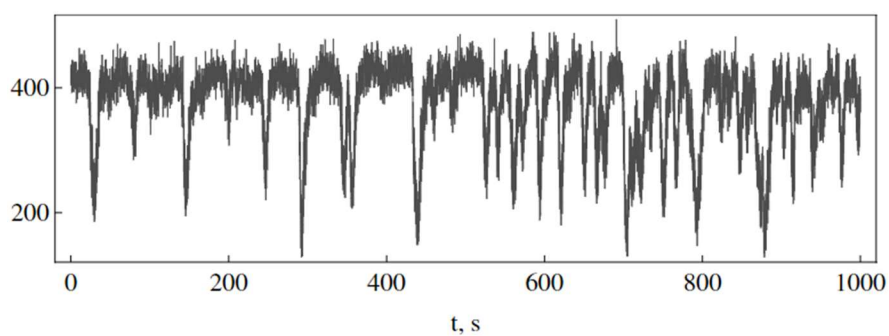
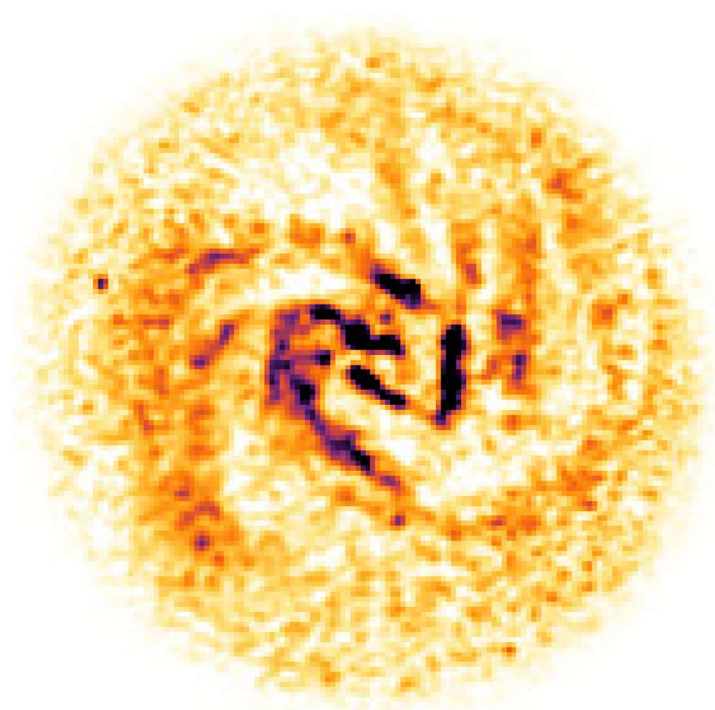


**ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**



П. Г. Фрик

**ОБРАБОТКА И АНАЛИЗ
СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ
В ФИЗИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ**



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

П. Г. Фрик

**ОБРАБОТКА И АНАЛИЗ
СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ
В ФИЗИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ**

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки бакалавров
«Прикладные математика и физика»
«Физика», «Радиофизика»*



Пермь 2023

УДК 621.3:528.72:004.93(075.8)

ББК 22.344я73

Ф887

Фрик П. Г.

Ф887 Обработка и анализ сигналов и изображений в физических экспериментах [Электронный ресурс] : учебное пособие / П. Г. Фрик ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2023. – 7,4 Мб ; 115 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Frik-Obrabotka-i-analiz-signalov-i-izobrazhenij-v-fizicheskikh-eksperimentah.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-4025-6

Цель пособия – знакомство с методами обработки наблюдательных данных и данных лабораторных экспериментов, получаемых в виде временных сигналов или пространственных распределений (изображений). Рассматриваются методы оценивания характеристик случайных сигналов, методы спектрального анализа сигналов и изображений, методы фильтрации и выделения пространственно-временных структур, методы анализа квазистационарных и нестационарных сигналов, причем упор делается именно на анализ относительно коротких сигналов, в которых интерес представляют процессы с характерными временами, сравнимыми с длительностью реализации.

В результате обучения слушатели должны получить навыки обработки реальных сигналов различной природы, освоить методы статистического анализа, спектрального анализа и вейвлет-анализа сигналов и изображений. Такие навыки применимы во многих областях экспериментальной физики, а также при проведении астрофизических, геофизических, медикобиологических наблюдений. Пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов.

УДК 621.3:528.72:004.93(075.8)

ББК 22.344я73

Издается по решению ученого совета физического факультета

Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра математики физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (зав. кафедрой – д-р физ.-мат. наук, профессор **Н. Н. Нефедов**);

зав. кафедрой динамического моделирования и биомедицинской инженерии Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского, доцент, д-р физ.-мат. наук **А. С. Караваев**

© ПГНИУ, 2023

© Фрик П. Г., 2023

ISBN 978-5-7944-4025-6

Оглавление

Введение	4
1 Спектральный анализ сигналов	5
1.1 Периодические сигналы. Ряд Фурье	5
1.2 Ограниченные (затухающие) сигналы.	
Интеграл Фурье	10
1.3 Ряд Фурье и интеграл Фурье – что и как считать на практике?	14
2 Анализ случайных сигналов	20
2.1 Случайные сигналы	20
2.2 Оценивание распределения вероятности и статистических мо- ментов	25
2.3 Автокорреляционная функция	30
2.4 Спектральный анализ случайных сигналов	34
2.5 Теорема Котельникова	35
2.6 Турбулентность. Связь пространственных и временных характеристик. Структурные функции	37
3 Анализ нестационарных сигналов. Вейвлеты	50
3.1 Вейвлеты	51
3.2 Непрерывное вейвлет-преобразование	55
3.3 Дискретное вейвлет-преобразование	62
3.4 Пример 1. Анализ сигналов полиреокардиографа	70
3.5 Пример 2. Импульсное турбулентное течение в торе	74
3.6 Кросс-спектры и кросс-корреляция	77
3.7 Дифференцирование экспериментальных данных	82
3.8 Анализ данных с разрывами	87
4 Фурье и вейвлет-анализ изображений	91
4.1 Двумерные поля и изображения	91
4.2 Фурье-анализ изображений	93
4.3 Двумерное вейвлет-преобразование	97
4.4 Спектры и структурные функции	99
4.5 Вейвлетные кросс-корреляции	103
4.6 Анализ анизотропных структур	108
Заключение	111
Список литературы	112

Введение

Обработка и анализ сигналов и изображений являются неотъемлемой и очень важной частью натурных наблюдений и лабораторных экспериментов с начала проведения систематических научных исследований и всегда опираются на актуальные для своего времени аппаратуру и математические методы. Опыт автора (несколько десятилетий работы со студентами и аспирантами физического факультета) показывает, однако, что существует разрыв между читаемыми на факультете математическими дисциплинами и навыками (или хотя бы представлениями) грамотного применения алгоритмов обработки конкретных данных. Активное использование аппарата фурье-анализа и математической статистики в теории турбулентности даже не наводит студентов на мысль о прямой связи с соответствующими разделами математического анализа и теории вероятности, которые читались им парой лет раньше. Такие же проблемы возникают при выполнении лабораторных работ по турбулентности и оптическим методам в гидродинамике.

Существует обширная научная литература по методам обработки сигналов, написанная в контексте задач по обработке информации – передаче, фильтрации, упаковке и хранению данных. Однако соответствующие книги освещают проблемы несколько с другой стороны и обычно не отвечают на вопросы, возникающие у экспериментаторов, которых интересует, прежде всего, *анализ* данных с целью выделения спектрального состава сигнала (который на практике обычно не стационарен) или пространственно-временной структуры тех или иных физических полей.

Данное учебное пособие ставит целью познакомить студентов и аспирантов с методами и алгоритмами оценивания статистических и спектральных характеристик реальных сигналов и изображений, которые практически всегда нестационарны и содержат случайную составляющую, обусловленную природой изучаемого процесса и/или помехами самого разного рода.

Глава 1

Спектральный анализ сигналов

1.1 Периодические сигналы. Ряд Фурье

Функция $x(t)$ является *периодической*, если для нее выполняется равенство $x(t + mT) = x(t)$ для любого целого $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где интервал T есть период функции. Если для периодической функции существует интеграл $\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)| dt$, то ее можно представить в виде ряда Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad (1.1)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$, а коэффициенты Фурье определяются выражениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad (1.2)$$

$$c_n = c_{-n}^* = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \quad (1.3)$$

где звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

Используется также представление в виде

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n), \quad (1.4)$$

где $A_0 = a_0/2$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\theta_n = \arctan(b_n/a_n)$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, из которого видно, что периодический сигнал может быть представлен как сумма постоянной составляющей и бесконечного (в принципе) числа гармоник, каждая из которых характеризуется частотой $\omega_n = n\omega_0 = 2\pi f_n$, амплитудой A_n и фазой θ_n . Напомним, что f – это частота, измеряемая в герцах, а $\omega = 2\pi f$ – круговая частота, измеряемая в радианах в секунду.

При анализе конкретных сигналов фазы обычно не представляют интереса и спектральный состав сигнала иллюстрируется набором амплитуд $A_n(f_n)$ (амплитудным спектром). Если важно знать спектральное распределение *энергии* сигнала, то строят энергетический спектр $A_n^2(f_n) = a_n^2 + b_n^2$.

Чистый гармонический сигнал $x(t) = \sin(2\pi t + \theta)$ обладает простейшим спектром, состоящим из одной линии на частоте $f = 1$ (рис. 1.1). Если сигнал представляет собой линейную комбинацию различных гармонических функций, то его спектр представляет собой соответствующую комбинацию линий. На рис. 1.2 показаны бигармонический сигнал $x(t) = \sin(2\pi t) + 0.3 \cos(10\pi t)$ и его амплитудный спектр.

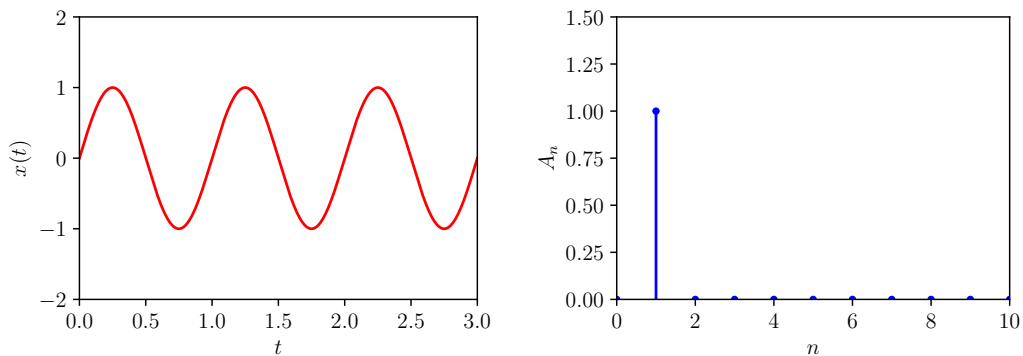


Рис. 1.1. Гармоническая функция и ее амплитудный спектр

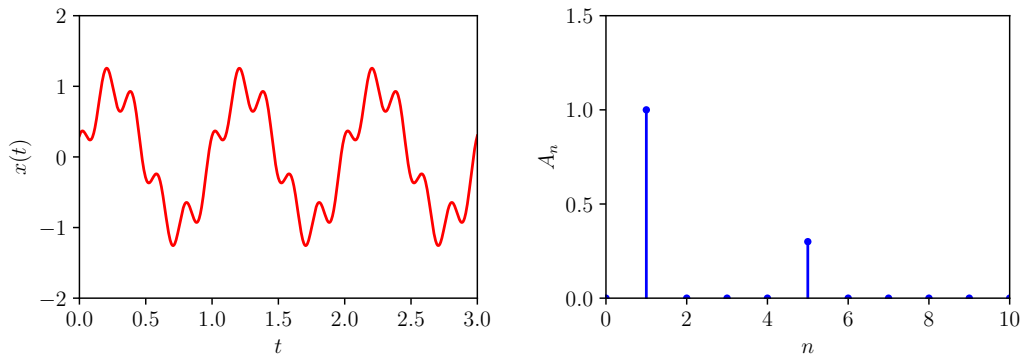


Рис. 1.2. Бигармоническая функция и ее амплитудный спектр

Подчеркнем, что при разложении в ряд всегда получается линейчатый спектр, так как в спектре могут присутствовать только частоты, кратные частоте f_0 . Поэтому разложение в ряд называют *дискретным* преобразованием Фурье, подчеркивая тем самым, что в спектре может присутствовать только дискретный набор частот.

Спектры периодических, но не гармонических сигналов, содержат основную частоту и набор кратных гармоник. Для верификации программ, используемых для спектрального анализа, удобно использовать простые

функции, для которых известны точные разложения в ряд Фурье. В качестве примера на рис. 1.3 показаны меандр и пилообразный сигнал, а также их амплитудные спектры. Меандр задан формулой $x(t) = \text{sign}(\cos(2\pi t))$ и является четной функцией. Это значит, что все $b_n = 0$. В ряду коэффициентов a_n отличны от нуля только нечетные гармоники ($n = 1, 3, 5, \dots$), для которых легко получить формулу $a_n = 4/(\pi n)$, т.е. амплитуда обратно пропорциональна частоте гармоники. Для пилообразного сигнала, записанного в виде нечетной функции $x(t) = t - \lfloor t + 0.5 \rfloor$, отличны от нуля только коэффициенты b_n , но спектр включает все гармоники (нечетные со знаком плюс, четные со знаком минус), амплитуда которых также падает обратно пропорционально частоте. Важно отметить, что закон спада амплитуды с частотой у этих сигналов одинаков, что обусловлено наличием в обоих сигналах разрывов первого рода. Если рассмотреть сигнал с разрывом первой производной, то амплитуда гармоник будет убывать обратно пропорционально квадрату частоты. Примером такого сигнала является треугольный сигнал (рис. 1.3, д). Общее правило "чем выше номер производной, которая терпит разрыв, тем быстрее спадает спектр" подтверждают и два предельных случая: гармоника дифференцируема бесконечно, и ее спектр состоит из одного пика, а дельта-функция, определяемая только через интеграл, имеет неспадающий спектр, называемый белым шумом, в котором все гармоники представлены с одинаковой амплитудой (рис. 1.4).

Завершая рассмотрение простых периодических сигналов, сделаем еще два полезных для практической работы замечания. Первое касается полезности применения при анализе спектров логарифмических координат. Дело в том, что часто приходится работать с широкополосными сигналами, включающими огромный диапазон частот, энергия которых различается на многие порядки. При этом малая энергия высоких (или низких) частот совсем не означает, что они не интересны для понимания изучаемого процесса. Пока приведем пример сигнала, включающего три гармоники $x(t) = 0.1 \sin(2\pi t) + \cos(20\pi t) + 0.01 \sin(100\pi t)$ (рис. 1.5). В дальнейшем мы увидим, как полезно логарифмическое представление при анализе турбулентных сигналов, в которых интерес представляют законы, по которым распределены спектральные плотности энергии.

Второе замечание касается того факта, что реальные сигналы никогда не бывают чисто периодическими и неограниченными. Даже самый чистый гармонический сигнал, излучаемый камертоном, затухает. А любой генератор периодических сигналов когда-то был включен и когда-то должен быть выключен.

Кроме того, принципиальной является проблема выбора конечного интервала времени, на котором будет проводиться анализ спектрального со-

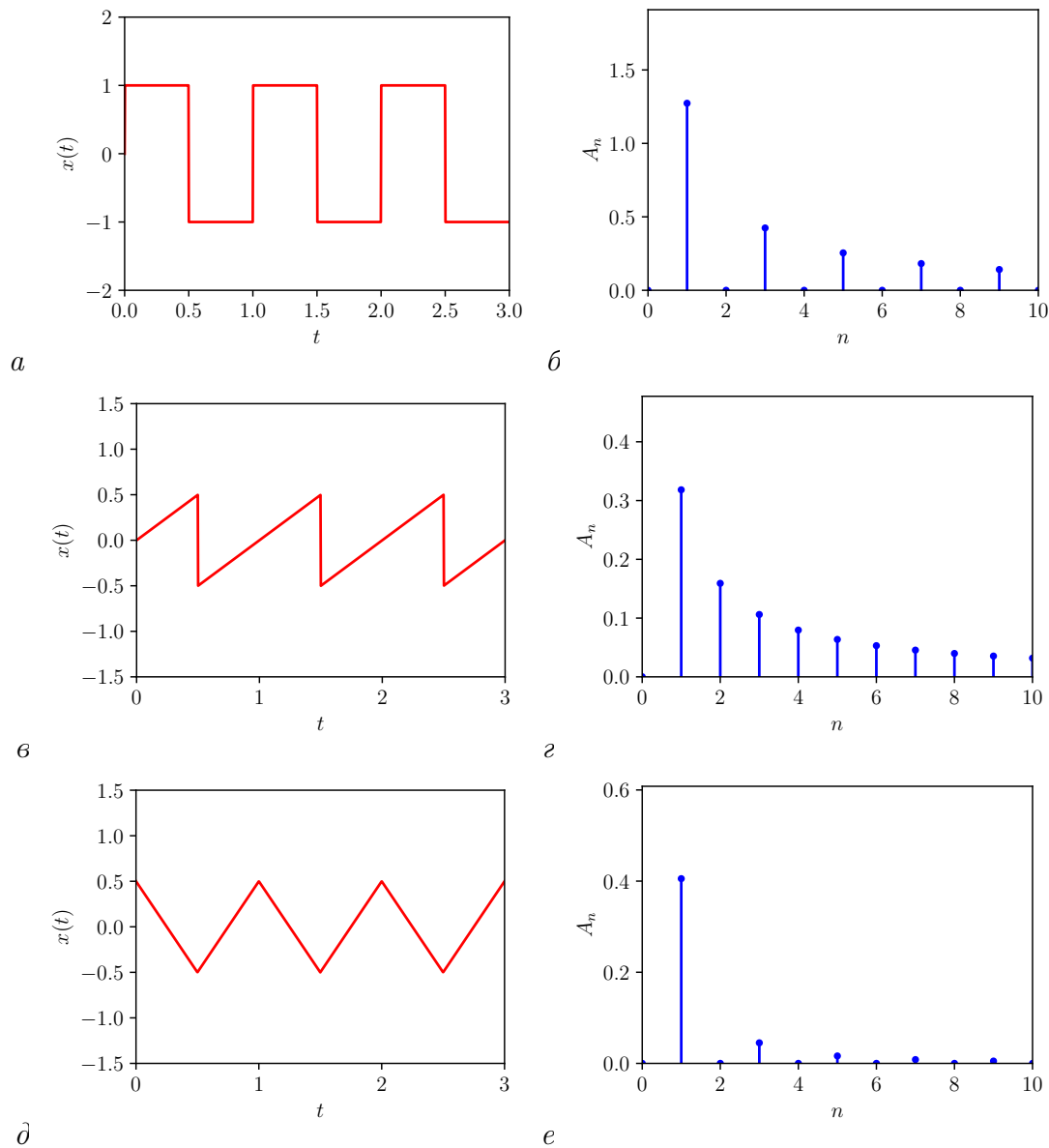


Рис. 1.3. Периодические (негармонические) функции и их амплитудные спектры: *а, б* – меандр; *в, г* – пилообразный сигнал; *д, е* – треугольный сигнал

става. Так, даже если сигнал представляет собой суперпозицию двух независимых (то есть не кратных друг другу) гармоник, то в принципе нельзя выбрать интервал, на котором для обеих гармоник уложится целое число периодов. В любом физическом эксперименте важно выбрать для анализа представительный интервал. При этом важен выбор длины интервала (он должен быть достаточно длительным, чтобы не потерять низкие частоты) и частоты выборки (о ней пойдет разговор ниже, и именно она определяет верхнюю границу доступных для анализа частот).

Отдельного обсуждения заслуживает вопрос о граничных условиях. Поскольку реальный сигнал никогда не является строго периодическим, то нужно отдавать себе отчет в том, что, приступая к разложению в ряд Фурье, мы подразумеваем периодическое продолжение сигнала. Во-первых,

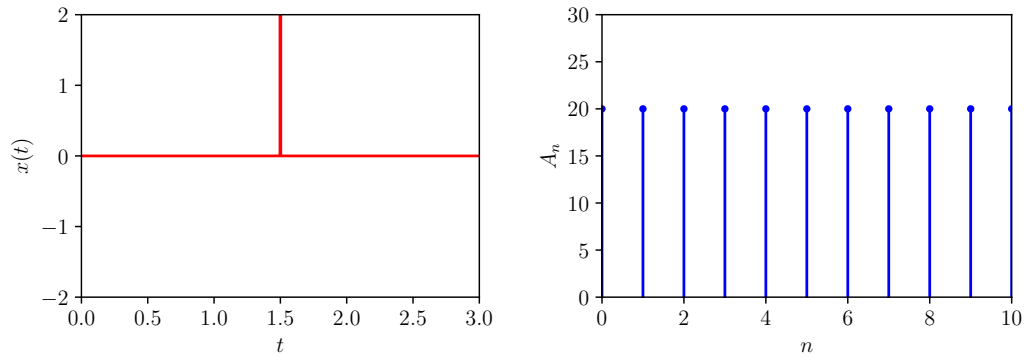


Рис. 1.4. Единичный пик (дельта-функция) и его амплитудный спектр

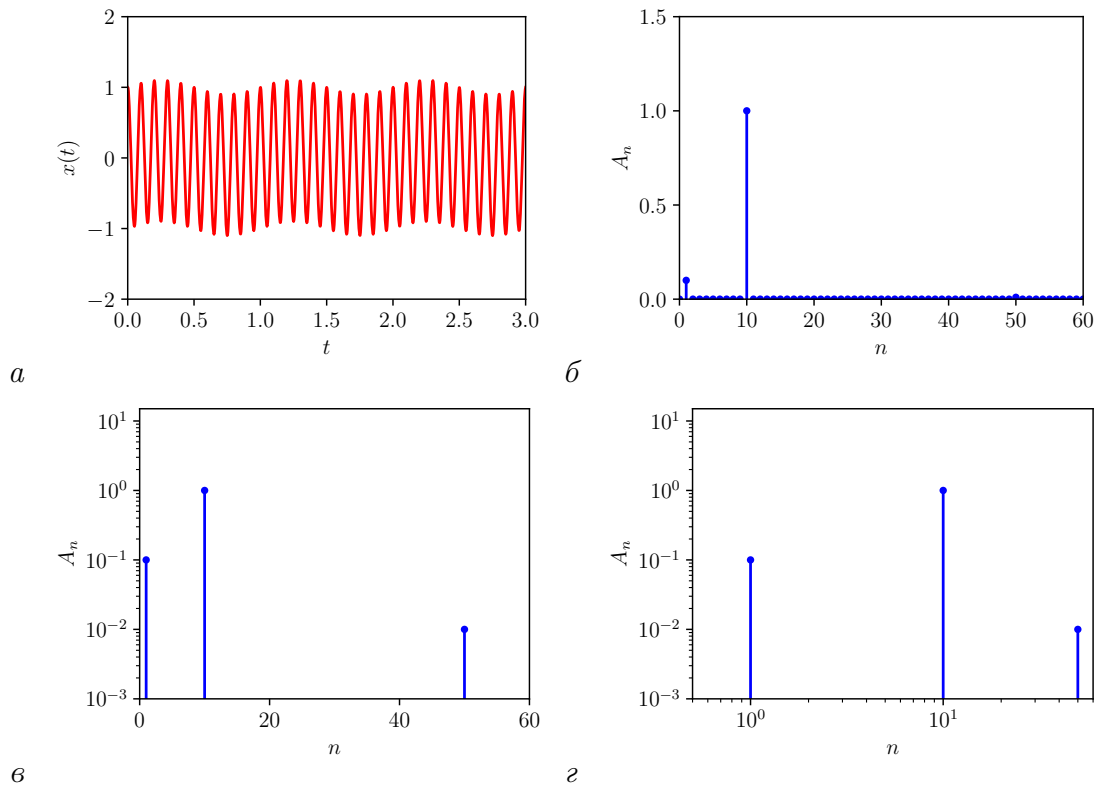


Рис. 1.5. Полигармоническая функция и ее амплитудный спектр в различных представлениях: *а* – исходный сигнал; *б* – спектр в линейных координатах; *в* – спектр в линейно-логарифмических координатах; *г* – спектр в двойных логарифмических координатах

это означает появление разрыва на границе, вклад которого тем меньше, чем длиннее рассматриваемый интервал. Во-вторых, требуется внимательный анализ на наличие в сигнале непериодических составляющих. В качестве примера покажем периодический сигнал, на который наложен относительно слабый линейный тренд $x(t) = 0.25t + \sin(14\pi t)$ (рис. 1.6). По сути, это означает, что к сигналу добавили ”пилу” с периодом, равным интервалу наблюдений, и ее спектр полностью войдет в спектр сигнала.

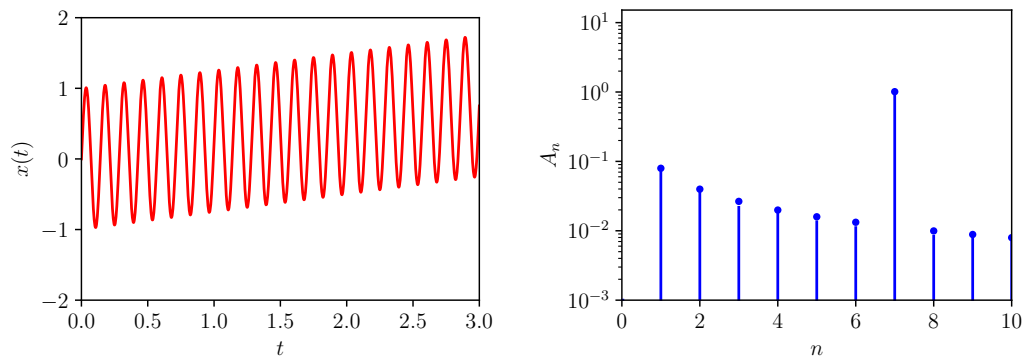


Рис. 1.6. Гармоническая функция с линейным трендом и ее амплитудный спектр

1.2 Ограниченные (затухающие) сигналы. Интеграл Фурье

Наряду с периодическими сигналами важным типом сигналов являются сигналы, ограниченные во времени, т.е. сигналы $x(t)$, которые равны нулю при $t \rightarrow \pm\infty$. Такие сигналы регистрируются, например, при исследовании различных переходных процессов, а также процессов, вызванных кратковременным (импульсным) выделением энергии. С математической точки зрения, важным является существование интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$. Если такой интеграл имеет конечное значение, то функцию $x(t)$ можно представить интегралом Фурье

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f) e^{2\pi i f t} df, \quad (1.5)$$

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt. \quad (1.6)$$

Здесь $\tilde{x}(f)$ есть фурье-образ функции $x(t)$, f — частота (будем также пользоваться круговой частотой $\omega = 2\pi f$).

Фурье-образ исходного сигнала можно представить в виде

$$\tilde{x}(f) = |\tilde{x}(f)| e^{-i\theta(f)}. \quad (1.7)$$

Зависимость модуля фурье-образа от частоты $|\tilde{x}(f)|$ представляет амплитудный спектр сигнала $x(t)$.

Напомним, что разложение функции в ряд (1.1) называют *дискретным* преобразованием Фурье, так как в разложении присутствует *дискретный* набор частот. В интегральном разложении (1.6) присутствуют все частоты, и оно называется *непрерывным* преобразованием Фурье. Таким об-

разом, спектр при представлении сигнала интегралом Фурье имеет не линейчатую, а непрерывную структуру. Отметим также, что при представлении в ряд коэффициенты Фурье сохраняют размерность исходного сигнала (если сигнал измерялся в вольтах, то и коэффициенты Фурье имеют размерность вольт), а в размерности интегрального фурье-образа появляется дополнительная секунда (если сигнал измерялся в вольтах, то размерность $|\tilde{x}(f)|$ будет вольт·секунда).

Основные свойства преобразования Фурье

Приведем формулировки основных теорем, касающихся свойств *непрерывного* преобразования Фурье, помня при этом, что все они имеют прямой аналог в терминах дискретного преобразования.

Итак, пусть $x(t)$ — действительная функция, для которой существует интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$. Тогда

$$x(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \tilde{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.8)$$

или, с учетом связи $\omega = 2\pi f$,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f) e^{2\pi i f t} df, \quad \tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt.$$

Используя для преобразования Фурье обозначение

$$\tilde{x}(f) = \tilde{F}[x(t)],$$

сформулируем его основные свойства.

1. Единственность: преобразования (1.8) взаимно однозначны.
2. Линейность:

$$\tilde{F}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 \tilde{x}_1(f) + \alpha_2 \tilde{x}_2(f). \quad (1.9)$$

3. Теорема о масштабах:

$$\tilde{F}[x(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} \tilde{x}\left(\frac{f}{\alpha}\right). \quad (1.10)$$

Сжатие (растяжение) функции приводит к растяжению (сжатию) ее фурье-образа.

4. Теорема о сдвиге:

$$\tilde{F}[x(t+a)] = e^{2\pi i f a} \tilde{x}(f). \quad (1.11)$$

Сдвиг функции во времени меняет фазу фурье-образа и не влияет на спектральную плотность сигнала.

5. Теорема о свертке¹:

$$\tilde{F}[x_1 * x_2] = \tilde{x}_1(f) \cdot \tilde{x}_2(f), \quad \tilde{F}[x_1 \cdot x_2] = \tilde{x}_1(f) * \tilde{x}_2(f). \quad (1.12)$$

Фурье-образ свертки двух функций есть произведение фурье-образов этих функций, а фурье-образ произведения функций есть свертка их фурье-образов.

6. Теорема о дифференцировании:

$$\tilde{F}\left(x^{(n)}(t)\right) = (2\pi i f)^n \tilde{x}(f). \quad (1.13)$$

Фурье-образ производной порядка n получается умножением фурье-образа самой функции на соответствующую степень множителя $2\pi i f$.

7. Теорема Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) \tilde{y}^*(f) df, \quad (1.14)$$

где знаком $*$ обозначается комплексное сопряжение. Иными словами, скалярное произведение двух функций инвариантно относительно преобразования Фурье. Важным следствием теоремы Парсеваля является сохранение энергии:

$$\int |x(t)|^2 dt = \int |\tilde{x}(f)|^2 df.$$

8. Теорема о комплексном сопряжении:

$$\tilde{F}(x^*) = \tilde{x}^*(-f). \quad (1.15)$$

Если x — вещественна, то $\tilde{F}(x^*) = \tilde{F}(x) = \tilde{x}^*(-f)$, т. е. $\tilde{x}(f) = \tilde{x}^*(-f)$. Это означает, что спектр энергии вещественного сигнала всегда четный и поэтому имеет смысл строить спектр энергии только для положительных частот.

Рассмотрим несколько примеров ограниченных сигналов, для которых интегралы Фурье находятся аналитически. Эти примеры опять же хороши для отладки программ, используемых при анализе реальных сигналов. Первый пример касается функции Гаусса (рис. 1.7 а, б), которая примечательна тем, что ее Фурье-образ также является гауссианой, максимум модуля которой находится в начале оси частот, независимо от положения исходной функции на оси времени:

$$\tilde{F}\left(e^{-t^2}\right) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2}.$$

¹Напомним, что сверткой называется интегральная операция $x_1(t) * x_2(t) = \int x_1(t-t') x_2(t') dt'$.

В качестве второго примера на рис. 1.7, в, г показаны прямоугольный импульс

$$x(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{1}{2} \\ 1, & |t| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

и его Фурье-образ, который выражается функцией, называемой кардинальным синусом $\text{sinc}(t)$

$$\tilde{F}(\text{rect}(t)) = \text{sinc}(f) = \begin{cases} \frac{\sin f}{f}, & f \neq 0 \\ 1, & f = 0. \end{cases}$$

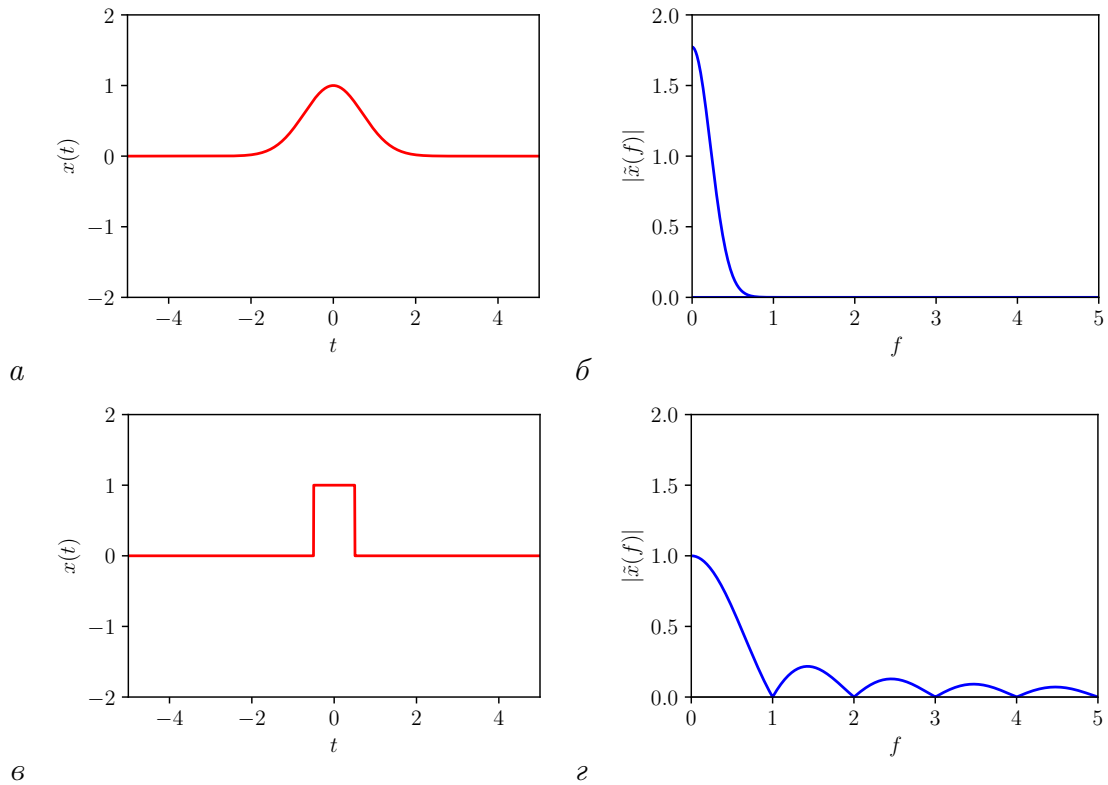


Рис. 1.7. Примеры ограниченных во времени сигналов и их амплитудных спектров: а, б – функция Гаусса; в, г – единичный прямоугольный импульс

Еще два примера, которые приведены на рис. 1.8, касаются волновых пакетов, то есть волн (колебаний) конечной протяженности. Показан случай фрагмента гармонической функции конечной длины с резким обрывом на краях (рис. 1.8, а, б)

$$x(t) = H(2 - |t|) \sin 2\pi f_0 t,$$

$$\tilde{F}(x(t)) = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\sin 4\pi(f + f_0)}{f + f_0} - \frac{\sin 4\pi(f - f_0)}{f - f_0} \right),$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда, а также случай плавно затухающей гармонике (рис. 1.7, в, г)

$$x(t) = e^{-t^2} \cos 2\pi f_0 t,$$

$$\tilde{F}(x(t)) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\pi^2(f_0+f)^2} \left(1 + e^{4\pi^2 f_0 f}\right).$$

Оба пакета имеют одинаковую базовую частоту, которая выделяется в спектре ($f = f_0 = 2$). В случае пакета с резким обрывом сигнала на краях основной пик локализован лучше, но зато в спектре присутствуют размытые хвосты.

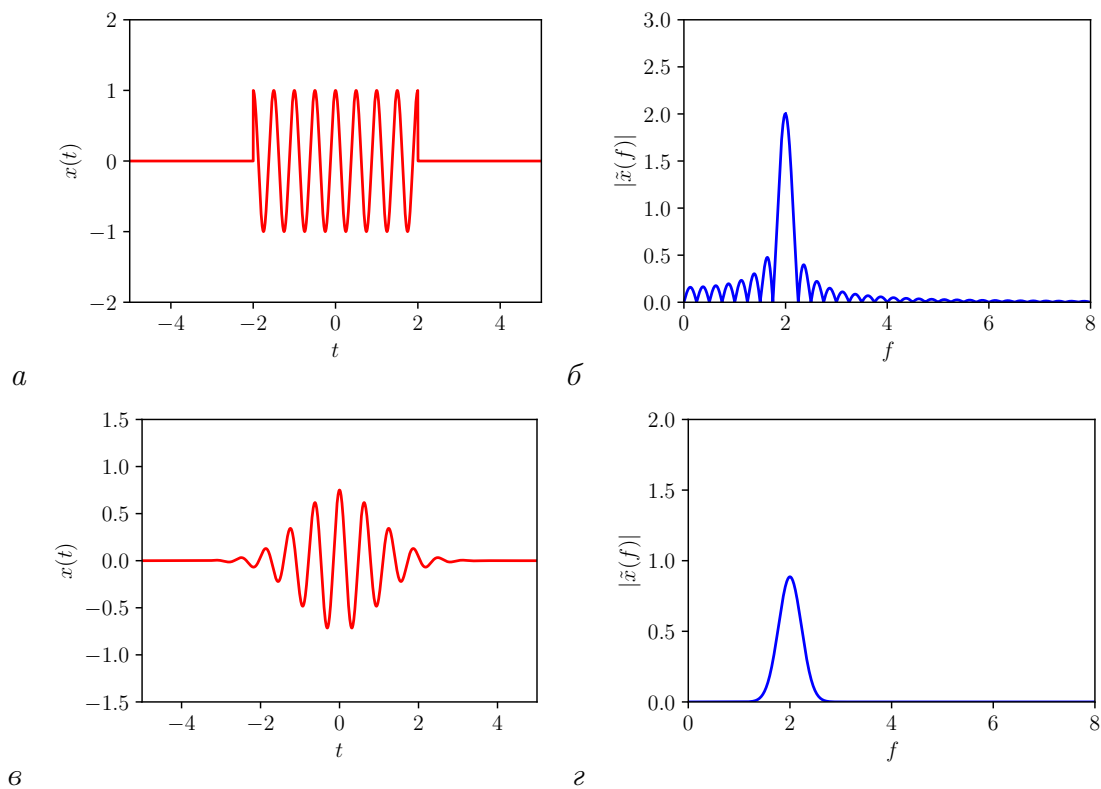


Рис. 1.8. Примеры ограниченных во времени сигналов и их амплитудных спектров: а, б – волновой пакет с резким обрывом на краях с $f_0 = 2$; в, г – плавно затухающий волновой пакет с $f_0 = 2$

1.3 Ряд Фурье и интеграл Фурье – что и как считать на практике?

