

П. Г. Фрик

# Турбулентность: подходы и модели

*Издание второе, исправленное и дополненное*



Москва ♦ Ижевск

2010

ББК 22.253.3  
УДК 532.517.4  
Ф 887

Интернет-магазин  
**MAHESIS**

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

**Фрик П. Г.**

Турбулентность: подходы и модели. — Изд. 2-е, испр. и доп. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. — 332 с.

В книге дан обзор основных подходов к описанию развитых турбулентных течений. Основное внимание уделяется свойствам мелкомасштабной турбулентности и моделям, используемым для ее описания. Обсуждается роль законов сохранения в формировании инерционных интервалов, специфика каскадных процессов в конвективной и магнитогидродинамической турбулентности, в двумерных турбулентных потоках. Даны примеры исследования сложных турбулентных течений с помощью комбинированных моделей, описывающих как динамику средних полей, так и нелинейные процессы переноса в широком диапазоне масштабов.

Для специалистов в области механики жидкости и газа, аспирантов и студентов старших курсов.

ISBN 978-5-93972-???-?

ББК 22.253.3

© П. Г. Фрик, 2010

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

## Оглавление

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| Предисловие ко второму изданию . . . . .                | 7  |
| Введение . . . . .                                      | 8  |
| ГЛАВА 1. Основы . . . . .                               | 11 |
| 1.1. Уравнения движения жидкости . . . . .              | 11 |
| 1.1.1. Уравнение непрерывности . . . . .                | 12 |
| 1.1.2. Идеальная жидкость . . . . .                     | 13 |
| 1.1.3. Реальная жидкость . . . . .                      | 15 |
| 1.1.4. Число Рейнольдса и закон подобия . . . . .       | 17 |
| 1.1.5. Простые примеры решений . . . . .                | 20 |
| 1.2. Устойчивость течений . . . . .                     | 24 |
| 1.3. Свободная конвекция несжимаемой жидкости . . . . . | 29 |
| 1.4. Конвективная устойчивость . . . . .                | 33 |
| 1.5. Магнитная гидродинамика . . . . .                  | 39 |
| Рекомендуемая литература к первой главе . . . . .       | 44 |
| ГЛАВА 2. Хаос в динамических системах . . . . .         | 45 |
| 2.1. Консервативные и диссипативные системы . . . . .   | 46 |
| 2.1.1. Фазовое пространство . . . . .                   | 47 |
| 2.1.2. Консервативные системы . . . . .                 | 48 |
| 2.1.3. Диссипативные системы . . . . .                  | 49 |
| 2.1.4. Пример немеханической системы . . . . .          | 51 |
| 2.2. Бифуркации . . . . .                               | 53 |
| 2.2.1. Что такое бифуркация? . . . . .                  | 53 |
| 2.2.2. Бифуркация Хопфа . . . . .                       | 54 |
| 2.2.3. Нормальные и обратные бифуркации . . . . .       | 54 |
| 2.3. Как описать переход и хаос? . . . . .              | 55 |
| 2.3.1. Сечения Пуанкаре . . . . .                       | 55 |
| 2.3.2. Показатели Ляпунова . . . . .                    | 58 |
| 2.3.3. Спектры Фурье . . . . .                          | 59 |
| 2.4. Странный аттрактор . . . . .                       | 62 |
| 2.5. Фракталы . . . . .                                 | 64 |

|                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.5.1. Понятие фрактала . . . . .                                            | 64         |
| 2.5.2. Алгоритм вычисления размерности аттрактора . . . . .                  | 68         |
| 2.5.3. Обобщенная размерность . . . . .                                      | 70         |
| 2.6. Субгармонический каскад . . . . .                                       | 72         |
| 2.7. Некоторые примеры . . . . .                                             | 76         |
| 2.7.1. Система Лоренца . . . . .                                             | 76         |
| 2.7.2. Модель динамо Рикитаке . . . . .                                      | 84         |
| 2.7.3. Реальная конвекция . . . . .                                          | 87         |
| Рекомендуемая литература ко второй главе . . . . .                           | 90         |
| <b>ГЛАВА 3. Подход Рейнольдса. Теория средних полей . . . . .</b>            | <b>91</b>  |
| 3.1. Развитая турбулентность . . . . .                                       | 91         |
| 3.1.1. Вводные замечания . . . . .                                           | 91         |
| 3.1.2. Статистические моменты случайных полей . . . . .                      | 93         |
| 3.1.3. Пространственные спектры . . . . .                                    | 98         |
| 3.2. Уравнение Рейнольдса . . . . .                                          | 101        |
| 3.3. Цепочка уравнений Фридмана – Келлера и проблема замыкания . . . . .     | 103        |
| 3.4. Турбулентная вязкость . . . . .                                         | 105        |
| 3.5. Длина пути смешения . . . . .                                           | 106        |
| 3.6. Модели переноса турбулентной вязкости . . . . .                         | 107        |
| 3.7. Двухпараметрические модели . . . . .                                    | 108        |
| 3.8. Крупномасштабное магнитное поле в турбулентной среде . . . . .          | 109        |
| 3.8.1. Турбулентная электродвижущая сила . . . . .                           | 110        |
| 3.8.2. Вычисление коэффициентов $\alpha$ и $\beta$ . . . . .                 | 114        |
| Рекомендуемая литература к третьей главе . . . . .                           | 121        |
| <b>ГЛАВА 4. Подход Колмогорова. Мелкомасштабная турбулентность . . . . .</b> | <b>122</b> |
| 4.1. Однородная и изотропная турбулентность . . . . .                        | 122        |
| 4.2. Баланс энергии по масштабам. Каскад . . . . .                           | 125        |
| 4.3. Теория Колмогорова 1941 года (K41) . . . . .                            | 129        |
| 4.3.1. Анализ размерностей . . . . .                                         | 129        |
| 4.3.2. Уравнения Кармана – Ховарта и закон «4/5» . . . . .                   | 133        |
| 4.4. Логнормальная модель (K62) . . . . .                                    | 140        |
| 4.5. Фракталы и турбулентность . . . . .                                     | 144        |
| 4.5.1. $\beta$ -модель . . . . .                                             | 146        |
| 4.5.2. Бифрактальная модель . . . . .                                        | 148        |
| 4.5.3. Мультифрактальная модель . . . . .                                    | 149        |
| 4.6. Логпуассоновские модели . . . . .                                       | 152        |
| 4.6.1. Модель Ше – Левека . . . . .                                          | 152        |
| 4.6.2. Расширенная автомодельность . . . . .                                 | 156        |

|                                                                                               |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.6.3. Модель Ше – Левека – Дюбрюль . . . . .                                                 | 158        |
| Рекомендуемая литература к четвертой главе . . . . .                                          | 161        |
| <b>ГЛАВА 5. Законы сохранения и инерционные интервалы. Двумерная турбулентность . . . . .</b> | <b>162</b> |
| 5.1. Законы сохранения и инерционные интервалы . . . . .                                      | 163        |
| 5.1.1. Трехмерные течения . . . . .                                                           | 163        |
| 5.1.2. Двумерные течения . . . . .                                                            | 165        |
| 5.2. Лабораторные эксперименты . . . . .                                                      | 168        |
| 5.3. Численные исследования . . . . .                                                         | 171        |
| 5.4. Перемежаемость в двумерной турбулентности . . . . .                                      | 176        |
| 5.5. О каскадах в спиральной турбулентности . . . . .                                         | 182        |
| <b>ГЛАВА 6. Турбулентность с пассивными и активными примесями . . . . .</b>                   | <b>185</b> |
| 6.1. Пассивная примесь . . . . .                                                              | 185        |
| 6.2. Конвективная турбулентность . . . . .                                                    | 188        |
| 6.3. МГД-турбулентность . . . . .                                                             | 191        |
| <b>ГЛАВА 7. Иерархические модели турбулентности и вейвлеты . . . . .</b>                      | <b>202</b> |
| 7.1. Иерархический базис для турбулентных полей . . . . .                                     | 202        |
| 7.1.1. Одномерный иерархический базис . . . . .                                               | 206        |
| 7.1.2. Двумерный базис . . . . .                                                              | 208        |
| 7.1.3. Трехмерный базис . . . . .                                                             | 211        |
| 7.2. Иерархическая модель двумерной турбулентности . . . . .                                  | 211        |
| 7.3. Вейвлеты . . . . .                                                                       | 219        |
| <b>ГЛАВА 8. Каскадные модели турбулентности . . . . .</b>                                     | <b>223</b> |
| 8.1. Каскадные модели . . . . .                                                               | 223        |
| 8.2. Модель Новикова – Деснянского . . . . .                                                  | 224        |
| 8.3. Модель GOY . . . . .                                                                     | 227        |
| 8.4. Скейлинг и перемежаемость в каскадных моделях турбулентности . . . . .                   | 232        |
| 8.5. Каскадная модель спиральной турбулентности . . . . .                                     | 238        |
| Рекомендуемая литература к восьмой главе . . . . .                                            | 246        |
| <b>ГЛАВА 9. Примеры моделей сложных турбулентных систем . . . . .</b>                         | <b>247</b> |
| 9.1. Модель двумерной турбулентной конвекции . . . . .                                        | 247        |
| 9.2. Модель мелкомасштабного МГД-динамо . . . . .                                             | 252        |
| 9.3. МГД-турбулентность и перекрестная спиральности . . . . .                                 | 258        |
| 9.4. Динамическая модель многомасштабного динамо . . . . .                                    | 263        |

|                                                                             |            |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 9.5. Каскадно-сеточный метод . . . . .                                      | 270        |
| <b>ГЛАВА 10. Фурье- и вейвлет-анализ случайных полей . . . . .</b>          | <b>273</b> |
| 10.1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье . . . . .               | 273        |
| 10.1.1. Основные свойства преобразования Фурье . . . . .                    | 275        |
| 10.2. Зачем нужны вейвлеты? . . . . .                                       | 276        |
| 10.3. Непрерывное вейвлет-преобразование . . . . .                          | 278        |
| 10.4. Дискретное вейвлет-преобразование . . . . .                           | 284        |
| 10.5. Вейвлет-анализ временных колебаний гидродинамических систем . . . . . | 292        |
| 10.6. Некоторые полезные алгоритмы вейвлет-анализа . . . . .                | 298        |
| 10.6.1. Дифференцирование экспериментальных данных . . . . .                | 298        |
| 10.6.2. Анализ данных с разрывами . . . . .                                 | 304        |
| 10.6.3. Двойной вейвлет-анализ . . . . .                                    | 307        |
| 10.7. Спектральный и корреляционный анализ двумерных полей . . . . .        | 312        |
| 10.7.1. Двумерное вейвлет-преобразование . . . . .                          | 312        |
| 10.7.2. Спектры и структурные функции . . . . .                             | 313        |
| 10.7.3. Вейвлет кросскорреляции . . . . .                                   | 316        |
| Рекомендуемая литература к десятой главе . . . . .                          | 321        |
| <b>Литература . . . . .</b>                                                 | <b>322</b> |

## Предисловие ко второму изданию

С момента выхода первого издания книги прошло шесть лет. За это время было выявлено много опечаток (в основном усилиями студентов и магистров, за что им большое спасибо), которые автор постарался устранить. Некоторые разделы автор попытался улучшить в методическом плане, в другие включил новый материал.

Наибольшие изменения внесены в разделы 3.1, 3.8, 6.3, 9.4. Добавлены параграфы 8.5 и 9.3, касающиеся новых каскадных моделей турбулентности, появившихся в последнее время. Расширена и последняя глава, посвященная вейвлет-анализу случайных полей и структур. Хотя эта глава и носит вспомогательный характер, она оказалась достаточно востребованной читателями и в нее был добавлен раздел 10.6, посвященный специальным алгоритмам вейвлет-анализа, разработанным для обработки реальных экспериментальных и наблюдательных данных.

