *Ерофеев В.И.* Братья Коссера и механика обобщенных континуумов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2. – № 4. – С. 5–10.
3. *MacCullagh J.* An essay towards a dynamical theory of crystalline reflection and resraction // Trans. Roy. Irish. Acad. Sci., 1839. – Vol. 21. – P. 17–50.
4. *Thomson W.* Mathematical and physical papers, 1882–1911. – 6 vols. – Cambridge University Press.
5. *Грекова Е.Ф., Жилин П.А.* Среда Кельвина и ферромагнетики: определяющие уравнения и волновые процессы // Нелинейная акустика твердого тела: сб. науч. тр. / под ред. В.И. Ерофеева. – Н. Новгород: Интелсервис, 1998. – С. 87–90.
6. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. – 1960. – Т. 2. – Вып. 7. – С. 1399–1409.
7. *Миндлин Р.Д.* Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика: Сб. пер. – М.: Мир. – 1964. – № 4. – С. 115–128.
8. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. – 1964. – Т. 28. – Вып. 3. – С. 401–408.
9. *Тупин Р.А.* Теории упругости, учитывающие моментные напряжения. // Механика: Сб. пер. – 1965. – № 3. – С.113–140.
10. *Nowacki W.* Couple-stresses in the theory of thermoelasticity // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sc. Techn. – 1966. – Vol. 14. – P. 505–512.
11. *Zubov L.M.* Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies. – Berlin: Heidelberg; N.Y.: Springer, 1997. – 205 p.
12. *Nikitin E., Zubov L.M.* Conservation laws and conjugate solutions in the elasticity of simple materials and materials with couple stress // J. Elasticity. – 1998. – Vol. 51. – № 1. – P. 1–22.
13. *Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерикова Н.П.* Макромеханическое моделирование упругой и вязко-упругой сред Коссера // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2. – № 2. – С. 40–47.
14. *Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д.* О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журнал. – 1982. – Т. 28. – № 6. – С. 838–840.
15. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера // ПМТФ. – 2005. – Т. 46. – № 4. – С. 116–124.
16. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // ДАН. Механика. – 2005. – Т. 405. – № 2. – С. 196–198.
17. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журнал. – 2006. – Т. 52. – № 2. – С. 227–235.



18. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках континуума Коссера // ПМТФ. – 2007. – Т. 48. – № 1. – С. 143–150.
19. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера // Изв. РАН. МТТ. – 2007. – № 4. – С. 100–113.
20. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н., Улитин М.В. Анализ волнового решения уравнений эластокинетики среды Коссера в случае плоских объемных волн // ПМТФ. – 2008. – № 2. – С. 196–203.
21. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидомеханика. – М.: Недра, 1996. – 447 с.
22. Khurana A., Tomar S.K. Longitudinal wave response of a chiral slab interposed between micropolar solid half-spaces // Int. J. Solids Struct. – 2009. – № 46. – P. 135–150.
23. Khurana A., Tomar S.K. Transmission of longitudinal wave at a plane interface between micropolar elastic and chiral solid half-spaces: Incidence from micropolar half-space // J. of Sound and Vibration. – 2008. – № 311. – P. 973–990.
24. Tomar S.K., Khurana A. Elastic waves in an electro-microelastic solid // Int. J. Solids Struct. – 2008. – № 45. – P. 276–302.
25. Tomar S.K., Khurana A. Reflection and transmission of elastic waves from a plane interface between two thermo-microstretch solid half-spaces // Int. J. of Appl. Math. Mech. – 2009. – № 5 (4). – P. 48–68.
26. Садовская О.В. Численное решение пространственных динамических задач моментной теории упругости с граничными условиями симметрии // Журн. вычисл. математики и математ. физики. – 2009. – Т. 49. – № 2. – С. 313–322.
27. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Аналитические и численные решения статических и динамических задач несимметричной теории упругости // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т. 10. – № 5. – С. 77–90.
28. Корепанов В.В., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Численное исследование двумерных задач несимметричной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. – 2008. – № 2. – С. 63–70.
29. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Аналитические и численные решения в рамках континуума Коссера как основа для постановки экспериментов по обнаружению моментных эффектов в материалах // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2. – № 4. – С. 76–91.
30. Korepanov V.V., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Finite element analysis of two- and three-dimensional static problems in the asymmetric theory of elasticity as a basis for the design of experiments // Acta Mechanica. – 2012. – Vol. 223. – № 8. – P. 1739–1750.
31. Онами М., Ивасимидзу С., Гэнка К., Сиодзава К., Танака К. Введение в микромеханику. – М.: Металлургия, 1987. – 280 с.
32. Koiter W.T. Couple-stress in the theory of elasticity // Proc. Koenigl. Acad. Wet. – 1964. – Vol. B67. – P. 17.
33. Kroener E. On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics // Int. J. Eng. Sci. – 1963. – Vol. 1. – P. 261.
34. Gauthier R.D., Jahsman W.E. A quest for micropolar elastic constants // Trans. ASME. – 1975. – Vol. E42. – № 2. – P. 369–374.
35. Lakes R. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with micro-structure. – N.-Y.: J. Wiley, 1995. – P. 1–22.
36. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: изд-во Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
37. Gauthier R.D., Jahsman W.E. A quest for micropolar elastic constants // Arch. Mech. – 1981. – Vol. 33. – № 5. – P. 717–737.

- 
38. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера // ПМТФ. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 145–154.
39. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. – 2002. – № 5. – С. 69–82.
40. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Parametric analysis of analytical solutions to one-and two-dimensional problems in couple-stress theory of elasticity // Z. Angew. Math. Mech. – 2003. – Vol. 83. – № 4. – P. 238–248.