На практике интерес чаще всего представляет спектральный анализ сигналов, которые, строго говоря, не являются ни периодическими, ни затухающими. При этом можно выделить два типа задач: анализ сигналов со сложным спектральным составом (статистически стационарные или нестационарные), для которых существует возможность регистрации длинных

рядов с требуемым шагом выборки, и анализ сигналов, для которых имеется ограниченный набор точек и нет возможности продлить имеющийся ряд данных. Спектральному анализу сигналов первого типа будут посвящены две следующие главы, а проблемы спектрального анализа сигналов второго типа уместно обсудить сразу после знакомства с рядом и интегралом Фурье.

Дело в том, что при обработке фрагментов сигналов конечной длины вопрос "что вычислять: интеграл или ряд?" сводится, прежде всего, к вопросу о граничных условиях. При использовании стандартных программ важно понимать, что все они, как правило, вычисляют ряд Фурье, а это означает, что предполагается периодическое продолжение используемого для расчета фрагмента сигнала. Если сигнал содержит N точек x_i , то вычисление по имеющимся точкам ряда Фурье означает принятие гипотезы о том, что $x_{i \pm Nm} = x_i$ для любого целого m . Особую осторожность нужно проявлять при выделении в сигнале периодических составляющих, период которых сопоставим с интервалом наблюдений (меньше его, но, скажем, не на порядки). Другими словами, речь идет об анализе низких частот, которые могут быть не кратны частоте, соответствующей длине анализируемого интервала.

Большие проблемы могут быть обусловлены тем фактом, что если $x_N \neq x_1$, то в сигнале возникает ложный разрыв, вклад которого в фурье-спектр будет зависеть от амплитуды скачка и общего количества точек в сигнале. Причем разрыв может быть обусловлен как несогласованностью низшей (основной) частоты сигнала с длиной интервала регистрации данных, так и наличием в сигнале негармонических составляющих, например, степенных или иных непериодических компонент (простейший пример такого рода был дан на рис. 1.6, где показаны простой гармонический сигнал с линейным трендом и его спектр, который наряду с основной частотой содержит весь спектральный набор, характерный для пилообразной функции).

Задачи второго типа возникают обычно при анализе наблюдательных данных различной природы, когда наблюдательный материал ограничен по различным причинам и не может быть существенно расширен. Рассмотрим в качестве характерного примера ряд данных наблюдений хромосферной активности звезды солнечного типа HD26965 (данные из работы [1]). Индекс хромосферной активности вычисляется как отношение интенсивности линейных комбинаций интенсивности отдельных спектральных линий (величина безразмерная) и является одним из трассеров активности звезды, связанной с работой звездного динамо, т.е. процессом генерации крупномасштабного магнитного поля звезды. Приведенный на рис. 1.9 ряд значе-

ний спектрального индекса является результатом тридцатилетней работы астрономов (время реализации проекта по долгосрочному наблюдению за хромосферной активностью звезд солнечного типа) и продлить его в разумные сроки невозможно. Основным интерес для специалистов по звездным магнитным полям представляют циклические изменения активности звезды, напоминающие изменения активности нашего Солнца. На графике можно видеть, что время наблюдения включает в себя четыре звездных цикла, два целиком и два частично. Ключевым является вопрос о длительности основного цикла данной звезды. Вопрос непростой, так как звездная цикличность является квазипериодическим процессом, и для определения средней продолжительности цикла нужна, строго говоря, хорошая статистика, т.е. хотелось бы иметь данные о десятках циклов, а их всего-то два и два фрагмента.

Представленный ряд наблюдательных данных хорошо иллюстрирует и другие проблемы, неизбежные при проведении наблюдений природных процессов. Помимо невозможности изменить (раздвинуть) границы наблюдения серьезной проблемой является нерегулярность выборки – в наблюдениях присутствуют многочисленные пробелы, связанные как с сезонными условиями (звезда часть года не выходит из-за горизонта), так и с погодными (небо затянуто тучами). Спектральный анализ данных, заданных на случайной выборке (случаен шаг выборки) либо имеющих пробелы, – серьезная задача, которую мы обсудим ниже, в разделе 3.8. В контексте обсуждаемых вопросов этой главы посмотрим, как можно ответить на вопрос о длительности звездного цикла с помощью классического спектрального анализа и как можно ошибиться.

Для начала заполним все пробелы в данных простой линейной интерполяцией по ближайшим точкам и проведем анализ "не думая", т.е. просто применим к этому ряду определение (1.2). Результат показан на рис. 1.10. Максимум в спектре приходится на третью гармонику, т.е. соответствует колебаниям, период которых равен трети всего интервала наблюдений, что дает период $T = 11.297$ лет. Подчеркнем, что пять значащих цифр показаны не потому, что мы претендуем на такую точность определения периода цикла, а потому, что мы хотим подчеркнуть, что, выбрав интервал наблюдений T_{ob} и применяя к нему разложение в ряд, мы однозначно задаем набор возможных значений периода $T = T_{ob}/n$ и никаких других значений получить не можем. Очевидно, что период оценен с большой погрешностью, обусловленной тем фактом, что интервал наблюдений никак не связан с основным звездным циклом. Раскладывая данные наблюдений в ряд, нужно, по крайней мере, согласовать длину ряда с видимой цикличностью в данных. Чтобы удовлетворить это условие, воспользуемся для анализа

только данными между крайними максимумами в наблюдательных данных. Выделение этих максимумов тоже не очевидно, так как требует предварительного сглаживания данных, которое можно провести различными способами. Ограничимся параболической аппроксимацией данных вблизи каждого максимума и рассмотрим ряд данных, лежащих в интервале между полученными положениями максимумов. Полученный таким образом ряд данных и результат вычисления его амплитудного спектра показаны на рис. 1.11. Максимум очевидно, остался на третьей гармонике, но ей в этом случае соответствует период $T = 10.69$ лет. Следует отметить и тот факт, что амплитуды остальных гармоник стали заметно слабее (в сравнении со спектром на рис. 1.10), что также свидетельствует о том, что основная частота оценена (угадана) точнее. Главный вывод из рассмотренного примера очень простой, но важный: при анализе конечного ряда данных путем разложения в ряд Фурье точное значение получаемой частоты (периода) колебаний определяется только выбором интервала анализируемых данных. При оценке высоких частот ошибка не столь существенна, но при работе с низкими частотами погрешность может быть большой.

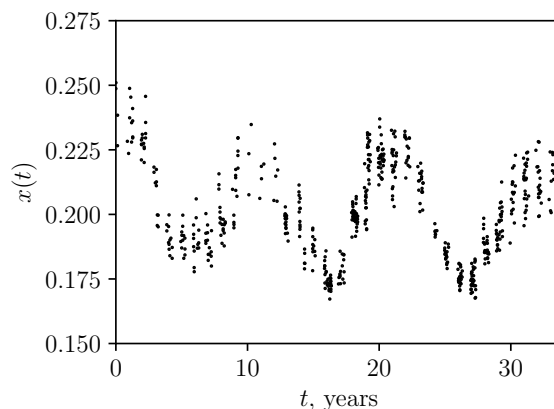


Рис. 1.9. Индекс хромосферной активности звезды HD26965 (данные наблюдений из работы [1])

Непрерывное преобразование Фурье позволяет пройти по частотам с любым (достаточно малым) шагом. Однако, чтобы его провести, нужно продолжить ряды данных (формально, до $\rightarrow \pm\infty$), причем используемые продолжения должны обеспечить интегрируемость сигнала (стремиться к нулю). Простейший способ продолжения – дополнения анализируемого ряда данных нулями (точнее говоря, средним для измеренного ряда значением). Такое продолжение представлено на рис. 1.12, где приведен и вычисленный *непрерывный* амплитудный спектр. В нем доминирует один достаточно широкий пик, максимум которого приходится на частоту, соответствующую периоду колебаний $T = 10.45$ лет. Дополнение сигнала нулями за пределами интервала наблюдений связано с внесением разрывов,

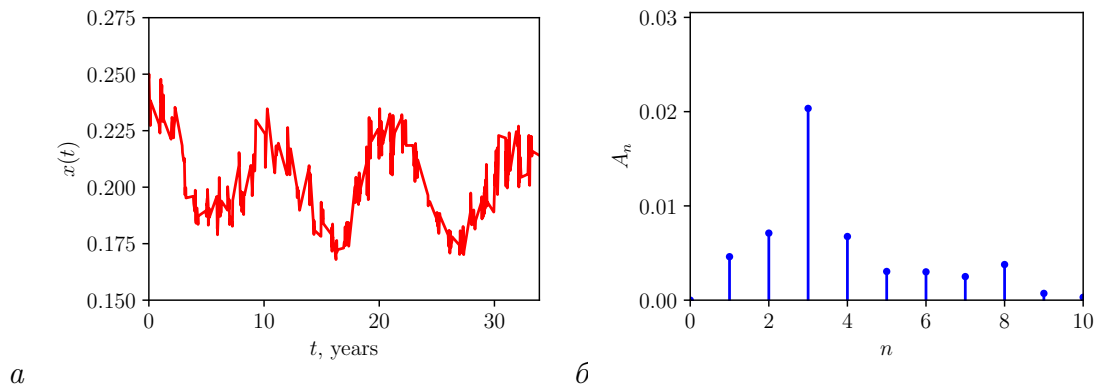


Рис. 1.10. Ряд значений индекса хромосферной активности звезды HD26965, заполненный путем линейной интерполяции данных (а) и его амплитудный спектр (б). Максимальная (третья) линия в спектре соответствует периоду колебаний $T = 11.297$ лет

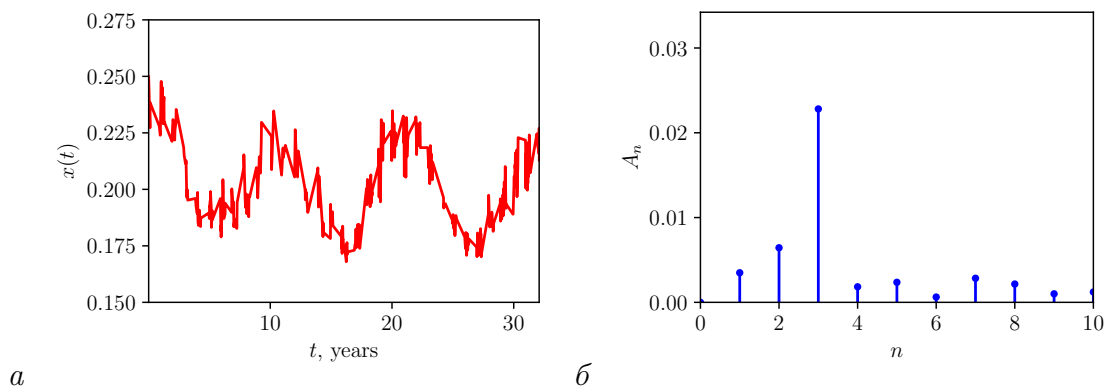


Рис. 1.11. Ряд значений индекса хромосферной активности звезды HD26965 на интервале между крайними максимумами (а) и его амплитудный спектр (б). Максимальная (третья) линия в спектре соответствует периоду колебаний $T = 10.69$ лет

что усиливает высокочастотный шум. Чтобы снизить этот эффект, пользуются различными приемами, например, дополняют сигнал за интервалом наблюдений зеркально отраженным на краю сигналом, на который накладывают экспоненциальное затухание. Именно таким способом получен ряд, показанный на рис. 1.12. Его спектр подобен приведенному на предыдущем рисунке. Отличается он слегка подавленной высокочастотной частью (что и ожидалось) и незначительным смещением положения максимума, который дает в этом случае период $T = 10.55$ лет.

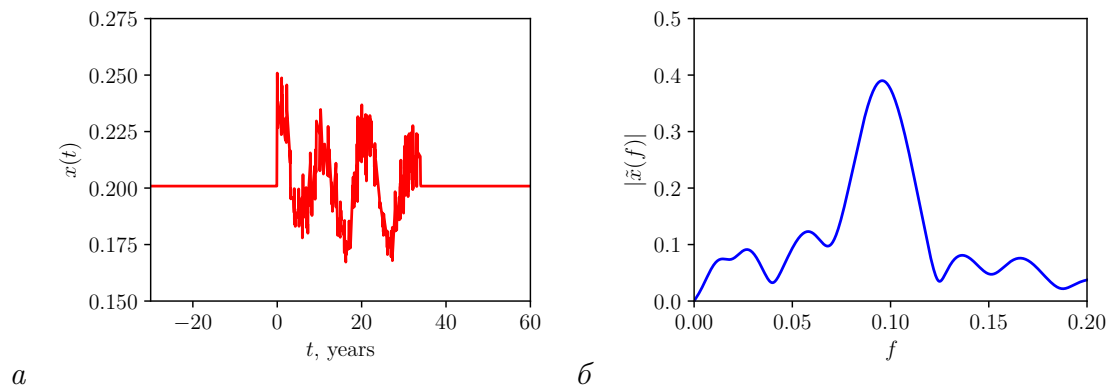


Рис. 1.12. Ряд значений индекса хромосферной активности звезды HD26965, дополненный нулями, (а) и его амплитудный (непрерывный) спектр (б). Максимум в спектре соответствует периоду колебаний $T = 10.45$ лет

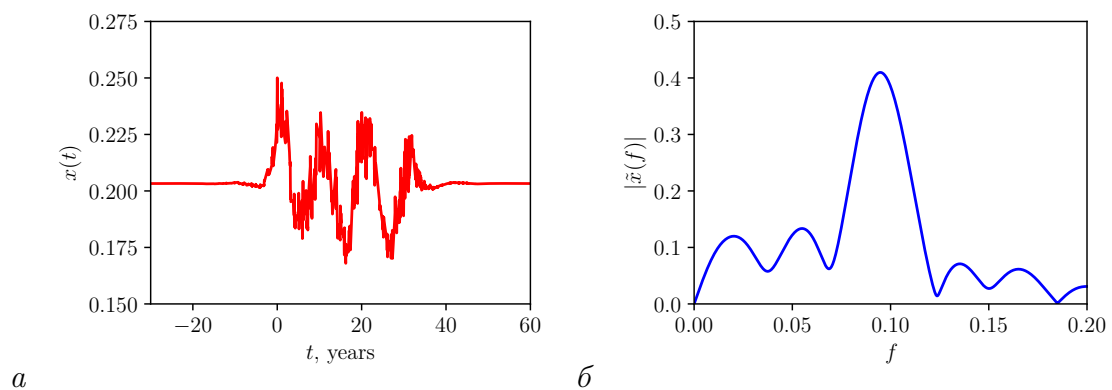


Рис. 1.13. Ряд значений индекса хромосферной активности звезды HD26965, дополненный на краях "затухающими зеркальными отражениями" (а), и его амплитудный (непрерывный) спектр (б). Максимум в спектре соответствует периоду колебаний $T = 10.55$ лет

Глава 2

Анализ случайных сигналов

2.1 Случайные сигналы

Случайные сигналы возникают при регистрации характеристик *случайных процессов*, т.е. процессов, в которых существенную роль играют факторы, определяемые вероятностными законами. Любое конкретное значение регистрируемой величины является одним из возможных результатов, причем практически не воспроизводимым при повторных измерениях. Для таких сигналов (физических величин, характеризующих процесс) можно говорить только о вероятностных (статистических) характеристиках. В общем случае эти статистические характеристики изменяются со временем, и для получения вероятностных характеристик в каждый момент времени нужно многократно воспроизвести процесс при заданных (с достигаемой точностью) значениях управляющих параметров и с такими же начальными условиями. В этом случае говорят о наборе реализаций случайного процесса $x_i(t)$, причем в идеале для определения всех статистических характеристик требуется бесконечное число реализаций.

Если статистические характеристики процесса не изменяются со временем, то процесс называется *стационарным*. Одномерные статистические характеристики, т.е. характеристики, определяемые по измерениям величины в один момент времени, не зависят от выбора момента измерения t_1 , а двумерные характеристики, определяемые по совокупности измерений в двух моментах времени t_1 и t_2 , определяются только разностью $t_2 - t_1$, т.е. тем, насколько разделены во времени эти два момента. На практике любой процесс имеет конечную продолжительность, а окружающие условия в той или иной мере изменяются. Это означает, что процесс в лучшем случае является только *квазистационарным*, и при оценивании его статистических характеристик мы должны предположить, что на интервале наблюдений интересующие нас вероятностные характеристики существенно не изменяются.

Среди стационарных процессов выделяют *эргодические* процессы, от-

личающиеся тем, что для них полная статистическая информация о процессе может быть получена как по множеству отдельных реализаций, так и по одной (в принципе, бесконечно длинной) реализации. Это означает, что статистические характеристики можно получить как путем осреднения по реализациям, так и путем осреднения по времени. Именно такие процессы мы будем иметь в виду в дальнейшем (если не оговаривается противное). Ответственность за выполнение гипотезы эргодичности всегда ложится на экспериментатора (наблюдателя). Мы покажем ниже на конкретных примерах, что в сложных физических системах сосуществуют процессы, имеющие совершенно различные характерные времена, и без понимания этих процессов легко получить физически бессмысленные результаты.

Исчерпывающими одномерными характеристиками случайной величины являются связанные друг с другом функция *распределения вероятности* и функция *плотности вероятности*.

Функция распределения вероятности $P(x)$, называемая также куммулятивной функцией распределения или интегральным законом распределением вероятности, определяет вероятность того, что измеренное значение случайной величины x' не превосходит значения x , т.е.

$$P(x) = \mathbb{P}(x' \leq x). \quad (2.1)$$

Функция распределения плотности вероятности $p(x)$ (дифференциальный закон распределения вероятности) есть производная

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx}. \quad (2.2)$$

Вероятность попадания случайной величины в конечный интервал значений есть

$$\mathbb{P}(a < x \leq b) = P(b) - P(a) = \int_a^b p(x)dx.$$

Функция распределения плотности вероятности $p(x)$ содержит полную информацию о случайной величине x , однако ее определение в полном объеме практически невозможно. Заданию плотности вероятности эквивалентно задание последовательности (в принципе, бесконечной) статистических моментов

$$M_m = \int x^m p(x)dx. \quad (2.3)$$

Интегрирование ведется по всем возможным значениям величины x . Момент нулевого порядка равен единице в силу условия нормировки

$$M_0 = \int p(x)dx = 1, \quad (2.4)$$

а момент первого порядка, называемый также математическим ожиданием, дает среднее значение величины

$$M_1 = \int xp(x)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt \equiv \langle x \rangle. \quad (2.5)$$

Здесь T есть время наблюдения. В дальнейшем изложении угловые скобки будут обозначать осреднение по времени. Для моментов второго и более высоких порядков обычно используют центральные моменты, вычисляемые относительно средних значений

$$M_m = M(x - \langle x \rangle)^m = \int (x - \langle x \rangle)^m p(x)dx = \langle (x - \langle x \rangle)^m \rangle. \quad (2.6)$$

Напомним, что центральный момент второго порядка называется дисперсией

$$\sigma_x^2 = M_2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle, \quad (2.7)$$

а в качестве последующих характеристик распределения случайной величины обычно используют не третий и четвертый моменты, а коэффициенты асимметрии a и эксцесса γ :

$$a = \frac{M_3}{M_2^{3/2}}, \quad \gamma = \frac{M_4}{M_2^2}. \quad (2.8)$$

Асимметрия характеризует симметричность функции распределения вероятности относительно среднего значения, а эксцесс является простейшей мерой значимости редких событий (хвостов функции распределения). Для нормального распределения коэффициент эксцесса равен $\gamma = 3$, и часто используют величину $\gamma' = \gamma - 3$, показывающую, насколько данное распределение отличается от нормального распределения (распределения Гаусса).

На рис. 2.1 приведены три распространенных вида распределений вероятности: равномерное, гауссовское и пуассоновское. Все распределения приведены для одинакового математического ожидания $\langle x \rangle = 1$ и одинаковой дисперсии $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = 1$. Равномерное распределение соответствует равновероятному значению случайной величины в ограниченном диапазоне. Для выбранных значений математического ожидания и дисперсии

$$\begin{aligned} p(x) &= 0, & P(x) &= 0 & \text{при} & & x < 1 - \sqrt{3}, \\ p(x) &= \frac{x - 1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, & P(x) &= +x & \text{при} & & 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}, \\ p(x) &= 0, & P(x) &= 1 & \text{при} & & x > 1 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

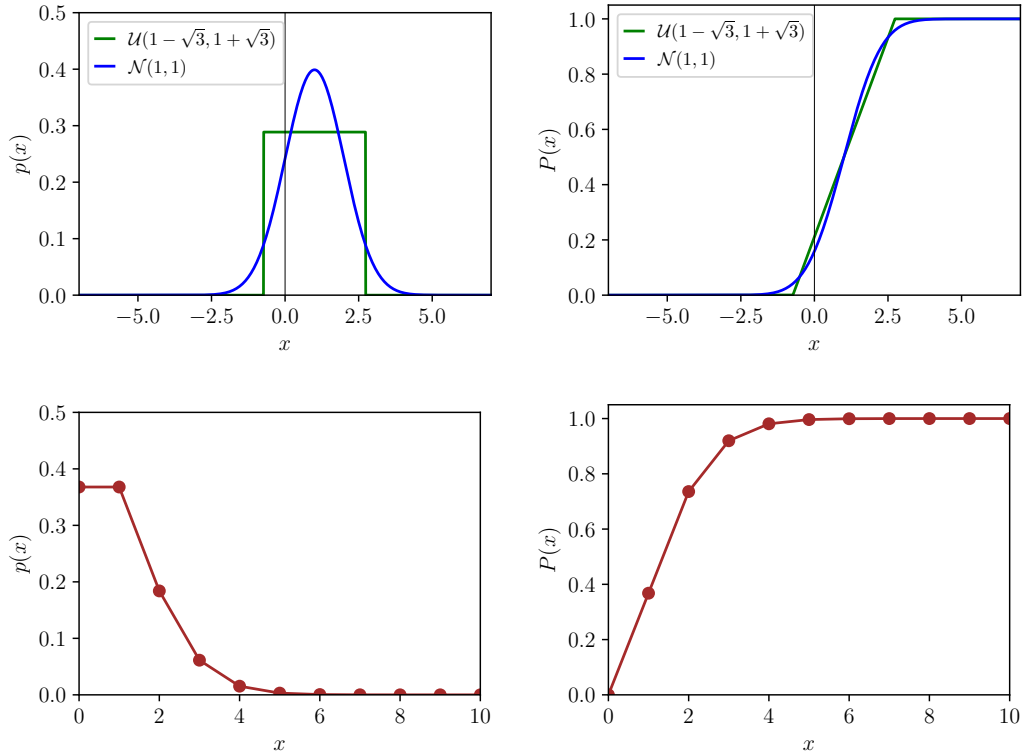


Рис. 2.1. Плотность вероятности (слева) и функция распределения вероятности (справа) для равномерного распределения и нормального распределения (вверху) и пуассоновского распределения (внизу). Функции приведены для одинакового математического ожидания $\langle x \rangle = 1$ и одинаковой дисперсии $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = 1$

Нормальное распределение для рассматриваемого случая описывается формулами

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}, \quad P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx.$$

Третий пример на рис. 2.1 касается распределения Пуассона – распределения дискретного типа случайной величины, представляющей собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что они происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга. В этом случае x – положительное целое число, $\lambda = \langle x \rangle$ – математическое ожидание и

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

Математическое ожидание для распределения Пуассона есть целое число. Причем дисперсия также равна λ . По мере роста λ распределение Пуассона стремится к распределению Гаусса.

Отметим, что нормальное распределение занимает особое место в теории вероятности и часто используется в качестве первого приближения при описании процессов, о природе которых ничего (или почти ничего) не

известно. Такое обособленное положение это распределение занимает благодаря *центральной предельной теореме* [2], которая доказывает, что если случайная величина зависит от большого числа независимых случайных факторов, то независимо от того, как распределена вероятность для каждого фактора, сама величина распределена по нормальному закону. Этот факт настолько важен, что его стоит проиллюстрировать.

Рассмотрим простой пример. Пусть к продавцу в день приходит N покупателей. Каждый покупатель тратит с равной вероятностью некоторую сумму денег в диапазоне от 0 до S , и продавец за день получает в кассу итоговую сумму x_N . Спрашивается, по какому закону будет распределена плотность вероятности получаемой суммы при различном числе покупателей. Поскольку и средний доход $\langle x_N \rangle$, и дисперсия σ_N^2 растут с ростом числа покупателей, то строить будем плотность вероятности нормированной величины $(x_N - \langle x_N \rangle) / \sqrt{\sigma_N^2}$, которая и показана на рис. 2.2 в обычных линейных координатах (слева) и в линейно-логарифмическом представлении (справа). В линейных координатах уже при $N = 8$ трудно отличить получающуюся плотность вероятности от гауссианы. При представлении в линейно-логарифмических координатах гауссиана имеет вид параболы и увидеть отличие распределения от нормального существенно проще. Хорошо видно, как с увеличением N вытягиваются хвосты плотности вероятности, подтягиваясь к параболе. Рисунок наглядно демонстрирует, что на практике при наличии десятка независимых покупателей индивидуальная стратегия каждого перестает иметь значение и распределение дохода продавца хорошо оценивается нормальным распределением, для количественного описания которого достаточно знать среднее значение и дисперсию.

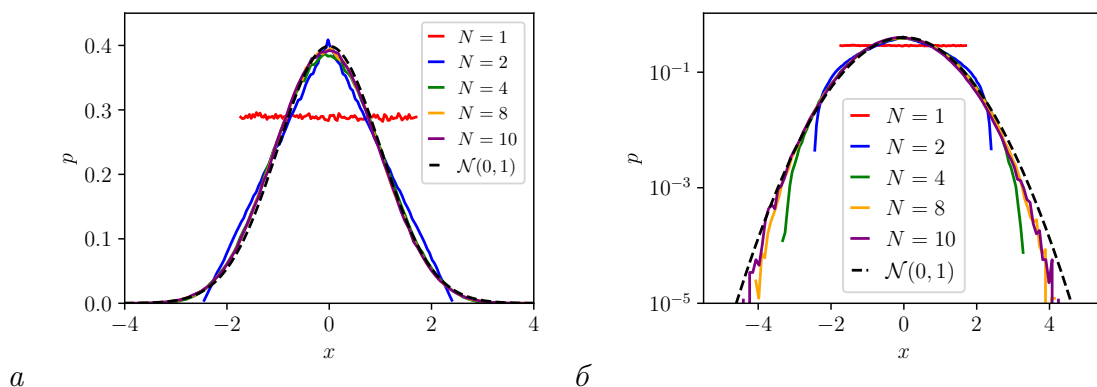


Рис. 2.2. Иллюстрация центральной предельной теоремы: плотность вероятности для величины, определяемой N независимыми факторами, каждый из которых равномерно распределен в интервале, для $N = 1, 2, 4, 8, 10$: a – в линейных координатах; b – в линейно-логарифмических координатах. Черной пунктирной линией обозначено нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$

2.2 Оценивание распределения вероятности и статистических моментов

Статистический анализ случайных процессов основан на экспериментальном определении (оценивании) основных вероятностных характеристик. Если рассматривается стационарный эргодический процесс, то его статистические характеристики являются неслучайными, но любая оценка этой характеристики является случайной, так как зависит от конкретной анализируемой реализации, ее длины (числа отсчетов), используемого алгоритма оценки. На практике, определяя тем или иным способом некий параметр θ случайного процесса, получают его оценку $\hat{\theta}$ (например, имея некоторую конечную выборку из N значений случайной величины x , вычисляют среднее значение $\langle x \rangle = \sum x_i / N$, которое является *оценкой* математического ожидания $\hat{M}_1(x)$). В физической литературе, говоря о статистических характеристиках процесса, слово "оценка", как правило, опускается и значок оценки (в математической статистике используют обычно крышку) не используют. За пределами данного раздела мы также будем их опускать, но необходимо помнить, что речь всегда идет об *оценивании* статистических характеристик.

Один и тот же параметр можно оценивать различными способами. Для сопоставления различных оценок пользуются такими показателями качества оценки, как *несмещенность*, *эффективность* и *состоятельность*.

Оценка является *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру ($M_1(\hat{\theta}_N) = \theta$). Если математическое ожидание оценки стремится к истинному значению параметра только при $N \rightarrow \infty$, то оценка называется асимптотически несмещенной.

Несмещенная оценка называется *эффективной*, если она имеет наименьшую возможную дисперсию $M_2(\hat{\theta}_N)$. Если при неограниченном возрастании объема выборки ($N \rightarrow \infty$) ее значение с вероятностью 1 сходится к истинному значению параметра (т.е. $M_2(\hat{\theta}_N) \rightarrow 0$), то она называется *состоятельной*.

Оценивание вида распределения вероятности на практике чаще всего сводится к построению гистограмм, которые являются дискретным аналогом плотности распределения вероятности. Реже строят кумулятивную функцию распределения – дискретный аналог функции распределения вероятности. Обе функции являются оценками соответствующих функций распределения вероятности. Рассмотрим пример их построения с целью прояснения вопроса, в каком случае и какую из этих функций стоит строить.

Начнем с оценивания функции распределения вероятности (интеграль-

ногого или кумулятивного закона распределения), для чего запишем дискретный аналог определения функции распределения вероятности

$$\hat{P}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(x - x_i), \quad (2.9)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, равная нулю при отрицательных значениях аргумента и единице при прочих.

На практике вычисление $\hat{P}_N(x)$ проводят по следующему алгоритму. Сначала все элементы ряда $x_1, x_2, \dots, x_N$ располагают в порядке возрастания. Для $x < x_{min}$ принимается $\hat{P}_N(x) = 0$. Затем в каждой точке $x = x_i$ функция $\hat{P}_N(x)$ получает приращение, равное $1/N$. При $x = x_{max}$ функция $\hat{P}_N(x)$ становится равной единице и для всех $x > x_{max}$ имеем $\hat{P}_N(x) = 1$. В результате выполнения этого простого алгоритма получается ступенчатая функция, которая по мере роста N стремится к $P(x)$ (оценка несмещенная и состоятельная). Если точки x_i статистически независимы (некоррелированы), то дисперсия данной оценки удовлетворяет соотношению

$$M_2(\hat{P}_N(x)) < \frac{P(x)[1 - P(x)]}{N}. \quad (2.10)$$

Оценивание функции плотности распределения вероятности сводится к построению гистограмм. Для этого весь диапазон значений случайной величины разбивается на K интервалов шириной $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/K$, и в пределах каждого интервала

$$\hat{p}_{N,\Delta x}(x) = \frac{1}{N\Delta x} \sum_{i=1}^N \xi(x_i), \quad (2.11)$$

где функция $\xi(x_i)$ равна единице, если точка выборки попала в интервал Δx , и нулю – в противном случае. Данная оценка является асимптотически несмещенной. Для конечного N смещение оценивается как

$$\Delta \hat{p}_{N,\Delta x}(x) \approx \frac{p''(x)(\Delta x)^2}{24N}. \quad (2.12)$$

Для некоррелированной выборки дисперсия оценки (2.11) есть

$$M_2(\hat{p}_{N,\Delta x}(x)) < \frac{N\Delta x}{p(x)}. \quad (2.13)$$

Формулы (2.12) и (2.13) показывают, что увеличение интервала Δx уменьшает дисперсию оценки, но увеличивает смещение. Это означает, что нужно найти оптимальное значение числа интервалов K (ширины интервала Δx). В качестве рекомендации для выбора числа интервалов можно дать формулу $K \sim 3.2 \log_{10} N$.

В качестве примера оценивания функции распределения вероятности и плотности вероятности рассмотрим выборку значений температуры в турбулентном свободноконвективном потоке (Рис. 2.3) и посмотрим, что можно получить при различной длине выборки. На рис. 2.4 приведены результаты оценивания функций распределения вероятности и плотности вероятности по выборкам длиной 50, 1000 и 20 000 точек, взятых из одной непрерывной серии наблюдений с шагом, значительно превышающим корреляционное время. Рисунок хорошо иллюстрирует тот факт, что функцию распределения вероятности (кумулятивную функцию распределения) имеет смысл строить при ограниченной выборке данных, так как она дает достаточно гладкое распределение даже при $N = 50$, для которой гистограмма выглядит совершенно не убедительно. При достаточно больших выборках гистограмма, являющаяся оценкой функции распределения плотности вероятности, существенно более информативна и позволяет (в нашем примере) ясно идентифицировать несимметричность распределения вероятности (левый хвост пульсаций температуры, соответствующий холодным термикам, значительно длиннее, чем правый, отвечающий за горячие термики). Отметим еще раз, что если гистограмма достаточно представительна, то есть в ней хорошо представлены хвосты, отвечающие за редкие события, то становится полезным представлять ее в линейно-логарифмических координатах (последняя гистограмма из рис. 2.4 представлена в таком виде на рис. 2.5). Если в линейном представлении значения в левой части гистограммы становятся неотличимы от нуля при $x < 170$, то в логарифмическом представлении видно, что при $x = 170$ в ячейку гистограммы попало около 40 точек, а хвост тянется до значения $x \approx 166$, где в последнем интервале зарегистрирована одна точка.