## Введение

Турбулентность остается одним из наиболее сложных объектов исследования механики жидкости и газа. За столетнюю историю ее интенсивного изучения предложены десятки различных подходов, почти всегда отражающие наиболее активно развиваемые перспективные направления математики и физики соответствующего периода времени. Статистическая физика и теория вероятности, теория размерности, анализ Фурье и прямые численные методы, теория динамических систем, теория фракталов и вейвлет-анализ — вот далеко не полный перечень областей науки, которые давали новые идеи исследователям турбулентности. Теория турбулентности далека от своего завершения. Продолжают появляться и все новые подходы к ее изучению. Растет число моделей, предлагаемых для лучшего понимания отдельных ее свойств. Дать представление об основных идеях, движущих этот процесс, продемонстрировать возможности различных подходов и показать проблемы, ими не разрешенные, представить современные модели, не вошедшие еще в учебники и не ставшие хрестоматийными, — вот цель предлагаемой книги.

Книга написана на основе курса лекций, который автор читал в течение ряда лет студентам физического факультета Пермского государственного университета и студентам специальности «Математическое моделирование систем и процессов» Пермского государственного технического университета [29, 30]. Курс предназначался для студентов, ориентирующихся на работу в научно-исследовательских учреждениях и на кафедрах, связанных с решением задач механики жидкости и газа. В то же время, в курсе рассматривались и общие подходы к моделированию сложных динамических систем, которые могут быть полезными специалистам, занимающимся моделированием самых различных (и не только механических) систем и явлений.

Первая глава книги содержит базовые сведения по динамике несжимаемых жидкостей, включая вывод уравнений движения для идеальной и вязкой жидкости, уравнений свободной конвекции и уравнений магнитной гидродинамики. Даны основы теории устойчивости, имеющей важнейшее значение в понимании проблем перехода от ламинарных течений к турбулентным. Подробно обсуждаются две задачи: устойчивость плоского течения Пуазейля и задача Релея о конвективной устойчивости подогреваемого

снизу горизонтального слоя несжимаемой жидкости. Особое внимание уделяется вопросу о безразмерном представлении уравнений движения, о законах подобия и о безразмерных параметрах и их роли в описании процессов перехода к хаотическому поведению.

Значительный прогресс в понимании природы и свойств турбулентности произошел в последние десятилетия благодаря успехам теории динамических систем, позволившим понять, как хаотическое поведение возникает в детерминированных системах. Этим результатам посвящена вторая глава, в которой приводятся базовые сведения из теории динамических систем и обсуждаются некоторые приложения, рассмотрены методы исследования перехода к хаосу и характеристик динамических систем при периодическом и хаотическом поведении. Описаны и обсуждены основные сценарии перехода от порядка к хаосу: сценарий Ландау, сценарий Рюэля и Таккенса, субгармонический каскад. В заключение главы рассмотрены примеры простых гидродинамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение.

В третьей главе начинается знакомство с методами описания развитой турбулентности, а именно, с исторически первым и наиболее развитым подходом к описанию турбулентных потоков. Это подход Рейнольдса и выросшие из него многочисленные полуэмпирические модели турбулентности. Начинается глава с определения статистических моментов случайных полей, характеризующих турбулентный поток. Далее дан вывод уравнения Рейнольдса для средних полей и кратко обсуждаются основные подходы к построению полуэмпирических моделей. Полуэмпирическим моделям уделено сравнительно скромное место по двум причинам. Во-первых, именно этот подход наиболее полно освещен в литературе, а во-вторых, основной целью данной книги является знакомство с методами изучения свойств мелкомасштабной турбулентности, которая как раз и остается за полем зрения полуэмпирических моделей.

Четвертая глава посвящена моделям мелкомасштабной турбулентности, активное развитие которых началось со знаменитой теории А. Н. Колмогорова 1941 года. Описаны первые попытки учета перемежаемости. Показано, что дало применение к теории турбулентности идеи фрактальности и как использование новых экспериментальных данных о структуре поля диссипации энергии и о поведении высших статистических моментов привело к появлению новых моделей, основанных на лог-пуассоновской статистике турбулентных полей.

В пятой главе обсуждается роль законов сохранения в формировании каскадных процессов. Подробно рассмотрены особенности поведения двумерной турбулентности, в которой наличие дополнительного закона сохранения приводит к качественно иному поведению мелкомасштабной турбулентности.

В шестой главе рассматриваются процессы перемешивания пассивных примесей в турбулентном потоке и специфика каскадных процессов в турбулентных течениях, в которых силовые поля, вызывающие турбулентность, сами подвержены ее влиянию. Примерами таких «активных» примесей являются поле температуры в конвективной турбулентности и магнитное поле при турбулентности проводящей жидкости.

В седьмой главе излагаются модели, основанные на применении специальных функциональных базисов, воспроизводящих структуру турбулентных потоков. Эти базисы получили название иерархических и по современной терминологии относятся к вейвлет-базисам. Вейвлет-анализ (возникший заметно позже первых иерархических моделей) превратился сегодня в развитую область математической физики, и его значение для исследования стохастических гидродинамических систем и турбулентности не исчерпывается применением вейвлет-базисов для численного моделирования течений.

Восьмая глава посвящена каскадным моделям турбулентности: простейшим моделям развитой турбулентности, доказавшим свою эффективность в моделировании свойств турбулентности в инерционных интервалах при очень высоких числах Рейнольдса. Эти модели, являясь динамическими системами относительно высокого порядка (несколько десятков уравнений), описывают каскадные процессы в широком интервале масштабов.

В девятой главе даны примеры построения каскадных и комбинированных моделей сложных турбулентных течений. Описана модель конвективной турбулентности, введена модель МГД-турбулентности, и приведены результаты исследования каскадных и динамо-процессов в развитой турбулентности проводящей жидкости. Здесь же описана комбинированная модель динамо, включающая пару уравнений для крупномасштабных мод магнитного поля и каскадную модель для мелкомасштабной турбулентности. Заканчивается глава описанием недавно предложенного каскадно-сеточного метода описания турбулентных течений при больших числах Рейнольдса. Подход совмещает сеточные методы решения уравнений средних полей с описанием подсеточной турбулентности на языке каскадных моделей.

В последней главе кратко даны основные сведения о спектральном, корреляционном и вейвлет-анализе случайных полей. На примерах показаны возможности вейвлет-анализа при исследовании временных рядов и пространственных полей. Обсуждается специфика анализа спектрального состава турбулентных полей и корреляции различных характеристик турбулентного потока.

## ГЛАВА 1

# Основы

В данной книге речь пойдет в основном о турбулентных течениях *несжимаемой* жидкости. При этом предполагается, что турбулентные движения жидкости описываются уравнениями Навье–Стокса или их обобщениями на случай неоднородной температуры проводящей жидкости и т. д. Хотя вывод соответствующих уравнений можно найти во многих книгах, кажется уместным напомнить их происхождение. Это важно уже потому, что сама возможность использования уравнений Навье–Стокса для описания турбулентных потоков не является очевидной, и, применяя их, необходимо отдавать себе отчет в том, какие гипотезы и ограничения использованы при написании уравнений. В этой, вводной главе описаны также два классических примера задач по устойчивости — разделу гидродинамики, традиционно прокладывающему путь от ламинарных задач к турбулентным.

### 1.1. Уравнения движения жидкости

Гидродинамика — это раздел механики сплошных сред, описывающий движение жидкостей и газов в рамках модели сплошной среды. Последнее означает, что рассматриваются масштабы  $l \gg \lambda$ , где  $\lambda$  — длина свободного пробега молекул. В качестве характеристик среды рассматриваются плотность  $\rho$ , давление  $P$  и скорость  $v$ , которые вводятся для физически бесконечно малого объема. Следует подчеркнуть, что речь не идет об абсолютных размерах. К примеру, если рассматриваются движения межзвездной среды на галактических масштабах (скажем, задача о формировании рукавов в галактическом диске), то интерес представляют расстояния, измеряемые килопарсеками (радиус нашей Галактики  $R \approx 15 \text{ кпк} \approx 5 \cdot 10^{20} \text{ м}$ ), и не смотря на то, что плотность межзвездного газа определяется несколькими молекулами на кубический сантиметр (глубокий вакуум!), для этих масштабов вполне проходит приближение сплошной среды, хотя физически бесконечно малый объем в этом случае значительно превосходит объем отдельно взятой звездной системы.

### 1.1.1. Уравнение непрерывности

Законы движения выводятся из законов сохранения. Сначала используется закон сохранения вещества. В пространстве фиксируется некоторый объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ , масса которого

$$m = \int_V \rho dV.$$

Изменение массы этого объема со временем

$$\partial_t m = \partial_t \int_V \rho dV$$

(производную по времени будем обозначать как  $\partial_t$ , а производную по координате  $x_i$  — как  $\partial_i$ ). Поток жидкости, вытекающий из рассматриваемого объема, есть

$$\oint_S \rho v_n dS.$$

Если за положительное направление принять направление движения из рассматриваемого объема, то условие сохранения массы можно записать в виде

$$\partial_t \int_V \rho dV = - \oint_S \rho v_n dS.$$

Правая часть равенства преобразуется по теореме Остроградского–Гаусса

$$\oint_S \rho v_n dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV.$$

Тогда

$$\int [\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})] dV = 0,$$

а так как равенство должно быть справедливо для любого объема, то подынтегральное выражение должно удовлетворять уравнению

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.1)$$

которое и называют *уравнением непрерывности (неразрывности)*. Для несжимаемой жидкости плотность есть величина постоянная ( $\rho = \text{const}$ ) и уравнение (1.1) упрощается:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.2)$$

Важно отметить, что уравнение неразрывности справедливо и для идеальной, и для реальной жидкости.

### 1.1.2. Идеальная жидкость

Уравнения для скорости выведем сначала для идеальной жидкости. Идеальная жидкость — это жидкость без вязкости и теплопроводности.

Закон изменения импульса для движущегося жидкого объема есть

$$d_t \left( \int_V \rho \mathbf{v} dV \right) = \sum_i \mathbf{F}_i,$$

где в правой части стоит сумма всех сил, действующих на выделенный объем. Ограничиваясь рассмотрением силы тяжести и сил давления, запишем

$$d_t \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \oint_S (-P) d\mathbf{S}.$$

Учитывая, что  $d_t \int_V \rho dV \equiv 0$  (интеграл берется по жидкой частице, то есть по заданному количеству жидкости, а не по заданному объему), можно переписать уравнение в виде

$$\int_V \rho d_t \mathbf{v} dV = \int_V (\rho \mathbf{g} - \nabla P) dV$$

и, снова, исходя из произвольного выбора объема частицы, перейти к дифференциальной форме

$$d_t \mathbf{v} = \mathbf{g} - \rho^{-1} \nabla P. \quad (1.3)$$

Входящая в уравнение полная производная  $d_t \mathbf{v}$  — это субстанциональная производная, которая описывает изменение скорости жидкой частицы. Рассмотрение движения отдельных жидких частиц называется подходом Лагранжа к описанию движения жидкости. В большинстве случаев предпочтительным является подход Эйлера, который заключается в описании

характеристик жидкости в заданной точке. Чтобы получить уравнение движения в форме Эйлера, нужно получить связь между субстанциональной и локальной производными. Для этого распишем приращение скорости

$$d\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} dt + \partial_x \mathbf{v} dx + \partial_y \mathbf{v} dy + \partial_z \mathbf{v} dz$$

и получим из него связь субстанциональной (полной) производной по времени с частной производной от скорости по времени (изменение скорости в заданной точке)

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{v} &= \partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{v} d_t x + \partial_y \mathbf{v} d_t y + \partial_z \mathbf{v} d_t z = \\ &= \partial_t \mathbf{v} + v_x \partial_x \mathbf{v} + v_y \partial_y \mathbf{v} + v_z \partial_z \mathbf{v} \end{aligned}$$

или

$$d_t \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}. \quad (1.4)$$

Используя полученное соотношение, приходим к *уравнению Эйлера*, полученному им еще в 1755 г.:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla P + \mathbf{g}. \quad (1.5)$$

Гидростатическое приближение получается при условии отсутствия движения, то есть равенства нулю скорости и производной по времени:

$$\partial_t = 0, \quad \mathbf{v} = 0.$$

Таким образом,

$$-\rho^{-1} \nabla P + \mathbf{g} = 0, \quad (1.6)$$

или  $\nabla P = \rho \mathbf{g}$ . Учитывая, что сила тяжести направлена вертикально вниз, и считая, что по вертикали направлена координата  $z$  (то есть  $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$ ), получим

$$P = P_0 - \rho g z.$$

Запишем теперь поток импульса в тензорных обозначениях:

$$\partial_t (\rho v_i) = \rho \partial_t v_i + v_i \partial_t \rho.$$

Уравнение непрерывности перепишем в виде

$$\partial_t \rho + \partial_k (\rho v_k) = 0$$

(здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам), а уравнение Эйлера (1.5) — в виде

$$\partial_t v_i = -v_k \partial_k v_i - \rho^{-1} \partial_i P.$$

Подставим две последние формулы в выражение для изменения импульса:

$$\partial_t (\rho v_i) = -\rho v_k \partial_k v_i - \partial_i P - v_i \partial_k (\rho v_k) = -\partial_k (\delta_{ik} P + \rho v_i v_k),$$

и введем тензор плотности потока импульса, описывающий перенос  $i$ -й компоненты импульса через площадку, перпендикулярную  $k$ -й оси:

$$\Pi_{ik} = \delta_{ik} P + \rho v_i v_k. \quad (1.7)$$

Уравнение для изменения импульса запишется теперь в виде

$$\partial_t (\rho v_i) = -\partial_k \Pi_{ik}, \quad (1.8)$$

а для конечного объема

$$\partial_t \int_V \rho v_i dV = \int_V -\partial_k \Pi_{ik} dV = -\oint_S \Pi_{ik} dS_k.$$

При выводе уравнений движения не использован закон сохранения энергии. Напомним, что рассматривается идеальная жидкость, а это означает, что в жидкости отсутствуют теплообмен и трение. В таком случае движение адиабатично в каждой жидкой частице. Следовательно, закон сохранения энергии выливается в утверждение, что энтропия каждого жидкого элемента остается постоянной:

$$d_t S = 0.$$

В переменных Эйлера это же уравнение имеет вид

$$\partial_t S + (\mathbf{v} \nabla) S = 0. \quad (1.9)$$

### 1.1.3. Реальная жидкость

Реальная жидкость — это жидкость с вязкостью (внутренним трением) и теплопроводностью. Начнем с рассмотрения уравнений движения для *изотермической* жидкости и для начала еще раз напомним, что уравнение непрерывности (1.1) справедливо и для реальной жидкости, так как

его вывод основывался только на законе сохранения вещества. Далее воспользуемся уравнением Эйлера, записанным в форме закона для переноса импульса (1.8), и попытаемся обобщить его на случай вязкой среды:

$$\partial_t(\rho v_i) = -\partial_k \Pi_{ik} = -\partial_k(\rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma'_{ik}),$$

где слагаемое  $\sigma'_{ik}$  введено для описания потока импульса, обусловленного действием вязкости. Это тензорная величина, называемая тензором вязких напряжений. Величина  $\sigma_{ik} = p \delta_{ik} - \sigma'_{ik}$  называется тензором напряжений.

Кажется естественным, что однородное поле скорости не приводит к появлению вязких напряжений, то есть напряжения возникают только в неоднородном поле скорости. Степень неоднородности характеризуется производными поля скорости

$$\partial_k v_i, \partial_{ik}^2 v_i, \dots$$

Теперь требуется *угадать* форму зависимости тензора вязких напряжений  $\sigma'_{ik}$  от этих производных. На этом этапе делается самое важное ограничение на пути получения уравнения движения *вязкой* жидкости. Оно состоит в том, что в тензор вязких напряжений включаются *только линейные комбинации первых производных* поля скорости. Нужно, однако, учесть, что есть специальный случай, когда поле скорости неоднородно, а вязкие напряжения возникать не должны. Это случай твердотельного вращения жидкости. Существуют только две линейные комбинации первых производных, удовлетворяющие этому требованию. Это  $(\partial_k v_i + \partial_i v_k)$  и  $\text{div } \mathbf{v} = \partial_k v_k$ ,<sup>1</sup> которые и входят в общий вид тензора второго ранга, удовлетворяющего поставленным условиям:

$$\sigma'_{ik} = A(\partial_k v_i + \partial_i v_k) + B \delta_{ik} \text{div } \mathbf{v}.$$

Принята несколько иная форма записи, а именно,

$$\sigma'_{ik} = \eta[\partial_k v_i + \partial_i v_k - (2/3)\delta_{ik} \text{div } \mathbf{v}] + \xi \delta_{ik} \text{div } \mathbf{v}, \quad (1.10)$$

удобная тем, что сумма диагональных членов в скобке равна нулю. В выражении присутствуют два коэффициента:  $\eta$  — сдвиговая вязкость,  $\xi$  — объемная (вторая) вязкость.

<sup>1</sup>Убедимся, что эти две комбинации равны нулю при твердотельном вращении жидкости, в котором  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} v_x &= \Omega_y z - \Omega_z y, & v_y &= \Omega_z x - \Omega_x z, & v_z &= \Omega_x y - \Omega_y x, \\ \partial_y v_x + \partial_x v_y &= -\Omega_z + \Omega_z & \text{и т. д.} \\ \partial_x v_x &= \partial_y v_y = \partial_z v_z = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение движения приобретает вид

$$\rho(\partial_t v_i + v_k \partial_k v_i) = -\partial_i P + \partial_k \{ \eta[\partial_k v_i + \partial_i v_k - (2/3)\delta_{ik} \text{div } \mathbf{v}] \} + \partial_i (\xi \partial_k v_k). \quad (1.11)$$

Коэффициенты вязкости зависят от температуры и давления и не являются постоянными вдоль жидкости. Однако во многих случаях можно считать эту зависимость слабой и, вынося коэффициенты вязкости за операторы дифференцирования, прийти к виду

$$\rho[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\xi + \eta/3) \text{grad div } \mathbf{v}, \quad (1.12)$$

который и принято называть *уравнением Навье–Стокса*. Важным частным случаем является случай несжимаемой жидкости. Тогда уравнения движения (1.1), (1.12) записываются в виде

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\rho^{-1} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v}, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $\nu = \eta/\rho$  — коэффициент кинематической вязкости.

Для решения конкретной задачи уравнения должны быть дополнены граничными условиями (например, условием прилипания на твердой границе или условием отсутствия касательных напряжений на свободной поверхности).

#### 1.1.4. Число Рейнольдса и закон подобия

В гидродинамике, особенно при рассмотрении задач об устойчивости течения или исследовании развитой турбулентности, широко используется безразмерная форма записи уравнений движения жидкости. При такой записи входящие в уравнения характеристики среды и параметры исследуемой задачи группируются в безразмерные комплексы, наиболее известным из которых является число Рейнольдса — самая общая характеристика течения, отражающая соотношение инерционных и вязких сил в потоке и позволяющая оценить характер движения жидкости. Малые значения числа Рейнольдса (единицы или десятки) отвечают ламинарным течениям, умеренные (тысячи) характеризуют переходные режимы, а большие (сотни тысяч и больше) появляются в развитых турбулентных течениях.

Приведем полученные выше уравнения движения несжимаемой жидкости к безразмерному виду. В уравнения (1.13) входят следующие физические величины: время  $t$ , расстояние  $l$ , скорость  $v$ , плотность  $\rho$ , давление  $P$

и вязкость  $\nu$ . Если мы принимаем систему единиц СИ, то каждая из этих величин будет иметь следующую размерность:

$$[t] = c; \quad [l] = m; \quad [v] = \frac{m}{c}; \quad [\rho] = \frac{kg}{m^3};$$

$$[P] = \frac{H}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot c^2}; \quad [\nu] = \frac{m^2}{c}.$$

Идея обезразмеривания состоит в том, чтобы измерять все величины в единицах, являющихся характерными параметрами конкретной задачи. Так, например, в качестве единицы измерения длины можно выбрать некий характерный размер  $L$  (это может быть толщина слоя жидкости, диаметр трубы, размер обтекаемого тела и т. д.), за единицу измерения скорости — характерную скорость  $V$  (скорость верхней пластины в течении Куэтта, скорость на оси трубы в течении Пуазейля, скорость набегающего потока в задачах об обтекании тела и т. д.). Единица измерения времени выражается через две введенные величины и есть  $L/V$ , а единицей давления может служить величина  $\rho V^2$ .

Безразмерные величины (обозначим их буквами с тильдами) будут связаны с прежними, размерными величинами как

$$\tilde{v} = v/V, \quad \tilde{x}_i = x_i/L, \quad \tilde{t} = tV/L,$$

$$\tilde{P} = P/\rho V^2, \quad \tilde{\nabla} = L\nabla, \quad \tilde{\Delta} = L^2\Delta.$$

Подставляя эти соотношения в уравнения движения, получим

$$V^2 L^{-1} \partial_{\tilde{t}} \tilde{v} + V^2 L^{-1} (\tilde{v} \tilde{\nabla}) \tilde{v} = -V^2 L^{-1} \tilde{\nabla} \tilde{P} + \nu V L^{-2} \tilde{\Delta} \tilde{v},$$

$$\operatorname{div} \tilde{v} = 0,$$

а сокращая подобные множители и опуская тильды, приходим к уравнениям

$$\partial_t v + (v \nabla) v = -\nabla P + R^{-1} \Delta v,$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (1.14)$$

где безразмерная величина  $R = VL/\nu$  называется числом Рейнольдса. Это число характеризует отношение инерционных сил к вязким (нелинейного члена к вязкому), и именно оно является критерием, определяющим этапы перехода от ламинарных течений к турбулентным.

Важно подчеркнуть, что приведенный способ обезразмеривания уравнений не является единственно возможным. Например, в качестве единицы

времени можно взять величину  $L^2/\nu$ , характеризующую время вязкой диссипации, а в качестве единицы скорости — величину  $\nu/L$ . Переходя к безразмерным переменным, в этом случае получим уравнение

$$\partial_t v + (v \nabla) v = -\nabla P + \Delta v,$$

не содержащее каких-либо параметров. Не следует думать, что таким образом мы получили уравнение, лишенное параметра. В действительности, роль числа Рейнольдса выполняет теперь безразмерная скорость. Если при первом способе обезразмеривания безразмерная скорость, по определению, лежала в интервале  $[0, 1]$  (или вблизи него), то при втором способе единичной является скорость вязкого переноса, а безразмерная скорость может достигать величин порядка

$$\tilde{v} = \frac{v}{\nu/L} \approx \frac{VL}{\nu},$$

то есть числа Рейнольдса.

С числом Рейнольдса тесно связан вопрос о подобии различных течений, то есть вопрос о том, каким критериям должна удовлетворять модель исследуемого течения. Пусть рассматривается определенный тип течений жидкости (например, течение по трубам или обтекание тел определенной формы). Очевидно, что для моделирования движения нужно в первую очередь обеспечить геометрическое подобие. Тогда геометрические свойства задачи определяются одним линейным размером  $L$ .