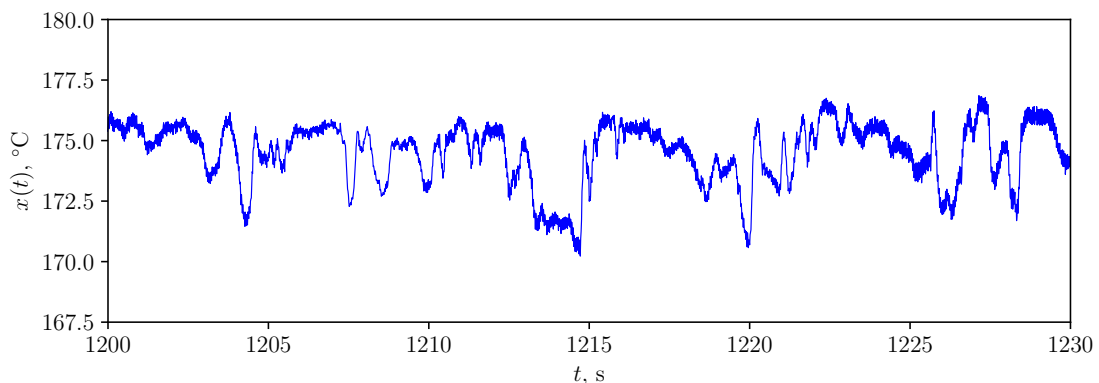


Рис. 2.3. Температура в свободноконвективном турбулентном потоке жидкого натрия (данные из экспериментальных измерений из работы [3])

Вернемся к оцениванию низших статистических моментов, являющихся самыми распространенными статистическими характеристиками слу-

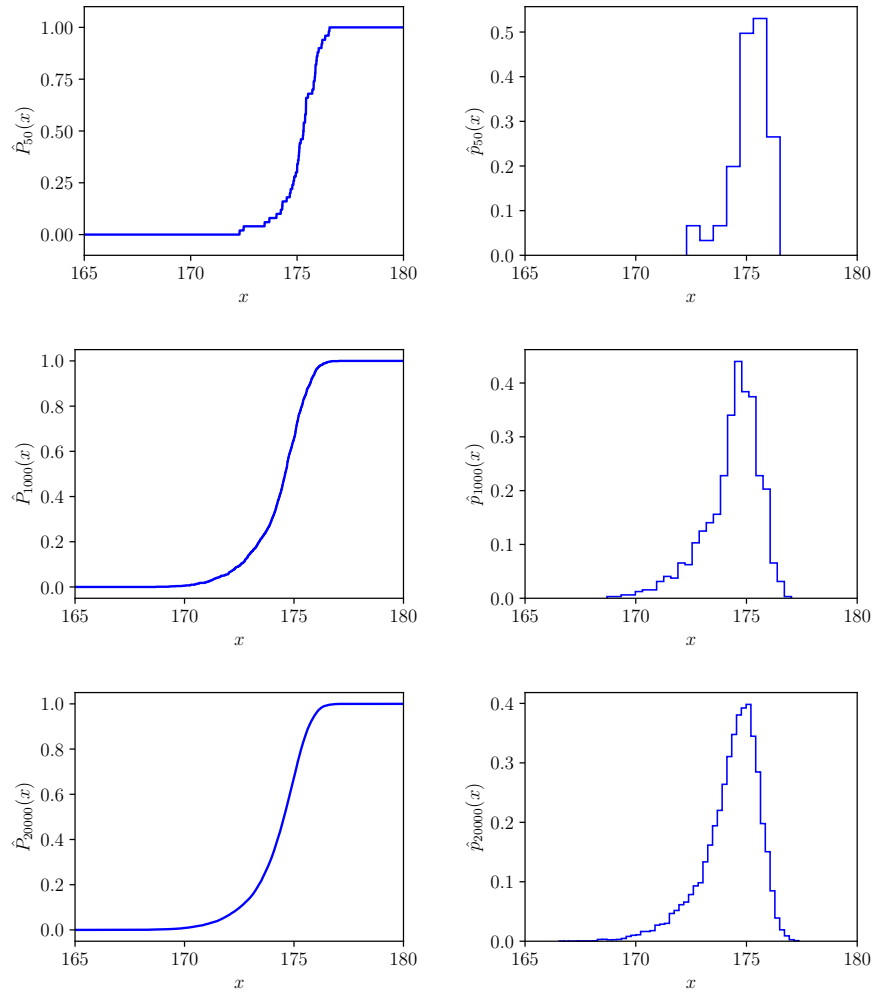


Рис. 2.4. Оценивание функции распределения вероятности (слева) и плотности распределения вероятности (справа) для различных длин выборки: $N = 50$ (верх), $N = 1000$ (середина) и $N = 20000$ (низ)

чайного процесса. Прежде всего оценивается математическое ожидание (среднее значение)

$$\hat{M}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (2.14)$$

Оценка является несмещенной и состоятельной, а ее дисперсия для некоррелированной выборки есть

$$M_2(\hat{M}_1) = \frac{M_2(x)}{N}. \quad (2.15)$$

Оценивание центральных моментов проводится по формулам, непосредственно следующим из их определения, но с переходом к суммированию по конечной выборке (такие оценки называют базовыми). Для моментов порядка m получается

$$\hat{M}_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{M}_1)^m. \quad (2.16)$$

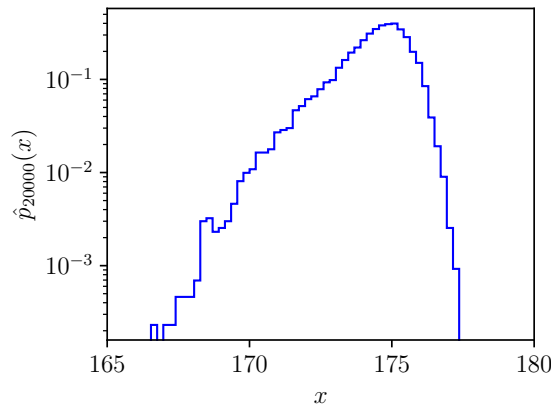


Рис. 2.5. Гистограмма, представленная на рис. 2.4 для выборки из 20 000 точек, но построенная в линейно-логарифмических координатах

Поскольку в определении (2.16) используется оцененное значение $\hat{M}_1$, то соответствующие оценки являются асимптотически несмещенными и состоятельными (если известно истинное значение математического ожидания, то оценки будут несмещенными и состоятельными). Дисперсии оценок низших центральных моментов для некоррелированной выборки

$$M_2(\hat{M}_2) = \frac{2M_2^2(x)}{N}, \quad M_2(\hat{M}_3) = \frac{15M_2^3(x)}{N}, \quad M_2(\hat{M}_4) = \frac{96M_2^4(x)}{N}. \quad (2.17)$$

Асимптотически несмещенные и состоятельные оценки коэффициентов асимметрии и эксцесса (2.8) определяются, соответственно, выражениями

$$\hat{a} = \frac{\hat{M}_3}{\hat{M}_2^{3/2}}, \quad \hat{\gamma} = \frac{\hat{M}_4}{\hat{M}_2^2}. \quad (2.18)$$

Дисперсии последних оценок для некоррелированной выборки (и, вообще говоря, распределений, близких к нормальным) оцениваются как

$$M_2(\hat{a}) \approx \frac{6}{N}, \quad M_2(\hat{\gamma}) \approx \frac{24}{N}. \quad (2.19)$$

Выпишем также формулы для определения относительной статистической погрешности оценивания соответствующих величин (все для некоррелированных выборок!) – квадрата относительной ошибки δ^2

$$\delta^2(\hat{p}_N(x)) = \frac{1}{N\Delta x p(x)}, \quad (2.20)$$

$$\delta^2(\hat{M}_1) = \frac{1}{N}, \quad \delta^2(\hat{M}_2) = \frac{2}{N}, \quad (2.21)$$

$$\delta^2(\hat{M}_3) = \frac{15}{N}, \quad \delta^2(\hat{M}_4) = \frac{96}{N}. \quad (2.22)$$

Еще раз отметим, что все оценки даны для выборки, состоящей из N независимых (некоррелированных) значений случайной величины. Это означает, что если выборка формируется по измерениям непрерывно изменяющейся величины, то выборку нужно брать с шагом, заметно превышающим корреляционное время (см. следующий раздел). Если уровень корреляции конечен на шаге выборки, то все оценки изменяются, так как это эквивалентно тому, что эффективное число независимых точек уменьшается.

2.3 Автокорреляционная функция

В главе [1](#) было показано, что преобразование Фурье, подразумевающее разложение сигнала по гармоническим функциям, строго говоря, применимо только к периодическим (ряд Фурье) или затухающим, т.е. интегрируемым на бесконечном интервале (интеграл Фурье) сигналам. Существенно расширяет область применимости аппарата фурье-анализа теорема Хинчина-Винера, позволяющая определить спектральную плотность *статистически стационарных* сигналов, о которых пойдет речь в этом разделе.

Суть спектрального анализа состоит в переходе из физического пространства (времени) в пространство масштабов (частот) и анализа структуры сигнала не в физическом пространстве (в какой момент времени происходит то или иное событие, и какую энергию оно несет), а в пространстве масштабов (как события распределены по частотам, и каким частотам какая энергия соответствует). Важно подчеркнуть, что информацию о масштабе (в случае сигнала о масштабе времени) невозможно получить ни по какой одноточечной характеристике сигнала (процесса). Чтобы получить масштаб, нужно включить в рассмотрение вторую точку, отстоящую от первой на некоторое время τ , которое и становится мерой масштаба времени.

При рассмотрении двух моментов времени следует ввести двумерные распределения вероятности и соответствующие статистические моменты. На практике (в контексте рассматриваемых задач спектрального анализа) важное место занимает центральный смешанный момент второго порядка, называемый автокорреляционной функцией

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \langle x \rangle)(x(t + \tau) - \langle x \rangle) dt \equiv \langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t + \tau) - \langle x \rangle) \rangle. \quad (2.23)$$

Автокорреляционная функция есть функция четная, $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$,

т.е. два момента времени, разделенные интервалом τ , можно поменять местами, и результат не изменится. Поэтому обычно автокорреляционную функцию строят только для положительных τ . Можно вычислять автокорреляционную функцию и для периодической функции. Понятно, что в этом случае автокорреляционная функция тоже есть функция периодическая, и ее можно представить рядом Фурье.

Автокорреляционная функция случайного сигнала есть функция затухающая – чем дальше по времени отстоят события, тем меньше они связаны. Чтобы показать, как долго случайный процесс сохраняет память о своем прошлом (как быстро забывает его), вводят характерное время τ_c , называемое *корреляционным* временем. Вводят его по-разному, например,

$$\tau_c = \frac{1}{R_{xx}(0)} \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) d\tau. \quad (2.24)$$

По сути, оценка (2.24) подразумевает замену плавно затухающей корреляционной функции на ступеньчатую – в течение времени τ_c процесс ”помнит” все (корреляция равна единице), а потом мгновенно теряет память (корреляция равна нулю).

Именно автокорреляционная функция позволяет определить спектральный состав случайного сигнала. Для стационарного эргодического процесса спектральная плотность энергии пульсаций определяется как предел, получаемый при вычислении фурье-образа сигнала на все возрастающем интервале T

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\tilde{x}(f, T) \tilde{x}^*(f, T)] \equiv \langle |\tilde{x}(f)|^2 \rangle, \quad (2.25)$$

где аргумент T означает, что фурье-образ вычисляется на интервале $[0, T]$. Спектральная плотность энергии является действительной, положительной функцией частоты. Согласно теореме Хинчина-Винера спектральная плотность и автокорреляционная функция связаны друг с другом преобразованием Фурье

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau. \quad (2.26)$$

Повторим, что для случайного процесса автокорреляционная функция убывает с ростом τ , стремясь к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Интегрируемость автокорреляционной функции и определяет возможность вычисления спектральной плотности энергии пульсаций случайного сигнала.

На рис. 2.6 показана автокорреляционная функция, вычисленная для сигнала, фрагмент которого представлен на рис. 2.3. Сигнал (показания

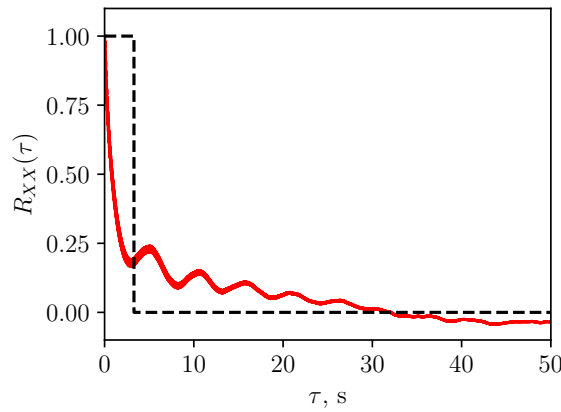


Рис. 2.6. Автокорреляционная функция сигнала, фрагмент которого приведен на рис. 2.3

термопары в конвективном потоке жидкого металла) регистрировался с частотой выборки 75 Гц в течение 25206 с (приблизительно 7 ч). Общее число точек в выборке составляет 1890450. Именно эта выборка использовалась в предыдущем разделе для построения функций распределения (рис. 2.4–2.5). На рис. 2.6 отмечено корреляционное время, оцененное по формуле (2.24), которое для данного примера составило $\tau_c \approx 3.29$ с. Эта оценка указывает на то, что время памяти в системе составляет всего несколько секунд. Несмотря на это, автокорреляционная функция и на времени 50 с заметно отличается от нуля.

Обратим внимание на очень важный момент в вычислении автокорреляционной функции. По определению (2.24), в котором стоит предел $T \rightarrow \infty$, функция вычисляется на бесконечно длинной выборке, и только тогда в точности выполняется и теорема Хинчина-Винера (2.26), в которой этот предел указан явно. На практике бесконечно длинных выборок не бывает, и это означает, что возникает жесткое ограничение на низкочастотную границу (большие временные масштабы), ниже которой анализ проводить нельзя. Точнее, предел $T \rightarrow \infty$ заменяется требованием $\tau \ll T$, т.е. при вычислении автокорреляционной функции нужно ограничиваться временными масштабами τ , многократно (скажем, на порядок) меньшими длины всего интервала измерений T . Если стоит обратная задача, т.е. планируется эксперимент, в котором интерес представляют колебания с характерными временами, достигающими значения T_{max} , и нужно оценить требуемое время эксперимента T , то нужно исходить из того, что $T \gg T_{max}$. О верхней границе анализируемого диапазона частот, которая определяется характеристиками используемого для регистрации сигнала оборудования и также должна учитываться при планировании эксперимента, разговор пойдет в следующем параграфе.

На рис. 2.7 показана спектральная плотность энергии пульсаций, по-

считанная по формуле Хинчина-Винера (2.26). Отметим, что нижняя граница частот принята $f_{min} = 10^{-3}$ Гц, т.е. максимальный рассматриваемый временной масштаб составляет $T_{max} = 1000$ с (при длине выборки более 25 000 с). Верхняя граница, $f_{max} = 20$ Гц определяется уровнем шума в сигнале – видно, что при $f \approx 10$ Гц энергия пульсаций перестает падать и выходит на постоянный уровень, который и определяет уровень шума (белого) в сигнале. Интерпретация результатов измерений в этой части спектра теряет смысл. Показаны результаты вычисления двумя способами. В первом случае (левый график) непосредственно оценивался интеграл Фурье в формуле (2.26) с перебором всех частот в диапазоне $f_{min} < f < f_{max}$ с шагом $\Delta f = 10^{-5}$ в диапазоне частот $f \leq 0.5$ Гц и $\Delta f = 10^{-3}$ при $f > 0.5$ Гц. Во втором случае (правый график) использовался алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) для автокорреляционной формулы, заданной в диапазоне $-T_{max} < \tau < T_{max}$ с шагом $\Delta \tau = 1/75$ с. Хотя структура обоих спектров подобна, видно, что детали зависят от конкретного алгоритма расчета. Прежде всего, обращает на себя внимание широкая ”шуба”, которой покрыты оба спектра. Информативной является верхняя грань этой ”шубы”, которая показывает наиболее энергоемкие компоненты каждой конечной полосы частот. Нижняя грань ”шубы” формируется за счет ”провалившихся” частот, которые несут минимальную энергию, причем с чем большим спектральным разрешением мы пытаемся оценить интеграл, тем глубже проваливаются отдельные частоты и тем ниже эта грань (на левом графике ”шуба” менее плотная, но отдельные выбросы достигают нижней границы поля).

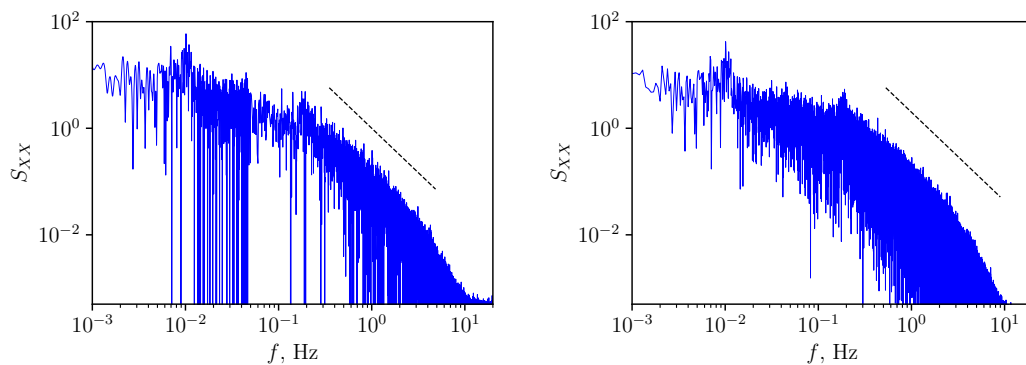


Рис. 2.7. Спектральная плотность энергии пульсаций температуры в турбулентном потоке, вычисленная по формуле Хинчина-Винера с использованием интеграла Фурье (слева) и алгоритма быстрого преобразования Фурье (справа). Пунктирной линией обозначен наклон, соответствующий степенному закону $S(f) \sim f^{-5/3}$

2.4 Спектральный анализ случайных сигналов

Представленные на рис. 2.7 результаты оценивания спектральной плотности энергии пульсаций случайного сигнала иллюстрируют принципиальную сложность спектрального анализа таких сигналов, состоящую в том, что даже очень длинные (представительные) выборки не обеспечивают ясной картины спектрального состава сигнала. Повышение спектрального разрешения приводит ко все более шумным спектрам. Проблема обусловлена используемыми в анализе Фурье гармоническими функциями, которые по определению идеально локализованы в пространстве частот, но занимают все физическое пространство. Разложение по ним любого реального сигнала возможно с конечным пространственным и частотным разрешением. Это означает, что нужно или использовать вместо гармонических функций функции с конечным спектральным разрешением (этот путь приводит к вейвлет-анализу, о котором пойдет речь в разделе 3) или применить какую-либо процедуру сглаживания при оценивании спектральной плотности энергии пульсаций сигнала.

На рис. 2.8 показан результат сглаживания скользящим средним по трем точкам спектральной плотности, представленной на рис. 2.7 (слева), т.е. вычисленной по автокорреляционной функции по формуле Хинчина-Винера. На этом же рисунке показан результат использования популярного метода Уэлша, называемого методом усреднения модифицированных периодограмм. Суть метода состоит в том, что анализируемый сигнал разбивается на отдельные фрагменты, каждый из которых должен быть не меньше, чем интересующее нас T_{max} . Особенность метода Уэлша состоит в том, что отдельные фрагменты могут перекрывать друг друга, что позволяет увеличить их общее число. После этого каждый фрагмент раскладывается в ряд Фурье и спектральная плотность сигнала вычисляется как средний по всем фрагментам спектр энергии пульсаций. Метод Уэлша является эффективным методом оценивания спектральной плотности энергии. Рис. 2.8 показывает, что оба метода сглаживания приводят к близким результатам. Полученный сглаженный спектр поддается анализу – в нем можно выделить доминирующие частоты и степенные интервалы. В представленном примере выделенных частот две: это частота $f_2 \approx 0.2\text{Гц}$, связанная с временем оборота крупномасштабного вихря в полости, и частота $f_1 \approx 0.01\text{Гц}$, связанная с колебаниями крупномасштабной циркуляции в полости. В сплошном спектре, характерном для турбулентных течений, выделяются два интервала со степенным поведением, для идентификации которого нужно представление в двойных логарифмических координатах. На интервале $f_1 < f < f_2$ энергия пульсаций спадает примерно как $S_{xx} \sim f^{-1}$, а на интервале $f_2 < f < 1$ можно выделить характерный для инерционного

интервала турбулентности закон $S_{xx} \sim f^{-5/3}$.

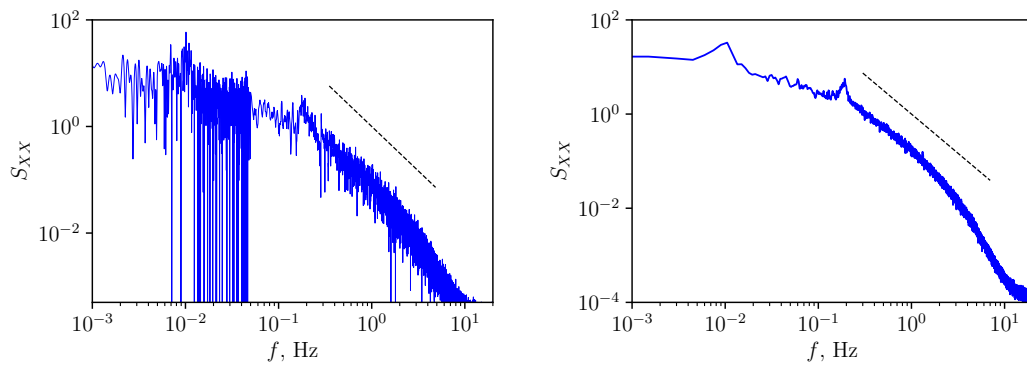


Рис. 2.8. Спектральная плотность энергии пульсаций температуры в турбулентном потоке, построенная сглаживанием спектральной плотности, представленной на рис. 2.7 (слева), и методом Уэлша усреднения модифицированных периодограмм (справа)

2.5 Теорема Котельникова

Теорема Котельникова прямого отношения к спектральному анализу сигналов не имеет, но играет исключительную роль при подготовке сигнала (при планировании эксперимента, в котором предполагается записать сигнал, который будет анализироваться впоследствии). Дело в том, что обрабатываемые сигналы представляют собой, как правило, последовательность дискретных точек (по крайней мере, сигнал становится таковым на этапе ввода в цифровую вычислительную машину). В этом случае приходится иметь дело с конечной выборкой и важным становится вопрос о *шаге выборки*, т.е. о шаге по времени, с которым следует записывать сигнал. Вопрос на практике чрезвычайно важный, так как от него зависят требуемые объемы хранилищ информации, производительность аналого-цифровых преобразователей и пропускная способность линий.

Оценку требуемой частоты выборки в 1928г. сделал Г.Найквист, и соответствующая частота обычно называется частотой Найквиста. В. Котельников в 1933г. решил более общую задачу, ответив на вопрос о возможности полной реконструкции исходного сигнала по дискретным отсчётам.

Важно отметить, что теорема касается сигналов с финитным спектром, т.е. спектром, ограниченным сверху конечной частотой $f_{\max}$. Это означает, в частности, что сигнал не должен иметь разрывов, так как разрыв любого рода приводит к спектру мощности, который не обращается в ноль ни на каких частотах.

Теорема Котельникова утверждает, что функция $x(t)$, спектр которой ограничен конечным интервалом частот $-f_{\max} < f < f_{\max}$, однозначно определяется выборкой на дискретном множестве точек с шагом

$\Delta t = 1/(2f_{\max})$. Точнее говоря, функция $x(t)$ восстанавливается по конечной выборке $x_n = x(n\Delta t)$ с помощью соотношения

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin \pi (t/\Delta t - n)}{\pi (t/\Delta t - n)}. \quad (2.27)$$

Из теоремы Котельникова часто делается и обратное утверждение: если сигнал регистрируется с шагом Δt , то предельная частота, которая может быть оценена по дискретной записи этого сигнала, есть $f_{\max} = 1/(2\Delta t)$. Однако это утверждение не верно, так как если в сигнале содержатся частоты, превышающие половину частоты выборки, то эти частоты искажают и восстанавливаемую часть спектра.

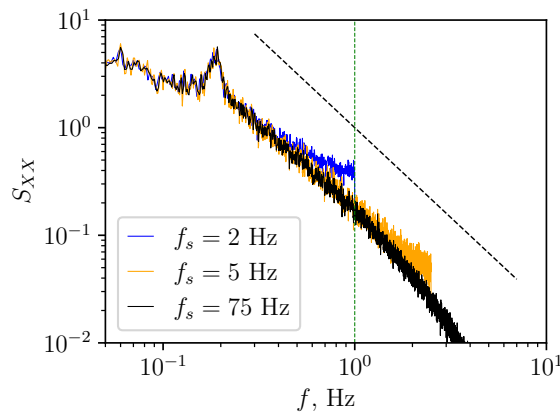


Рис. 2.9. Влияние частоты выборки на результаты оценивания спектральной плотности энергии. Спектральные плотности вычислены по методу Уэлша. Частота выборки $f_s = 2$ Гц (синяя линия), $f_s = 5$ Гц (желтая линия), $f_s = 75$ Гц (черная линия). Штриховая линия соответствует степенному закону $-5/3$. Зеленой линией обозначена частота $f = 1$ Гц

Покажем это на примере. Возьмем сигнал, регистрируемый с частотой выборки 75 Гц, спектральная плотность которого была показана на рис. 2.8, и зададимся целью воспроизвести этот спектр для частот $f < 1$ Гц. Согласно теореме Котельникова требуемая частота выборки должна быть не менее 2 Гц, но такая частота гарантировала бы восстановление спектральной плотности только в случае, если бы спектр анализируемого сигнала был ограничен частотой 1 Гц. В рассматриваемом случае это не так – граничная частота приходится на инерционный интервал, в котором спектральная плотность энергии падает по закону $f^{-5/3}$. Рис. 2.9 показывает, что если мы из полного сигнала возьмем выборку с частотой $f_s = 2$ Гц, то спектральная плотность энергии оказывается завышенной в полосе частот $f > 0.3$ Гц (синяя линия). Увеличение частоты выборки до $f_s = 5$ Гц позволяет воспроизвести наклон спектра до требуемой границы в 1 Гц. Следует подчеркнуть, что полученная оценка высокочастотной границы воспроизводимых частот $f < 5f_s$ не является универсальной и справедлива только

для конкретного степенного закона, которому следует спектр вблизи частоты выборки. При менее крутых спектрах ситуация быстро ухудшается и оценивание спектрального состава сигналов с медленно спадающей спектральной плотностью требует большой осторожности при выборе частоты регистрации сигнала (частоты выборки).

2.6 Турбулентность. Связь пространственных и временных характеристик. Структурные функции

Турбулентность – синоним хаоса. Не случайно важнейший шаг в становлении теории турбулентности сделал один из самых известных специалистов по теории вероятности, математик А.Н.Колмогоров.

В контексте данного пособия турбулентность интересна как распространенный источник случайных сигналов, регистрируемых как при наблюдениях природных явлений, так и в лабораторных экспериментах. Практически все измерения, проводимые при исследовании природных явлений в жидких, газообразных и плазменных средах (речь идет об измерениях в атмосфере, океанах, жидких планетных недрах, звездной, межпланетной и межзвездной средах), подвержены воздействию развитой турбулентности. Лабораторные и натурные исследования интересных с прикладной точки зрения процессов, аэродинамических аппаратов, гидродинамических и гидротехнических аппаратов и систем, различных технологических реакторов, плазменных систем, как правило, также проводятся в условиях интенсивного турбулентного движения среды. Измеряемой величиной x при этом может быть давление, плотность, температура, та или иная составляющая вектора скорости или вектора индукции магнитного поля, концентрация какой-либо составляющей среды и т.д. Важно для нас то, что речь идет об измерении характеристик случайных полей, плотность распределения вероятности которых зависит, в общем случае, от трех координат и времени $p(x) = p_x(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r}$ – трехмерный радиус вектор.

В общей постановке задача описания полей, статистические характеристики которых зависят от четырех переменных, чрезвычайно сложна (статистические характеристики зависят от всех координат и изменяются со временем). Поэтому естественным желанием является выделение частных, относительно простых задач. Задача упрощается, если турбулентность является *однородной*, т.е. плотность распределения вероятности не зависит от координат точки

$$p_x(t, \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = p_x(t, \mathbf{r}).$$

Если плотность вероятности не зависит от времени, то есть

$$p_x(t + \Delta t, \mathbf{r}) = p_x(t, \mathbf{r}),$$

то турбулентное течение называется *стационарным*, Процесс называется *эргодическим*, если осреднение по времени эквивалентно для него осреднению по ансамблю реализаций

$$\langle x(\mathbf{r}) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t, \mathbf{r}) dt.$$

Угловыми скобками, как и выше, обозначается среднее по ансамблю реализаций. Конечно, только стационарный процесс может быть эргодическим. Гипотеза эргодичности широко используется при исследовании стационарных течений, так как на практике в этом случае измеряются именно средние по времени величины. Аналогичным образом, при рассмотрении *однородной* турбулентности предполагают эквивалентность среднего по пространству и среднего по реализациям, а статистику набирают путем осреднения по пространству.

Проще всего иметь дело с однородной стационарной турбулентностью, в которой статистические характеристики неизменны и в пространстве, и во времени (на практике такое предположение может работать только в рамках конечного интервала времени и ограниченной области пространства).

Для анализа пространственной структуры турбулентных полей необходимы статистические характеристики связи между значениями величины $x(\mathbf{r}, t)$ в различных точках пространства и (или) времени, а при описании взаимодействия различных случайных полей в турбулентном потоке появляются и характеристики их статистической зависимости. Это требует введения совместной плотности вероятности $p(x(\mathbf{r}_1, t_1), y(\mathbf{r}_2, t_2))$ и соответствующих двухточечных моментов.

Важным частным случаем являются одноточечные корреляционные моменты, связывающие значения различных величин в одной точке пространства. Наиболее известным среди них является тензор напряжений Рейнольдса, характеризующий связь пульсаций компонент скорости в заданной точке пространства,

$$\tau_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle (v_i(\mathbf{r}, t) - \langle v_i(\mathbf{r}, t) \rangle)(v_j(\mathbf{r}, t) - \langle v_j(\mathbf{r}, t) \rangle) \rangle = \langle u_i(\mathbf{r}, t)u_j(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

где $u_i(\mathbf{r}, t) = v_i(\mathbf{r}, t) - \langle v_i(\mathbf{r}, t) \rangle$ есть пульсация соответствующей компоненты скорости относительно ее среднего значения, а угловые скобки используются для обозначения среднего по реализациям. Одноточечные корреляционные моменты играют центральную роль в подходе Рейнольдса (направленном на описание структуры и эволюции средних полей), описывая

вклад случайных пульсаций в эволюцию средних полей в турбулентном потоке.

В подходе Колмогорова, направленном на помасштабный анализ *однородной* турбулентности, на передний план выходят двухточечные моменты, необходимые для помасштабного анализа турбулентных полей. Важнейшим среди двухточечных моментов является момент второго порядка, называемый корреляционной функцией. Если речь идет о взаимной корреляции двух скалярных полей, то вводят кросс-корреляционную функцию

$$\begin{aligned} b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= \\ &= \int (x(\mathbf{r}_1, t_1) - \langle x \rangle)(y(\mathbf{r}_2, t_2) - \langle y \rangle) p(x(\mathbf{r}_1, t_1), y(\mathbf{r}_2, t_2)) dx dy = \\ &= \langle (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Если же $y = x$, то говорят об автокорреляционной функции. Нормированная автокорреляционная функция характеризует степень корреляции данного поля в двух различных точках четырехмерного пространства $(\mathbf{r}, t)$.

Случайное векторное поле характеризует корреляционный тензор. Корреляционный тензор поля пульсаций скорости есть

$$b_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle u_i(\mathbf{r}_1, t_1) u_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \quad (2.29)$$

Для стационарной, однородной турбулентности (2.28) и (2.29) зависят только от взаимного расположения двух точек, т.е. если $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}$, а $t_2 = t_1 + \tau$, то

$$b_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = b_{ij}(\mathbf{r}, \tau). \quad (2.30)$$

На практике даже для стационарной и однородной турбулентности измерение корреляционных функций в общем виде (2.28) представляет собой чрезвычайно трудоемкую операцию и измеряют либо временную, либо пространственную корреляционную функцию (тензор).

При одноточечных измерениях скалярной величины $x(\mathbf{r}, t)$ в статистически стационарном турбулентном потоке корреляционная функция (2.28) сводится к введенной выше временной автокорреляционной функции $R_{xx}(\tau)$ (2.23), связанной с *временным спектром* (спектральной плотностью энергии пульсаций) формулой Хинчина-Винера (2.26).

Если измеряется пространственное распределение случайной величины для фиксированного момента времени, то вычисляются пространственные корреляционные функции и спектры. Важным частным случаем является *однородная и изотропная* турбулентность, в которой совместная плотность вероятности (а, следовательно и двухточечные моменты) не зависят ни от сдвига точек измерений, ни от направления вектора $\mathbf{r}$. Тогда

пространственный корреляционный тензор поля скорости зависит только от расстояния между точками $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$,

$$b_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = b_{ij}(|\mathbf{r}|) = b_{ij}(r) \quad (2.31)$$

и полностью определяется значениями двух своих компонент. На практике измеряют корреляционные функции $b_{ll}(r)$ и $b_{nn}(r)$, характеризующие корреляцию продольных и поперечных составляющих пульсаций скорости. Здесь индексом l обозначена составляющая скорости вдоль линии, соединяющей точки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а индексом n — составляющая, нормальная этой линии.

Развитая турбулентность, согласно гипотезе А.Н.Колмогорова [4], подразумевает наличие широкого интервала масштабов, меньших масштаба возбуждения, но больших масштабов действия вязких сил, в котором статистические свойства стационарного, однородного и изотропного поля скорости определяются только самим масштабом и скоростью диссипации энергии (плотностью подводимой к потоку мощности). Этот интервал масштабов называется *инерционным интервалом*, и для него соображения размерности приводят к единственно возможному закону

$$|u_l(\mathbf{r}_2) - u_l(\mathbf{r}_1)| \sim (\epsilon r)^{1/3}, \quad (2.32)$$

где ϵ есть скорость диссипации плотности кинетической энергии (измеряется в $\text{м}^2/\text{с}^3$).

Структуру корреляционной функции (продольной) для развитой турбулентности иллюстрирует рис. 2.10. Для корреляционной функции наличие инерционного интервала с законом (2.32) означает наличие интервала масштабов, в котором

$$b_{ll}(r) \approx b_{ll}(0) \left[C - \left(\frac{r}{L} \right)^{2/3} \right], \quad (2.33)$$

где C — константа порядка единицы, L — внешний (макро) масштаб турбулентности. На малых масштабах ($r \rightarrow 0$) структура течения определяется вязкими силами и можно ожидать линейной зависимости пульсаций скорости от масштаба $|u_l(\mathbf{r}_2) - u_l(\mathbf{r}_1)| \sim r$. Для корреляционной функции это предполагает выполнение закона

$$b_{ll}(r) \approx b_{ll}(0) \left[1 - \left(\frac{r}{\lambda_t} \right)^2 \right], \quad (2.34)$$

где величину λ_t называют тейлоровским масштабом турбулентности. Аппроксимация корреляционной функции вблизи нуля параболой дает значение *тейлоровского* масштаба в точке пересечения кривой (2.34) с осью

масштабов (рис. 2.10). Это означает, что тейлоровский масштаб определяется значением второй производной корреляционной функции при $r = 0$

$$\lambda_t = \left[b''_{ll}(0)/(2b_{ll}(0)) \right]^{-1/2}. \quad (2.35)$$

Переход от закона (2.33) к закону (2.34) происходит на масштабе λ , на котором начинает действовать вязкость. Этот масштаб можно оценить, приравнявая правые части формул (2.33) и (2.34), что дает

$$\lambda \approx \lambda_t \left(\frac{\lambda_t}{L} \right)^{\mu/(1-\mu)} \approx \lambda_t \left(\frac{\lambda_t}{L} \right)^{1/2}. \quad (2.36)$$

Эта оценка показывает, что вязкий масштаб существенно меньше тейлоровского, $\lambda \ll \lambda_t \ll L$.

По аналогии с корреляционным временем можно определить и корреляционный масштаб

$$\lambda_c = \frac{1}{b_{ll}(0)} \int_0^\infty b_{ll}(r) dr, \quad (2.37)$$

который также показан на рис. 2.10 – его положение определяется площадью фигуры под корреляционной функцией.

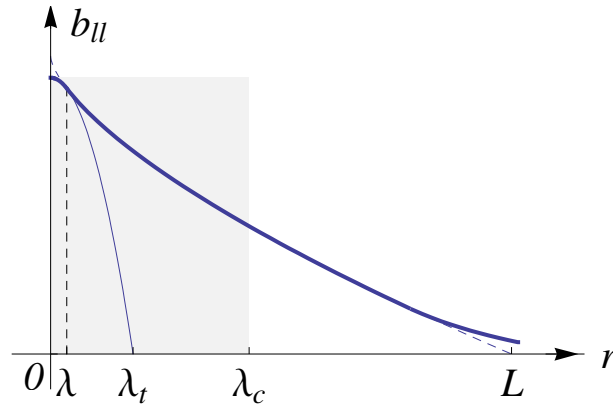


Рис. 2.10. Типичная автокорреляционная функция для продольных пульсаций скорости в однородной изотропной турбулентности. На оси масштабов отмечены диссипативный масштаб λ , масштаб Тейлора λ_t и корреляционный масштаб λ_c

Предположим, что рассматриваемое случайное (турбулентное) поле занимает ограниченный объем и величина $x(\mathbf{r}, t)$ может быть представлена

интегралом Фурье

$$x(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} dk_1 dk_2 dk_3, \quad (2.38)$$

$$\tilde{x}(\mathbf{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dr_1 dr_2 dr_3, \quad (2.39)$$

где $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ – радиус-вектор, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ – волновой вектор.

Считая рассматриваемую турбулентность стационарной, определим *трехмерный* энергетический спектр случайного поля,

$$S(\mathbf{k}) = \langle |\tilde{x}(\mathbf{k}, t)|^2 \rangle. \quad (2.40)$$

Угловые скобки в этом случае могут означать осреднение по времени. Трехмерный спектр связан с корреляционной функцией $b(\mathbf{r})$ (теорема Хинчина-Винера)

$$S(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dr_1 dr_2 dr_3. \quad (2.41)$$

В теории турбулентности, говоря о ее спектральных свойствах, обычно имеют в виду энергетический спектр $E(k)$ (спектральную плотность энергии), который характеризует энергию всех гармоник с заданным модулем волнового вектора, независимо от его направления.

$$E(k) = \int_{|\mathbf{k}|=k} S(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (2.42)$$

или, в сферической системе координат,

$$E(k) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} S(\mathbf{k}) k^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

В важном частном случае изотропной турбулентности, когда $S(\mathbf{k}) = S(k)$, связь становится очень простой:

$$E(k) = 4\pi k^2 S(k). \quad (2.43)$$

Отметим, что все оценки для спектральных законов развитой турбулентности касаются обычно именно энергетического спектра $E(k)$. Именно для этой величины справедлив знаменитый закон Колмогорова

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (2.44)$$

являющийся спектральной формой закона (2.32).

Достаточно часто в натурных и лабораторных экспериментах измерения в турбулентном потоке удается провести только вдоль одной прямой. Например, имеется линейка датчиков давления, скорости и температуры, либо измерения проводятся вдоль светового луча. Другой пример связан с самолетными измерениями в атмосфере – самолет летит со скоростью, значительно превышающей скорость ветра, поэтому можно считать, что он пересекает ”застывшую” атмосферу и проводит в ней мгновенный срез данных вдоль траектории полета. Во всех этих случаях по данным измерений можно построить *одномерные* фурье–спектры. Ограничиваясь однородной и изотропной турбулентностью, в которой измерения можно проводить вдоль любой прямой, рассмотрим прямую $y = z = 0$ и запишем

$$\tilde{x}_1(k_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(r_1, r_2, r_3) e^{-ir_1 k_1} dr_1.$$

Квадрат модуля этой величины есть *одномерный* энергетический спектр

$$S_1(k_1) = \langle |\tilde{x}_1(k_1)|^2 \rangle. \quad (2.45)$$

Чтобы получить связь между одномерным и трехмерным спектрами, выразим исходную величину на прямой $r_2 = r_3 = 0$ через обратное преобразование Фурье. С одной стороны,

$$x(r_1, 0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}_1(k_1) e^{ir_1 k_1} dk_1,$$

а, с другой стороны,

$$\begin{aligned} x(r_1, 0, 0) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(k_1, k_2, k_3) e^{i(r_1 k_1 + 0k_2 + 0k_3)} dk_1 dk_2 dk_3 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\mathbf{k}) dk_2 dk_3 \right) e^{ir_1 k_1} dk_1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{x}_1(k_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\mathbf{k}) dk_2 dk_3,$$

а

$$S_1(k_1) = \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\mathbf{k}) dk_2 dk_3.$$

В теории турбулентности, рассматривая структуру мелкомасштабных полей, оперируют спектрами, описываемыми степенными законами. Покажем, как связаны между собой введенные спектры турбулентности при степенной зависимости энергии от масштаба (волнового числа). Пусть имеется однородное изотропное поле скалярной величины, энергетический спектр которой следует степенному закону

$$E(k) \sim k^\alpha.$$

Тогда трехмерный спектр

$$S(k) \sim k^{\alpha-2} = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{(\alpha-2)/2},$$

а одномерный

$$\begin{aligned} S_1(k_1) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{(\alpha-2)/2} dk_2 dk_3 = \\ &= k_1^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \eta^2 + \xi^2)^{(\alpha-2)/2} d\eta d\xi \sim k_1^\alpha \end{aligned}$$

(проведена замена переменных $\eta = k_2/k_1$; $\xi = k_3/k_1$).

Таким образом, в однородной изотропной турбулентности энергетический спектр $E(k)$ и одномерный спектр $S_1(k)$ следуют одному степенному закону, а степень убывания трехмерного спектра меньше на двойку (трехмерный спектр значительно круче).

В реальных измерениях широко используется *гипотеза Тейлора*, позволяющая связать пространственные и временные флуктуации исследуемой величины $x(\mathbf{r}, t)$. Согласно этой гипотезе, если существует среднее течение, характеризующееся скоростью $\mathbf{U}$, то справедливо соотношение

$$\partial_t x = (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{x}.$$

Пользуясь этой гипотезой, по измерениям в заданной точке пространства определяют пространственные флуктуации исследуемого поля и их статистические характеристики. Например, датчики скорости и/или температуры установлены на специальной метеорологической вышке (высотой, скажем, несколько десятков метров). При наличии среднего ветра (скорость и направление которого определяются по установленным на самой вышке датчикам) на основе гипотезы Тейлора по измерениям, выполненным установленными на вышке датчиками, т.е. в одной точке пространства, можно оценивать пространственную структуру наблюдаемых полей. Измеряются при этом, естественно, одномерные спектры соответствующих полей. Гипотеза Тейлора применяется и в течениях, в которых средней скорости,

вообще говоря, нет. В этом случае роль среднего потока выполняют крупномасштабные вихри. Это ограничивает применимость гипотезы на больших масштабах, но обеспечивает корректные измерения на масштабах, заметно меньших масштабов энергонесущих вихрей.

Обратимся теперь к корреляционному тензору (2.30) и введем спектральный тензор пульсаций скорости

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega\tau)} dr_1, dr_2 dr_3 d\tau. \quad (2.46)$$

По спектральному тензору можно определить спектральную плотность энергии в пространстве (k, ω) (спектральную функцию)

$$E(k, \omega) = \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{k}|=k} \Phi_{ii}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}, \quad (2.47)$$

которая связана с пространственным энергетическим спектром (2.42) соотношением

$$E(k) = \int_{-\infty}^{\infty} E(k, \omega) d\omega. \quad (2.48)$$

По аналогии со спектральным тензором пульсаций скорости можно ввести и спектральный тензор завихренности $\omega = \text{rot} \mathbf{u}$. В пространстве Фурье $\tilde{\omega} = i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{u}}$ и спектральный тензор завихренности

$$\Omega_{ij}(\mathbf{k}) = e_{ijk} e_{ilm} k_j k_l \Phi_{km}(\mathbf{k}). \quad (2.49)$$

Следствием (2.49) является соотношение между спектральной плотностью энергии и спектральной плотностью энтропии (энтропией называется половина среднего квадрата завихренности $\Omega = \langle \omega^2 \rangle / 2$)

$$\Omega(k) = k^2 E(k). \quad (2.50)$$

Завершая обсуждение особенностей анализа турбулентных полей, коснемся методов оценивания *структурных функций*, играющих очень важную роль в исследованиях мелкомасштабной турбулентности. Аппарат структурных функций в теорию турбулентности ввел А.Н. Колмогоров. Мы упоминали выше, что анализ размерности дает оценку для зависимости разности продольной (или поперечной) компоненты скорости от расстояния между точками, в которых эта компонента измеряется (2.32). Соображения размерности позволяют получить аналогичную оценку и для статистических моментов пульсаций скорости, которые и называются структурными

функциями соответствующего порядка. В однородной изотропной турбулентности в интервале масштабов, относящихся к инерционному интервалу, структурные функции зависят только от расстояния r между двумя точками и скорости диссипации кинетической энергии ϵ

$$D_q(r) \equiv \langle |u_l(\mathbf{r}_2) - u_l(\mathbf{r}_1)|^q \rangle \sim (\epsilon r)^{q/3}. \quad (2.51)$$

Структурная функция второго порядка характеризует энергию пульсаций скорости на масштабе r и связана с автокорреляционной функцией. Ограничиваясь рассмотрением продольных пульсаций скорости, можно написать (учитывая однородность и изотропность поля скорости)

$$D_2(r) = \langle |u_l(\mathbf{r}_2) - u_l(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = 2(\langle u_l^2 \rangle - \langle u_1 u_2 \rangle) = 2(b_{ll}(0) - b_{ll}(r)). \quad (2.52)$$

Для структурной функции произвольного порядка соображения размерности приводят к формуле

$$D_q(l) \sim (\epsilon r)^{q/3}. \quad (2.53)$$

Соотношения (2.53) являются оценками, полученными из анализа размерности величин, определяющих статистические свойства турбулентности в инерционном интервале масштабов. Одно из них выполняется точно. Для структурной функции третьего порядка справедлив так называемый закон Колмогорова четырех пятых, который дает точное значение, а именно,

$$D_3 = -\frac{4}{5}\epsilon r. \quad (2.54)$$

Экспериментальные исследования статистических свойств мелкомасштабной турбулентности ведутся, начиная с пятидесятих годов. На первых порах основные усилия были направлены на проверку формулы (2.53) для структурной функции второго порядка (для которой $D_2 \sim (\epsilon r)^{2/3}$) и соответствующего ей закона "пяти третей" для спектральной плотности энергии ($E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$). В многочисленных экспериментах было подтверждено существование инерционного интервала с распределением энергии пульсаций скорости, близким к закону " $-5/3$ ", однако вскоре стало ясно, что этот закон описывает реальную ситуацию только приблизительно.

Наиболее точные измерения энергетического спектра однородной турбулентности показывают, что в инерционном интервале он подчиняется степенному закону вида

$$E(k) \sim k^{-\alpha} \quad (2.55)$$

с показателем степени $\alpha = 1.71 \pm 0.02$. Отличие от пяти третей, на первый взгляд, не велико, но оно принципиально. Более полную картину можно получить, исследуя поведение структурных функций высоких порядков. На

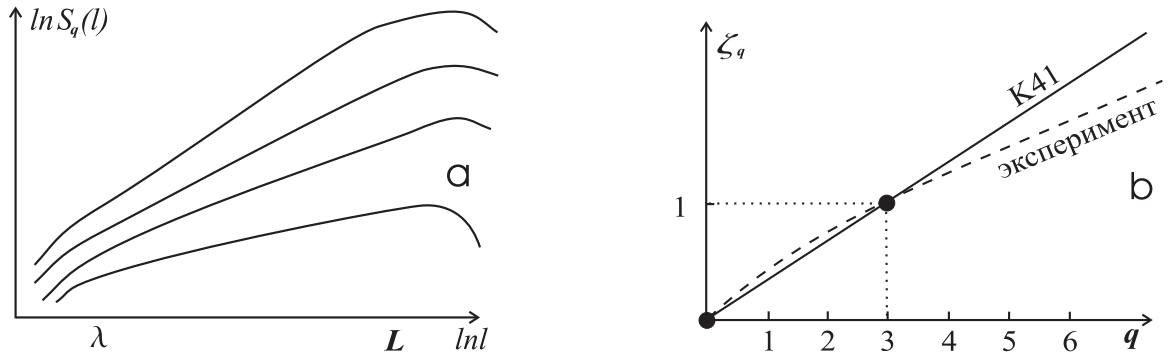


Рис. 2.11. Примерный вид структурных функций поля скорости, представленных в двойном логарифмическом масштабе (слева), и зависимость показателя степени ζ_q от q

практике измеряют значения скорости в двух точках, вычисляют структурные функции и, ожидая существования степенных законов вида

$$D_q(r) \sim r^{\zeta_q}, \quad (2.56)$$

строят графики зависимости структурных функций от масштаба в двойном логарифмическом масштабе. При выполнении (2.56) должна получиться картинка, условно изображенная на рис. 2.11а, — в инерционном интервале возникают линейные участки, наклон которых дает величину степенных показателей ζ_q . Качественно вид графика для показателей степени представлен на рис. 2.11б. Сплошная линия соответствует зависимости (2.53) и помечена надписью "K41". На этой линии выделены две точки, для которых оценка (2.53) является точной. Это начало координат ($\zeta_0 = 0$) и точка $\zeta_3 = 1$, соответствующая закону (2.54). Экспериментальная кривая действительно пересекает эти две точки, удаляясь от прямой $\zeta_q = q/3$ по мере роста порядка q .

Подчеркнем, что измерение структурных функций высоких порядков является чрезвычайно сложной задачей, и только в 90-х гг. появились надежные измерения для структурных функций порядка $q > 10$. Выше говорилось о том, что оценивание статистических моментов высоких порядков — задача сложная. Этот раздел мы завершим описанием интересного алгоритма оценивания скейлинговых свойств (так называют различные зависимости от масштаба) статистических моментов высоких порядков на основе экспериментальных измерений, выполняемых в турбулентных потоках. Алгоритм основан на явлении, получившем название *расширенная автомодельность* (в оригинале — Extended Self Similarity, давшая устоявшуюся аббревиатуру ESS).

Первые результаты были получены при измерениях свойств мелко-масштабной турбулентности в аэродинамической трубе и опубликованы в работе [5]. Цель работы состояла в изучении свойств структурных функций $D_q(r)$, и в этой работе была обнаружена интересная связь между структур-

ными функциями различных порядков.

Напомним, что для определения степенных показателей ζ_q обычно используют двойные логарифмические координаты, откладывая логарифм соответствующей структурной функции в зависимости от логарифма масштаба. На графиках выделяют прямолинейный участок и, считая, что именно он соответствует инерционному интервалу, определяют по его наклону показатель ζ_q . Чем выше порядок структурной функции, тем короче и менее выраженным становится прямолинейный участок на графике.

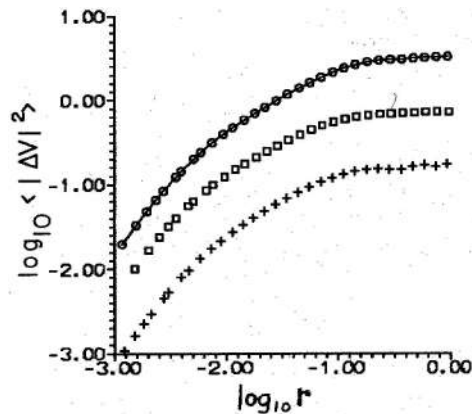


Рис. 2.12. Структурные функции D_2 для трех значений числа Рейнольдса (по данным работы [5])

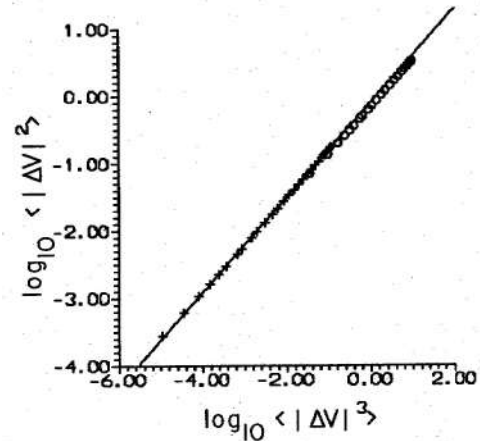


Рис. 2.13. Зависимость структурной функции D_2 от функции D_3 [5]

На рис. 2.12 показаны результаты измерения структурной функции второго порядка, полученные для течения в аэродинамической трубе при трех значениях числа Рейнольдса (квадраты – $Re = 6000$, кружки – $Re = 22500$ и кресты – $Re = 47000$). Изучая эти данные, можно видеть, что вопрос об идентификации инерционного интервала далеко не прост даже для достаточно высоких значений числа Рейнольдса.

Обрабатывая результаты измерений структурных функций пульсаций скорости, авторы предложили необычное представление данных. По оси абсцисс вместо масштаба r была отложена структурная функция третьего порядка D_3 . В инерционном интервале, согласно закону "четырех пятых" (2.54), эта замена тождественна и не может изменить наклон кривой. Неожиданный результат состоял в том, что при представлении результатов в координатах $(\ln D_q, \ln D_3)$ инерционный интервал становится более выраженным — прямолинейный участок графика продлевается до масштабов, лишь в несколько раз превышающих диссипативный масштаб λ . Важно, что наклон кривой остается при этом прежним.

На рис. 2.13, взятом из той же работы, все данные предыдущего рисунка представлены в таких координатах. Видно, что все данные (даже принадлежащие разным режимам течения) легли на одну прямую, опреде-

ление наклона которой не вызывает труда. Таким образом, обнаруженный эффект позволяет значительно увеличить точность определения показателей ζ_q .

Интересно, что ESS приводит к появлению "инерционного интервала" и при относительно низких значениях числа Рейнольдса, когда в обычном представлении инерционный интервал не обнаруживается вовсе.

В более общем виде расширенная автомодельность (ESS) проявляется при любом представлении вида

$$D_q(r) = D_p^{\zeta_q/\zeta_p}, \quad (2.57)$$

т.е. расширение "видимого" инерционного интервала происходит при использовании в качестве осей координат любой пары структурных функций. Описанный алгоритм широко используется в экспериментальных исследованиях развитых турбулентных течений, в которых ожидаются различные степенные законы для физических полей. Структурные функции при этом строятся для различных полей (температуры, магнитного поля, концентраций и т.д.).

Глава 3

Анализ нестационарных сигналов. Вейвлеты

Важнейшим инструментом обработки сложных сигналов самой различной природы является спектральный анализ, основы которого изложены в первых главах пособия. В узком смысле под понятие “спектральный анализ” попадают только методы, основанные на преобразовании Фурье, т.е. на разложении сигнала по гармоническим функциям. На практике далеко не все сигналы можно разложить по гармоническим функциям. В ряд Фурье можно разложить только периодическую функцию, а в виде интеграла Фурье представить функцию, убывающую на бесконечности (интегрируемую на бесконечном интервале). Существенно расширяет область применимости аппарата фурье-анализа теорема Хинчина-Винера, позволяющая определить спектральную плотность *статистически стационарного* сигнала как фурье-образ его автокорреляционной функции. Однако на практике часто приходится иметь дело с нестационарными сигналами, спектральный состав которых меняется со временем. В этом случае применяются различные модификации и обобщения метода Фурье, которые в широком смысле попадают под понятие спектрального анализа *нестационарных* сигналов.

Среди подходов к обработке нестационарных сигналов особое место заняло возникшее в последнее десятилетие двадцатого века обобщение анализа Фурье, вейвлет-анализ. Вейвлеты стали мощным инструментом анализа поведения нелинейных систем, имеющих многомасштабную временную и/или пространственную структуру. В данной главе мы изложим основные идеи вейвлет-анализа временных сигналов, основываясь на особенностях непрерывного и дискретного преобразований, дадим практические рекомендации по выбору анализирующего вейвлета и интерпретации результатов анализа, представим ряд специальных алгоритмов вейвлет-обработки сигналов.

3.1 Вейвлеты

В самых разных областях науки возникают задачи, связанные с анализом временных сигналов с меняющимся со временем спектральным составом. Эти задачи побуждали исследователей делать попытки построения специальных функциональных разложений, использующих тот или иной базис, каждая функция которого характеризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и место ее локализации в физическом пространстве (во времени). В этом разделе мы ограничимся рассмотрением одномерных сигналов вида $x(t)$, а в следующем обсудим особенности вейвлет-анализа двумерных полей (изображений).

Слово "вейвлет" (английское слово "wavelet" означает маленькую волну или рябь) было введено А. Гроссманном и Ж. Морле в 1984 г. в работе [6], выполненной в связи с проблемой анализа сейсмических сигналов, в которых требуется выделить и время (положение) всплеска в сигнале, и его спектральный состав (масштаб). В этой статье были сформулированы основные определения и доказаны основополагающие теоремы. Работа вызвала огромный интерес, и уже к началу 90-х гг. вейвлет-анализ превратился в развитую область математической физики, нашедшей широкое применение в задачах анализа временных сигналов, распознавания образов и синтеза изображений, шифровки и дешифровки информации и многих других.

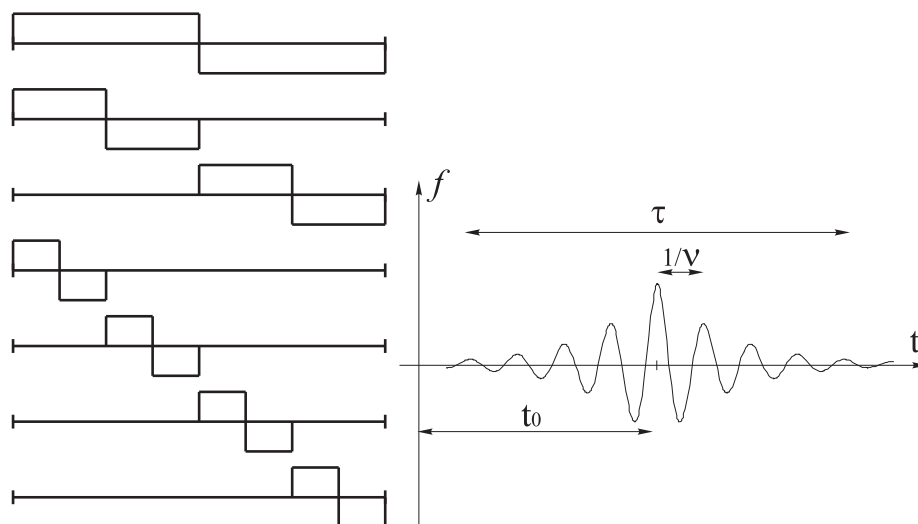


Рис. 3.1. Функции Хаара (слева) и функция Габора (справа)

Первая попытка построить функциональный базис, состоящий из функций, каждая из которых характеризует пульсации определенной продолжительности в определенный момент времени, принадлежит А. Хаару (1909 г.). Первые семь функций Хаара, построенные на единичном отрезке, показаны на рис. 3.1. Каждая функция представляет собой пару следующих друг

за другом прямоугольных импульсов с разными знаками и одинаковой длительностью. Среднее значение любой функции равно нулю, а совокупность функций образует полный ортонормированный базис. Каждая функция строго локализована в физическом пространстве (во времени), но характеризуется медленно спадающим спектром частот (как $1/f$).

Следующим шагом стали функции Литлвуда - Пелли (1937 г.). Функции строятся путем вырезания полосы частот в пространстве Фурье. Это дает строгую локализацию в пространстве частот, но медленное затухание функции в физическом пространстве (во времени): функции описывают осцилляции, амплитуда которых падает как $1/t$.

Важным этапом в развитии идеи локального анализа спектральных (частотных) свойств стало преобразование Габора (1946 г.), называемое также фурье-преобразованием в окнах. Функции Габора представляют собой гармонический сигнал, модулированный функцией Гаусса. Они хорошо локализованы и во времени, и в частотах, но каждая функция Габора характеризуется тремя параметрами: положением центра окна t_0 , шириной окна τ и частотой осцилляций f (рис. 3.1). При этом функции различного масштаба не являются подобными (имеют различное число осцилляций).

Вейвлеты объединили в себе два важных свойства: подобие и выраженную локализованность в физическом и фурье-пространствах. Сформулируем требования, которым должно удовлетворять семейство функций, чтобы быть вейвлетами.

Допустимость. Функция $\psi(t)$, которую будем называть *анализирующим вейвлетом* (употребляют также термин *материнский вейвлет*), должна иметь нулевое среднее значение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (3.1)$$

Это условие может быть сформулировано и более строго. Говорят, что $\psi(t)$ есть вейвлет порядка M , если для всех $m \leq M$ выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0, \quad (3.2)$$

требующее равенства нулю M первых моментов вейвлета.

Подобие. Все функции семейства получаются из анализирующего вейвлета путем масштабного преобразования и сдвига,

$$\psi_{a,b}(t) = \psi((t - b)/a). \quad (3.3)$$

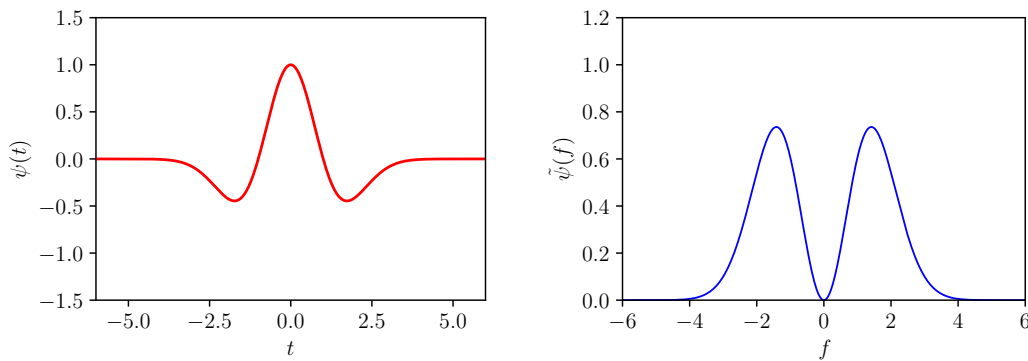


Рис. 3.2. Вейвлет "мексиканская шляпа" (слева) и его фурье-образ (справа)

Таким образом, вейвлеты образуют двухпараметрическое семейство функций, в котором параметр a отвечает за масштаб (растяжение) функции, а параметр b — за ее положение (сдвиг).

Обратимость. Вейвлет-преобразование должно быть обратимо, то есть должно существовать обратное преобразование, однозначно восстанавливающее исходную функцию по ее вейвлет-представлению.

Регулярность. Функция $\psi(t)$ должна быть хорошо локализована и в физическом пространстве, и в пространстве Фурье (не должно быть разрывов).

Согласно последнему требованию и функции Хаара, и функции Литлвуда – Пелли не попадают под определение вейвлетов. По сути, они являются двумя предельными случаями (в одном случае резкие границы в физическом пространстве приводят к бесконечным, в принципе, хвостам в пространстве частот, и, наоборот, обрыв в пространстве частот дает длинные хвосты в физическом пространстве в другом).

В отличие от преобразования Фурье вейвлет-преобразование допускает широкий выбор анализирующей функции. Согласно первому требованию вейвлет всегда является знакопеременной функцией, включающей обычно небольшое количество осцилляций. Выбор конкретного вида вейвлета зависит от целей проводимого анализа.

Приведем несколько примеров широко используемых вейвлетов. Простым вещественным вейвлетом, широко применяемым в задачах, требующих хорошего пространственного разрешения и не требовательных к спектральному разрешению, является вейвлет, получивший название "мексиканская шляпа" (рис. 3.2),

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}. \quad (3.4)$$

Его фурье-образ симметричен (функция вещественна) и демонстрирует недостатки такого вейвлета, обуславливающие его низкое спектральное разрешение – максимумы очень широкие и тянутся до начала координат. По-

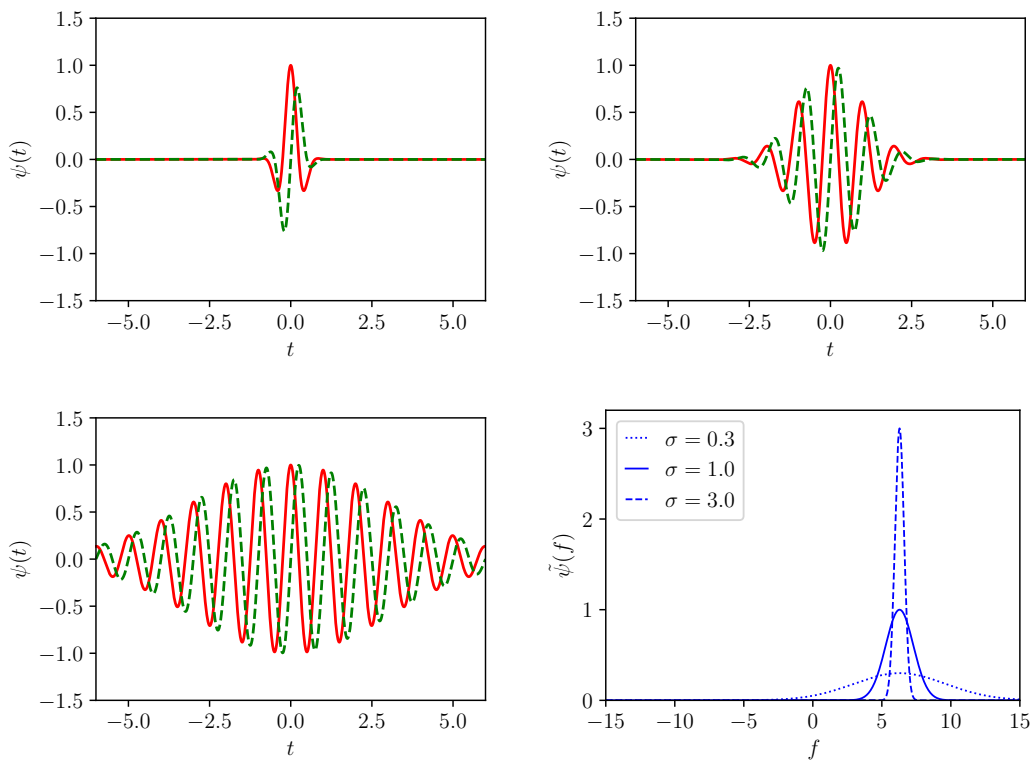


Рис. 3.3. Вейвлет Морле для $\sigma = 0.3$ (вверху слева), $\sigma = 1$ (вверху справа) и $\sigma = 3$ (внизу слева). Действительная часть показана красной линией, мнимая - зеленой штриховой. Фурье-образы показаны внизу справа: $\sigma = 0.3$ (пунктир), $\sigma = 1$ (сплошная) и $\sigma = 3$ (штриховая)

следнее обстоятельство приводит к тому, что вейвлеты разного масштаба обязательно перекрываются в области низких частот.

В задачах, требующих лучшего спектрального разрешения, часто используется комплексный вейвлет Морле, который запишем в виде

$$\psi(t) = e^{2\pi i t} e^{-t^2/2\sigma^2}. \quad (3.5)$$

Оригинальный вейвлет, предложенный Ж.Морле, получается из (3.5), если принять $\sigma = 1$. В общем случае (3.5) дает целое семейство анализирующих вейвлетов, зависящих от параметра σ , который определяет затухание колебаний (число колебаний). При малых σ число осцилляций уменьшается и соответственно падает спектральное разрешение вейвлета. На рис. 3.3 показан вейвлет Морле и его фурье-образ для трех значений σ . При $\sigma = 0.3$ действительная часть вейвлета становится похожей на мексиканскую шляпу, но вейвлет остается комплексным. Следует заметить, что при малых σ далеко не при каждом значении этого параметра выполняется условие равенства нулю среднего для действительной части вейвлета (мнимая часть нечетна и удовлетворяет этому условию автоматически). Именно эту проблему демонстрирует фурье-образ, который при $\sigma = 0.3$ пересекает ось ординат, т.е. он отличен от нуля при $f = 0$. Стандартный вейвлет Морлет ($\sigma = 1$) показан на рисунке справа. Его фурье-образ хорошо локализован в окрестности основной частоты. При $\sigma > 1$ спектральное разрешение растёт (показан вейвлет для $\sigma = 3$), и при $\sigma \rightarrow \infty$ функция $\psi(t)$ стремится к гармонической, а вейвлет-преобразование – к преобразованию Фурье.

Сама функция (3.5) совпадает с видом функций, используемых в преобразовании Габора, но семейство вейвлетов отличается от функций Габора тем, что, один раз выбрав σ и задав тем самым частоту ω_0 для анализирующего вейвлета, мы в дальнейшем сжимаем или растягиваем функцию как целое, не нарушая подобия отдельных функций семейства.

Вопрос о выборе конкретного вида анализирующего вейвлета часто является ключевым и определяет успешность применения вейвлет-анализа. Критерии выбора вейвлета станут понятны из дальнейшего изложения. На данном этапе важно подчеркнуть, что выбор вейвлета определяется структурой сигнала и целями анализа, поэтому универсального вейвлета "лучшего во всех отношениях" нет и быть не может.

3.2 Непрерывное вейвлет-преобразование

Непрерывное вейвлет-преобразование одномерной функции $x(t)$ есть

$$w_x(a, b) = a^\kappa \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (3.6)$$

где $\psi(t)$ — анализирующий вейвлет (в общем случае комплексный), представляющий собой осциллирующую функцию, среднее значение которой равно нулю, локализованную как в физическом пространстве, так и в пространстве Фурье. Если $\tilde{\psi}(\omega) = \int \psi(t) e^{-i\omega t} dt$ есть фурье-образ анализирующего вейвлета и выполнено условие

$$C_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (3.7)$$

то для преобразования (3.6) существует формула обращения

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) w_x(a, b) \frac{da db}{a^{3+\kappa}}. \quad (3.8)$$

Условие (3.7) эквивалентно условию (3.1) о равенстве нулю среднего значения вейвлет-функции $\langle \psi(t) \rangle = 0$, так как интеграл (3.7) расходится при наличии в спектре вейвлета нулевых частот, что равносильно отличному от нуля среднему значению. В определении (3.6) присутствует параметр κ — показатель степени масштабного множителя. Конкретный выбор этого параметра зависит от целей анализа. Широко используется нормировка $\kappa = -1$, при которой равные значения вейвлет-коэффициентов $w_x(a, b)$ соответствуют равным амплитудам пульсаций сигнала, независимо от масштаба пульсаций.

Вейвлет-образ $w_x(a, b)$ функции $x(t)$ можно выразить и через ее фурье-образ $\tilde{x}(\omega)$. Действительно,

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{\psi}(a\omega) w_x(a, b) e^{-i\omega b} \frac{da db}{a^{2+\kappa}}, \quad (3.9)$$

а

$$w_x(a, b) = \frac{a^{\kappa+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{\psi}^*(a\omega) \tilde{x}(\omega) e^{ib\omega} d\omega. \quad (3.10)$$

Пользуясь соотношениями (3.9)–(3.10) и теоремой Парсеваля (1.14), не сложно получить аналог этой теоремы для вейвлет-преобразования

$$\int_{-\infty}^\infty x(t) y^*(t) dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w_x(a, b) w_y^*(a, b) \frac{da db}{a^{3+2\kappa}}, \quad (3.11)$$

из которого, в частности, следует

$$\int_{-\infty}^\infty |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\tilde{x}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |w_x(a, b)|^2 \frac{da db}{a^{3+2\kappa}}. \quad (3.12)$$

Напомним, что в фурье-анализе спектральной плотностью энергии является величина $S_{xx}(\omega) = |\tilde{x}(\omega)|^2$ (называемая также спектром энергии) и введем величину

$$M(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |w_x(a, b)|^2 db, \quad (3.13)$$

которая характеризует интенсивность *всех* пульсаций заданного масштаба. Если в определении вейвлет-преобразования положить $\kappa = -1/2$, то формулу (3.12) можно переписать в виде

$$\int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} M(a) \frac{da}{a^2}. \quad (3.14)$$

В этом случае $M(a)$ описывает распределение энергии пульсаций по временным масштабам (частотам) и называется интегральным вейвлет-спектром. Из сказанного следует, что нормировка $\kappa = -1/2$ должна использоваться, если результаты вейвлет-анализа предполагается сопоставлять с фурье-представлением сигнала. Действительно, если фурье-спектр следует степенному закону $S_{xx}(\omega) \sim \omega^\alpha$, то при этой нормировке интегральный вейвлет-спектр будет иметь тот же степенной закон $M(a) \sim a^{-\alpha} \sim \omega^\alpha$ (это следует из формулы (3.14) с учетом того, что $\omega \sim 1/a$, а $d\omega \sim -da/a^2$).

Вейвлет-преобразование отображает пространство функций одной переменной (время) в пространство функций двух переменных (время и частота, или время и масштаб) и является избыточным. Избыточность непрерывного вейвлет-преобразования выражается в коррелированности вейвлет-коэффициентов, которая тем больше, чем больше рассматриваемый масштаб a . Иначе говоря, чем больше масштаб, тем меньше независимых точек в вейвлет-разложении. Этот недостаток устраняется в дискретном вейвлет-представлении, в котором число функций геометрически уменьшается с ростом пространственного масштаба.

Преимущество вейвлет-преобразования перед преобразованием Фурье состоит в том, что оно позволяет проследить за изменением спектральных свойств сигнала со временем, указать, какие частоты (масштабы) доминируют в сигнале в каждый конкретный момент времени. На рис. 3.4 показаны два примера вейвлет-разложения простых временных сигналов с помощью вейвлета Морле. В верхней части рисунка показан модуль вейвлет-образа на плоскости (a, b) , в средней части – фаза, а в нижней – сам сигнал. В первом примере (слева) сигнал представляет собой суперпозицию двух гармоник, а во втором сигнале (справа) эти же две частоты появляются последовательно друг за другом. Спектры Фурье этих двух сигналов прак-

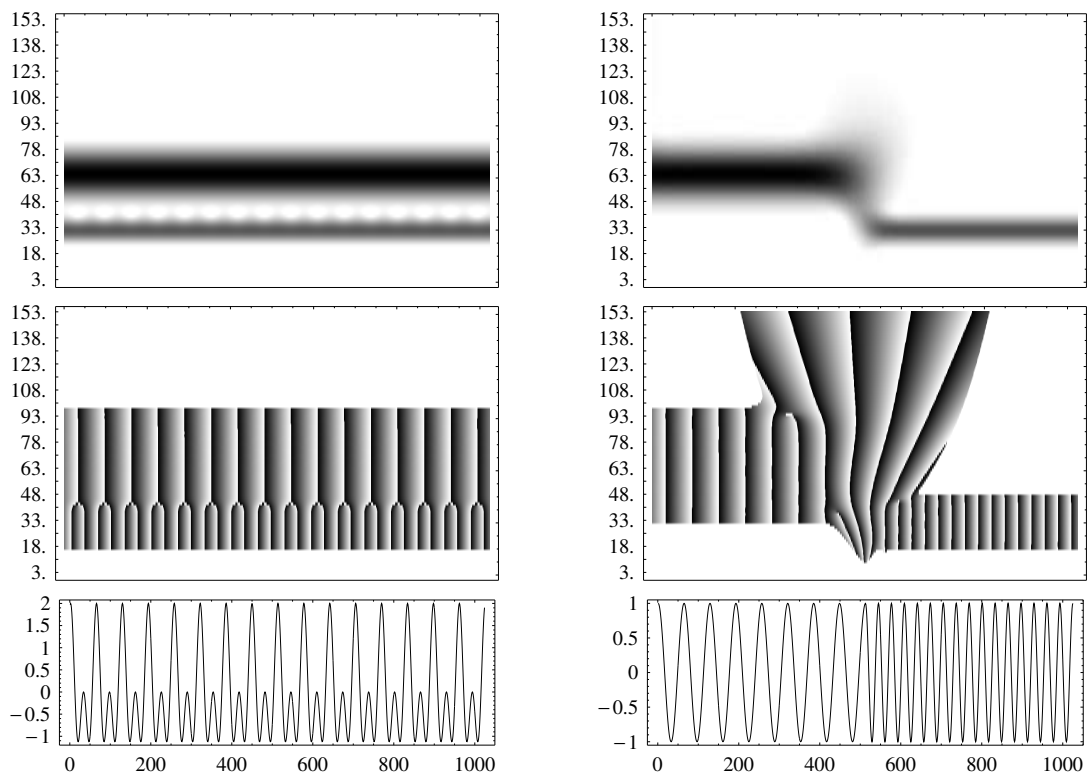


Рис. 3.4. Модуль (верхние панели) и фаза (средние) вейвлет-образов двух сигналов (нижние панели), представляющих собой параллельную либо последовательную комбинацию двух гармонических сигналов. Расчет выполнен с помощью вейвлета Морле, $\sigma = 1$

тически не отличаются друг от друга, так как спектр Фурье теряет всякую информацию о том, когда какая гармоника присутствовала в сигнале. Вейвлет-представление позволяет проанализировать эволюцию спектрального состава сигнала во времени. Спектрально-временную структуру сигнала можно оценить по распределению модуля вейвлет-образа (такие поля обычно называют вейвлет-спектрограммами). Ширина полосы, получаемой при разложении гармонического сигнала, характеризует спектральное разрешение используемого анализирующего вейвлета. Распределение фазы вейвлет-преобразования менее информативно, особенно для сложных сигналов. В то же самое время именно фаза дает наиболее точную информацию об особенностях (сингулярностях) в сигнале. Так, на рис. 3.4 можно видеть, что именно по распределению фазы можно с большой точностью идентифицировать момент смены частоты во втором примере.