Из параметров, характеризующих жидкость, в уравнения входит только кинематическая вязкость  $\nu$  (поля скорости  $v$  и давления, отнесенного к плотности,  $P/\rho$  являются неизвестными функциями, которые необходимо найти). Если рассматривается обтекание тела потоком, то характеристикой течения в целом является скорость потока на бесконечности  $V$ . Мы видим, что в рамках заданного типа движений решение определяется тремя параметрами:  $\nu$ ,  $V$ ,  $L$ . Из этих трех размерных величин можно составить только одну безразмерную комбинацию, а именно, введенное выше число Рейнольдса. Искомые поля (опять же, для заданного типа течений) должны будут выражаться зависимостями вида

$$v = V f_1 \left( \frac{r}{L}, R \right), \quad P = \rho V^2 f_2 \left( \frac{r}{L}, R \right).$$

Суть закона подобия, сформулированного Рейнольдсом в 1883 году, состоит в том, что течения одного типа с равным числом Рейнольдса подобны. Подобие двух течений состоит в том, что все поля могут быть получены друг из друга простым масштабным преобразованием координат и скорости.

Если в задаче появляется дополнительный параметр, то из имеющихся четырех величин можно составить два независимых безразмерных комплекса и для обеспечения подобия задач потребуется обеспечить равенство обоих безразмерных параметров. Так, если в рассматриваемом течении существенно влияние сил тяжести, то в качестве дополнительного размерного параметра в задачу входит ускорение силы тяжести  $g$ . Тогда новым безразмерным параметром может служить число Фруда

$$F = \frac{V^2}{Lg},$$

являющееся мерой отношения кинетической энергии движущейся жидкости к потенциальной. Ниже мы увидим, какие безразмерные комплексы появляются при рассмотрении движений жидкости с учетом сил плавучести и электромагнитных сил.

### 1.1.5. Простые примеры решений

Основные проблемы решения уравнений Навье–Стокса связаны с нелинейным членом. Известно небольшое число задач, для которых удается получить точные (аналитические) решения. Приведем сначала два хорошо известных примера задач, в которых нелинейное слагаемое обращается в нуль и решения находятся легко.

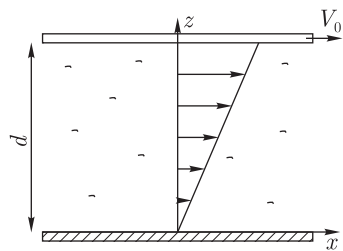


Рис. 1.1

**Течение Куэтта.** Рассматривается течение несжимаемой жидкости в горизонтальном слое толщиной  $d$ , нижняя граница которого неподвижна, а верхняя движется с постоянной горизонтальной скоростью  $v_0$ , направленной вдоль оси  $x$ . Ось  $z$  направлена вертикально вверх. Ищется стационарное решение, то есть производная по времени равна нулю. Считается также, что задача плоская, то есть нет зависимости от координаты  $y$  и нет соответствующей компоненты скорости ( $v_y = 0$ ). Более того, течение горизонтально и  $v_z = 0$ . Отсутствует также горизонтальный градиент давления.

Из уравнения непрерывности немедленно следует, что оставшаяся компонента скорости не может зависеть от координаты  $x$ , так как  $\partial_x v_x = 0$ . Следовательно,  $v_x = f(z)$ , и нелинейный член исчезает:

$$v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x + v_z \partial_z v_x = 0.$$

В результате, от уравнения Навье–Стокса остается

$$\partial_{zz}^2 v_x = 0 \quad \text{или} \quad v_x = az + b,$$

а постоянные интегрирования находятся из граничных условий:

$$\begin{aligned} v_x &= 0 & \text{при } z = 0, \\ v_x &= v_0 & \text{при } z = d, \end{aligned}$$

и получается линейный профиль скорости (рис. 1.1)

$$v_x = v_0 z/d.$$

При этом отлична от нуля только одна компонента тензора вязких напряжений

$$\sigma_{xz} = \eta \partial_z v_x = v_0 \eta / d,$$

с которой просто связана сила, действующая на площадку поверхности площадью  $S$ ,

$$F = v_0 \eta S / d.$$

**Течение Пуазейля.** Второй хорошо известный пример задачи о течении вязкой жидкости, имеющей точное решение, является задача Пуазейля о течении жидкости в слое с твердыми границами (или трубе) под действием приложенной к краям разности давления. Рассмотрим сначала плоский горизонтальный слой толщиной  $2d$  и длиной  $L$ , на концах которого задано давление  $P_1$  и  $P_2$ , соответственно (рис. 1.2). Как и в предыдущей задаче, ищем стационарное решение ( $\partial_t = 0$ ) только для компоненты скорости  $v_x$  ( $v_y = v_z = 0$ ), и по тем же причинам  $\partial_x = \partial_y = 0$ . В этом случае снова исчезает нелинейный член, так как возникающий градиент скорости направлен перпендикулярно самой скорости. Тогда уравнение Навье–Стокса принимает вид

$$-\rho^{-1} \partial_x P + \nu \partial_{zz}^2 v_x = 0,$$

а его решение, с учетом граничных условий ( $v_x = 0$  при  $z = \pm d$ ), есть

$$v_x = (2\eta L)^{-1} (P_1 - P_2) (z^2 - d^2).$$

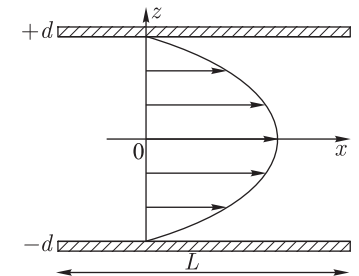


Рис. 1.2

Для цилиндрической трубы радиуса  $R$  задача решается аналогично. В этом случае оператор Лапласа нужно записать в цилиндрической системе координат

$$r^{-1} d_r (r d_r v) = (P_1 - P_2)(L\eta)^{-1},$$

и его решение примет вид

$$v = (4\eta L)^{-1}(P_1 - P_2)r^2 + C \ln r + B.$$

Постоянная интегрирования  $C = 0$ , так как при  $r = 0$  значение скорости должно быть конечно. Определив вторую константу из условия прилипания на стенке трубы, получим

$$v = (4\eta L)^{-1}(P_1 - P_2)(R^2 - r^2).$$

Важной характеристикой является расход жидкости, протекающей через трубу. Для него имеем

$$Q = 2\pi \int_0^R \rho r v dr = \frac{\pi \rho (P_1 - P_2)}{8\eta L} R^4.$$

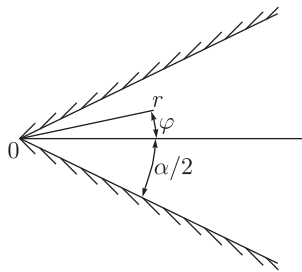


Рис. 1.3

**Течение в диффузоре.** Мы рассмотрели выше два простейших примера точных решений уравнений Навье–Стокса. Известно еще несколько задач, для которых найдены точные решения. Это, например, задача о затопленной струе, задача о течении вблизи вращающегося диска, течения в диффузоре и некоторые другие. Не воспроизводя решения задачи, остановимся на течении жидкости в плоском диффузоре (задача Гамеля, 1917 г.).

Плоский диффузор образован двумя полуплоскостями, выходящими из начала координат под углом  $\alpha$  (рис. 1.3). В начале координат находится источник жидкости мощностью  $Q$ . Если  $Q < 0$ , то источник становится стоком, а устройство называется конфузуром.

Решение ищется в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  для чисто радиального течения ( $v_\varphi = v_z = 0$ ;  $v_r = v(r, \varphi)$ ). Уравнение непрерывности, записанное в цилиндрических координатах,

$$r^{-1} \partial_r (r v_r) + r^{-1} \partial_\varphi v_\varphi + \partial_z v_z = 0$$

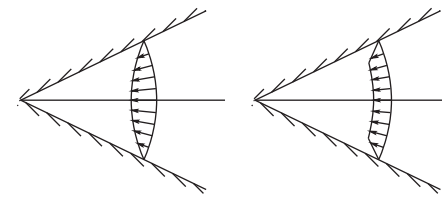


Рис. 1.4

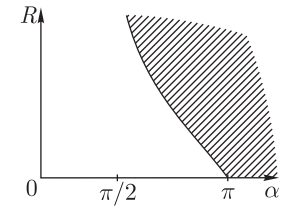


Рис. 1.5

показывает, что произведение  $(rv)$  в этом случае не зависит от радиуса и может быть только функцией угла  $\varphi$ . Решение поэтому ищется для автомодельной переменной

$$u(\varphi) = rv/6\nu.$$

Вид решения, получающегося для конфузора при малых и больших числах Рейнольдса, показан на рис. 1.4.

Интересной особенностью задачи Гамеля является то, что для конфузора (втекание жидкости,  $Q < 0$ ) решение существует для любых значений числа Рейнольдса, которое определяется через расход и есть

$$R = |Q|/\rho\nu,$$

а для диффузора ( $Q > 0$ ) симметричное расходящееся течение существует только при ограниченных значениях числа Рейнольдса  $R < R_{\max}$  и ограниченных значениях угла раствора  $\alpha < \alpha_{\max}$ . Предельные параметры связаны простым соотношением

$$R_{\max} = 6(\pi^2/\alpha - \alpha),$$

которое определяет область существования симметричных решений на плоскости  $(R, \alpha)$  (см. рис. 1.5). При  $R > R_{\max}$  существуют только несимметричные решения, в которых имеются области возвратных течений. Примеры профилей скорости, соответствующих таким решениям, приведены на рис. 1.6. Важно отметить, что решение в конфузоре при  $R \rightarrow \infty$  стремится к решению для идеальной жидкости (столбообразное течение с проскальзыванием на границе), а в диффузоре предельного перехода нет: при  $R \rightarrow \infty$  число перегибов в решении неограниченно возрастает.

Задача о диффузоре интересна тем, что является примером задачи, в которой существует граничное значение числа Рейнольдса, при превышении которого решения данного вида не существует. Не следует путать

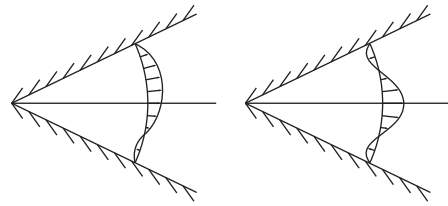


Рис. 1.6



Рис. 1.7

этот случай с ситуацией, когда решение в принципе существует, но *не реализуется* в силу возникающей неустойчивости. Об этом пойдет речь далее.

## 1.2. Устойчивость течений

Вопрос об устойчивости того или иного состояния (решения, режима) возникает в самых разных задачах. Достаточно вспомнить простейший пример об устойчивости шарика, лежащего на различных поверхностях (рис. 1.7). В первом случае положение шарика абсолютно устойчиво, то есть при любом конечном воздействии шарик по окончании действия возмущающей силы возвращается в исходное состояние. Во втором случае положение шарика абсолютно неустойчиво — любое, сколь угодно малое возмущение безвозвратно уводит его из начального положения. Третий случай иллюстрирует пример состояния, устойчивого по отношению к малым возмущениям, но неустойчивого к возмущениям, превышающим критическую величину. Нас интересует вопрос об устойчивости стационарных течений к возмущениям. Возмущения в реальных течениях существуют всегда. Их источником служат шероховатости стенок, входные участки (бесконечных труб нет), просто флуктуации характеристик самой жидкости и т. д. Нужно ответить на вопрос о том, какое возмущение является самым опасным и где та граница, при превышении которой это возмущение приведет к разрушению существующего течения.

Итак, имеем течение несжимаемой жидкости, для которой запишем уравнения Навье–Стокса в безразмерной форме (1.14)

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{v},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Стационарное решение задачи (имеем в виду течение Пуазейля, хотя до определенного этапа все рассуждения не зависят от конкретного вида

решения) обозначим как  $\mathbf{v}_0$ ,  $P_0$ . Это решение, в свою очередь, удовлетворяет уравнениям

$$(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla P_0 + \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{v}_0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0. \quad (1.15)$$

Поля скорости и давления представим в виде сумм стационарных решений и возмущений

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{v}_0(z) + \mathbf{v}'(x, y, z, t),$$

$$P(x, y, z, t) = P_0(x) + P'(x, y, z, t). \quad (1.16)$$

Отметим, что, в отличие от исследуемого стационарного решения, слагаемые со штрихами описывают возмущения, которые могут зависеть от времени и от всех координат. Введенные разложения подставляем в исходные уравнения

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v}' + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' = \\ = -\nabla P_0 - \nabla P' + \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{v}_0 + \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{v}', \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0$$

и, после вычитания из них уравнений для стационарных решений (1.15), получаем

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v}' + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' = -\nabla P' + \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{v}', \\ \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Наибольшие трудности в решении этих уравнений представляет нелинейное по искомым возмущениям слагаемое  $(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}'$ . Следующий, принципиальный шаг состоит в том, что это слагаемое отбрасывается. Тем самым мы ограничиваем себя рамками *линейной теории устойчивости*, рассматривающей эволюцию *малых* возмущений. Это значит, что

$$|\mathbf{v}'| \ll |\mathbf{v}_0|.$$

Линейная теория работает только вблизи порога возникновения неустойчивости. По прохождению порога возмущения нарастают, и линейные уравнения перестают работать. Тем не менее поставленная задача при этом может считаться выполненной, так как требовалось указать именно сам порог и наиболее опасные возмущения, которые начинают нарастать в первую очередь.

Отказавшись от написания штрихов, мы приходим к системе уравнений, которую необходимо дополнить граничными условиями для возмущений.

Например, можно предположить, что на границах возмущения равны нулю.

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}_0 &= -\nabla P + \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v}|_{\Gamma} &= 0.\end{aligned}\quad (1.19)$$

Далее делают еще ряд существенных упрощений. Первое состоит в том, что рассматриваются только плоские возмущения. Этот шаг оправдывается *теоремой Сквара*, которая доказывает, что для данной задачи самыми опасными являются именно плоские возмущения. Такое предположение означает, что

$$\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z) \quad \text{и} \quad \partial_y = 0.$$

С учетом того, что

$$(\mathbf{v}_0 \nabla) = v_0 \partial_x \quad \text{и} \quad (\mathbf{v} \nabla) = v_x \partial_x + v_z \partial_z,$$

уравнения движения для оставшихся двух компонент запишутся в виде

$$\begin{aligned}\partial_t v_x + v_0 \partial_x v_x + v_z \partial_z v_x &= -\partial_x P + \mathbf{R}^{-1} \Delta v_x, \\ \partial_t v_z + v_0 \partial_x v_z &= -\partial_z P + \mathbf{R}^{-1} \Delta v_z, \\ \partial_x v_x + \partial_z v_z &= 0.\end{aligned}$$

Следующий шаг состоит в том, что вводится функция тока  $\psi$ , связанная с компонентами вектора скорости:  $v_x = -\partial_z \psi$ ,  $v_z = \partial_x \psi$ . Введение функции тока позволяет уменьшить число переменных. Платой за это является повышение порядка дифференциальных уравнений. Подстановка выражений для компонент скорости через функцию тока дает

$$\begin{aligned}-\partial_t \partial_z \psi - v_0 \partial_{xz} \psi + \partial_x \psi \partial_z v_0 &= -\partial_x P - \mathbf{R}^{-1} \Delta \partial_z \psi, \\ \partial_t \partial_x \psi + v_0 \partial_{xx} \psi &= -\partial_z P + \mathbf{R}^{-1} \Delta \partial_x \psi, \\ -\partial_{xz} \psi + \partial_{zx} \psi &\equiv 0.\end{aligned}$$

Последнее уравнение (уравнение непрерывности) выполняется тождественно. Это не удивительно, так как функция тока вводится именно для несжимаемой жидкости. Следующий шаг также является общепринятым — для того чтобы избавиться от давления и получить одно уравнение для функции тока, необходимо второе уравнение продифференцировать по координате  $x$  и вычесть из него первое, продифференцированное по координате  $z$ .

Результирующее уравнение есть

$$\begin{aligned}\partial_t (\partial_{zz} \psi + \partial_{xx} \psi) + v_0 \partial_x \partial_{zz} \psi + \partial_{xz} \psi \partial_z v_0 - \partial_{xz} \psi \partial_z v_0 - \partial_x \psi \partial_{zz} v_0 + \\ + \partial_{xz} \psi \partial_x v_0 + v_0 \partial_x \partial_{xx} \psi = -\partial_{xz} P + \partial_{xz} P + \mathbf{R}^{-1} \Delta (\partial_{xx} \psi + \partial_{zz} \psi).\end{aligned}$$

Сокращая подобные члены и учитывая, что  $\partial_x v_0 = 0$ , приходим к уравнению

$$\partial_t \Delta \psi + v_0 \partial_x \Delta \psi - v_0'' \partial_x \psi = \mathbf{R}^{-1} \Delta \Delta \psi, \quad (1.20)$$

которое дополняется граничными условиями для функции тока:

$$\text{при } z = \pm 1 : \quad \partial_x \psi = \partial_z \psi = 0.$$

Напомним, что функция тока введена для возмущений поля скорости, возникающих на фоне стационарного течения  $\mathbf{v}_0$ . Штрихами обозначено дифференцирование по вертикальной координате  $z$ .

Полученное уравнение (1.20) можно решать численно, задавая различные начальные возмущения и наблюдая за их эволюцией при различных числах Рейнольдса. Этот путь не снимает, однако, вопроса о выборе вида возмущений. Следуя обычному для теории устойчивости способу, будем рассматривать *нормальные возмущения*, которые в данном случае записываются в виде

$$\psi(x, z, t) = \varphi(z) e^{i(\omega t - kx)}. \quad (1.21)$$

При этом фактически мы провели разделение переменных, включив зависимость от вертикальной координаты  $z$  только в амплитуду возмущений  $\varphi$ . Зависимость от продольной координаты и времени принята в виде гармонических волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  ( $\omega$  — частота,  $k$  — волновое число). Частота является величиной комплексной:  $\omega = a + ib$ , что позволяет переписать выражение для нормальных возмущений в виде

$$\psi(x, z, t) = \varphi(z) e^{i(\omega t - kx)} = \varphi(z) e^{-bt} e^{i(at - kx)}.$$

Характер эволюции колебаний во времени определяется мнимой частью частоты: если  $b > 0$ , то возмущения убывают со временем, а если  $b < 0$ , то возмущения нарастают (см. рис. 1.8). Именно знак величины  $b$  и интересен с точки зрения вопроса об устойчивости течения. Требуется узнать, при каком значении числа Рейнольдса появляется решение с отрицательным  $b$  и какое волновое число  $k$  соответствует этому решению.

Возмущения в нормальной форме подставляются теперь в уравнение для функции тока. Вычисляя соответствующие производные

$$\partial_t \psi = i\omega \psi,$$

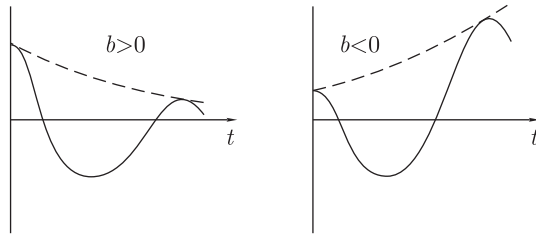


Рис. 1.8

$$\partial_x \psi = -ik\psi,$$

$$\partial_z \psi = \varphi' e^{i(\omega t - kx)},$$

$$\Delta \psi = \partial_{xx} \psi + \partial_{zz} \psi = (\varphi'' - k^2 \varphi) e^{i(\omega t - kx)},$$

$$\Delta \Delta \psi = (\varphi^{IV} - 2k^2 \varphi'' + k^4 \varphi) e^{i(\omega t - kx)}$$

и подставляя их в уравнение (1.20), получаем

$$(i\omega - ikv_0)(\varphi'' - k^2 \varphi) + ikv_0'' \varphi = R^{-1}(\varphi^{IV} - 2k^2 \varphi'' + k^4 \varphi),$$

а после деления на  $ik$  и добавления граничных условий приходим к окончательной форме уравнения, называемого уравнением Орра–Зоммерфельда (1937 г.):

$$\begin{aligned} (v_0 - \omega/k)(\varphi'' - k^2 \varphi) - v_0'' \varphi &= i(kR)^{-1}(\varphi^{IV} - 2k^2 \varphi'' + k^4 \varphi), \\ \varphi|_{z=\pm 1} &= 0, \\ \varphi'|_{z=\pm 1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Задача остается чрезвычайно сложной и впервые для плоского слоя была решена Линем в 1945 г. Поучительна история решения этого уравнения. Первые подходы были связаны с попытками решать уравнение Орра–Зоммерфельда с отброшенной правой частью. Соответствующее уравнение называют уравнением Релея. Отметим, что, отбрасывая члены с четвертой производной  $\varphi^{IV}$ , мы лишаемся возможности использовать все граничные условия и можем требовать обращения в нуль только нормальной компоненты скорости (этому соответствует условие  $\partial_x \psi = 0$  и  $\varphi = 0$ ). Отбрасывание правой части мотивировалось тем, что она описывает действие вяз-

кости, а вязкость, казалось, должна играть стабилизирующую роль. Результат решения уравнения Релея состоял в том, что оно оказалось абсолютно устойчивым.

Линь показал, что фазовая скорость возмущений  $v_\Phi = \omega/k$  меньше максимальной скорости потока в центре слоя. Точки, в которых фазовая скорость возмущений совпадает со скоростью основного течения, являются критическими, и именно вблизи этих точек начинается нарастание возмущений.

Основной результат исследования уравнения Орра–Зоммерфельда качественно иллюстрирует рис. 1.9, на котором представлена так называемая нейтральная кривая, нарисованная на плоскости  $(k, R)$ . Область неустойчивости заштрихована. Критические параметры отмечены на рисунке звездочками. Наименьшее значение числа Рейнольдса, при котором начинается рост возмущений,  $R^* \approx 5700$ . Соответствующее ему критическое значение волнового числа  $k^* \approx 1$ . Это означает, что наиболее опасными возмущениями являются возмущения с длиной волны, превышающей толщину слоя приблизительно в  $2\pi$  раз.

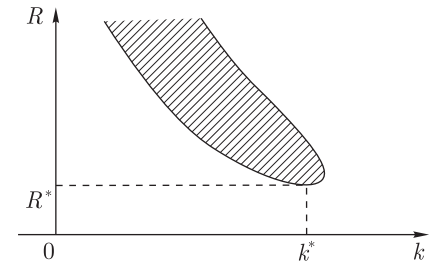


Рис. 1.9

Интересно отметить, что для каждого значения числа Рейнольдса, большего критического значения, опасными являются возмущения в ограниченном интервале волновых чисел, а сам интервал по мере роста числа Рейнольдса смещается в сторону малых волновых чисел (больших масштабов). Таким образом, для фиксированного значения волнового числа в область неустойчивости можно попасть и двигаясь от больших чисел Рейнольдса к малым. Это очень важный результат, указывающий на то, что вязкость может играть и дестабилизирующую роль.