На следующем рисунке показан реальный сигнал, в котором требуется увидеть изменения в режиме колебаний. Речь идет об анализе работы кровеносной системы человека. На рис. 3.5 представлены электрокардиограмма сердца и запись с датчика периферийного кровотока в пальце во время теста с задержкой дыхания. На этом же рисунке приведены вейвлет-спектрограммы каждого сигнала и поле фаз. Важно то, что характер изменения самих исходных сигналов в момент задержки дыхания совершен-

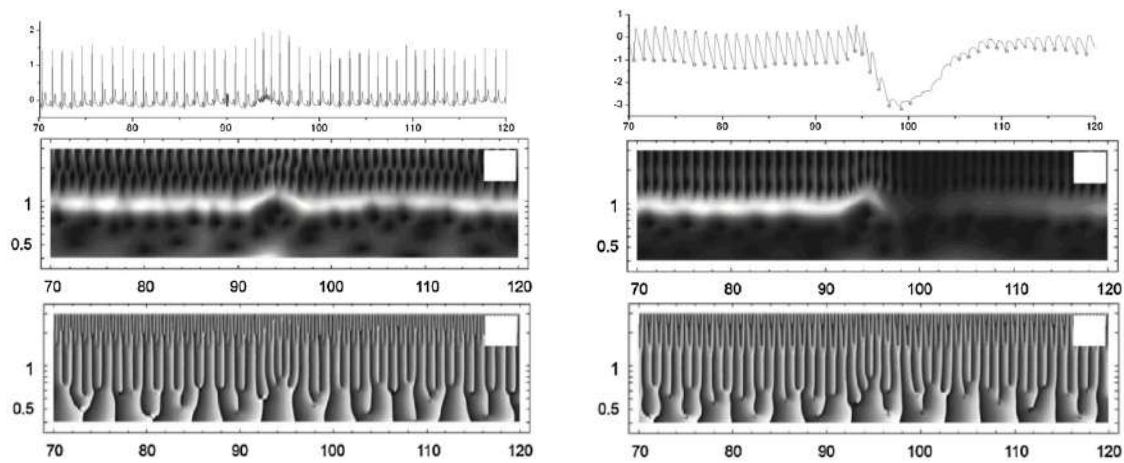


Рис. 3.5. ЭКГ сердца и скорость кровотока в пальце во время теста с задержкой дыхания (верхние графики), вейвлет-спектрограммы (средние) и фаза (нижние). Расчет выполнен с помощью вейвлета Морле, $\sigma = 1$

но различен, но изменение основного сердечного ритма воспроизводится одинаковым образом (учащение сердцебиения вблизи 94-ой секунды). На спектрограмме второго сигнала хорошо видно сильное ослабление пульсовой волны в периферийном кровотоке. При этом сигнал в какой-то момент становится настолько слаб, что на спектрограмме становится проблематично определить частоту пульса. В этом случае полезной становится информация о фазе колебания – по полю фазы легко определить точное значение частоты колебаний, так как период есть время между последующими переходами фазы через ноль (грань белого и черного).

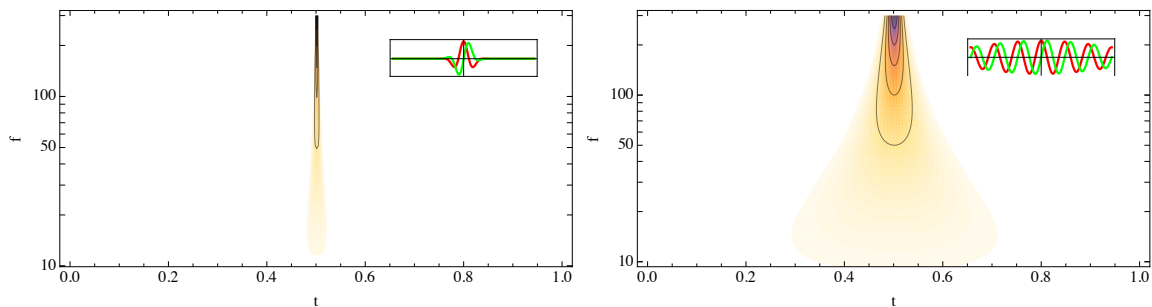


Рис. 3.6. Вейвлет-спектрограммы дельта-функции, полученные с помощью вейвлета Морле: $\sigma = 0.3$ (слева) и $\sigma = 3$ (справа)

Благодаря конечным размерам вейвлета каждая точка сигнала дает вклад в вейвлет-образ в конечном интервале, определяемом свойствами вейвлета (его временным разрешением) и масштабом времени a , на котором ведется разложение. Это хорошо иллюстрирует рис. 3.6, на котором показан результат вейвлет-разложения дельта функции. Напомним, что ее спектр Фурье плоский (белый шум), т.е. в фурье-образе все частоты представлены с одинаковой энергией. На вейвлет-спектрограмме дельта-функция отображается конусом, угол раскрытия которого определяется

протяженностью вейвлета (на рисунке можно сравнить конусы, даваемые вейвлетами Морле с различными значениями параметра σ). Вейвлет-образ дельта-функции показывает так называемый "конус влияния" отдельной точки, который очерчивает область на плоскости параметров (a, b) , в которой эта точка дает вклад в вейвлет-образ сигнала (при заданном виде анализирующего вейвлета). Если мысленно перенести дельта-функцию на границу анализируемого интервала, то на вейвлет-плоскости будет очерчена область влияния границы, которая, естественно, также зависит от масштаба a . При представлении вейвлет-спектрограмм сигналов, включающих весь интервал регистрации сигнала, следует показывать область влияния границы (ее обычно затемняют либо, наоборот, оставляют светлой).

Пример с дельта-функцией иллюстрирует важность правильного выбора временного разрешения анализирующего вейвлета. Покажем, что вопрос адекватного выбора спектрального разрешения не менее важен. Обратимся к рис. 3.7, на котором представлены вейвлет-спектрограммы сигнала, представляющего собой суперпозицию двух гармонических составляющих, частота одной из которых непрерывно меняется. Вновь использован вейвлет Морле с различным разрешением. При $\sigma = 0.3$ спектральное разрешение вейвлета низко и спектрограмма выглядит как последовательность пятен с некоторой дополнительной структурой на высокочастотной границе. При $\sigma = 1$ спектральное разрешение лучше и его достаточно, чтобы разделить две гармоники на правой границе, где разница частот выше, но недостаточно для их разделения на левом краю. Увеличивая спектральное разрешение ($\sigma = 3$, последняя панель на рисунке), можно четко разделить две гармоники на всем рассматриваемом интервале. Вейвлет-спектрограмма позволяет оценить с высокой точностью частоту каждой гармоники в любой момент времени.

Последний пример касается применения действительного вейвлета типа "мексиканская шляпа" (3.4). На рис. 3.8 показана спектрограмма, полученная с его помощью при обработке сигнала, представляющего собой набор одиночных всплесков различной продолжительности, но одинаковой амплитуды. Такой вейвлет хорош как раз для идентификации изолированных всплесков (длинный волновой пакет будет реагировать на одиночный всплеск каждым своим гребнем и даст в отклике размазанный образ). В этом случае результатом преобразования является действительная величина, модуль которой показан на рисунке. Белые полосы на вейвлет-спектрограмме, неизбежно появляющиеся при работе с вещественными функциями, соответствуют смене знака действительного вейвлет-образа и содержат, по сути, информацию, которую в комплексном представлении несет фаза.

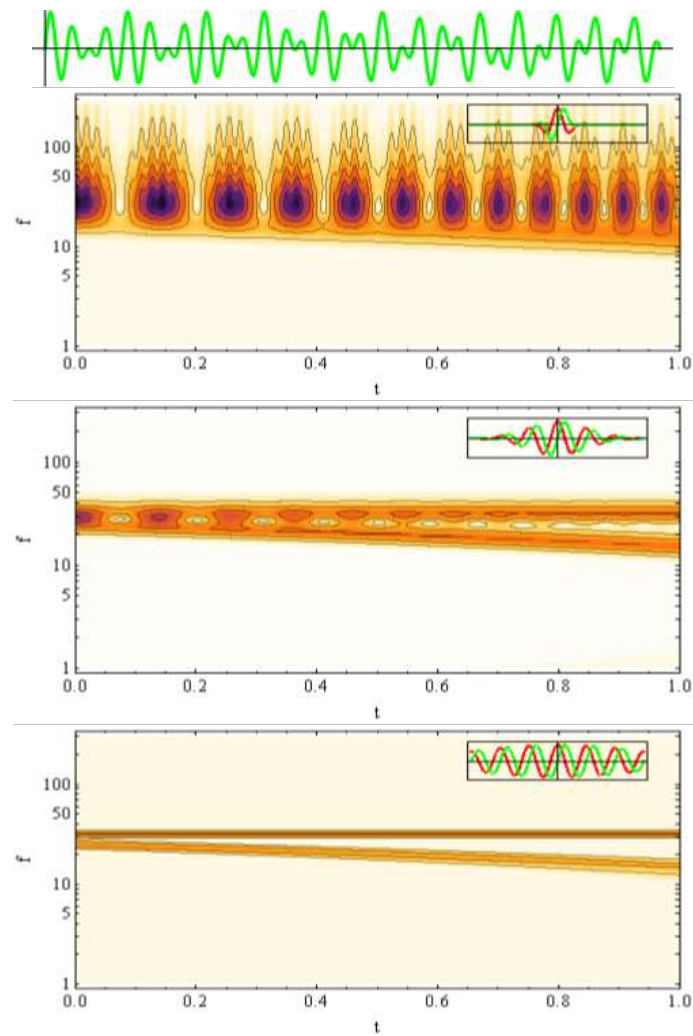


Рис. 3.7. Сигнал (наверху), образованный двумя гармониками с близкими частотами, одна из которых меняется со временем, и его вейвлет-спектрограммы, полученные с помощью вейвлета Морле: $\sigma = 0.3$, $\sigma = 1$ и $\sigma = 3$ (сверху вниз)

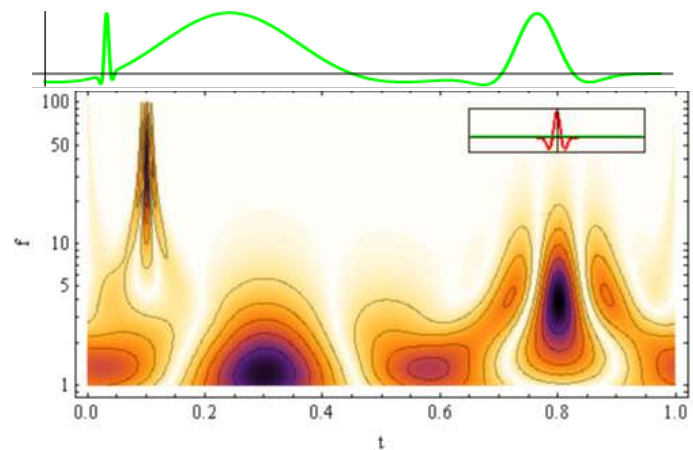


Рис. 3.8. Сигнал и его вейвлет-спектрограмма, полученная с помощью вейвлета ”мексиканская шляпа”

В заключение отметим важное свойство вейвлет-представления сигналов, состоящее в том, что на этапе разложения сигнала по вейвлетам (анализа) и этапе восстановления исходного сигнала по его вейвлет-образу

(синтеза) можно использовать различные семейства вейвлетов. Пусть для анализа используется вейвлет $\psi(t)$, а для синтеза – вейвлет $\varphi(t)$. Тогда прямое преобразование по-прежнему описывается выражением (3.6), а формула восстановления сигнала (3.8) примет вид

$$x(t) = \frac{1}{C_{\psi\varphi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) w_x(a, b) \frac{da db}{a^{3+\kappa}}. \quad (3.15)$$

Восстановление (3.15) возможно, если выполнено условие

$$C_{\varphi\psi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\tilde{\psi}(\omega) \tilde{\varphi}^*(\omega)}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Это условие мягче, чем условие (3.7), так как теперь один из двух вейвлетов может и не удовлетворять требованию (3.7) при условии, что его «недостатки» компенсирует вейвлет, используемый на втором этапе. Преимущество восстановления по формуле (3.15) состоит в том, что она позволяет использовать на одном из этапов преобразования сингулярную функцию (например, δ -функцию), которая сама по себе не попадает под определение вейвлета.

3.3 Дискретное вейвлет-преобразование

Говоря о спектральном анализе, мы подчеркивали, что разложение в ряд является *дискретным* преобразованием Фурье, так как в спектре может присутствовать только дискретный набор частот, а представление сигнала интегралом является *непрерывным* преобразованием Фурье. Изучение вейвлет-анализа мы начали с *непрерывного* вейвлет-преобразования, в котором оба параметра a и b могут изменяться непрерывно. Наряду с непрерывным вейвлет-преобразованием можно рассмотреть разложение по конечному набору вейвлет-функций, заданных на некоторой сетке в пространстве параметров (a, b) и получаемых определенным масштабным преобразованием. Если ограничиться логарифмическим масштабированием и равномерной для заданного масштаба пространственной сеткой, то семейство базисных функций для одномерного сигнала можно записать в виде

$$\psi_{Mm} = \psi\left(\frac{t - mba^M}{a^M}\right),$$

для которого доказана возможность получения полного ортогонального функционального базиса. Последнее возможно не при любом выборе значений величин a и b . Наиболее естественным представляется разбиение спектрального пространства на октавы, что соответствует случаю $a = 2$.

Краткое изложение принципов и особенностей дискретного преобразования предварим некоторыми замечаниями общего плана. Прежде всего, напомним, что мы рассматриваем особенности применения аппарата Фурье и вейвлет-преобразований в контексте *анализа* экспериментальных и наблюдательных данных. При применении на практике методов фурье-анализа львиная доля данных обрабатывается в конечном итоге с помощью алгоритмов дискретного преобразования. В вейвлет-анализе все наоборот. Несмотря на наличие хорошо проработанного математического аппарата дискретного вейвлет-преобразования, подкрепленного развитым программным обеспечением, в задачах анализа данных физических экспериментов доминирует непрерывное вейвлет-преобразование [7]. Связано это, прежде всего, с тем, что дискретные вейвлет-базисы строятся на основе функций достаточно специфического вида, а выбор вейвлет-функции, как уже не раз подчеркивалось, играет в вейвлет-анализе очень важную роль. Кроме того, все распространенные дискретные вейвлет-базисы подразумевают очень грубую разбивку по масштабам (частотам), а именно одна точка на октаву. Для анализа это, как правило, слишком грубо.

Дискретное вейвлет-преобразование играет важную роль при обработке больших баз данных, оно незаменимо при оптимизации формата записи (компрессии) данных. Алгоритмы дискретного вейвлет-преобразования включены во многие коммерческие пакеты, и нужно понимать, что и как можно делать с их помощью, а что лучше сделать с помощью алгоритмов непрерывного преобразования, которые существенно медленнее и требуют больших вычислительных ресурсов, но могут быть значительно лучше приспособлены под конкретный анализ конкретных данных.

Итак, для одномерной функции $x(t)$ разложение в ряд по вейвлет-базису имеет вид

$$x(t) = \sum_{M=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{Mm} \psi_M(t - m \cdot 2^M), \quad (3.16)$$

где

$$\psi_M(t) = 2^{-M/2} \psi(t/2^M).$$

Здесь и далее в данном параграфе принята нормировка $\kappa = -1/2$, и для удобства записи эта нормировка включена в определение вейвлета.

Задача о выборе функции $\psi(t)$, обеспечивающей ортогональность разложения (3.16), т. е. соблюдение условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_M(t - m \cdot 2^M) \psi_N(t - n \cdot 2^N) dt = \delta_{NM} \delta_{nm} \quad (3.17)$$

далеко не тривиальна. Условиям (3.15)–(3.17) соответствуют, правда, и давно известные функции Хаара, но их недостатком является плохая локализация в фурье-пространстве. Большинство приложений дискретного вейвлет-анализа основано на функциях Добеши [8], придуманных специально для этой цели. Семейство функций Добеши замечательно тем, что функция порядка n определена на конечном интервале, за пределами которого она тождественно равна нулю, и, в то же время, функция n раз дифференцируема (функции Добеши нулевого порядка совпадают с функциями Хаара). Плата за это – несимметричность функций. На рис. 3.9 в качестве примера показаны функция Добеши пятого порядка и ее фурье-образ.

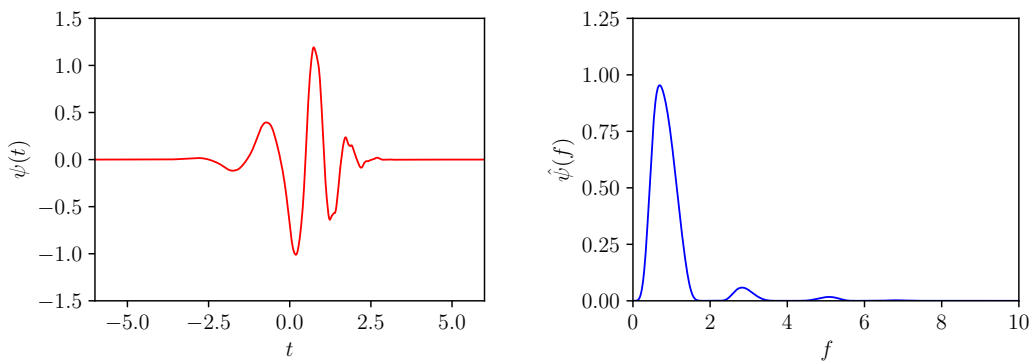


Рис. 3.9. Функция Добеши 5-го порядка (слева) и ее фурье-образ (справа)

Дискретное преобразование вводится для функции $x(t)$, заданной на равномерной сетке $t_i = i\Delta t$, где Δt – шаг сетки. Обозначая $x_i = x(t_i)$ и считая $\Delta t = 1$, запишем вместо (3.16)

$$x_i = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{Mm} \psi_M(i - m \cdot 2^M), \quad (3.18)$$

где коэффициенты w_{Mm} определяются как

$$w_{Mm} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \psi_M(i - m \cdot 2^M),$$

а условие сохранения энергии принимает вид

$$\sum_{M=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{Mm}^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i^2.$$

Функция $\psi_M(i)$, являющаяся дискретным аналогом функции $\psi(t)$, должна, вместо (3.17), удовлетворять условию

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_M(i - m \cdot 2^M) \psi_N(i - n \cdot 2^N) = \delta_{NM} \delta_{nm}. \quad (3.19)$$

Переход от функции $\psi_M(t)$ к ее дискретной версии $\psi_M(i)$ требует дополнительных пояснений, связанных с тем, что выборка x_i производится не с помощью δ -функций, а с помощью некоторой сглаживающей функции $\phi(t)$.

Процедуру построения дискретного вейвлет-преобразования рассмотрим более подробно на примере алгоритма Малла [9] с переменным разрешением (multiresolution wavelet algorithm), который последовательно вычисляет коэффициенты разложения, переходя от меньших масштабов к большему.

Пусть исходная функция $x(t)$ принадлежит пространству интегрируемых в квадрате функций $L^2(R)$. Обозначим подпространство функций, аппроксимирующих $L^2(R)$ с разрешением $a_M = 2^M$ как V_M . При этом $V_{M+1} \subset V_M$. Построение начинается с разрешения $a_0 = 1$ ($M = 0$). Отметим, что увеличению индекса M соответствует переход к большим масштабам (более грубому разрешению). Обозначаем за f^M соответствующую аппроксимацию функции x . На практике функция x^0 с точностью до заданной погрешности совпадает с x и служит исходной для начала вычислений.

Предполагаем наличие базисных функций $\phi^0(t - i)$, которые только путем сдвига вдоль оси создают полный ортонормированный базис в пространстве V_0

$$x^0(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i^0 \phi^0(t - i), \quad (3.20)$$

где s_i^0 – коэффициенты разложения

$$s_i^0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^0(t) \phi^0(t - i) dt. \quad (3.21)$$

$\phi(t)$ есть быстро убывающая функция, что позволяет интерпретировать коэффициенты s_i^0 как дискретную выборку функции x^0 с разрешением на сетке с шагом $a = 1$. Условие ортогональности есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^0(t - i) \phi^0(t - j) dt = \delta_{ij}. \quad (3.22)$$

При переходе к более грубому разрешению $a_M = 2^M$ используется пространство V_M , описываемое базисом ϕ_M , функции которого получаются растяжением исходной функции ϕ_0

$$\phi^M(t) = 2^{-M/2} \phi^0(2^{-M}t). \quad (3.23)$$

Дискретная выборка функции $f^0(t)$ с разрешением $a_M = 2^M$ есть набор коэффициентов s_i^M

$$s_i^M = \int_{-\infty}^{\infty} f^0(t) \phi^M(t - 2^M i) dt. \quad (3.24)$$

Поскольку $V_{M+1} \subset V_M$, то базисные функции масштаба $M+1$ можно выразить через базисные функции масштаба M :

$$\begin{aligned} \phi^{M+1}(t - 2^{M+1}i) &= \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi^{M+1}(t' - 2^{M+1}i) \phi^M(t' - 2^M j) dt' \right] \phi^M(t - 2^M j) \end{aligned}$$

или

$$\phi^{M+1}(t - 2^{M+1}i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j-2i} \phi^M(t - 2^M j), \quad (3.25)$$

где

$$h_k = 2^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^0(t'/2) \phi^0(t' - k) dt'. \quad (3.26)$$

Из (3.25) следует, что коэффициенты s^{M+1} можно определить, используя только коэффициенты s^M :

$$s_i^{M+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j-2i} s_j^M. \quad (3.27)$$

Переход от s^M к s^{M+1} соответствует очередному огрублению исходных данных путем их выборки из последовательности s^M с весовой функцией h . С увеличением числа точек количество операций растет только геометрически, и (3.26)–(3.27) служит основой быстрого вейвлет-преобразования (БПВ, по аналогии с быстрым преобразованием Фурье – БПФ).

Очевидно, что функции ϕ^{M+1} не могут быть ортогональными функциям ϕ^M , так как образуемое ими пространство V_{M+1} содержится в пространстве V_M . Основная идея алгоритма БПВ состоит в вычислении коэффициентов вейвлет-разложения путем использования разности информации, содержащейся в различных масштабах. Соответствующее пространство обозначается как O_{M+1} . O_{M+1} ортогонально V_{M+1} ($O_{M+1} \perp V_{M+1}$), а O_{M+1} и V_{M+1} составляют V_M ($O_{M+1} \oplus V_{M+1} = V_M$). Вейвлет $\psi^{M+1}(x - 2^{M+1}i)$ определяется как базисная функция для пространства O_{M+1} . При этом остается справедливым соотношение типа (3.23):

$$\psi^M(t) = 2^{-M/2} \psi^0(2^{-M}t), \quad (3.28)$$

предполагающее, что совокупность функций ψ^{M+1} образует ортонормальный базис в O_{M+1} . Тогда совокупность всех ψ^M ($M = 0, 1, 2 \dots$) образует полный ортогональный базис для V_0 .

Коэффициенты вейвлет-разложения есть

$$w_i^M = \int_{-\infty}^{\infty} x^0(t) \psi^M(t - 2^M m) dt, \quad (3.29)$$

а так как функции ψ^{M+1} относятся к пространству O_{M+1} , а $O_{M+1} \subset V_M$, то

$$\begin{aligned} \psi^{M+1}(t - 2^{M+1}i) &= \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{M+1}(t' - 2^{M+1}i) \phi^M(t' - 2^M j) dt' \right] \phi^M(t - 2^M j), \end{aligned}$$

что приводит к формуле

$$w_i^{M+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{j-2i} s_j^M, \quad (3.30)$$

где

$$g_k = 2^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^0(t'/2) \phi^0(t' - k) dt'. \quad (3.31)$$

Видно, что для определения коэффициентов вейвлет-представления данного масштаба требуются не исходные данные, а только результаты, полученные для предыдущего масштаба.

При восстановлении функции x процесс идет от крупных масштабов к мелким и на каждом шаге

$$s_i^M = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [h_{i-2j} s_j^{M+1} + g_{i-2j} w_j^{M+1}]. \quad (3.32)$$

Следует указать также связь между коэффициентами g_k , h_k и дискретной формой вейвлет-функции $\psi^M(k)$. Так как

$$w_i^{M+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{j-2i} s_j^M = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{j-2i} h_{k-2j} s_k^{M-1} = \dots,$$

то, в конечном итоге,

$$w_i^{M+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi^M(j - 2^M i) s_j^0, \quad (3.33)$$

где

$$\psi^M(j - 2^M i) = \sum_{j^{(M-1)}} h_{j^{(M)} - 2j^{(M-1)}} \sum_{j^{(M-2)}} \dots \sum_{j^{(1)}} h_{j^{(2)} - 2j^{(1)}} g_{j^{(1)} - 2i}.$$

Остановимся теперь на вопросе о выборе конкретных функций ψ и φ . Выше для них были сформулированы следующие требования:

1) все вейвлет-функции ортонормальны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_M(t - m \cdot 2^M) \psi_N(t - n \cdot 2^N) dt = \delta_{NM} \delta_{nm}, \quad (3.34)$$

2) сглаживающие функции $\phi^M(t - 2^M i)$ ортонормальны для заданного значения M :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^M(t - 2^M i) \phi^M(t - 2^M j) dt = \delta_{ij}, \quad (3.35)$$

3) вейвлет-функции ортогональны сглаживающим функциям того же масштаба:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^M(t - 2^M i) \psi^M(t - 2^M j) dt = 0. \quad (3.36)$$

Приведем примеры ортогональных вейвлетов и соответствующих им дискретных фильтров h_i, g_i .

I. Простейшей ортогональной системой является, как уже отмечалось, система функций Хаара. Для нее

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq 0.5, \\ -1 & \text{при } 0.5 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{для прочих } t, \end{cases} \quad (3.37)$$

а сглаживающая функция ϕ

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{для прочих } t. \end{cases} \quad (3.38)$$

Дискретные фильтры для БПВ получаются из (3.26) и (3.31) и, соответственно, равны

$$h_0 = h_1 = g_0 = 2^{-1/2}, \quad g_1 = -g_0. \quad (3.39)$$

II. Другой предельный случай – функции Литлвуда-Пелли, для которых доказывается полнота и ортогональность. Их же называют иногда полосовыми фильтрами и, в последнее время, фурыелетами. Так как они

вырезают определенную полосу в пространстве Фурье, то удобнее и действия проводить в пространстве частот, а вместо h и g пользоваться их фурье-образами $\tilde{h}$ и $\tilde{g}$.

$$\tilde{h}(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{-ij\omega}, \quad \tilde{g}(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j e^{-ij\omega}.$$

Для них

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\omega) &= \begin{cases} \sqrt{2} & \text{при } -\pi/2 \leq \omega \leq \pi/2, \\ 0 & \text{при прочих } \omega, \end{cases} \\ \tilde{g}(\omega) &= \begin{cases} \sqrt{2}e^{ij\omega} & \text{при } \pi/2 \leq |\omega| \leq \pi, \\ 0 & \text{при прочих } \omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Нетрудно получить и соответствующие дискретные фильтры в физическом пространстве

$$\begin{aligned} h_j &= (\sqrt{2}/\pi j) \sin(\pi j/2), \\ g_j &= (2\sqrt{2}/\pi) \sin(\pi(j-1)/4) \cos(3\pi(j-1)/4). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Существенная нелокальность базисных функций в физическом пространстве делает более практичной реализацию быстрого алгоритма для фурье-образа исходного сигнала.

III. Вейвлет LMB. В фурье-пространстве

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\omega) &= e^{i\omega/2} \omega^{-n} [\Gamma_{2n}(\omega/(2+\pi)) \Gamma_{2n}^{-1}(\omega) \Gamma_{2n}^{-1}(\omega/2)]^{1/2}, \\ \tilde{\phi}(\omega) &= \omega^{-n} [\Gamma_{2n}(\omega)]^{-1/2}, \\ \tilde{h}(\omega) &= [2^{1-2n} \Gamma_{2n}(\omega) \Gamma_{2n}^{-1}(2\omega)]^{1/2}, \\ \tilde{g}(\omega) &= e^{-i\omega} \tilde{h}(\omega + \pi)^*, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где $\Gamma_n(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\omega + 2\pi m)^{-n}$.

IV. В качестве последнего примера приведем некоторые фильтры для семейства вейвлетов Добеши. Показаны таблицы значений для 4 и 8 точечных фильтров, соответствующих функциям Добеши первого и третьего порядков.

Четырехточечный фильтр Добеши:

$$\begin{aligned} h_0 &= (4\sqrt{2})(1 + \sqrt{3}), & h_1 &= (4\sqrt{2})^{-1}(3 + \sqrt{3}), \\ h_2 &= (4\sqrt{2})(3 - \sqrt{3}), & h_3 &= (4\sqrt{2})^{-1}(1 - \sqrt{3}), \\ g_0 &= h_3, & g_1 &= -h_2, & g_2 &= h_1, & g_3 &= -h_0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Восьмиточечный фильтр Добеши:

$$\begin{aligned}
 h_{-2} &= 0.230377813309, & g_{-2} &= h_5, \\
 h_{-1} &= 0.714846570553, & g_{-1} &= -h_4, \\
 h_0 &= 0.630880767930, & g_0 &= h_3, \\
 h_1 &= -0.27983769417, & g_1 &= -h_2, \\
 h_2 &= -0.187034811719, & g_2 &= h_1, \\
 h_3 &= 0.30841381836, & g_3 &= -h_0, \\
 h_4 &= -0.010597401785, & g_4 &= h_{-1}, \\
 h_5 &= -0.010597401785, & g_5 &= -h_{-2}.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

В заключении этого краткого экскурса в область дискретного вейвлет-преобразования еще раз отметим, что разработанный на его основе аппарат быстрого вейвлет-преобразования чрезвычайно эффективен при работе с большими массивами данных. В задачах анализа его приложение содержится достаточно специальным видом используемых анализирующих вейвлетов. При обработке данных физических экспериментов и наблюдений естественно желание опереться на понятный опыт спектрального анализа данных, который стимулирует использование функций, в каком-то смысле "похожих" на привычные и понятные гармонические функции. Это способствует популярности у физиков вейвлетов типа вейвлета Морле.

3.4 Пример 1. Анализ сигналов полиреокардиографа

Настоящее пособие предназначено для студентов, готовящихся к работе в самых различных областях науки и техники. Кажется важным показать универсальность описываемых методик обработки и анализа сигналов. Поэтому для иллюстрации возможностей вейвлет-анализа мы используем примеры из самых различных областей (от медицины до астрофизики), выбирая сигналы, характеризующие сложные нелинейные системы с запутанной временной динамикой. Прекрасным примером такой системы является человеческий организм, существование которого обеспечивается двумя квазипериодическими процессами - работой сердца и дыханием, на фоне и при непосредственном воздействии которых формируется целый спектр циклических процессов, связанных с жизнедеятельностью организма. Не касаясь и малой части вопросов обработки медицинских сигналов, мы покажем в качестве примера приложения вейвлет-анализа к исследованию временной изменчивости сложных систем. Конкретно, обратимся к результатам анализа сигнала полиреокардиографа, прибора для регистрации различных характеристик сердечной деятельности [10].

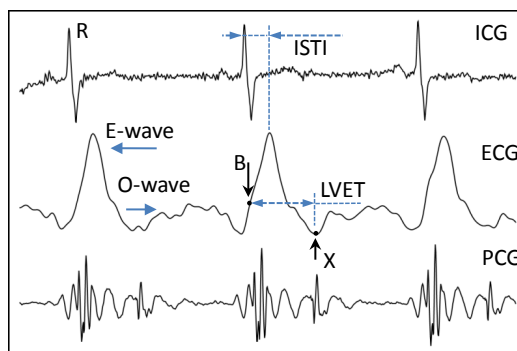


Рис. 3.10. Типичные сигналы полиреокардиографа: электрокардиограмма (ЭКГ), дифференциальная реокардиограмма (импедансная реокардиограмма – ИКГ) и фонокардиограмма (ФКГ)

Импедансная реокардиография (ИКГ) – простой, недорогой, неинвазивный метод изучения центральной гемодинамики, при помощи которого можно определить один из ее ключевых показателей – ударный объем (объем крови, поступающий в аорту при каждом сокращении сердца), а также оценить сердечный выброс (минутный объем кровообращения), общее периферическое сосудистое сопротивление, время изгнания крови из левого желудочка и другие параметры. Главный принцип метода основан на регистрации изменений электрического сопротивления биологических тканей при прохождении высокочастотного переменного тока.

Сигнал ИКГ имеет набор характерных точек и волн (на рис. 3.10 они обозначены как В, Е, Х, О). Эти точки связаны с различными физиологическими событиями в сердечном цикле. Точка В синхронизирована с первым тоном сердца, возникающим при закрытии атриовентрикулярных клапанов в самом начале систолы желудочков. Иногда определение локализации точки В проблематично, поскольку форма сигнала ИКГ в этой области не всегда четко выражена. Точка Е – это максимум на дифференциальной реограмме. Эта точка отражает максимальную скорость изменения импеданса, что, в свою очередь, связано с максимальной скоростью выброса, измеренного с помощью ультразвуковых методов. Точка Х соответствует захлопыванию полулунных клапанов в конце систолы желудочков (и второму тону сердца). Для ИКГ первый максимум (т.е. Е-волна) связан с систолической фазой сердечного цикла, а второй максимум (с меньшей амплитудой, О-волна) связан с диастолической фазой. Амплитуда Е-волны пропорциональна ударному объему, а амплитуда О-волны коррелирует с изменением объема левого предсердия во время фазы диастолы. В некоторых случаях амплитуда О-волны оказывается важным диагностическим параметром. Считается, что ударный объем пропорционален времени выброса и максимальному значению первой производной импеданса dZ / dt для данного цикла. Время изгнания крови из левого желудочка (LVET)

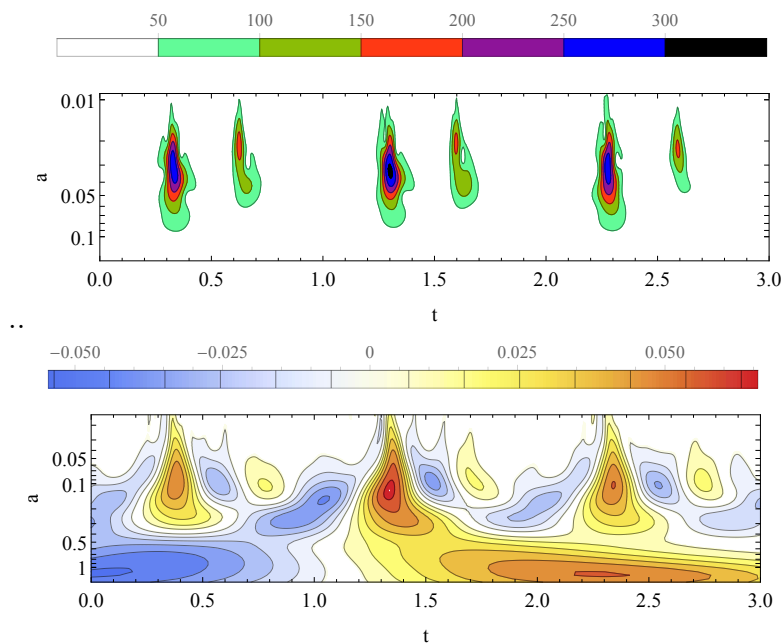


Рис. 3.11. Вейвлет-образы трех кардиоциклов по сигналам фонокардиографии (наверху) и импедансной реокардиографии (внизу)

определяется как временной интервал между открытием клапана аорты и его последующим закрытием.

Отметим, что вейвлеты широко применяются при анализе медицинских сигналов, но их использование почти всегда ограничивается фильтрацией, выполняемой в терминах дискретного вейвлет-преобразования. Возможности вейвлет-анализа существенно шире, и аппарат непрерывного вейвлет-преобразования может быть использован не только для фильтрации сигнала реокардиографа, но и для регуляризации процедур обработки исходных сигналов, исследования степени коррелированности сигналов в заданной полосе частот и определения количественных функциональных характеристик сердца, таких как ударный объем [10].

Характерные вейвлет-образы дифференциальной реограммы и фонокардиограммы трех последовательных кардиоциклов показаны на рис. 3.11. Хорошо видно, что, несмотря на то, что пациент находится в состоянии покоя, каждый из трех последовательных циклов имеет свой “портрет”. Протяженные структуры в нижней части вейвлет-спектрограммы звукового сигнала (ФКГ) соответствуют одному дыхательному циклу (вдох и выдох).