### 1.3. Свободная конвекция несжимаемой жидкости

Под свободной конвекцией понимают движения жидкости, возникающие за счет сил Архимеда при наличии неоднородности плотности жидкости в поле массовых сил. В основном будем рассматривать термогравитационную конвекцию, т. е. случай, когда неоднородности жидкости связаны с ее неравномерным нагревом и течение возникает в поле силы тяжести. При этом будем иметь в виду жидкости, плотность которых падает с ро-

стом температуры, т. е.  $\partial\rho/\partial T < 0$  (напомним, что аномальное поведение дает вода в интервале от 0 до 4°C). Считаем, что неоднородность температуры является единственным источником движения и что

$$\Delta\rho \ll \rho,$$

т. е. рассматривается *слабая* конвекция. В уравнении движения необходимо добавить слагаемое, описывающее действие силы тяжести,

$$\rho[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}] = -\nabla P + \eta\Delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{g}$$

и учесть изменения плотности. Плотность в общем случае есть функция температуры и давления  $\rho = \rho(T, P)$ , а приращение плотности есть

$$d\rho = (\partial\rho/\partial T)_P dT + (\partial\rho/\partial P)_T dP.$$

Далее делается важное ограничение, состоящее в том, что рассматривается *несжимаемая* жидкость, означающее, что вторым слагаемым в этом равенстве можно пренебречь. Таким образом, полагается, что плотность зависит только от температуры:  $\rho = \rho(T)$ , а приращение плотности есть

$$d\rho = [\rho_0^{-1}(\partial\rho/\partial T)]\rho_0 dT = -\beta\rho_0 dT.$$

Здесь  $\beta$  — коэффициент объемного расширения. Температуру жидкости представим в виде

$$T = T_0 + T', \quad (1.23)$$

где  $T_0$  — средняя температура, а  $T'$  — вариации температуры, малые в том смысле, что вызываемые ими вариации плотности остаются малыми ( $\Delta\rho \ll \rho$ ). Плотность представляется, соответственно, в виде  $\rho = \rho_0 + \rho'(T)$ , где  $\rho_0$  — плотность жидкости при температуре  $T_0$ . Из сказанного следует, что

$$\rho = \rho_0(1 - \beta T'). \quad (1.24)$$

Принятое ограничение слабой конвекции предполагает, что  $\beta T' \ll 1$ . Вспомним, что для воды  $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$ , и, следовательно, приближение годится практически для любых возможных разностей температуры. Для газов  $\beta \approx 1/273$ , что существенно больше, но также позволяет пользоваться принятыми ограничениями при достаточно больших разностях температуры.

Изотермической жидкости с температурой  $T = T_0$  и соответствующей этой температуре плотностью  $\rho = \rho_0$  отвечает гидростатическое давление  $P_0$ , подчиняющееся уравнению

$$\nabla P_0 = \rho_0 \mathbf{g}.$$

Поле давления, устанавливающееся при конвективном движении, представим в виде суммы

$$P = P_0 + P'.$$

Подставляя в уравнения движения все введенные разложения, получаем

$$(\rho_0 + \rho')[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}] = -\nabla P_0 - \nabla P' + \eta\Delta\mathbf{v} + \rho_0 \mathbf{g} + \rho' \mathbf{g},$$

$$\partial_t \rho' + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div} \rho' \mathbf{v} = 0.$$

Теперь нужно вычесть из первого уравнения уравнение гидростатики и сделать самое важное допущение. Оно состоит в том, что добавкой к плотности  $\rho'$ , возникающей за счет изменения температуры, пренебрегают всюду, за исключением члена, описывающего силу Архимеда. Тогда

$$\rho_0[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}] = -\nabla P' + \eta\Delta\mathbf{v} - \beta T' \mathbf{g}.$$

Систему необходимо дополнить уравнением для температуры. Если пренебречь нагревом жидкости за счет вязкой диссипации, то закон переноса удельной энергии записывается в виде

$$\rho T[\partial_t S + (\mathbf{v}\nabla)S] = \kappa \Delta T,$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности, а энтропия  $S$  связана с температурой и давлением

$$S = S_0 + (\partial S/\partial T)_P T' + (\partial S/\partial P)_T P'.$$

Используя соотношение

$$(\partial S/\partial T)_P = c_p/T_0$$

и считая третье слагаемое пренебрежимо малым (это логично сделать, так как зависимостью плотности от давления уже пренебрегли), приходим к соотношению

$$S = S_0 + c_p T'/T_0.$$

Подставляя в уравнение для энтропии и ограничиваясь членами, линейными по  $T'$ , получаем

$$\partial_t T' + (\mathbf{v}\nabla)T' = \frac{\kappa}{\rho c_p} \Delta T'.$$

Далее, откажемся от написания штрихов (не забывая при этом, что температура отсчитывается от среднего значения, а давление — от гидростатического) и запишем результат — систему уравнений для термогравитационной конвекции несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\rho_0^{-1} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + g\beta T \mathbf{e}_z, \\ \partial_t T + (\mathbf{v}\nabla)T &= \chi \Delta T, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Мы учли, что  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ , и ввели коэффициент температуропроводности  $\chi = \kappa/\rho c_p$ . Систему необходимо дополнить граничными условиями. Для скорости можно принять, например, условия прилипания ( $\mathbf{v}|_\Gamma = 0$ ), а для температуры—либо задать ее распределение на границе ( $T|_\Gamma = f_1(\Gamma)$ ), либо теплоток через границу

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_\Gamma = f_2(\Gamma).$$

Обсудим возможные способы представления уравнений свободной конвекции в безразмерной форме. Особенностью конвективных задач является отсутствие заданной характерной скорости—скорость есть результат приложенной (заданной) разности температуры. Возможный набор единиц измерения есть: расстояния—характерный размер  $L$ , температуры—характерная разность температур  $\theta$ , скорости—величина  $\nu/L$ , времени— $L^2/\nu$  и давления— $\rho_0 \nu^2/L^2$ . Переходя к безразмерным величинам, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla P + \Delta \mathbf{v} + \text{Gr} T \mathbf{e}_z, \\ \partial_t T + (\mathbf{v} \nabla) T &= \sigma^{-1} \Delta T, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

В уравнения входят два безразмерных комплекса: число Грассхофа  $\text{Gr}$  и число Прандтля  $\sigma$ ;

$$\text{Gr} = \frac{g\beta\vartheta L^3}{\nu^2}, \quad \sigma = \frac{\nu}{\chi}.$$

Число Грассхофа характеризует отношение архимедовых сил к вязким и свидетельствует о сильной зависимости конвективных механизмов от размера (в число Грассхофа размер входит в кубе). В отличие от числа Грассхофа, число Прандтля есть физический параметр жидкости, не зависящий от конкретной задачи и характеризующий отношение коэффициентов кинематической вязкости и температуропроводности. Приведем несколько типичных примеров значений числа Прандтля. Для газов число Прандтля порядка единицы, у воды— $\sigma \approx 7$ , у ртути— $\sigma \approx 10^{-2}$ , у глицерина— $\sigma \approx 10^3$ . В жидкостях с малым числом Прандтля теплопередача эффективней конвекции и, наоборот, при высоких числах Прандтля температура «вморожена» в жидкость и перенос тепла за счет конвекции становится более эффективным, чем теплопередача.

Наряду с двумя введенными безразмерными параметрами, в конвективных задачах часто используется число Релея, являющееся произведением чисел Прандтля и Грассхофа,

$$\text{Ra} = \sigma \text{Gr} = \frac{g\beta\vartheta L^3}{\nu\chi}.$$

Если за единицу скорости взять величину  $\chi/L$ , оставив все остальные единицы измерения прежними, то мы придем к системе уравнений, содержащей число Релея,

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla P + \Delta \mathbf{v} + \text{Ra} T \mathbf{e}_z, \\ \sigma \partial_t T + (\mathbf{v} \nabla) T &= \Delta T, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

За единицу скорости можно выбрать и скорость, приобретаемую жидкой частицей, перегретой на величину  $\vartheta$  относительно окружающей ее жидкости и ускоряющейся на расстоянии  $L$ . Из условия  $\rho V^2 \sim \rho' g L$  получаем  $V \sim \sqrt{g\beta\vartheta L}$ . Принимая за единицу времени величину  $L/V$ , получаем

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla P + \text{R}^{-1} \Delta \mathbf{v} + T \mathbf{e}_z, \\ \partial_t T + (\mathbf{v} \nabla) T &= (\sigma \text{R})^{-1} \Delta T, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

В уравнениях появилось число Рейнольдса, что обусловлено введением характерной скорости. Используя выражение для введенной единицы скорости, просто получить связь появившегося числа Рейнольдса с числом Грассхофа

$$\text{R} = \frac{VL}{\nu} = \frac{\sqrt{g\beta\vartheta L} \cdot L}{\nu} = \sqrt{\text{Gr}}.$$

## 1.4. Конвективная устойчивость

Рассмотрим вопрос о том, может ли жидкость оставаться неподвижной при наличии неоднородного распределения температуры. Чтобы убедиться, что равновесие неравномерно нагретой жидкости возможно, достаточно вспомнить школьный опыт по кипячению воды в наклоненной пробирке, на дне которой находится лед, а нагревается только верхняя часть.

Найдем *необходимое* условие механического равновесия жидкости (при наличии неоднородности температуры). Механическое равновесие подразумевает отсутствие скоростей и стационарность

$$\mathbf{v} = 0, \quad \partial_t = 0.$$

С учетом этих условий от уравнений Буссинеска (1.25) остается

$$\begin{aligned} -\rho_0^{-1} \nabla P + g\beta T \mathbf{e} &= 0, \\ \Delta T &= 0. \end{aligned}$$

На первое уравнение подействуем оператором  $\text{rot}$ . Так как

$$\begin{aligned} \text{rot } \nabla &= 0, \\ \text{rot } (T\mathbf{e}) &= T \text{rot } \mathbf{e} + \nabla T \times \mathbf{e} = 0, \end{aligned}$$

а  $\text{rot } \mathbf{e} = 0$ , то условие равновесия жидкости сводится к требованию

$$\nabla T \times \mathbf{e} = 0,$$

то есть градиент параллелен вертикальной оси и температура может меняться только по вертикали:  $T = T(z)$ . Это означает, что любой горизонтальный градиент температуры приводит к возникновению конвективного движения.

Из второго уравнения

$$\Delta T = \partial_{zz} T = 0$$

следует, что температура может быть только линейной функцией высоты:

$$T = Az + B.$$

Мы не получили никакой информации даже относительно знака градиента температуры. Опыт подсказывает, что устойчивым может быть нагрев сверху. Более точный ответ состоит в том, что неустойчивость наступает при подогреве снизу после превышения некоторого (совсем небольшого) критического градиента температуры. Например, в горизонтальном слое с твердыми границами критическое число Релея  $Ra^*$ , при котором возникает конвекция, равно 1708. Оценим соответствующую критическую разность температур, имея в виду для определенности слой воды толщиной  $h$ :

$$\Delta T = Ra^* \frac{\nu \chi}{g \beta h^3} \approx \frac{1708 \cdot 10^{-6} \cdot 1.4 \cdot 10^{-7}}{10 \cdot 2 \cdot 10^{-4} h^3} \approx \frac{10^{-7} \text{ град}}{h^3 \text{ м}}.$$

Таким образом, в слое воды глубиной 1 метр при подогреве снизу неустойчивость возникает уже при вертикальной разности температуры величиной всего  $10^{-7}$  градуса, в слое толщиной 1 сантиметр критическая

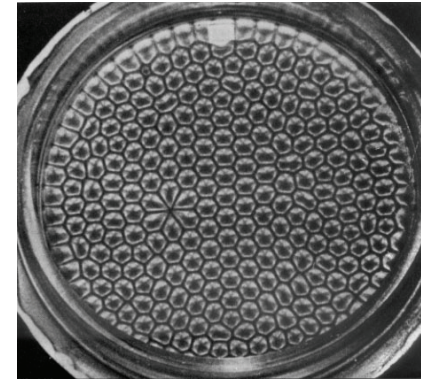


Рис. 1.10

разность температуры равна 0,1 градуса, а слой воды толщиной один миллиметр практически абсолютно устойчив.

Задача об устойчивости горизонтального слоя жидкости при наличии вертикального градиента температуры (задача Релея – Бенара) является классической задачей о конвективной устойчивости. Именно в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости со свободной верхней границей Бенар в 1900 году обнаружил возникновение, после превышения критического градиента температуры, гексагональных структур, получивших название ячеек Бенара. Приведенная на рис. 1.10 фотография из работы [75] иллюстрирует высокую чувствительность гексагональной структуры к возмущениям — слабая деформация поверхности медной пластины, образующей дно сосуда, приводит к локальному нарушению вида ячеек. Течение в слое силиконового масла визуализируется с помощью алюминиевой пудры.