Традиционно ударный объем в ИКГ определяется как произведение максимума первой производной реограммы на время изгнания с соответствующими антропометрическими коэффициентами и учетом полного биоимпеданса. В стандартных методиках амплитуда Е-волны определяется после установки реограммы на изолинию, т.е. после компенсации дыхательных и двигательных артефактов. Использование подхода на основе вейвлет-

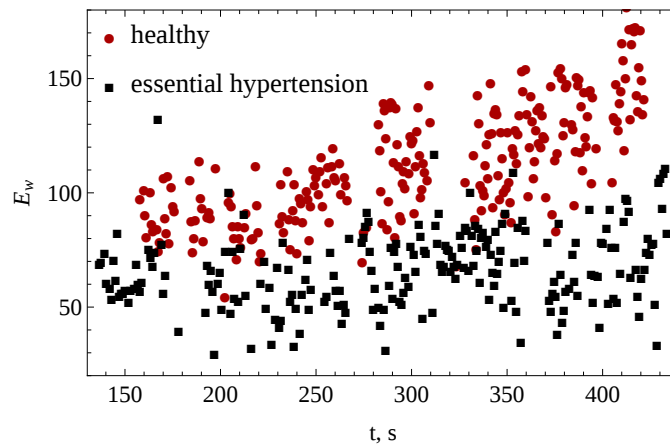


Рис. 3.12. Нагрузочный тест: вычисленная по результатам вейвлет-анализа зависимость интервала ISTI от RR-интервала для здоровых (красные точки) и больных (черные точки)

тов позволяет разделить пульсовую и дыхательную волны и использовать для определения амплитуды вейвлет-коэффициентов Е-волны, а для определения LVEТ – масштаб этой волны. Такой подход обеспечивает большую точность в сравнении с методом определения времени изгнания по характерным точкам дифференциальной реограммы. Параметр ISTI в рамках этого подхода определяется как временной интервал R-пиком ЭКГ и максимумом вейвлет-представления Е-волны.

Для верификации метода в работе [10] было проведено обследование 12 здоровых мужчин в возрасте от 20 до 25 лет, составивших группу контроля, и 14 пациентов с диагнозом эссенциальной гипертензии. Использовался метод полиреокардиографии, в котором одновременно с ИКГ регистрировались ЭКГ и фонокардиограмма. Во время регистрации полиреокардиограммы проводился нагрузочный изометрический тест – подъем ног из горизонтального положения и удержание под углом 30–45 градусов. Во время нагрузочного теста для здоровых пациентов регистрируется линейный рост амплитуд Е- и О-волны. После прекращения нагрузки (опускания ног в горизонтальное положение) амплитуды Е- и О-волны принимают начальные значения. Линейный рост ударного объема во время нагрузки соответствует нормальной физиологической реакции. Для пациентов с гипертензией наблюдаются слабо выраженные изменения амплитуд Е- и О-волны и укорочение интервала ISTI во время теста, что свидетельствует о серьезном нарушении компенсаторных механизмов. На рис. 3.12 показана связь длин интервала ISTI и интервала RR для здоровых и больных, свидетельствующая о том, что вейвлет-метод позволяет однозначно разделить эти группы.

3.5 Пример 2. Импульсное турбулентное течение в торе

В качестве второго примера покажем результаты исследования нестационарного турбулентного течения в замкнутом канале [11]. Работа выполнялась в контексте исследований эффектов генерации магнитных полей потоками проводящей жидкости (см. обзор [12]). Эти эффекты становятся заметными только при очень больших числах Рейнольдса. Число Рейнольдса $Re = UL/\nu$ определяется характерной скоростью потока U , характерным размером L и вязкостью жидкости ν и является параметром, характеризующим степень турбулизации течения жидкости. Для процессов генерации магнитного поля определяющим параметром является магнитное число Рейнольдса Rm , связанное с обычным (гидродинамическим) числом Рейнольдса Re через магнитное число Прандтля $Rm = Re \cdot Pm$. Эффекты генерации проявляются при $Rm \approx 1$, но проблема состоит в том, что магнитное число Прандтля $Pm = \nu/\eta$, которое есть отношение коэффициента кинематической вязкости к коэффициенту диффузии магнитного поля η , для жидких металлов очень мало ($Pm \approx 10^{-5}$) и для достижений требуемых магнитных чисел Рейнольдса нужно создать течение жидкого металла, характеризующееся огромными числами Рейнольдса. Поэтому и возникла идея создать короткое импульсное течение с требуемыми параметрами в тороидальном канале, заполненном жидким натрием. Канал радиусом 0.18 м и радиусом сечения 0.08 м раскручивался до скорости 50 оборотов в секунду, а затем тормозился за время 0.3 с. Возникающее тороидальное течение абсолютно неустойчиво, и в канале развивается турбулентное течение.

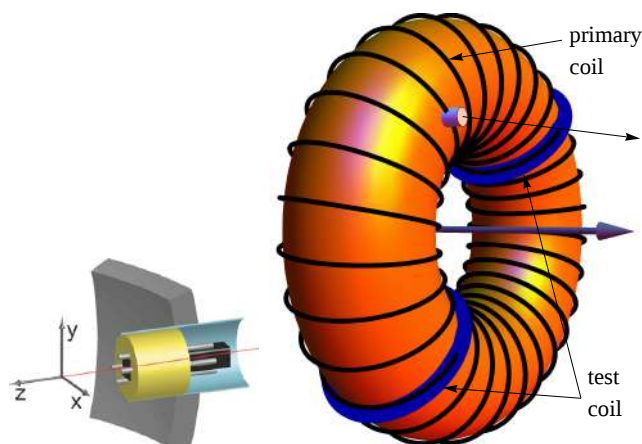


Рис. 3.13. Тороидальный канал и установленный в нем двухкомпонентный датчик скорости

Установленный в стенке канала кондукционный датчик скорости (рис. 3.13) позволяет регистрировать тороидальную (вдоль канала) и полоидальную (вдоль стенки, но поперек канала) компоненты скорости. Картину эволю-

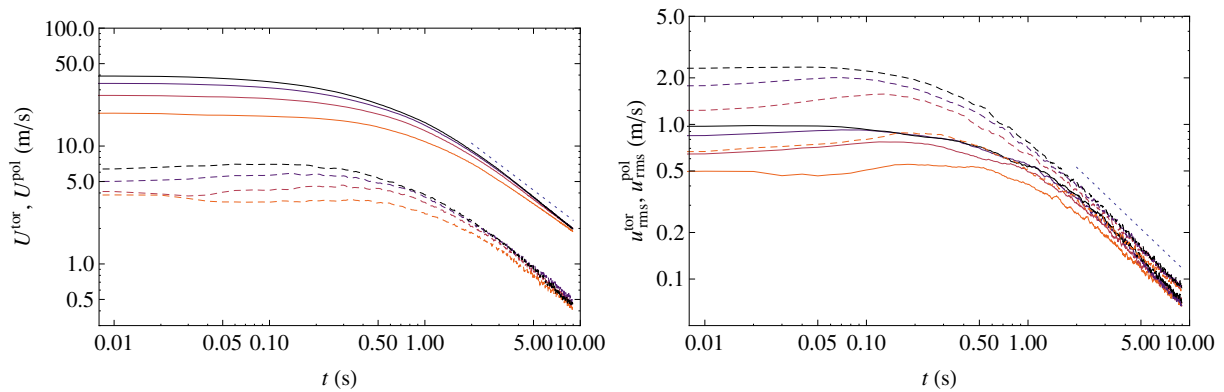


Рис. 3.14. Вырождение средней скорости (слева) и среднеквадратичных пульсаций скорости (справа) в импульсном течении жидкого натрия для различных скоростей вращения канала ($\Omega = 20, 30, 40$ и 50 об/с, меньше скорость – светлее линии). Сплошными линиями показана тороидальная скорость, штриховыми – полоидальная. Время отсчитывается от момента полной остановки канала. Пунктир соответствует закону t^{-1}

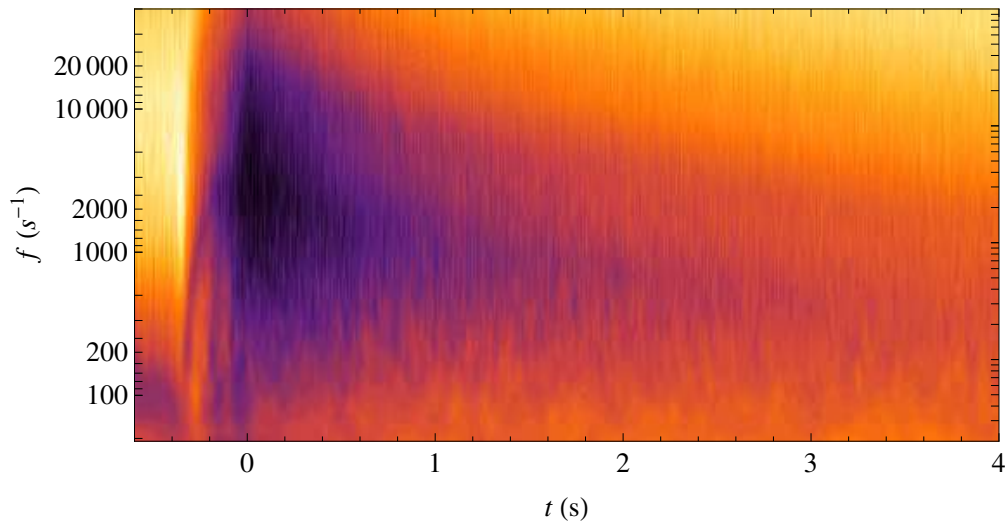


Рис. 3.15. Вейвлет-спектрограмма полоидальной компоненты скорости, полученная с помощью вейвлета Морле для скорости вращения канала $\Omega = 50$ об/с

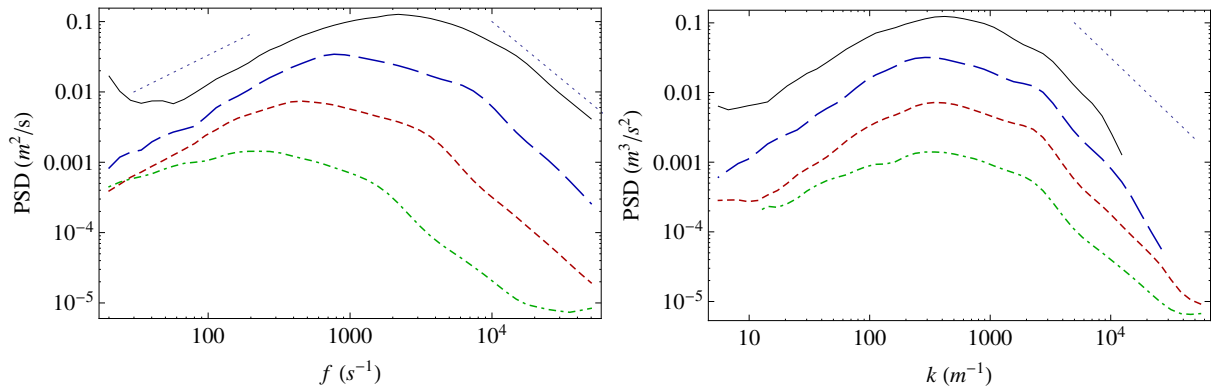


Рис. 3.16. Спектральные плотности энергии пульсаций скорости: временные спектры, полученные как вертикальные сечения вейвлет-спектрограммы (рис. 3.15), осредненные по интервалам между моментами времени $t = 0, 0.5, 1.5, 3.5, 7.5$ с (слева, сверху вниз); соответствующие пространственные спектры, пересчитанные по гипотезе Тейлора по средней тороидальной скорости потока для каждого момента времени (справа). Пунктиром показан закон Колмогорова “-5/3” для инерционного интервала и зависимость $S(f) \sim f$ для низкочастотной части спектра

ции средних значений обеих компонент скорости и среднеквадратичных значений пульсаций скорости иллюстрирует рис. 3.14 (отметим, что графики даны в двойных логарифмических координатах). Видно, что к концу торможения тороидальная скорость достигает значения 40 м/с (полоидальная – 7 м/с), но пульсации скорости доминируют в полоидальной компоненте скорости. Эволюция потока быстротечна – половина кинетической энергии диссипирует уже в первую секунду после окончания торможения. При $t > 1$ с пульсации скорости убывают по характерному для турбулентного вырождения закону $\sim t^{-1}$. Необходимо понять, как быстро формируется инерционный интервал (успевает ли развиваться турбулентность).

Ни о какой стационарности речи быть не может, и на помощь приходят вейвлеты. Спектрограмма полоидальной компоненты скорости, полученная с помощью вейвлета Морле, показана на рис. 3.15. Видно, что по окончании торможения происходит вспышка высокочастотных пульсаций с пиком на частотах $\sim 2 - 4$ кГц. Пятно заметно слабеет к исходу первой секунды, а частота, на которую приходится пик плотности энергии пульсаций, падает.

Вертикальные разрезы вейвлет-спектрограммы дают мгновенные (либо осредненные по разумному интервалу времени) спектры пульсаций скорости. На рис. 3.16 показаны временные (частотные) спектры пульсаций скорости, построенные путем осреднения по четырем последовательным интервалам времени, подтверждающие как затухание энергии пульсаций, так и смещение пика в сторону низких частот. На этом же рисунке показаны и пространственные спектры энергии пульсаций скорости для тех же интервалов времени. Они получены путем пересчета временных частот в

волновые числа по гипотезе Тейлора с учетом меняющейся средней скорости потока. На пространственных спектрах максимум энергии пульсаций остается на одном масштабе, определяемом диаметром канала. По пространственным спектрам можно судить о стадиях формирования инерционного интервала.

3.6 Кросс-спектры и кросс-корреляция

При анализе сигналов, характеризующих сложные нелинейные системы, приходится иметь дело с сигналами, обусловленными действием многочисленных факторов, имеющих различные характерные времена (частоты). Сигналы, регистрируемые в таких системах, могут быть в различной степени связаны с этими факторами и в результате быть в разной степени коррелированными на различных частотах. Вейвлет-анализ позволяет провести помасштабный (почастотный) кросс-корреляционный анализ таких сигналов с целью выявления функциональных связей между различными сигналами.

В качестве примера еще раз обратимся к анализу сигналов, используемых в качестве индикаторов работы системы кровообращения человека, но на этот раз речь пойдет не о сердце и основных сосудах (то есть центральной гемодинамике), а о системе микроциркуляции крови. Эта система включает периферийные микрососуды, для оценки эффективности работы которых используют сигналы лазерного доплеровского флоуметра (LDF), дающего некоторый интегральный отклик, характеризующий интенсивность кровотока, например, в подушечке пальца. Об интенсивности кровотока говорят и пульсации кожной температуры (ST), измеряемой микротермопарой в той же области пальца. Типичные примеры обоих сигналов, полученные при обследовании одного и того же человека, приведены на рис. 3.17. На первый взгляд, сигналы совсем не похожи, но, чтобы понять, отражают ли эти сигналы одни и те же процессы в организме, нужно провести почастотный кросс-корреляционный анализ.

Напомним, что спектральная плотность энергии пульсаций $S_{xx}(f)$ (2.25) статистически стационарного сигнала $x(t)$ связана с его автокорреляционной функцией $R_{xx}(\tau)$ (2.23) теоремой Хинчина-Винера (2.26). Спектры пульсаций сигналов LDF и ST показаны тонкими серыми линиями на рис. 3.18. Пик вблизи частоты 1 Гц, соответствующий частоте сердечного цикла, хорошо виден в спектре LDF. Спектр ST свидетельствует о резком снижении амплитуды пульсаций на частоте порядка 0.5 Гц, обусловленном низкой теплопроводностью кожи, работающей как фильтр низких частот. Ограниченное время наблюдения приводит к сильно изрезанным спектрам. Глад-

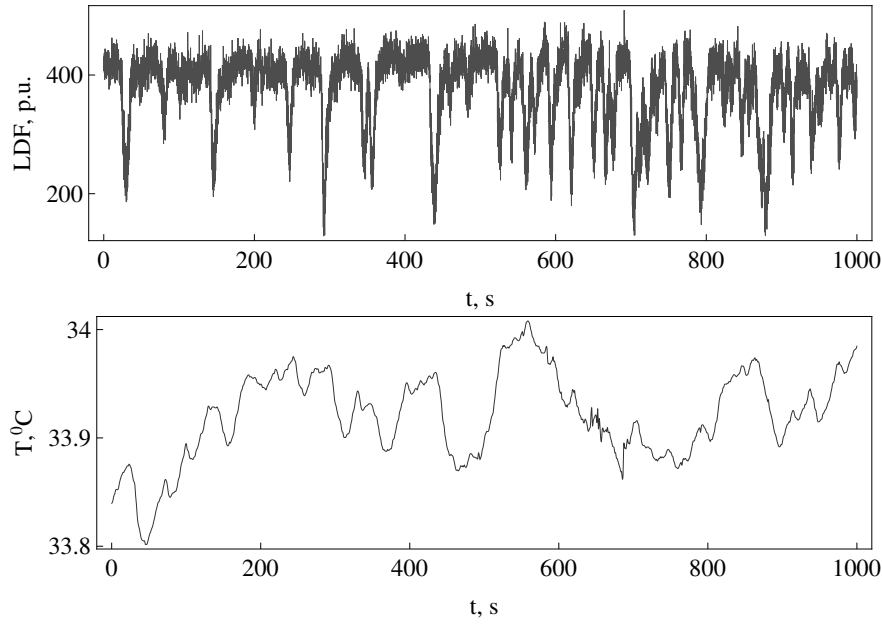


Рис. 3.17. Типичные сигналы доплеровского флоуметра LDF (сверху) и термодары ST (снизу)

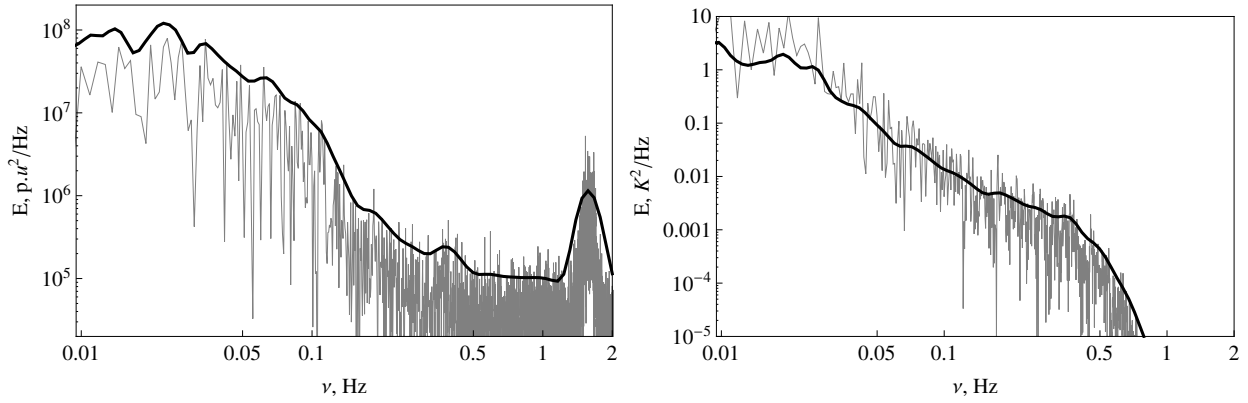


Рис. 3.18. Фурье (тонкая серая линия) и вейвлет (толстая черная линия) спектры LDF (слева) и ST (справа) сигналов. Вейвлет-спектры получены с помощью анализирующего вейвлета (3.5) при $\sigma = 2$

кие спектры могли бы получиться при $T \rightarrow \infty$, но на практике $T \approx 20$ мин и не может быть увеличено существенно. Это затрудняет выделение доминирующих частот в низкочастотной области.

Для выявления корреляции между сигналами $x(t)$ и $y(t)$ (в нашем случае это сигналы LDF и ST) вычисляют кросс-корреляционную функцию

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x})(y(t + \tau) - \bar{y}) dt \quad (3.45)$$

и соответствующий кросс-спектр

$$S_{xy} = \int_0^T R_{xy}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau. \quad (3.46)$$

В отличие от автокорреляционной функции кросс-корреляционная функция не является четной и ее спектр содержит как действительную, так и мнимую части.

На рис. 3.19 тонкими линиями показаны модуль и фаза кросс-спектра LDF - ST. Модуль кросс-спектра S_{xy} воспроизводит структуру спектров S_{xx} и S_{yy} и не несет новой информации. Для выявления степени корреляции на разных частотах необходимо нормализовать кросс-спектр. Соответствующая функция называется когерентностью [13] и определяется как

$$\Gamma_{xy}(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}. \quad (3.47)$$

Однако $\Gamma_{xy}(f) = 1$ для любой частоты f , поскольку преобразование Фурье основано на гармонических функциях, определенных на всем интервале $[0, T]$. Корреляция двух гармонических функций одной частоты, заданных на одном интервале, безусловно, равна 1. На практике важно определить, остается ли постоянным сдвиг по фазе (синхронизированы ли два квазипериодических сигнала). Это побуждает к использованию различных вариантов фурье-преобразования в окнах, которые можно интерпретировать как применение различных фильтров для сглаживания спектра.

Эту же цель можно достичь методами вейвлет-анализа. Будем использовать вейвлет Морле (3.5) и запишем вейвлет-преобразование сигнала $x(t)$ не в терминах переменных a и b (3.6), а в терминах частота f (обратна масштабу времени a) и момент времени τ (это эквивалент сдвигу b) в виде

$$W_x(f, \tau) = \sqrt{f} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^*(f(t - \tau)) dt, \quad (3.48)$$

и интегральный вейвлет-спектр (3.13) определим, соответственно, как

$$M(f) = \frac{1}{T} \int_0^T |W(f, t)|^2 dt. \quad (3.49)$$

Вейвлет-спектр (3.49) является сглаженной версией спектра Фурье и совпадает с ним при $\sigma \rightarrow \infty$. Вейвлет-спектры сигналов LDF и ST, вычисленные при $\sigma = 2$, показаны на рис. 3.18 толстыми линиями. Видно, что вейвлет-спектр воспроизводит структуру спектра Фурье, опуская детали, обусловленные, в частности, шумом и ограниченностью интервала наблюдений.

Вейвлетная кросс-корреляция, предложенная впервые для анализа сол-

нечных данных в работе [14], является нормированным кросс-спектром

$$C_{xy}(f) = \frac{\int_0^T W_x(f, \tau) W_y^*(f, \tau) d\tau}{\sqrt{\int_0^T |W_x(f, \tau)|^2 d\tau \int_0^T |W_y(f, \tau)|^2 d\tau}}. \quad (3.50)$$

Модуль комплексной функции $C_{xy}(f)$ лежит в интервале $[0, 1]$ и характеризует степень корреляции сигналов на данной частоте f . Фаза

$$\phi(f) = \tan^{-1} \left(\frac{\Im(C_{xy}(f))}{\Re(C_{xy}(f))} \right) \quad (3.51)$$

определяет средний сдвиг по фазе для пульсаций соответствующей частоты.

Рис. 3.20 показывает, как ведет себя модуль корреляционной функции (3.50), вычисленной с помощью вейвлета (3.5) с различным спектральным разрешением, а именно, для $\sigma = 0.7, 1, 2, 10, 100$ и ∞ . При $\sigma \sim 1$ функция достаточно гладкая и свидетельствует о высокой корреляции сигналов LDF и ST в низкочастотной области ($f < 0.1$ Hz). На высоких частотах ($f > 0.1$ Hz) корреляция слабая. С ростом σ кривая $|C_{xy}(f)|$ становится более изрезанной, приближаясь к функции когерентности $\Gamma_{xy} = 1$, которая получается при $\sigma = \infty$.

Таким образом, уменьшение σ снижает спектральное разрешение, но улучшает статистику. Следовательно именно малые значения σ оптимальны для кросс-корреляционного анализа. В то же время нельзя забывать, что при $\sigma < 1$ возникают проблемы с условием допустимости (равенством нулю среднего значения). Поэтому можно ограничиться значением $\sigma = 1$, обеспечивающим разумный компромисс.

В отличие от модуля фаза функции $C_{xy}(f)$ при изменении параметра σ меняется незначительно. На нижней панели рис. 3.19 фаза показана только для двух предельных значений, $\sigma = 1$ и $\sigma = \infty$. Для фурье-преобразования ($\sigma = \infty$) фаза претерпевает заметные колебания (особенно в высокочастотной части), но в среднем воспроизводит кривую, полученную для $\sigma = 1$.

Еще раз подчеркнем, что интерпретацию низкочастотной части спектра нужно делать с большой осторожностью. При $\sigma = 1$ на низшей рассматриваемой частоте 0.01 Гц используемый вейвлет примерно в пять раз короче рассматриваемого ряда. К тому же надо исключать области вблизи границы ряда, в которых вейвлет выходит за пределы области измерений. Это значит, что число независимых точек для оценки кросс-корреляции становится недостаточным.

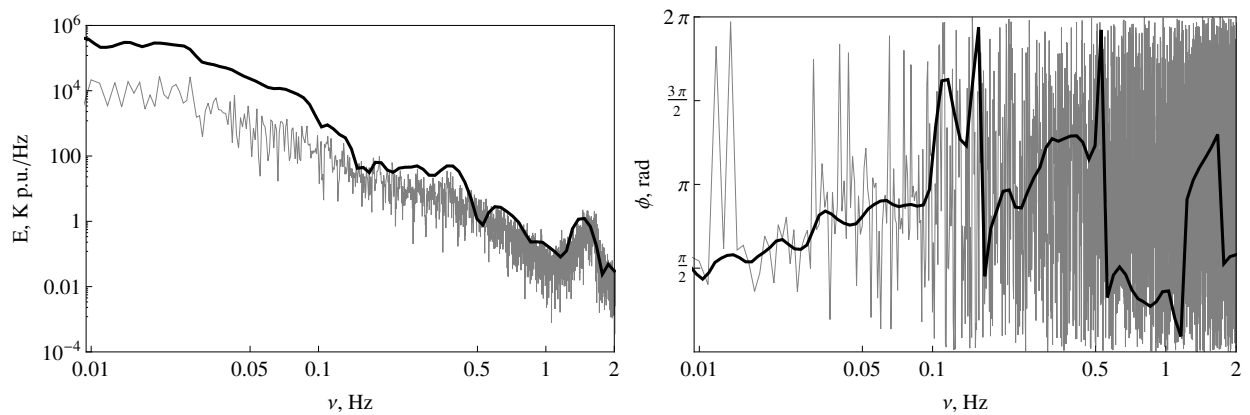


Рис. 3.19. Фурье (тонкая линия) и вейвлет (толстая линия) кросс-спектры сигналов LDF и ST. Модуль показан на левом графике, фаза – на правом

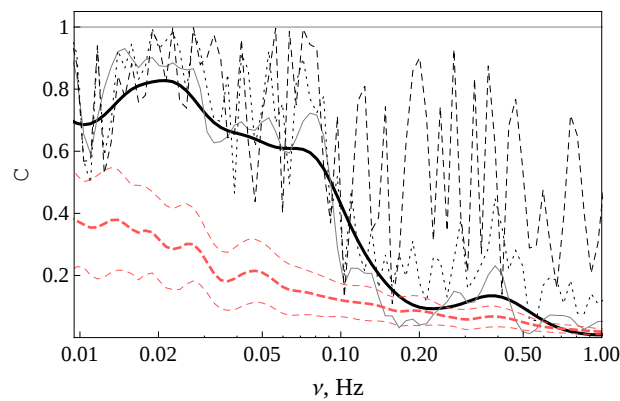


Рис. 3.20. Модуль вейвлетной кросс-корреляционной функции (3.50) для LDF и ST сигналов, представленных на рис. 3.17 для $\sigma = 1$ (жирная черная линия), $\sigma = 2$ (тонкая серая), $\sigma = 10$ (пунктирная), $\sigma = 100$ (штриховая) и $\sigma = \infty$ (горизонтальная тонкая линия)

3.7 Дифференцирование экспериментальных данных

При самых различных измерениях возникает необходимость дифференцировать непосредственно измеряемую величину, поскольку интерес представляет $x'(t)$. Именно так обстоит дело в рассмотренном выше примере с измерением дифференциальной реокардиограммы. Задача о численном дифференцировании функции, известной приближенно, является классическим примером некорректно поставленной задачи, приводящей к неустойчивости решения [15]. Для обеспечения устойчивости (по Тихонову) точное решение заменяют приближенным, которое управляется неким параметром регуляризации и стремится к точному при отсутствии погрешности измерений. На практике регуляризация обычно сводится либо к сглаживанию исходных данных в физическом пространстве, либо к подавлению высоких частот в спектре измеренных данных. При этом оптимальная ширина сглаживающего окна или соответствующая ему полоса пропускания фильтра связывается с ожидаемым уровнем шума.

Задача регуляризации процедуры дифференцирования зашумленных данных естественным образом формулируется на языке вейвлет-представления сигналов, которое позволяет совместить преимущества работы в физическом пространстве и пространстве Фурье [16].

Пусть функция $x(t)$ имеет первую производную $y(t)$, так что

$$x(t) = \int_0^t y(t)dt, \quad (3.52)$$

и определена на наборе точек t_n с точностью до некоторой случайной ошибки ξ ($\hat{x}_n = x(t_n) + \xi$). Производная $y(t)$ в простейшем случае вычисляется приближенно как

$$\hat{y}_n = \frac{\hat{x}_n - \hat{x}_{n-1}}{\Delta t}, \quad (3.53)$$

где $\Delta t = t_n - t_{n-1}$.

В условиях шума формула (3.53) может стать неустойчивой. Принимая для случайной ошибки оценку $|\xi| \leq A$, можно записать

$$|y_n| \leq \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \right| + \frac{2A}{\Delta t}. \quad (3.54)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ первое слагаемое в правой части (3.54) стремится к $y(t)$, а второе может стать сколь угодно большим. Если функция задана на конечном интервале, то увеличение числа точек приводит к увеличению второго слагаемого в (3.54).

В *физическом пространстве* задачу дифференцирования можно сформулировать с использованием δ -функции, которая задается неявно как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\delta(t-t')dt' = f(t), \quad (3.55)$$

где $f(t)$ – гладкая функция.

Известно, что δ -функция дифференцируема. Ее первая производная, обозначаемая $\dot{\delta}$, обладает свойством

$$\frac{df(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\dot{\delta}(t-t')dt'. \quad (3.56)$$

Отметим, что функция $\dot{\delta}$ нечетна и сосредоточена в бесконечно малой окрестности точки $t = t'$. Функцию $\dot{\delta}$ называют иногда бесконечно малым диполем.

Для практического использования необходимо провести регуляризацию уравнения свертки (3.56). Обобщенная функция $\dot{\delta}$ аппроксимируется регулярной нечетной функцией с нулевым средним значением, область локализации которой определяется ожидаемым уровнем шума. Простейшей аппроксимацией дублета на дискретном множестве является вычисление разности в соседних точках. Одним из практических методов оценки производной в физическом пространстве является свертка измеренного сигнала со сглаживающим окном с последующим вычислением производной как конечной разности (3.53).

В *пространстве Фурье* операция дифференцирования сводится к умножению на частоту со сдвигом фазы на четверть периода (1.13), т.е. фурье-образы функций y и x связаны соотношением $\tilde{y}(\omega) = i\omega\tilde{x}(\omega)$. Таким образом, находя фурье-образ сигнала $\tilde{x}(\omega)$, умножая его в частотном пространстве на $i\omega$ и выполняя обратное преобразование Фурье, можно найти производную $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \right) e^{i\omega t}d\omega. \quad (3.57)$$

Отметим, что фильтр $i\omega$ имеет импульсную характеристику $\dot{\delta}$, т.е.

$$i\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\delta}(t)e^{-i\omega t}dt. \quad (3.58)$$

Принципиальное отличие алгоритма (3.57) от прямого дифференцирования в физическом пространстве заключается в том, что при вычислении

преобразования Фурье используется информация о сигнале во всех точках числовой оси, в то время как дифференцирование является по определению операцией локальной.

Алгоритм (3.57) в условиях шума также является неустойчивым, так как умножение на $i\omega$ приводит к неограниченному усилению высоких частот. Для обеспечения устойчивости используется фильтр низких частот (ФНЧ). Форма фильтра может выбираться достаточно произвольно, исходя из специфики задачи.

Вейвлет-дифференцирование, с точки зрения локальности, занимает промежуточное положение между дифференцированием в физическом пространстве и в пространстве Фурье. Вейвлет-образ исходной функции $x(t)$ есть

$$W_x(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}^* x(t) dt, \quad (3.59)$$

где, как обычно, $\psi(t)$ – анализирующий вейвлет, а параметры a и b определяют масштаб и положение функции $\psi_{a,b} = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$. Записывая аналогичным образом вейвлет-образ функции $y(t)$ и проводя дифференцирование по частям, легко получить

$$W_y(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}^*(t) y(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi_{a,b}^*(t)}{\partial t} x(t) dt. \quad (3.60)$$

Таким образом, проведя вейвлет-разложение функции $x(t)$ по семейству $\phi_{a,b}(t) = -\partial_t \psi_{a,b}(t)$ и выполнив затем обратное вейвлет-преобразование с помощью вейвлет-семейства $\psi_{a,b}(t)$, можно получить искомую функцию $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{C_{\phi\psi}} \int_{0+}^{\infty} a^{-3} da \int_{-\infty}^{\infty} db \psi_{a,t}(b) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt \phi_{a,b}^*(t) x(t) \right), \quad (3.61)$$

где ϕ – анализирующий вейвлет, ψ – синтезирующий вейвлет, а

$$C_{\phi\psi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\psi}(\omega)| |\tilde{\phi}(\omega)|}{|\omega|} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty. \quad (3.62)$$

Выбор пары функций ϕ и ψ (для анализа и синтеза соответственно) из условия

$$\phi(t) = -\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \quad (3.63)$$

предполагает, что производная от ψ существует и является вейвлетом. Например, пара функций $\phi = (1 - t^2) \exp(-t^2/2)$ и $\psi = -t \exp(-t^2/2)$ удовлетворяет условию (3.63). В принципе, любой вейвлет, имеющий первую

производную, можно использовать в качестве ψ . Выбор пары зависит от конкретной задачи.

Интегрирование по a на этапе синтеза на практике осуществляется не от нуля до бесконечности, а в конечных пределах от a_{min} до a_{max} . В случае высокочастотного шума выбор a_{min} необходимо связать с ожидаемым уровнем шума. В простейшем случае пределы интегрирования по a выбираются едиными для всего сигнала – это глобальная регуляризация, при которой a_{min} выбирается на основании интегральных критериев и не учитывает поведения функции и особенности шума в различные моменты времени. Преимущество вычисления с помощью вейвлетов состоит в том, что легко реализовать локальную регуляризацию, адаптируя пределы интегрирования под локальные свойства вейвлет-спектра, т.е. $a_{min} = a_{min}(t)$.

Эффективность работы различных алгоритмов проиллюстрируем двумя примерами. Первый пример касается модулированного по частоте и амплитуде осциллирующего сигнала, искомая производная которого определяется формулой

$$y(t) = \sin(2\pi t(10t + 10))(1 - 0.5 \cos(6\pi t)). \quad (3.64)$$

Сигнал задан на интервале $[0,1]$ с шагом 0.001 и наложенным шумом 30% от среднеквадратичного значения сигнала.

В качестве второго примера взята кусочно-гладкая функция, производная которой определяется формулой

$$g(t) = \begin{cases} -2, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}, \quad (3.65)$$

а случайный шум имеет амплитуду 10% от среднеквадратичного значения сигнала. На рис. 3.21-3.22 для обоих примеров показаны исходные выборки точек (наверху) и их вейвлет-образы (внизу). Отметим, что на вейвлет-плоскости второго сигнала (рис. 3.22) скачок производной не виден, а значительные погрешности на правом крае связаны с обрывом на границе (левый край чистый, так как функция на этой границе равна нулю).

По данным, представленным на верхних графиках рис. 3.21-3.22, с помощью различных алгоритмов вычислялись значения производной и сравнивались с аналитическими значениями. В качестве критерия использовалась относительная среднеквадратичная ошибка

$$\Delta = \left(\sum_n (y_n - y(t_n))^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_n y(t_n)^2 \right)^{-1/2}, \quad (3.66)$$

где $y(t_n)$ – значения тестового сигнала в точках t_n , а y_n – результат численного дифференцирования.