Отметим, что гексагональные структуры возникают в слое только при наличии свободной поверхности и направление циркуляции в жидкостях и газах при этом противоположно. В жидкости горячий поток поднимается в центре ячейки, а в газах наоборот — в центре ячейки холодный поток жидкости направлен вниз. Установлено, что возникновение гексагональных структур связано с действием поверхностного натяжения. При твердых горизонтальных границах возникают конвективные валы. Этот вид конвективных течений виден на другой фотографии из работы [75] (рис. 1.11), где показана валиковая конвекция в слое силиконового масла в круглом сосуда, закрытом сверху стеклом. Форма сосуда навязывает валам осевую симметрию. Обе фотографии воспроизведены по альбому М. Ван-Дайка [1].

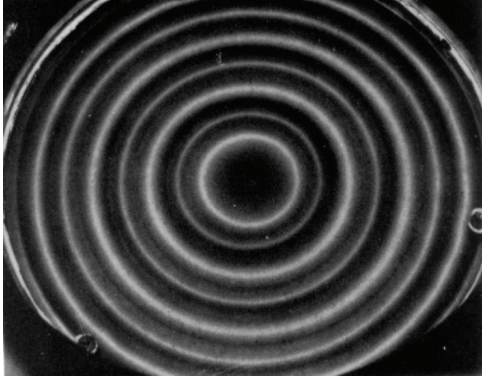


Рис. 1.11

**Задача Релея.** Теоретически задачу о конвективной устойчивости жидкости впервые решил Релей в 1916 году. Он рассмотрел горизонтальный слой жидкости толщиной  $h$  со свободными, но не деформируемыми границами (такие не совсем реальные граничные условия дают самую простую постановку), на которых поддерживается температура  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. Уравнения Буссинеска записываются в безразмерной форме (на этот раз единицы измерений выбраны следующим образом: единица длины —  $h$ , температуры —  $(T_1 - T_2)$ , времени —  $h^2/\nu$ , скорости —  $\chi/h$ ):

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{v} + \sigma^{-1}(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\sigma^{-1} \nabla P + \Delta \mathbf{v} + \text{Ra} T \mathbf{e}_z, \\ \sigma \partial_t T + (\mathbf{v} \nabla) T &= \Delta T, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0.\end{aligned}$$

Решается двумерная задача в плоскости  $(x, z)$ , то есть имеются в виду конвективные валы, направленные вдоль оси  $y$ . Граничные условия:

$$\begin{aligned}z = 0: \quad \partial_z v_x &= 0, \quad v_z = 0, \quad T = 1. \\ z = 1: \quad \partial_z v_x &= 0, \quad v_z = 0, \quad T = 0.\end{aligned}$$

Температура задается в виде  $T = \vartheta - z$ , так что величина  $\vartheta$  описывает отклонение температуры от равновесного (линейного) распределения. Для поля скорости вводится функция тока  $v_x = -\partial_z \psi$ ,  $v_z = \partial_x \psi$ .

Задача решается в рамках линейной теории устойчивости, то есть из уравнений выбрасываются все члены, квадратичные по скорости и возмущениям равновесного профиля температуры. В результате получаются

линейные уравнения

$$\begin{aligned}\partial_t \Delta \psi &= \Delta \Delta \psi + \text{Ra} \partial_x \vartheta, \\ \sigma \partial_t \vartheta &= \Delta \vartheta + \partial_x \psi.\end{aligned}$$

Последнее слагаемое во втором уравнении — это остаток от нелинейного слагаемого, так как

$$(\mathbf{v} \nabla) T = (\mathbf{v} \nabla) \vartheta - v_z.$$

Граничные условия на верхней и нижней границах имеют одинаковый вид:

$$\psi = \Delta \psi = \vartheta = 0.$$

Следующий шаг состоит в использовании нормальных возмущений, которые задаются в форме периодических возмущений с экспоненциальной зависимостью амплитуды от времени:

$$\begin{aligned}\psi(x, z, t) &= \psi_0 e^{-\lambda t} \sin(\pi n z) \sin(\pi a x), \\ \vartheta(x, z, t) &= \vartheta_0 e^{-\lambda t} \sin(\pi n z) \cos(\pi a x).\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\Delta \psi &= -\pi^2 (n^2 + a^2) \psi, \\ \Delta \Delta \psi &= \pi^4 (n^4 + 2a^2 n^2 + a^4) \psi,\end{aligned}$$

получаем уравнения

$$\begin{aligned}\lambda \pi^2 (n^2 + a^2) \psi_0 &= \pi^4 (n^4 + 2a^2 n^2 + a^4) \psi_0 - \pi \text{Ra} \theta_0, \\ -\lambda \sigma \theta_0 &= -\pi^2 (n^2 + a^2) \theta_0 + \pi a \psi_0,\end{aligned}$$

представляющие собой систему линейных, однородных уравнений для амплитуд  $\psi_0$  и  $\vartheta_0$ :

$$\begin{aligned}\pi^2 (a^2 + n^2) [\lambda - \pi^2 (n^2 + a^2)] \psi_0 + \pi \text{Ra} \theta_0 &= 0, \\ \pi a \psi_0 + [\lambda \sigma - \pi^2 (n^2 + a^2)] \theta_0 &= 0.\end{aligned}$$

Система имеет решение, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \pi(a^2 + n^2) [\lambda - \pi^2(n^2 + a^2)] & \pi \text{Ra} \\ \pi a & \lambda \sigma - \pi^2(n^2 + a^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение

$$\pi (a^2 + n^2) [\lambda^2 \sigma - \lambda \gamma - \sigma \lambda \gamma + \pi^4 (n^2 + a^2)^2] - \pi a^2 \text{Ra} = 0,$$

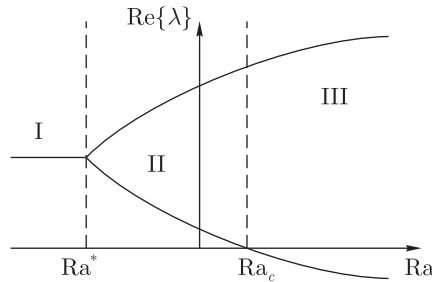


Рис. 1.12

решение которого дает значения для декремента  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\pi^2(1+\sigma)(n^2+a^2)}{2\sigma} \pm \sqrt{\frac{\pi^4(n^2+a^2)^2(1-\sigma)^2}{4\sigma^2} + \frac{a^2 Ra}{\sigma(a^2+n^2)}}. \quad (1.29)$$

По виду решения (1.29) можно сделать ряд полезных выводов. Во-первых, видно, что при положительных значениях числа Релея (а при принятых обозначениях положительным числам Релея соответствует нагрев слоя снизу) подкоренное выражение всегда положительно. Это означает, что оба корня уравнения являются вещественными величинами и, следовательно, возмущения эволюционируют монотонным образом. При этом один корень всегда положителен, а второй при некотором значении  $Ra = Ra_c$  меняет знак.

Во-вторых, при отрицательных числах Релея (подогрев сверху) вещественная часть обоих корней всегда положительна. Следовательно, все возмущения при подогреве сверху затухают. В то же время с ростом величины подогрева возникает ситуация, когда выражение под корнем становится отрицательным, то есть появляется два комплексно-сопряженных корня, описывающих затухающие, но колебательные режимы. Это происходит при

$$Ra^* = \pi^4(4\sigma a^2)^{-1}(n^2+a^2)^3(1-\sigma)^2.$$

На рис. 1.12 показан график зависимости вещественной части декремента затухания от числа Релея. На графике отмечены три области: I — область затухающих колебательных возмущений, II — область монотонно затухающих возмущений и III — область монотонно нарастающих возмущений.

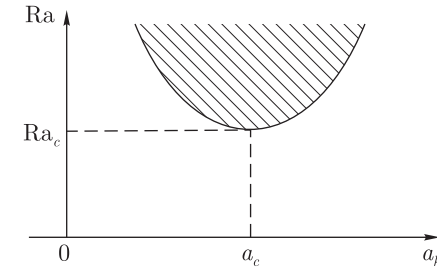


Рис. 1.13

Найдем критическое значение числа Релея, при достижении которого начинается нарастание возмущений. Из условия  $\lambda = 0$  получаем

$$Ra_c = \pi^4 a^{-2} (a^2 + n^2)^3.$$

Так как требуется найти самые опасные возмущения, то нужно определить соответствующие значения  $a$  и  $n$ . Дифференцирование по  $a$  дает

$$\partial_a Ra = 2\pi^4 a^{-3} (a^2 + n^2)^2 (2a^2 - n^2) = 0$$

и

$$a_c = n/\sqrt{2}, \quad Ra_c = (27/4)\pi^4 n^4.$$

Самые малые критические значения появляются при  $n = 1$ , что соответствует одному слою конвективных валов. Следовательно,

$$a_c = 1/\sqrt{2}, \quad Ra_c = (27/4)\pi^4 = 657,5.$$

Вид нейтральной кривой показан на рис. 1.13.

## 1.5. Магнитная гидродинамика

Магнитная гидродинамика (для краткости будем пользоваться широко распространенным сокращением МГД) изучает движение жидкостей, обладающих хорошей электрической проводимостью. Специфика течений таких жидкостей обусловлена протекающими в жидкости электрическими токами и связанными с ними магнитными полями. Основные эффекты, определяющие особенности МГД-течений, хорошо известны из курса общей физики. С одной стороны, это сила Лоренца, действующая при движении проводящей среды в магнитном поле на содержащиеся в ней свободные заряды

и приводящая к разделению зарядов и возникновению электрических полей. С другой стороны, это закон Ампера, согласно которому на проводник с током, находящийся в магнитном поле, действует сила. Однако, в отличие от известных со школьной скамьи канонических ситуаций, электрические токи протекают не в ограниченных проводниках, а в сплошной среде, элементы которой могут двигаться относительно друг друга.

Уравнения магнитной гидродинамики включают в себя уравнения движения жидкости, дополненные слагаемыми, описывающими действие электромагнитных сил, уравнения Максвелла и закон Ома для движущейся среды. Мы ограничимся написанием уравнений для несжимаемой изотермической жидкости (отметим, что сжимаемость становится существенной наряду с проводимостью при рассмотрении движений плазмы)

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\rho^{-1} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0,\end{aligned}$$

где  $\mathbf{F} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})/\rho$ ,  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока,  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции.

Уравнения Максвелла для неподвижной среды имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= q, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, & \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \mathbf{H}, \\ \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E},\end{aligned}$$

где, как обычно,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей,  $\mathbf{D}$  — вектор электрического смещения,  $q$  — объемная плотность электрического заряда,  $\sigma$  — электрическая проводимость среды,  $\varepsilon$  и  $\mu$  — относительные электрическая и магнитная проницаемости,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — постоянные. Уравнения можно упростить за счет обычных для магнитной гидродинамики предположений, состоящих в том, что токи смещения малы (процессы медленны) и среда электрически нейтральна. В то же время закон Ома следует дополнить силой Лоренца. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \mathbf{j}, \\ \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}$$

Первые три уравнения с учетом соленоидальности магнитного поля (четвертое уравнение) не сложно преобразовать в уравнение индукции магнитного поля в движущейся среде, которое имеет вид

$$\partial_t \mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B},$$

где  $\nu_m = 1/\mu \mu_0 \sigma$  есть величина, называемая магнитной вязкостью.