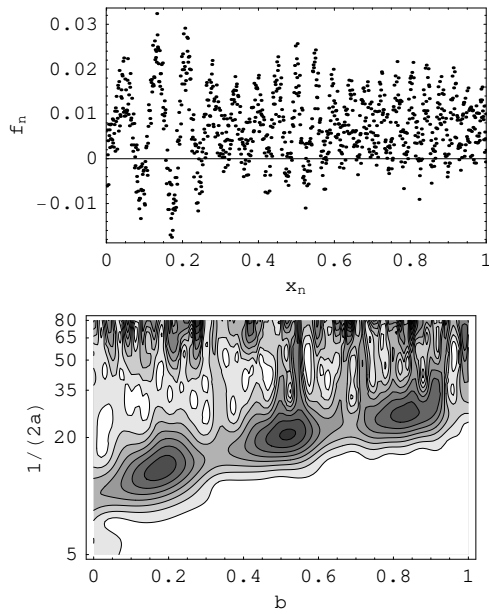


Рис. 3.21. Искусственный сигнал (3.64) с наложенным 30%-ным шумом и его вейвлет-образ

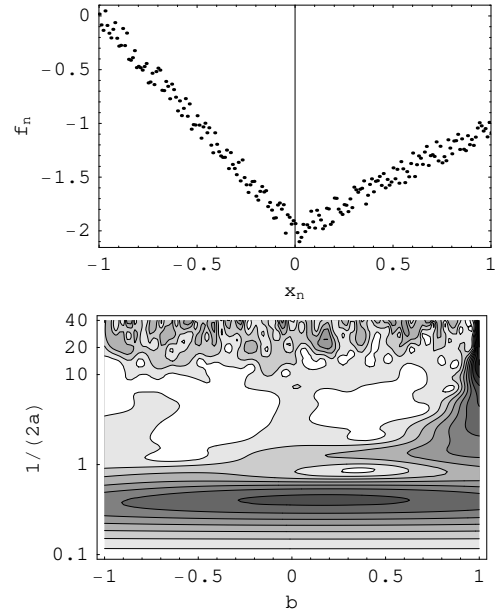


Рис. 3.22. Искусственный сигнал (3.65) с наложенным 10%-ным шумом и его вейвлет-образ

Метод	Минимальное значение Δ	
	Пример 1	Пример 2
Прямоугольное окно	0.42	0.31
Гауссово окно	0.31	0.25
Фурье (ФНЧ)	0.16	0.8
Фурье гаусс	0.16	0.7
Дифференцирующий фильтр	0.18	0.27
Диф.гаусс фильтр	0.3	0.32
Вейвлет-регуляризация (Морле)	0.15	0.2
Вейвлет с $a_{min} = (20 * t + c)^{-1}$	0.12	-

Таблица 3.1. Относительная ошибка для различных алгоритмов дифференцирования данных

Результаты расчетов представлены в таблице 3.1. В первой (верхней) части таблицы показаны результаты дифференцирования сглаженных данных при использовании двух типов фильтров (прямоугольного и функции Гаусса). Ниже приведены результаты четырех алгоритмов дифференцирования в пространстве Фурье с применением различных фильтров. Последние две строки представляют результаты вейвлет-дифференцирования: с фиксированной границей обрезания высоких частот и с переменной границей. Для каждого случая и каждого примера приведено *минимальное* значение σ , т.е. значение, полученное при оптимальном для данного примера выборе параметров регуляризации (ширины окна, границы частот, и т.д.). Можно видеть, что в обоих случаях вейвлет-регуляризация дала наименьшую ошибку.

3.8 Анализ данных с разрывами

Рассмотрим проблемы, возникающие при спектральном анализе сигналов, известных с пробелами, когда и фурье-, и вейвлет-спектры искажаются разрывами в данных. Идея предлагаемого алгоритма возникла при исследовании данных по активности звезд, которые по условиям наблюдения содержат неизбежные пропуски во временных рядах [17]. Пример данных наблюдения был показан выше на рис. 1.9. Математическое обоснование метода дано в [18].

Пусть имеется сигнал $x(t)$, который регистрируется только на некоторых интервалах времени. Иначе говоря, вместо функции $x(t)$ нам известна функция

$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot G(t), \quad (3.67)$$

где $G(t)$ есть "функция дыр", которая равна единице, если сигнал регистрируется, и нулю во всех остальных точках (т.е. внутри пробелов и вне сигнала). Функции $x(t)$, $\hat{x}(t)$, $G(t)$ для случая одного пробела в данных схематично показаны на рис. 3.23. В результате при вычислении вейвлет преобразования вместо искомых значений $w(a, b)$ получаются значения

$$\hat{w}(a, t) = a^\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(\frac{t' - t}{a}\right) \hat{x}(t') dt'. \quad (3.68)$$

Идея алгоритма, получившего название "gapped wavelets" (дырявые вейвлеты), состоит в перенесении проблемы пробелов с неизвестной функции $x(t)$ на хорошо известную функцию ψ . Действительно, формулу (3.68) можно переписать в виде свертки исходной функции $x(t)$ с "дырявым" вейвлетом (рис. 3.23, d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(\frac{t' - t}{a}\right) \hat{x}(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^*\left(\frac{t' - t}{a}\right) x(t') dt',$$

где $\hat{\psi}\left(\frac{t' - t}{a}\right) = \psi\left(\frac{t' - t}{a}\right) \cdot G(t')$.

Попадая на дыры, функция $\hat{\psi}$ (нижняя панель рис. 3.23) перестает удовлетворять требованиям, предъявляемым к вейвлетам, в частности, условию (3.1), т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}\left(\frac{t' - t}{a}\right) dt' \neq 0. \quad (3.69)$$

Требуется заменить "испорченный" вейвлет $\hat{\psi}$ на "исправленный" ψ_g , который должен, по меньшей мере, удовлетворять условию $\langle \psi_g \rangle = 0$ и

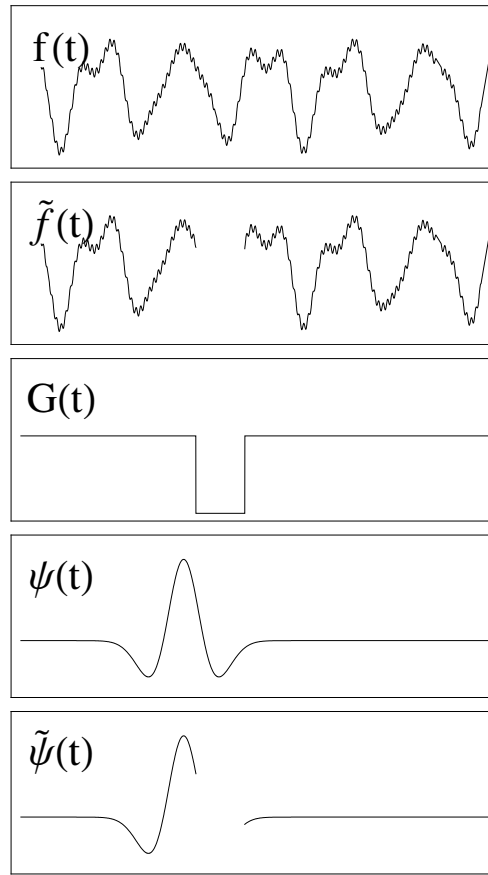


Рис. 3.23. Иллюстрация идеи "дырявых" вейвлетов: пробел в данных интерпретируется как пробел в вейвлете

стремиться к исходному вейвлету ψ при исчезновении пробелов. На языке фурье-представлений можно дать следующую интерпретацию предлагаемой идеи. Особенностью вейвлетов является то, что их фурье-образ локализован в ограниченной полосе частот. Нарушение условия $\langle \psi \rangle = 0$ приводит к появлению в спектре $|\tilde{\psi}(\omega)|^2$ низких частот вплоть до $\omega \rightarrow 0$, а разрывы на краях дыр производят высокочастотный шум. Необходимо указать алгоритм, подавляющий как низкочастотный, так и высокочастотный шум, обусловленный дырами и краями (край можно рассматривать как полубесконечную дыру).

Для реализации этой идеи представим исходный вейвлет ψ в виде

$$\psi(t) = h(t) \cdot \Phi(t), \quad (3.70)$$

где $\Phi(t)$ есть положительно определенная масштабная функция ("оболочка", в качестве которой обычно используется функция Гаусса $\Phi(t) = \exp(-t^2/2)$), а $h(t)$ – "заполняющая" функция (парабола для мексиканской шляпы, комплексная гармоническая функция для вейвлета Морле).

Искомый вейвлет ψ_g будем искать в виде

$$\psi_g(t) = (h(t) - C) \Phi(t) G(t). \quad (3.71)$$

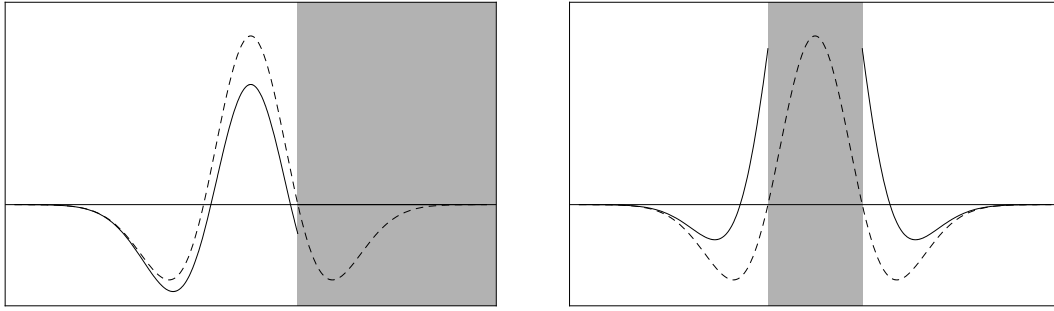


Рис. 3.24. Адаптация вейвлета к пробелам на краю и в центре. Штрихом показан исходный вейвлет, сплошной - после коррекции

Величина C определяется для каждого масштаба a и положения центра вейвлета t , исходя из условия $\langle \psi_g \rangle = 0$ и равна

$$C(a, t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{t' - t}{a}\right) G(t') dt' \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t' - t}{a}\right) \Phi\left(\frac{t' - t}{a}\right) G(t') dt'. \quad (3.72)$$

Характер изменения вейвлета на крае и одиночной дыре показан на рис. 3.24. В качестве анализирующего вейвлета $\psi(t)$ взята мексиканская шляпа (показан пунктиром). Представлены случаи, когда отклонения среднего значения от нуля максимальны: в первом случае край полностью отсекает одно крыло, во втором – дыра точно закрывает весь центральный максимум (на рисунке эти области показаны серым). Можно видеть, что даже в этих ситуациях не происходит критических изменений в структуре функции. Новые функции $\psi_g(t)$ (сплошная линия) имеют разрывы, но эти разрывы совпадают с границами дыр и не вносят при интегрировании дополнительного шума.

Пример вычисления вейвлет-спектра модельного сигнала с пробелами дан на рис. 3.25. В верхней части показан анализируемый сигнал, а в нижней – его вейвлет-спектр, вычисленный стандартным вейвлет-алгоритмом (тонкая линия) и с помощью ”дырявых” вейвлетов (толстая линия). Спектр исходного сигнала должен содержать два пика, положение которых помечено стрелками. Можно видеть, что при применении стандартной методики появляются ложный пик, связанный с периодичностью пробелов, а также значительный низкочастотный шум. В скорректированном спектре не только существенно подавлен ложный максимум, но и положения основных максимумов значительно точнее соответствуют исходным частотам в сигнале.

Нужно отметить, что алгоритм требует значительно больших вычислительных ресурсов, так как включает пересчет вейвлет-функции в каждой точке. Однако при анализе сигналов с многочисленными пробелами либо коротких сигналов, для которых критическим может стать влияние

краевых эффектов, эти затраты оправданы.

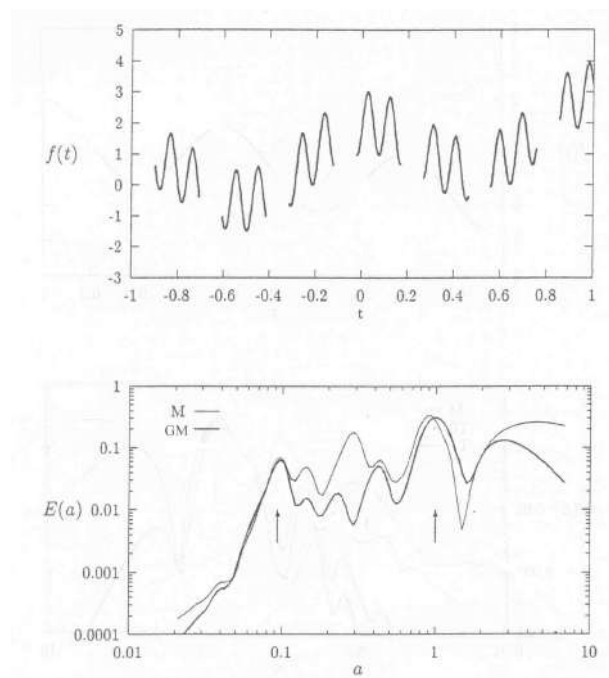


Рис. 3.25. Сигнал с регулярными пробелами (наверху) и его спектры (внизу), вычисленные стандартным вейвлет-преобразованием (тонкая линия) и с помощью "дырявых" вейвлетов

Глава 4

Фурье и вейвлет-анализ изображений

4.1 Двумерные поля и изображения

Существует огромный пласт задач по обработке изображений, связанных с проблемами компактной записи, фильтрацией, шифровкой и дешифровкой массивов цифровых и/или оцифрованных изображений. Этим проблемам посвящена многочисленная специальная литература, и мы их касаться не будем. Мы затрагиваем только вопрос обработки изображений, получаемых в лабораторных экспериментах или натуральных наблюдениях, имеющих сложную многомасштабную структуру, разобраться с которой без специальных методов анализа невозможно.

В качестве примеров на рис. [4.1](#) приведены четыре изображения. Первое представляет собой интерферограмму поверхности жидкости, сделанную при исследовании капиллярных волн в магнитной жидкости, находящейся в магнитном поле [\[19\]](#). Интерферограмма изобилует структурами различного масштаба, начиная от масштаба, связанного с исходной пространственной частотой, обусловленной применяемым методом полос конечной ширины, до масштабов интересующих исследователей поверхностных волн, распространяющихся от точки возбуждения поверхности в виде эллиптических волн (отклонение от кольцевой симметрии обусловлено действием магнитного поля). Задача экспериментатора состоит в том, чтобы выделить и количественно описать те элементы изображения, которые связаны с поверхностной волной.

Второй пример касается лабораторных опытов с животными по исследованию кровотока мозга. Изображение кровотока в поверхностных кровеносных сосудах мозга получено при помощи метода спекл-контрастной визуализации, через черепную кость мыши возраста 1 месяц [\[20\]](#). Интерес в нем представляет пространственно-временная структура кровотока, которая позволяет определить локализацию сосудов различного размера, оценить их плотность, изучить локализацию процессов с различными временными характеристиками.

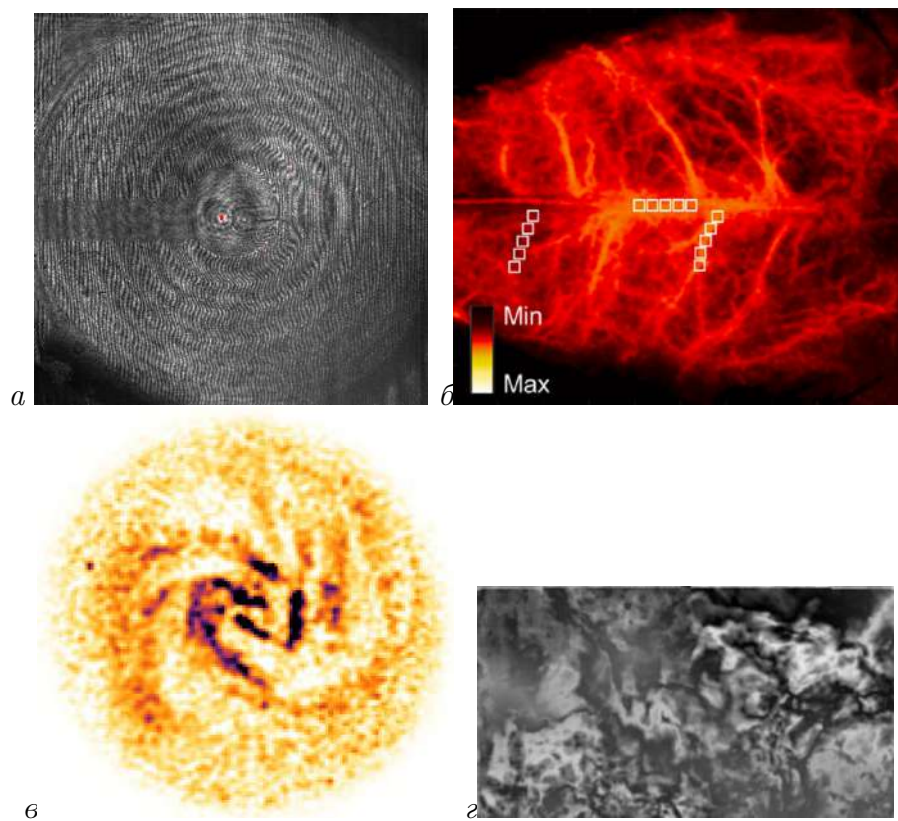


Рис. 4.1. Примеры изображений со сложной пространственной структурой: *а* – интерферограмма поверхностных волн; *б* – изображение кровотока в поверхностных кровеносных сосудах мозга мыши; *в* – галактика М83; *г* – фрагмент карты поляризованного радиоизлучения межзвездной среды

Еще два примера взяты из астрономических наблюдений. На одном показано изображение галактики М83, полученное при приеме поляризованных радиоволн с длиной волны 6 см [21]. Галактика М83 является внешней галактикой с выраженной спиральной структурой. Поляризованное излучение дает информацию о магнитном поле галактики. Четвертое изображение также получено с помощью радиотелескопа при наблюдениях поляризованного излучения, но наблюдения касаются межзвездного пространства нашей галактики [22] и иллюстрируют наличие в нем разномасштабных структур, происхождение которых остается предметом острых дискуссий.

В следующих параграфах мы будем пользоваться модельными изображениями, которые методически полезны для отработки алгоритмов помасштабного анализа структур в изображениях. Цель данного раздела – показать, что полезного можно узнать изучая фурье-образы такого рода изображений и что можно выяснить с помощью вейвлет-анализа.

4.2 Фурье-анализ изображений

В разделе 2.6, обсуждая вопросы спектрального анализа турбулентных полей, мы рассматривали фурье-преобразование трехмерных полей и говорили о связи одномерных и трехмерных спектров турбулентных полей. Если речь идет об анализе двумерных случайных полей (в том числе турбулентных), то, с точки зрения спектрального анализа, принципиально новых проблем не возникает. В данном разделе мы говорим об анализе изображений, т.е. интересуемся методами выделения отдельных структур и, соответственно, обращаем внимание не только на статистические свойства случайных мелкомасштабных полей, но и на спектральные образы отдельных структур и методы их идентификации. Именно с этой целью мы остановимся на модельных примерах, показанных на рис. 4.3.

Итак, имеем двумерную функцию $x(r_1, r_2)$, заданную для простоты в квадратной области со стороной L на равномерной сетке с шагом $h = L/N$ (N – число точек по каждой координате), т.е. $x_{jl} = x(hj, hl)$, которую представляем рядом Фурье

$$x_{jl} = \sum_{n=-N/2}^{N/2} \sum_{m=-N/2}^{N/2} \tilde{x}_{nm} e^{ik_0 h(nj+ml)}, \quad (4.1)$$

где $k_0 = 2\pi/L$. Строить будем двумерный амплитудный спектр, т.е. распределение на плоскости (k_1, k_2) модулей $A_{nm} = \sqrt{\tilde{x}_{nm}^2}$.

Первый пример (рис. 4.2) представляет собой регулярную одномерную структуру – прямоугольную волну, направленную под углом $-\pi/4$ к оси r_1 . Очевидно, что в направлении, перпендикулярном фронту волны, сечение

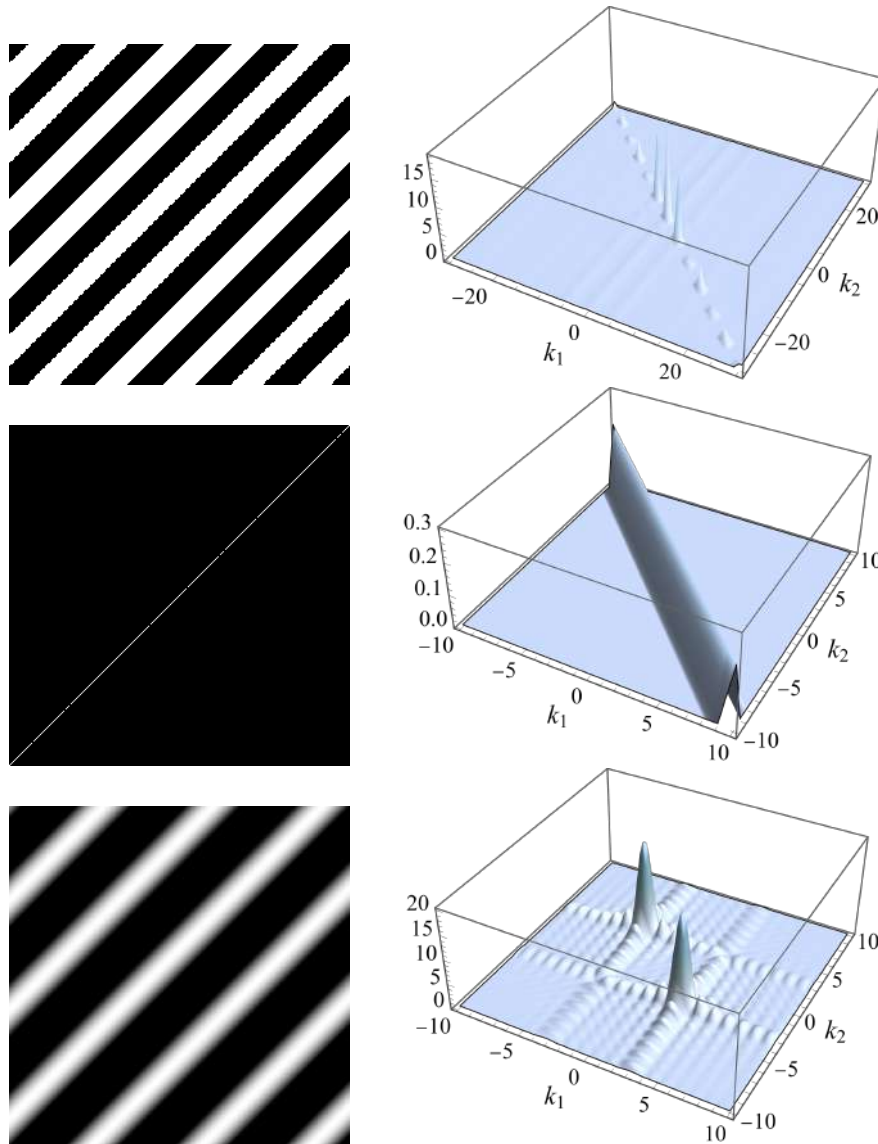


Рис. 4.2. Двумерные амплитудные спектры Фурье простых изображений: матрасика, линии, фрагмента волны

двумерного амплитудного спектра должно быть идентично одномерному амплитудному спектру прямоугольного сигнала (меандра), показанному на рис. 1.3. Действительно, именно такая последовательность пиков воспроизводится вдоль направления волнового вектора, направленного под углом $-\pi/4$ к оси k_1 . Раскладываемая в ряд функция действительна, и ее спектр симметричен относительно начала координат, поэтому каждой присутствующей в спектре частоте соответствует пара симметричных относительно начала координат пиков. Пик в начале координат (волновой вектор равен нулю) определяется средним значением анализируемой величины на всем поле изображения. В изображении белый цвет соответствует единице, а черный – нулю, поэтому среднее значение есть $1/2$. Если принять шкалу цвета, симметричную относительно нуля, или вычесть среднее значение перед разложением в ряд, то центральный пик пропадет.

Методически важен второй пример на рис. 4.2 – одиночная прямая линия и ее амплитудный спектр. Если взять сечение исходного изображения в направлении, перпендикулярном прямой, то получится одиночный импульс – дельта-функция, спектр которой представляет собой белый шум (рис. 1.4). Именно белый шум и получается, если направить волновой вектор перпендикулярно линии. На двумерной плоскости он выглядит как ”забор” и указывает на то, что при любом отклонении направления волнового вектора коэффициенты Фурье равны нулю. Этот пример важен для иллюстрации простого факта, состоящего в том, что любая прямая структура в изображении (линия, разрыв) приводит к формированию в двумерном спектре набора пиков на направлении, перпендикулярном этой прямой.

Сформулированный вывод подкрепим последним примером, показанным на рис. 4.2 – фланкетом гармонической волны, длина которой сопоставима с размерами рисунка. Для большей наглядности среднее значение вычтено перед вычислением ряда, из чего следует, что гармонической волне должна соответствовать одна пара симметрично расположенных пиков. Эти пики действительно хорошо видны в амплитудном спектре, но наряду с ними выделяются крестообразные ”тени” от каждого пика. ”Тени” идут в направлении координатных осей, что указывает на то, что вклад в спектр дают какие-то элементы, направленные также по осям координат. Такими элементами являются края изображения. Дело в том, что, раскладывая в ряд, мы опять же предполагаем периодическое продолжение рассматриваемой двумерной функции. Если же мы мысленно приложим копию нашей картинке справа от нее, то увидим, что к черному полю первой картинке на границе примыкает белое поле второй, т.е. вдоль границы возникает разрыв, который и приводит к формированию последовательности пиков в соответствующем направлении. Проводя аналогию с

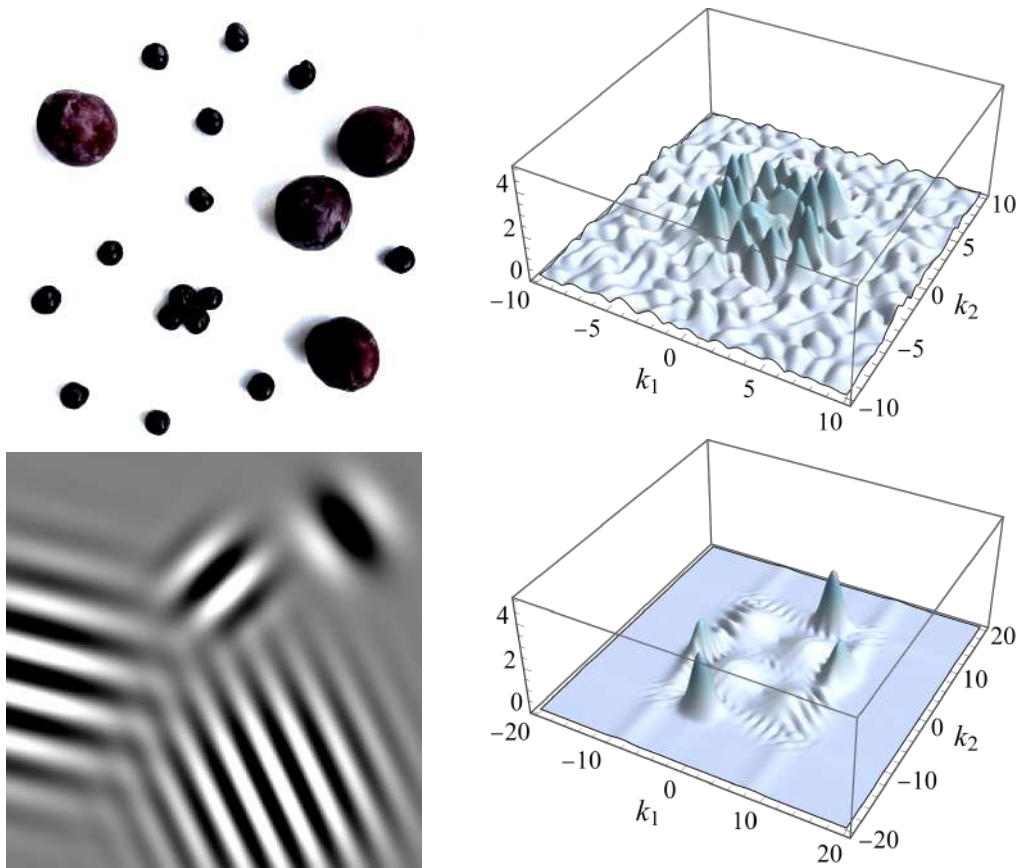


Рис. 4.3. Натюрморт "сливы и вишни" (вверху) и фантазия на тему волновые пакеты (внизу). Изображения (слева) и их амплитудные фурье-спектры (справа)

одномерным преобразованием, можно легко понять, что ситуация эквивалентна рассматривавшемуся нами невычтенному из одномерного сигнала тренду, который приводил к наложению на спектр сигнала спектра "пилы" (рис. 1.6). Таким образом, при анализе изображений нужно обращать внимание на вклад краевых эффектов.

Покажем еще два примера двумерных спектров более сложных изображений (рис. 4.2), интерпретация которых становится проблематичной. В качестве первого взята фотография – натюрморт из слив и вишен (можно взять набор кружков двух различных размеров). Второй – набор пространственных разнонаправленных волновых пакетов с различной длиной волны. Можно пытаться анализировать представленные справа фурье-образы, отыскивая отклик на отдельные элементы исходных изображений, но в обоих случаях большого смысла этот анализ не имеет. Во втором случае в фурье-спектре можно увидеть частоты, соответствующие длинам волн в волновых пакетах, но расположение каждого пакета не известно.

4.3 Двумерное вейвлет-преобразование

Вейвлет-образ двумерной функции $x(\mathbf{r})$ определим как

$$W(a, \mathbf{r}) = \frac{1}{a^\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\mathbf{r}') \psi^*\left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{a}\right) d\mathbf{r}', \quad (4.2)$$

где $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$, а $x(\mathbf{r})$ есть двумерная функция, для которой существует преобразование Фурье

$$\tilde{x}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad x(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (4.3)$$

$\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ есть двумерный волновой вектор. Вейвлет-образ связан с фурье-образом:

$$W(a, \mathbf{r}) = \frac{a^{2-\kappa}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(\mathbf{k}) \tilde{\psi}^*(a\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (4.4)$$

Определение (4.2) справедливо для *изотропных* (осесимметричных) функций $\psi = \psi(\rho)$, $\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. Использование *анизотропных* функций приводит к появлению дополнительного параметра, отвечающего за ориентацию вейвлета. Анизотропное вейвлет-преобразование может быть полезным в задачах, связанных с выделением ориентированных структур различного масштаба.

Выбор анализирующего вейвлета зависит от целей анализа. Для локализации структур в пространстве требуются функции с хорошим пространственным разрешением Δx , а при построении спектральных характеристик предпочтительными становятся функции с выраженной локализацией в пространстве Фурье Δk . Напомним, что эти величины связаны соотношением неопределенности $\Delta x \Delta k \geq 2\pi$.

В рассматриваемых ниже примерах будут использованы два вида осесимметричных действительных функций. Это двумерный вариант мексиканской шляпы (МН – *Mexican Hat*)

$$\psi(\rho) = (2 - \rho^2) e^{-\rho^2/2} \quad (4.5)$$

(заметим, что в двумерном случае изменилась константа, определяющая значение функции в начале координат) и функция, которая определяется в пространстве Фурье как

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \log_2 \frac{k}{2\pi}\right), & \pi/4 < |\mathbf{k}| < \pi, \\ 0 & |\mathbf{k}| < \pi/4, |\mathbf{k}| > \pi. \end{cases} \quad (4.6)$$

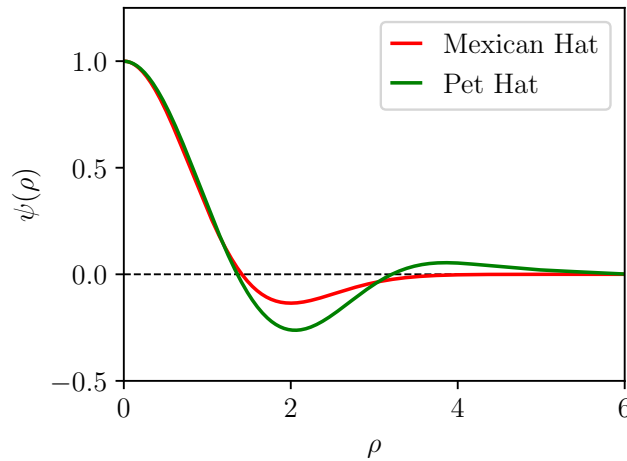


Рис. 4.4. Осесимметричные действительные вейвлеты: МН (*Mexican Hat*-красная линия) и РН (*Pet Hat*- зеленая линия)

Эта функция является хорошим компромиссом, обеспечивая относительно хорошее разрешение по обе стороны от преобразования Фурье, и будет обозначаться как РН (от английского *Pet Hat* – любимая шляпа). Вид обеих функций в физическом пространстве показан на рис. 4.4.

Преобразование (4.2) единственно и обратимо, то есть функция $x(r_1, r_2)$ может быть восстановлена по имеющемуся вейвлет-образу

$$x(\mathbf{r}) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} W(a, \mathbf{r}') \psi \left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{a} \right) \frac{da}{a^{5-\kappa}} d\mathbf{r}', \quad (4.7)$$

где

$$C_\psi = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\psi}(\mathbf{k})|^2}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k}. \quad (4.8)$$

При выделении анизотропных пространственных структур вводят самые различные анизотропные вейвлеты. В качестве примера покажем, что из простейшего действительного вейвлета МН (3.4) можно наряду с осесимметричным вейвлетом вида (4.5) получить анизотропный вейвлет

$$\psi(r_1, r_2) = (1 - r_1^2) e^{-(r_1^2 + r_2^2)/2}, \quad (4.9)$$

именуемый за свою форму техасской шляпой. Оба варианта шляп показаны на рис. 4.5, где в качестве еще одного примера анизотропного вейвлета приведен двумерный волновой пакет, получаемый из одномерного вейвлета Морле (3.5) путем наложения осесимметричной функции Гаусса

$$\psi(r_1, r_2) = e^{ik_0 r_1} e^{-(r_1^2 + r_2^2)/2}. \quad (4.10)$$

В качестве иллюстраций вейвлет-представлений изображений возьмем примеры, использованные выше для вычисления двумерных спектров

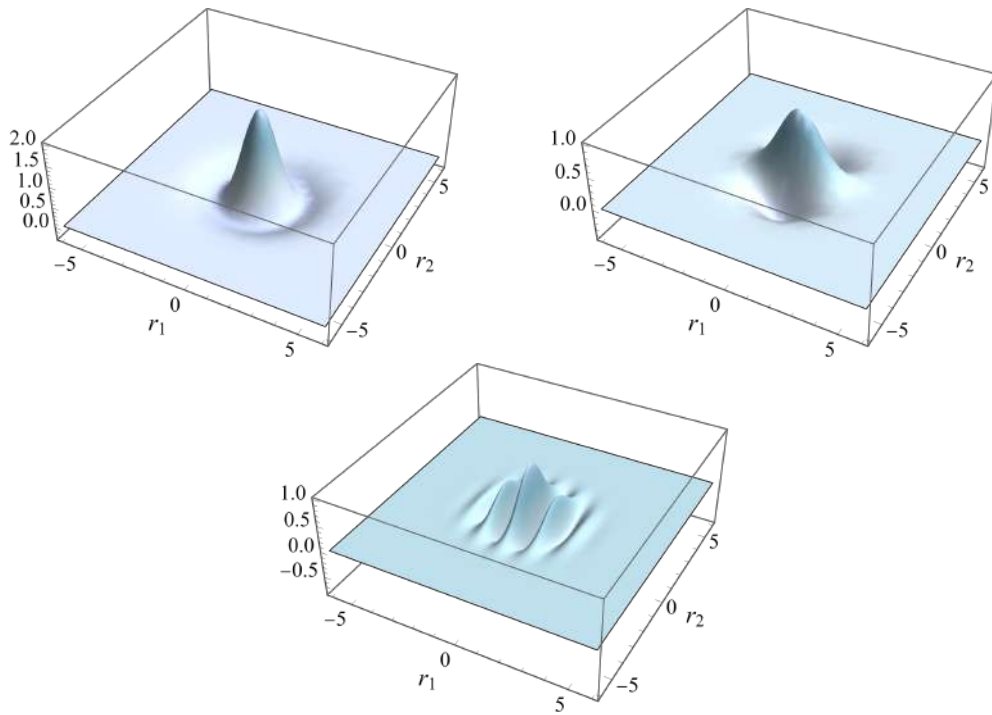


Рис. 4.5. Двумерные вейвлеты: изотропная (мексиканская) шляпа и анизотропная (техасская) шляпа, а также действительная часть анизотропного вейвлет-пакета, полученного из вейвлета Морле

Фурье на рис. 4.3. Построить прямой аналог двумерного спектра Фурье нельзя, так как вейвлет-образ двумерного поля есть трехмерное поле, т.е. вейвлет-спектрограмма двумерного изображения представляет собой трехмерный объект – набор двумерных полей $|W(b_1, b_2)|$ для фиксированных значений параметра масштаба a . Если используются анизотропные вейвлеты, то вейвлет-пространство становится четырехмерным, так как добавляется ориентация вейвлета. На рис. 4.6 для каждого из двух анализируемых изображений выбраны для иллюстрации только два масштаба: для натюрморта это масштабы, наилучшим образом выделяющие один вид фруктов – сливы либо вишни. Очевидно, что разделение идет только по масштабу структуры и три слипшиеся вишенки дают отклик, похожий на отклик на сливу. В случае изображения с набором волновых пакетов использован вейвлет вида (4.10) и для иллюстрации способности вейвлетов выделять структуры заданного масштаба и направления показаны два масштаба с направлениями, дающими максимальный отклик для выбранной структуры.

4.4 Спектры и структурные функции

Широко использовавшийся при обсуждении свойств турбулентных полей энергетический спектр (спектральная плотность энергии) $E(k)$ включа-

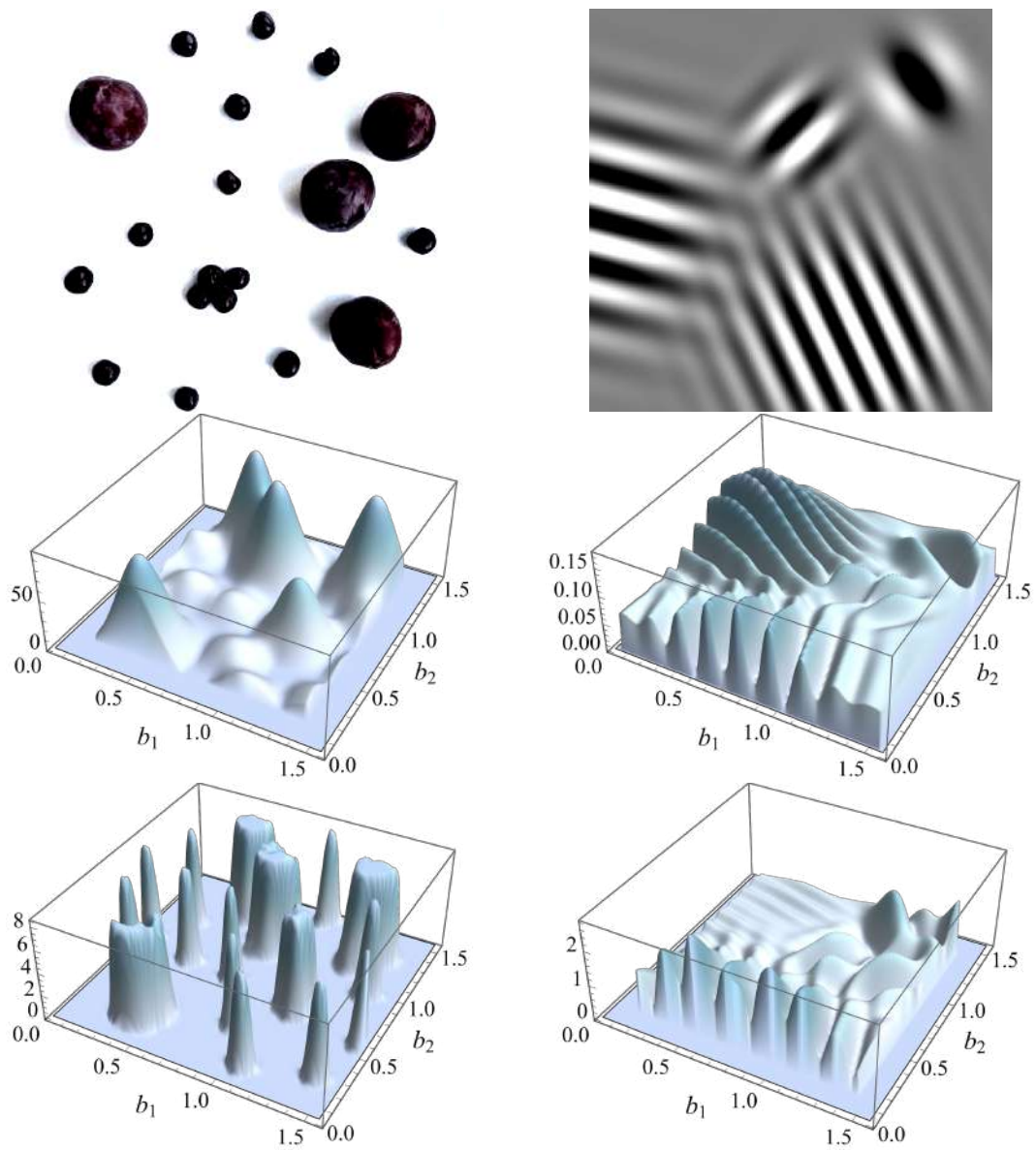


Рис. 4.6. Натюрморт "сливы и вишни" и его вейвлет-представление в двух заданных масштабах, выделяющих те или иные плоды, (слева) и фантазия на тему волновые пакеты, для которой показаны вейвлет-представления, полученные с помощью анизотропных вейвлетов в двух заданных масштабах для заданных направлений волн (справа)

ет энергию всех фурье-гармоник с заданным модулем волнового вектора $|\mathbf{k}| = k$ и связан в рассматриваемом плоском случае с *двумерным* спектром $S(\mathbf{k}) = |\tilde{x}(\mathbf{k})|^2$ как

$$E(k) = \int_{|\mathbf{k}|=k} S(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (4.11)$$

Двумерный спектр связан с автокорреляционной функцией

$$b(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\mathbf{r}') x(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (4.12)$$

преобразованием Фурье

$$S(\mathbf{k}) = \tilde{b}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} b(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (4.13)$$

Вектор $\mathbf{r}$ определяет сдвиг изображения в свертке (4.12) и является характеристикой масштаба. Если анализируемое поле изотропно, т.е. корреляционная функция зависит только от расстояния между точками $b(\mathbf{r}) = b(r)$, а спектр – только от модуля волнового вектора $S(\mathbf{k}) = S(k)$, то соотношение (4.13) сводится к преобразованию Ганкеля

$$F(k) = 2\pi \int_0^{\infty} b(r) J_0(kr) r dr, \quad (4.14)$$

где J_0 есть функция Бесселя. Тогда $E(k) = 2\pi k S(k)$.

Для описания статистических свойств турбулентных полей используют и структурные функции различного порядка

$$D_q(r) = \langle (x(\mathbf{r}) - x(\mathbf{r} - \mathbf{r}))^q \rangle_{|\mathbf{r}|=r}, \quad (4.15)$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle$ подразумевают осреднение по пространству. При этом спектральной плотности соответствует структурная функция второго порядка D_2 .

В вейвлет-представлении распределение энергии пульсаций по масштабам характеризуется интегральным *вейвлет-спектром*, определяемым как средняя энергия всех вейвлет-коэффициентов данного масштаба a на всей плоскости

$$M(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(a, \mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}. \quad (4.16)$$

Вейвлет-спектр (4.16) можно легко выразить с помощью (4.4) через спектр Фурье

$$M(a) = \frac{a^{4-2\kappa}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(\mathbf{k})|^2 |\tilde{\psi}(a\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}. \quad (4.17)$$

Это соотношение показывает, что вейвлет-спектр есть сглаженная версия спектра Фурье. В изотропном случае связь упрощается:

$$M(a) = \frac{a^{4-2\kappa}}{2\pi} \int_0^{\infty} E(k) |\tilde{\psi}(ak)|^2 dk. \quad (4.18)$$

При обсуждении свойств мелкомасштабной турбулентности постоянно рассматривались инерционные интервалы, в которых структурные функции и спектры подчиняются степенным законам. Остановимся на связи между показателями степени у различных характеристик. Пусть структурная функция второго порядка следует закону

$$D_2(r) \sim r^\lambda. \quad (4.19)$$

Тогда $S(k) \sim k^{-\lambda-2}$, а спектральная плотность энергии

$$E(k) \sim k^{-(\lambda+1)}. \quad (4.20)$$

Поведение вейвлет-спектра зависит от параметра κ в определении (4.2). Используя $\kappa = 2$, получают для спектра $M(a)$ тот же степенной закон, что и для структурной функции

$$M(a) \sim a^\lambda; \quad (4.21)$$

при выборе $\kappa = 3/2$ получают $M(a) \sim a^{\lambda+1}$, что удобно, если вейвлет-спектр предполагается сравнивать со спектром Фурье $E(k)$. Заметим, что параметр масштаба a имеет тот же смысл (и размерность), что и расстояние r в корреляционной функции (4.12) и структурной функции (4.15).

Следует сделать важное замечание относительно использования вейвлетов для выделения степенных законов в спектрах. Любой вейвлет имеет собственный спектральный образ, хвосты которого сами по себе могут следовать степенной зависимости. Следовательно, скорость затухания этих хвостов и определяет предельную скорость убывания спектра, которая может быть обнаружена данным вейвлетом.

Другое важное замечание касается вычислений структурных функций. Вычисление D_2 , в соответствии с формулой (4.15), можно интерпретировать как вычисление вейвлет-спектра (4.16) с помощью специфического

(анизотропного) вейвлета, образованного разностью двух дельта-функций, отстоящих друг от друга на единичное расстояние

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{e}) = \delta(\mathbf{r}) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{e}), \quad (4.22)$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор. Это ”очень плохой” вейвлет в том смысле, что, имея прекрасную локализацию в физическом пространстве, он неизбежно имеет очень плохое спектральное разрешение. Это означает, что структурные функции дают очень плохое разрешение по масштабам и могут использоваться только тогда, когда есть уверенность в гладком поведении спектральной плотности. Иначе говоря, если имеется поле, спектр которого представляет собой совокупность нескольких пиков, структурные функции могут превратить эти пики в гладко спадающую зависимость.

4.5 Вейвлетные кросс-корреляции

При анализе турбулентных процессов часто встает вопрос о степени корреляции различных полей (например, магнитного поля и поля скорости, давления и температуры и т. д.). Мы говорили выше о помасштабном анализе коррелированности сигналов с помощью вейвлетов. Обсудим теперь возможность анализа степени корреляции двумерных полей с помощью их вейвлет-представления.

Пусть имеются две двумерные функции, $x(r_1, r_2)$ и $y(r_1, r_2)$, определяемые в одной области пространства. Простейшей характеристикой связанности этих двух полей служит коэффициент корреляции, определяемый как

$$r_p = \frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)}{((x_i - \langle x \rangle)^2 (y_i - \langle y \rangle)^2)^{1/2}}, \quad (4.23)$$

где индекс i соответствует номеру точки (пикселя) в двумерном поле. Назовем эту характеристику *поточечной корреляцией*. Точность оценки (4.23) определяется количеством независимых точек n , использованных при вычислении, и уровнем корреляции [23]

$$\Delta r = \sqrt{(1 - r^2)/(n - 2)}. \quad (4.24)$$

Такая поточечная корреляция является интегральной характеристикой, содержащей в себе все масштабы, присутствующие в рассматриваемых полях. Можно привести множество примеров, когда рассматриваемые поля включают структуры различных масштабов и одни масштабы могут определяться общими механизмами и быть строго коррелированы, в то время как другие могут быть совершенно независимы.

Введем по аналогии с одномерным случаем корреляционную функцию

$$r_w(a) = \frac{\iint W_x(a, \mathbf{x}) W_y^*(a, \mathbf{r}) d\mathbf{r}}{(M_x(a) M_y(a))^{1/2}}. \quad (4.25)$$

Для оценки погрешности $\Delta r_w(a)$ будем использовать формулу (4.24), принимая $n = (L/a)^2$, где L есть размер рассматриваемой области.

Связь поточечного коэффициента корреляции r_p и вейвлет-корреляции r_w получается с использованием (4.4), (4.16), (4.25) и в случае $\kappa = 2$ имеет вид

$$r_p = \frac{\int r_w(a) (M_x(a) M_y(a))^{1/2} a^{-1} da}{(\int M_x(a) a^{-1} da \int M_y(a) a^{-1} da)^{1/2}}. \quad (4.26)$$

Приведем также связь между введенной вейвлет-корреляцией и кросс-корреляционной функцией, определяемой как

$$h(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\mathbf{r}') y(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\mathbf{r}'. \quad (4.27)$$

Формулы (4.4), (4.13), (4.17) и (4.25) дают следующее соотношение:

$$r_w(a) = \frac{\iint \tilde{h}(\mathbf{k}) |\tilde{\psi}(a\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}}{(\iint \tilde{b}_x(\mathbf{k}) |\tilde{\psi}(a\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \iint \tilde{b}_y(\mathbf{k}) |\tilde{\psi}(a\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k})^{1/2}}, \quad (4.28)$$

которое в пределе вейвлетов с хорошим спектральным разрешением для изотропного случая может быть приведено к виду

$$r_w(a) = \frac{\tilde{h}(2\pi/a)}{(\tilde{b}_x(2\pi/a) \tilde{b}_y(2\pi/a))^{1/2}}. \quad (4.29)$$

В формулах (4.28)–(4.29) $\tilde{b}_i(k)$ есть фурье-образ соответствующей автокорреляционной функции (4.12).

Следует подчеркнуть, что все приведенные соотношения между вейвлет-коэффициентами, спектрами, корреляционными функциями являются точными, только если пределы интегрирования выходят за рамки масштабов, присутствующих в исследуемых полях. С практической точки зрения вычисление с помощью вейвлетов имеет сильное преимущество, состоящее в том, что сначала происходит разделение масштабов, и дальнейшие вычисления можно производить только для масштабов, допускающих корректные расчеты. Корректное вычисление преобразования Фурье $\tilde{h}(2\pi/a)$, напротив, подразумевает знание кросс-корреляционной функции (4.27) во всем диапазоне масштабов (то же самое касается и вычислений автокорреляционной функции и определения через нее спектральной плотности).

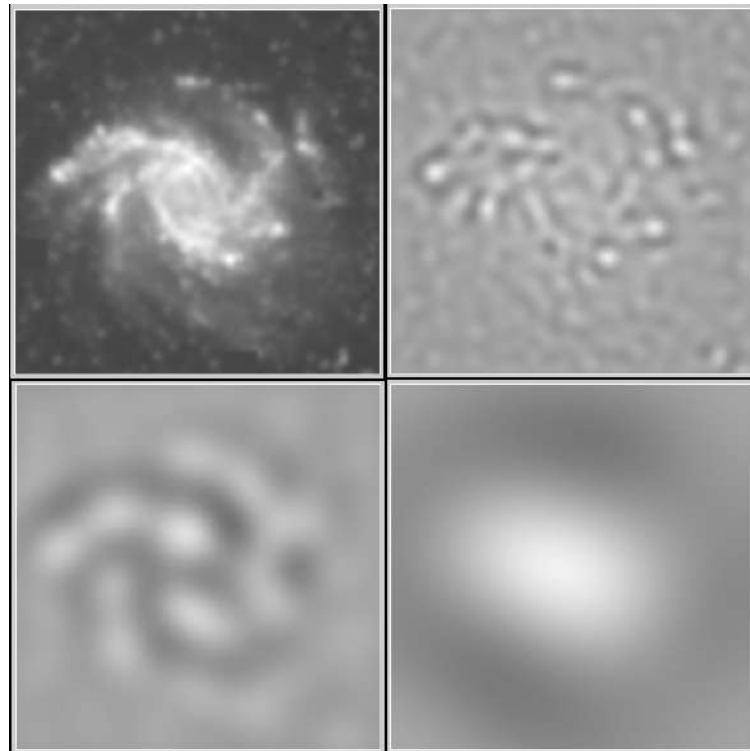


Рис. 4.7. Изображение галактики NGC 6946 и ее вейвлет-разложение на разных масштабах

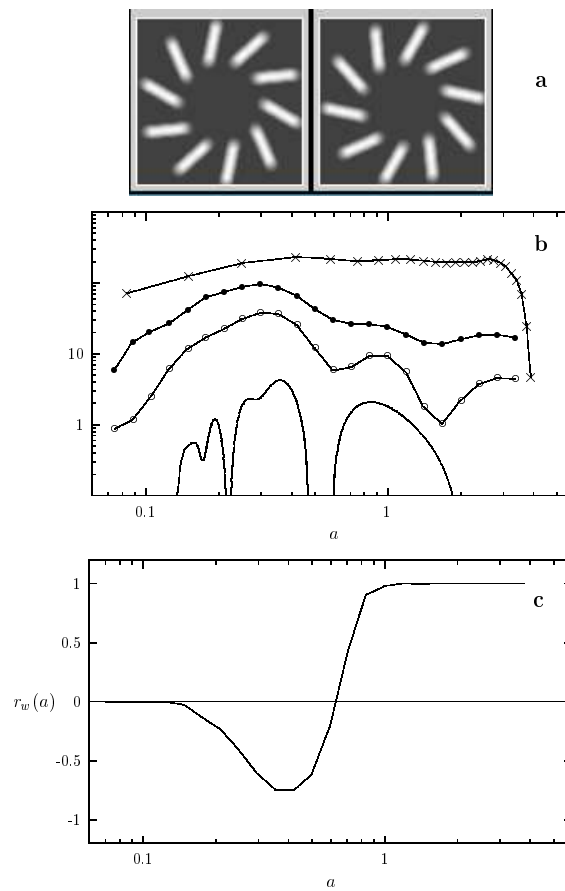


Рис. 4.8. Два изображения "колеса с наклонными спицами", одно из которых получено из другого путем поворота на половину межспицевого промежутка (a), энергетические спектры Фурье, вейвлет-спектры (МН и РН) и структурные функции (b – снизу вверх) и вейвлетная кросс-корреляция (c)

Для иллюстрации свойств обсуждаемых методов анализа приведем два примера из работы [24], посвященной анализу мелкомасштабной структуры внешних галактик. Поводом для этой работы послужили попытки определения скейлинговых характеристик галактических полей с помощью структурных функций, которые дали степенные зависимости на масштабах, сравнимых с размерами самой галактики. В [24] анализируются данные наблюдения галактики NGC 6946, изображение которой в оптическом диапазоне приведено на рис. 4.7. Размер всего изображения составляет $11' \times 11'$ (в качестве единицы измерения используется угловая минута, линейный размер изображения равен приблизительно 30 килопарсек). Разрешение телескопа позволяет анализировать масштабы $a \geq 0.1'$. На этом же рисунке с целью демонстрации возможностей вейвлет-фильтрации изображения показаны и вычисленные с помощью вейвлета РН коэффициенты разложения $W(a, \mathbf{r})$ для трех значений масштаба a : $0.5'$, $1.4'$ и $4'$.

Прежде чем обсуждать результаты анализа изображения галактики, покажем простой тестовый пример, приведенный на рис. 4.8. Рассматриваются два простых изображения, одно из которых получается из другого путем поворота на угол $\pi/10$ (лучи на втором рисунке находятся как раз по середине между лучами первого рисунка). Спектральные свойства этих двух изображений идентичны и показаны на рис. 4.8. *b*. Верхняя кривая (с крестиками) дает значения структурной функции D_2 (4.15). Кривая практически горизонтальна в большом интервале масштабов и резко спадает только на масштабах, сравнимых с размерами всего изображения. Две следующие кривые показывают вейвлет-спектры, полученные с помощью функций МН (черные точки) и РН (кружки), а нижняя кривая воспроизводит фурье-спектр этого же изображения. Можно ясно видеть изменение спектрального разрешения. Если спектр Фурье состоит из трех отдельных частей (первая соответствует ширине отдельного луча, вторая – расстоянию между лучами, третья – длине лучей, т.е. ширине кольца, образованного лучами), то вейвлет-спектры плавно огибают эти области (при этом разрешение РН остается существенно выше), а структурная функция теряет всю информацию о выделенных масштабах. Заметим, что кривые сдвинуты по вертикали для наглядности, а спектр Фурье приведен к масштабу a ($a = 2\pi/k$).

Рис. 4.8. *c* показывает вейвлет-корреляцию этих двух изображений. Вычисление поточечной корреляции дает значение $r_p = -0.01$, что является прямым следствием того факта, что элементы двух рисунков не перекрывают друг друга. В то же время очевидно, что рисунки "в целом" прекрасно коррелированы, так как воспроизводят одинаковый объект, повернутый на разные углы. Ситуацию проясняет вейвлет-корреляция $r_w(a)$,

которая равна нулю в области малых масштабов, дает существенные отрицательные значения на масштабах порядка расстояния между лучами ($r_w \simeq -0.75$) и стремится к единице на больших масштабах. Это означает, что малые масштабы не перекрывают друг друга, средние находятся в противофазе, а на масштабах всего рисунка детальное положение лучей уже не важно, и рисунки идентичны.

На рис. 4.9 показаны спектральные характеристики изображения галактики NGC 6946 (структурная функция, два вейвлет-спектра и спектр Фурье). Можно видеть, что гладкая форма графика структурной функции (верхняя кривая) действительно теряет всякую информацию о доминирующих масштабах (в данном случае это масштабы порядка $0.5-1'$, соответствующие ширине рукавов). Оптимальным кажется вейвлет-спектр, полученный с помощью функции РН (вторая кривая снизу), который свободен от многочисленных деталей, присущих спектру Фурье, но четко идентифицирует максимум в спектре энергии.

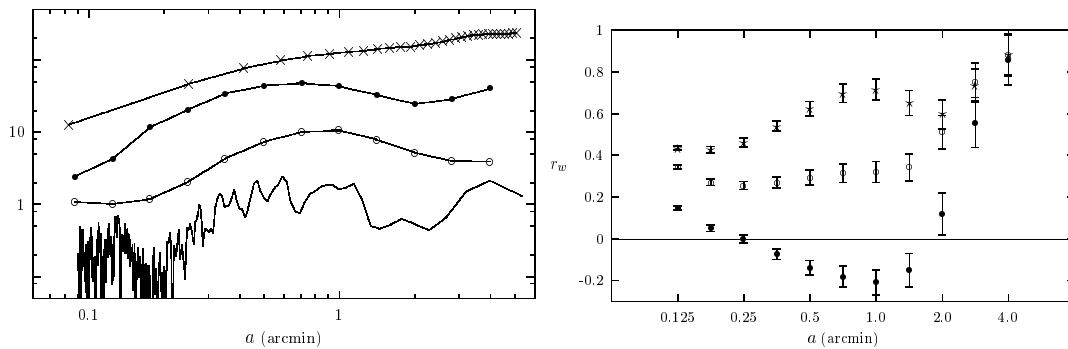


Рис. 4.9. Слева: спектральные характеристики изображения галактики NGC 6946 (сверху вниз): структурная функция, два вейвлет-спектра и спектр Фурье. Справа: вейвлет-корреляция, вычисленная для трех пар изображений: водород-поляризованное радиоизлучение (черные точки), водород-тепловое излучение (звездочки), водород-нетепловое излучение (кружки)

В цитируемой работе [24] анализировались изображения галактики NGC 6946, полученные в девяти различных диапазонах радио- и оптического излучения. Большой интерес представляет связь между различными видами излучений. На рис. 4.9 (справа) показана вейвлет-корреляция, вычисленная для трех пар изображений: водород-поляризованное радиоизлучение (черные точки), водород-тепловое излучение (звездочки), водород-нетепловое излучение (кружки). Можно видеть, насколько отличаются эти три зависимости. Нижняя кривая дает существенные отрицательные значения на масштабах порядка ширины галактических рукавов, показывая, что поляризованное радиоизлучение, которое является индикатором наличия магнитных полей, сильнее вне газовых рукавов. На рисунке показаны и погрешности определения величины r_w . Увеличение погрешности на больших масштабах происходит в силу сокращения количества независимых

точек, используемых при вычислении коэффициента корреляции.

4.6 Анализ анизотропных структур

В задачах, связанных с выделением ориентированных структур различного масштаба может быть полезным анизотропное вейвлет-преобразование. Использование *анизотропных* функций приводит к появлению дополнительного параметра θ , отвечающего за ориентацию вейвлета. При этом вейвлет-преобразование двумерной функции приводит к четырехмерному набору вейвлет-коэффициентов (две координаты, масштаб и угол)

$$W_x(a, \theta, \vec{r}) = \frac{1}{a^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vec{r}') \psi^* \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{a}, \theta \right) d\vec{r}'. \quad (4.30)$$

Интегральный вейвлет-спектр (4.16) становится в этом случае функцией двух переменных, масштаба и угла,

$$M(a, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_x(a, \theta, \vec{r})|^2 d\vec{r}. \quad (4.31)$$

Появление дополнительного параметра значительно расширяет и набор функций, которые могут использоваться в качестве анализирующего вейвлета. Не углубляясь в вопрос о выборе оптимальной функции для анизотропного вейвлет-разложения, отметим лишь, что в этом случае появляется дополнительный критерий, характеризующий угловое разрешение анизотропного вейвлета, т.е. чувствительность к направлению структур. Мы ограничимся анализирующим вейвлетом вида (4.10), который запишем в виде, явно включающим угол,

$$\psi(\vec{r}, \theta) = e^{2\pi i(r_1 \cos \theta + r_2 \sin \theta)} e^{-\frac{(r_1^2 + r_2^2)}{2}}. \quad (4.32)$$

Использование анизотропного вейвлет-представления становится целесообразным при анализе полей, в которых необходимо идентифицировать анизотропные структуры различного масштаба. В соответствии с формулой (4.30) результат такого разложения зависит от четырех параметров. Очевидно, что прямое обобщение формулы (4.28) на случай анизотропного вейвлет-разложения приводит к двухпараметрической вейвлетной кросс-корреляции вида

$$r_w^A(a, \theta) = \frac{\int \int W_x(a, \theta, \vec{r}) W_y^*(a, \theta, \vec{r}) d\vec{r}}{[M_x(a, \theta) M_y(a, \theta)]^{1/2}}. \quad (4.33)$$

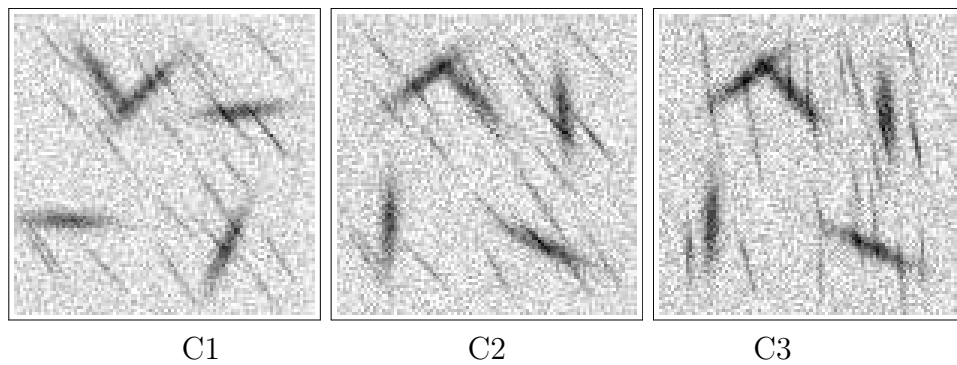


Рис. 4.10. Изображения, включающие шум и анизотропные структуры двух масштабов (l и s). C1 – структуры l локализованы и ориентированы произвольно, s локализованы также произвольно, но направлены в диапазоне углов от $\pi/4$ до $\pi/3$, C2 – все структуры локализованы в тех же точках, что и на C1, но l повернуты на $\pi/2$, а направление s неизменно, C3 – все структуры локализованы в тех же точках, что и на C2, направление структур l совпадает, а структуры s повернуты на $\pi/6$

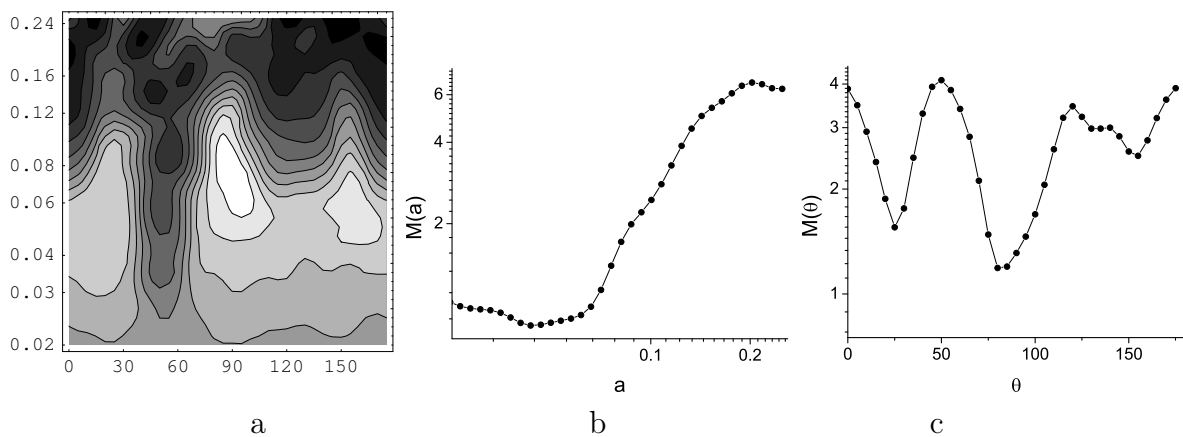


Рис. 4.11. Анизотропные вейвлет-спектры изображения C1: a – $M(a, \theta)$; b – $M(a)$; c – $M(\theta)$

Использование такой характеристики на практике в большинстве случаев малоинформативно, и требуется более простая характеристика степени коррелированности полей. Выбор конкретной характеристики зависит от вида изучаемых структур и целей анализа. Мы рассмотрим в качестве примера три изображения (рис. 4.10), содержащие анизотропные структуры двух масштабов [25]. Причем поле C2 получено из поля C1 путем разворота больших структур (l) на угол $\pi/2$, а поле C3 получено из поля C2 путем поворота структур меньшего масштаба (s) на угол $\pi/6$.

Вейвлет-спектры поля C1 показаны на рис. 4.11. Энергетический спектр указывает на доминирование крупномасштабных структур. Это подтверждает и двумерный спектр. При этом в мелкомасштабной части существует выделенное направление, в то время как крупномасштабные структуры распределены по углу более-менее равномерно.

В нашем примере мы хотим при анализе трех изображений выявить степень корреляции направлений ориентации структур, поэтому в качестве

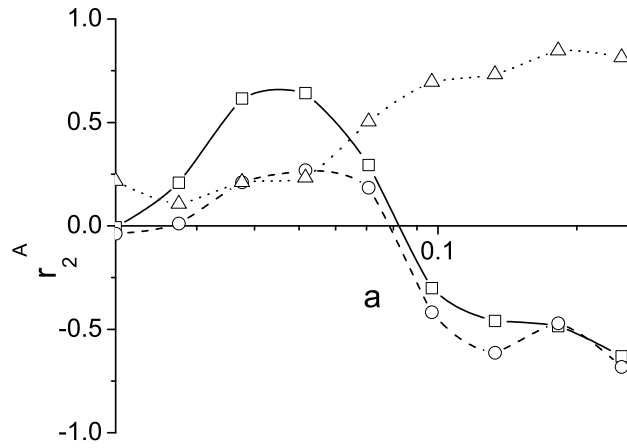


Рис. 4.12. Анизотропная вейвлетная кросскорреляция $r_2^A(a)$ (с) для каждой пары изображений: C1–C2 (квадраты), C1–C3 (кружки) и C2–C3 (треугольники)

меры корреляции двух изображений g и f используем величину [25]:

$$r_2^A(a) = \frac{\sum (\tilde{W}_x \tilde{W}_y \cos 2(\phi_x - \phi_y))}{\sqrt{\sum |\tilde{W}_x|^2 \sum |\tilde{W}_y|^2}}. \quad (4.34)$$

В этом случае учитывается не только максимальное значение вейвлет-коэффициента для заданной точки, но и ориентация вейвлета, при которой оно получено. Так как направление ориентации структуры определяется с точностью до π , то абсолютное значение разности углов будет лежать в интервале от 0 до $\pi/2$. Множитель 2 растягивает этот диапазон до π , приводя к тому, что взаимно-перпендикулярной ориентации структур соответствует значение $r_2^A = -1$.

Результат вычисления величины (4.34) для каждой пары полей C1, C2 и C3 показан на рис. 4.12. Для пары C1 и C2 (структуры s сонаправлены, а l - перпендикулярны) r_2 достигает больших значений (0.7) на масштабе структур s и больших по модулю отрицательных значений на масштабе структур l . В случае сонаправленных крупномасштабных (C2–C3) структур r_2 на масштабе порядка l приближается к 1, а мелкомасштабные структуры, которые в данном случае направлены под углом $\pi/6$, также обнаруживают корреляцию, но меньшую, чем в случае сонаправленных структур.

Заключение

Курс "Обработка и анализ сигналов и изображений в физическом эксперименте" касается очень широкого круга вопросов и, в зависимости от уровня подготовки и узкой специализации слушателей, может излагаться в разных вариантах. Конкретный курс лекций, безусловно, зависит не только от потребностей и квалификации слушателей, но и от персонального опыта и круга научных интересов лектора.

Подбор материала в данном учебном пособии, конечно же, отражает личный опыт и профессиональные пристрастия автора, который тем не менее надеется, что предложенный материал может быть полезен и тем, кто планирует работать в достаточно далеких от поля деятельности автора областях фундаментальной и прикладной науки.

Список литературы

- [1] Baliunas, S.L., Donahue, R.A., Soon, W., et al., Chromospheric Variations in Main-Sequence Stars. II. // *Astrophysical Journal*. – 1995. – Vol.438. – P. 269–287.
- [2] Тутубалин В.Н. Теория вероятностей.– М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 368 с.
- [3] Khalilov R., Kolesnichenko I., Pavlinov A., Mamykin A., Shestakov A., Frick P. Thermal convection of liquid sodium in inclined cylinders // *Physical Review Fluids*. – 2018. – Vol.3, No. 4. – 043503.
- [4] Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Доклады АН СССР*. – 1941. – Т. 30. – С. 9–13.
- [5] Benzi R., Ciliberto S., Tripicciono R., Baudet C., Massaioli F., Succi S. Extended selfsimilarity in turbulent flows // *Physical Review E*. – 1993. – Vol. 48. – P. R29–R32.
- [6] Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. – 1984. – Vol. 15, No. 4. – P. 723–736.
- [7] Фрик П.Г., Соколов Д.Д., Степанов Р.А. Вейвлет-анализ пространственно-временной структуры физических полей // *Успехи физических наук* – 2022. – Т. 192, №1. – С. 69–99.
- [8] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
- [9] Mallat S.G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. – 1989. – Vol. 11, No. 7, – P. 674–702.
- [10] Думлер А.А., Подтаев С.Ю., Степанов Р.А. Фрик П.Г. Практическое применение импедансной реографии в кардиологии – новые подходы // *Альманах клинической медицины*. – 2016. – Т.44, №2. – С. 179–185.

- [11] Noskov V., Denisov S., Stepanov R., Frick P. Turbulent viscosity and turbulent magnetic diffusivity in decaying spin-down flow of liquid sodium // *Physical Review E*. – 2012. – Vol. 85. – 016303.
- [12] Соколов Д.Д., Степанов Р.А., Фрик П.Г. Динамо на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту // *Успехи физических наук* – 2014. – Т. 184, №. 3. – С.313–335.
- [13] Bloomfield P. *Fourier analysis of time series*. – New York: J. Wiley, 1976. – 275 p.
- [14] Nemes-Ribes E., Frick P., Sokoloff D., Zakharov V., Ribes J.-C., Vigoroux A., Laclare F. Wavelet analysis of Maunder minimum as recorded in Solar diameter data // *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Serie IIb*. – 1995. – Vol. 321, No. 12. – P. 525–532.
- [15] Тихонов А., Арсенин В. *Методы решения некорректных задач*. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
- [16] Патрикеев И.А., Степанов Р.А., Фрик П. Г. Вейвлет-регуляризация операции дифференцирования сигнала с шумом // *Вычислительные методы и программирование*. – 2005. – Т. 6, № 1. – С. 39–46.
- [17] Frick P., Baliunas S., Galyagin D., Sokoloff D., Soon W. Wavelet analysis of stellar chromospheric activity variations // *Astrophysical Journal*. – 1997. – Vol. 483. – P. 426–434.
- [18] Frick P., Grossmann A., Tchamichian Ph. Wavelet analysis of signals with gaps // *Journal of Mathematical Physics*. – 1998. – Vol. 39, No. 8. – P. 4091–4107.
- [19] Хохрякова К. А., Мизева И. А., Шмыров А. В. Экспериментальное исследование поверхностного натяжения магнитной жидкости и ее основы в магнитном поле // *Вестник Пермского университета. Физика*. – 2023. – № 1. – С. 47–56.
- [20] Golubova N., Potapova E., Seryogina E., Dremin V. Time–frequency analysis of laser speckle contrast for transcranial assessment of cerebral blood flow // *Biomedical Signal Processing and Control*. – 2023.– Vol. 85. – 104969.
- [21] Frick P., Stepanov R., Beck R., Sokoloff D., Shukurov A., Ehle M., Lundgren A. Magnetic and gaseous arms in M83 // *Astronomy and Astrophysics*. – 2016. – Vol. 585. – A21.

- [22] Mizeva I., Reich W., Beck R., Frick P., Sokoloff D. Statistical properties of polarized radio continuum emission and effects of data processing // *Astronomische Nachrichten*. – 2007. – Vol. 328, No. 1. – P. 80–91.
- [23] Edwards A.L. *Multiple Regression and Analysis of Variance and Covariance*. – San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1979 – 212 p.
- [24] Frick P., Beck R., Berkhuijsen E., Patrikeyev I. Scaling and correlation analysis of galactic images // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2001. – Vol. 326, N. 4. – P. 9145-0177.
- [25] Мизёва И.А., Степанов Р.А., Фрик П.Г. Вейвлетные кросскорреляции двумерных полей // *Вычислительные методы и программирование*. – 2006. – Т. 7. – С.172–179.

Учебное издание

Фрик Петр Готлобович

**Обработка и анализ сигналов и изображений
в физических экспериментах**

Учебное пособие

Редактор *Н. И. Стрекаловская*
Корректор *А. В. Цветкова*
Компьютерная верстка: *Р. С. Окатьев*

Объем данных 7,4 Мб
Подписано к использованию 20.09.2023

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Управление издательской деятельности
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15