Приведем также уравнения МГД, записанные в симметричной форме для скорости и магнитного поля. Для этого исключим из уравнения движения плотность электрического тока, преобразовав силу

$$\mathbf{F} = \rho^{-1}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = (\rho \mu \mu_0)^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}),$$

и воспользуемся известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \mathbf{a}).$$

В результате получим

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= (\rho \mu \mu_0)^{-1} \left[ (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla(B^2) \right] - \rho^{-1} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v}, \\ \partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} &= (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \nu_m \Delta \mathbf{B}.\end{aligned}$$

Теперь проведем обезразмеривание уравнений, выбрав за единицы измерения длины, скорости, времени, давления и индукции магнитного поля величины  $L$ ,  $U$ ,  $L/U$ ,  $\rho U^2$  и  $U(\rho \mu \mu_0)^{1/2}$  соответственно:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} = -\nabla(P + B^2/2) + \operatorname{R}^{-1} \Delta \mathbf{v}, \quad (1.30)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} = \operatorname{Rm}^{-1} \Delta \mathbf{B}, \quad (1.31)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad (1.32)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (1.33)$$

Здесь  $\operatorname{R} = LU/\nu$  есть уже знакомое нам обычное «гидродинамическое» число Рейнольдса, а  $\operatorname{Rm} = LU/\nu_m$  есть его магнитогидродинамический аналог, называемый *магнитным числом Рейнольдса*. Эти два параметра связаны магнитным числом Прандтля (отношение кинематической вязкости к магнитной).

Отметим, что магнитное число Рейнольдса можно рассматривать как отношение наведенного магнитного поля  $b \approx \mu \mu_0 L j \approx \sigma \mu \mu_0 L U B_0$  к характерному значению индукции внешнего магнитного поля  $B_0$ . Это означает, что магнитное число Рейнольдса характеризует роль наведенных магнитных полей.

Приведем и ряд других безразмерных параметров, используемых в магнитной гидродинамике. В уравнении движения (1.30) слагаемое, описывающее действие инерционных сил, имеет порядок  $\rho U^2/L$ ; сил вязкости —  $\rho \nu U/L^2$ . Электромагнитные силы могут быть обусловлены приложенными (внешними) электрическими полями и полями, наведенными самой движущейся жидкостью. Отношение приложенного и наведенного движением жидкости полей характеризует параметр нагрузки

$$K = E_o/U B_0.$$

При малых значениях параметра нагрузки  $K$  электромагнитные силы в уравнении движения имеют порядок  $F \approx jB_0 \approx \sigma U B_0^2$ . Порядок отношения электромагнитных и вязких сил определяет тогда квадрат числа Гартмана

$$\text{Ha}^2 = \frac{\sigma B_0^2 L^2}{\rho \nu},$$

а порядок отношения электромагнитных и инерционных — параметр МГД-взаимодействия

$$N = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho U}.$$

Специфика МГД-течений определяется тем фактом, что проводящая жидкость при своем движении увлекает за собой магнитное поле. В пределе идеально проводящей жидкости это приводит к «вмороженности» магнитного поля в жидкую среду. Чтобы пояснить этот эффект, обратимся к уравнению индукции в форме (1.30) и запишем его в переменных Лагранжа для нулевой магнитной вязкости (это и есть идеальная электрическая проводимость)

$$d_t \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v}.$$

Рассмотрим некую линию, перемещающуюся вместе с жидкостью. Пусть  $\delta \mathbf{l}$  есть элемент этой линии. Тогда его деформация будет определяться разностью скоростей на его концах, то есть

$$d_t \delta \mathbf{l} = (\delta \mathbf{l} \nabla) \mathbf{v}.$$

Таким образом, изменение во времени для векторов  $\mathbf{B}$  и  $\delta \mathbf{l}$  определяется одинаковыми уравнениями. Это означает, что если эти векторы совпадали в начальный момент времени, то они будут совпадать и во все последующие моменты времени. Иначе говоря, если две жидкие частицы лежат на одной силовой линии магнитного поля, то они останутся на этой линии и в дальнейшем, а индукция магнитного поля будет изменяться пропорционально расстоянию между этими частицами.

**Течение Гартмана.** В качестве примера влияния магнитного поля на характер течения рассмотрим течение проводящей жидкости между двумя пластинами, помещенными во внешнее магнитное поле, перпендикулярное к поверхности пластин. Если индукция магнитного поля равна нулю, то в зазоре между пластинами устанавливается параболический профиль скорости в соответствии с решением Пуазейля. По мере нарастания поля в слое начинает вырабатываться электродвижущая сила, вызывающая электрический ток в плоскости слоя, в направлении, нормальном движению. Слой считаем бесконечным, и это означает, что в каждом сечении  $x = \text{const}$  суммарный ток должен быть равен нулю. Детальная картина зависит от проводимости пластин. Если проводимость пластин велика, то об-

ратный ток пойдет по пластинам, а в слое ток будет пропорционален скорости и, следовательно, будет нарастать от стенок к центру. Возникающий электрический ток, в свою очередь, взаимодействует с внешним магнитным полем. На жидкость будет действовать электромагнитная сила, направленная против направления движения (по оси  $x$ ) и равная

$$F_x = -\sigma B_0^2 v_x.$$

Максимальная сила приходится на центральную часть потока, и в результате, профиль скорости уплощается. Этот эффект уплощения профиля скорости в поперечном магнитном поле называется эффектом Гартмана. Именно Гартман нашел точное решение задачи и получил вид профиля, носящего его имя,

$$v_x = U \frac{\text{ch}(\text{Ha}) - \text{ch}(\text{Ha} z/h)}{\text{Ha ch}(\text{Ha}) - \text{sh}(\text{Ha})}, \quad (1.34)$$

где  $U$  — средняя скорость в канале.

В случае непроводящих пластин ток может течь только по самой жидкости. Учитывая, что средняя скорость есть  $U = h^{-1} \int_0^h v_x dz$ , а суммарный ток должен быть равен нулю, легко связать плотность тока со скоростью

$$j_y = \sigma B_0 (v_x - U).$$

Следовательно, направление тока противоположно в областях, где скорость превышает среднее значение, и там, где скорость ниже средней. Соответственно, и электромагнитная сила направлена против направления движения в ядре потока и, наоборот, ускоряет поток в пограничных слоях. Характерный профиль скорости в течении Гартмана и структуру индуцированных токов иллюстрируют рис. 1.14–1.15.

В завершение упомянем еще один эффект, характерный для магнитной гидродинамики. Речь пойдет о магнитогидродинамических волнах, открытых Альфвеном и носящих его имя. Рассмотрим простейшую ситуацию — бесконечную однородную идеальную проводящую жидкость, пронизанную однородным магнитным полем  $\mathbf{B}_0$ , направленным вдоль оси  $z$ , и запишем линеаризованные уравнения для малых возмущений скорости  $\mathbf{v}$  и магнитного поля  $\mathbf{b}$

$$\partial_t \mathbf{v} = (\rho \mu_0 \mu)^{-1} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{b}, \quad (1.35)$$

$$\partial_t \mathbf{b} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (1.36)$$

Учитывая, что  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ , уравнения (1.35)–(1.36) можно записать в виде

$$\partial_t \mathbf{v} = (\rho \mu_0 \mu)^{-1} B_0 \partial_z \mathbf{b},$$

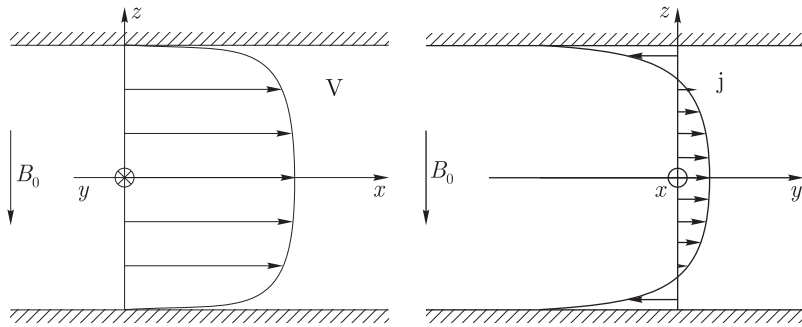


Рис. 1.14

Рис. 1.15

$$\partial_t \mathbf{b} = B_0 \partial_z \mathbf{v}.$$

Последний шаг — разделение переменных, дает уравнения

$$\partial_t^2 \mathbf{v} = u_a^2 \partial_z^2 \mathbf{v}, \quad (1.37)$$

$$\partial_t^2 \mathbf{b} = u_a^2 \partial_z^2 \mathbf{b}, \quad (1.38)$$

описывающие две группы волн, бегущих со скоростью  $\pm u_a$  вдоль силовых линий магнитного поля. Величина  $u_a = B_0(\rho\mu_0\mu)^{-1/2}$  есть скорость волн Альфвена. Простейшим решением является плоская волна  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{i(\omega t - kz)}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 e^{i(\omega t - kz)}$ . Подставляя его в (1.37)–(1.38), легко видеть, что  $b^2/(\mu_0\mu) = \rho v^2$ , то есть соблюдается равенство энергии пульсаций поля и энергии пульсаций скорости.

### Рекомендуемая литература к первой главе

- [1.1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [1.2] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
- [1.3] Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М.: Атомиздат, 1978. 142 с.
- [1.4] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
- [1.5] Валандер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 296 с.
- [1.6] Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 182 с.

## ГЛАВА 2

### Хаос в динамических системах

Турбулентные течения представляют собой системы, характеризующиеся наличием хаотически распределенных и хаотически осциллирующих структур самого различного масштаба. Турбулентность — это воплощение хаоса, а хаос долгое время ассоциировался с системами, имеющими огромное число степеней свободы, и развитая турбулентность считалась лишенной какого-либо порядка. Однако, начиная с конца 60-х годов двадцатого века, намечился значительный прогресс в понимании природы турбулентности, связанный с осознанием природы и структуры хаоса.

Во-первых, была установлена возможность хаотического поведения в нелинейных системах с относительно небольшим числом степеней свободы. Интересно, что впервые хаотическое поведение в простых гамильтоновых системах обнаружил А. Пуанкаре около ста лет назад, но только после работы Э. Лоренца (1963 г.) [78], в которой исследовалось хаотическое поведение диссипативной системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, было оценено значение этого факта и началось активное исследование хаотического поведения динамических систем. Правда, произошло это тоже не сразу, а только после ключевой работы Д. Рюэля и Ф. Такенса (1971 г.) [99], в которой было сформулировано понятие странного аттрактора и указана его роль в формировании нерегулярного поведения системы.

Во-вторых, было выяснено, что даже в самом развитом турбулентном потоке существуют элементы порядка, а число реально возбужденных степеней свободы значительно меньше ожидаемого. В 70-х годах появляются многочисленные работы о когерентных структурах в турбулентных потоках и делаются первые попытки описания турбулентности на языке фракталов.

Именно в это время сформировались такие науки, как теория катастроф и синергетика, появились первые книги о «детерминированном хаосе» и «порядке в хаосе». Важно подчеркнуть, что обычно рассматриваемые в этих книгах проблемы динамических систем невысокого порядка не имеют прямого отношения к развитой турбулентности. В них речь идет

о хаотическом во времени поведении небольшого числа заданных в пространстве мод (такие течения реально существуют при небольших надкритичностях, то есть вблизи порога неустойчивости), в то время как «истинная» турбулентность хаотична и в пространстве, и во времени. Тем не менее, рассматриваемые в качественной теории динамических систем вопросы чрезвычайно полезны как для понимания путей развития турбулентных течений (сценариев перехода к хаосу), так и для отработки методов описания хаотических (в том числе и турбулентных) систем.

Необходимо остановиться на самом понятии «детерминированный хаос». Под ним понимают нерегулярное поведение нелинейных систем, эволюция которых однозначно описывается динамическими уравнениями при заданных начальных условиях. При этом нелинейность является необходимым, но не достаточным условием возникновения хаотического поведения, а его возникновение связано не с наличием источников шума или бесконечного числа степеней свободы, а со свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить решения в ограниченной области фазового пространства.

В данной главе мы остановимся на базовых понятиях теории динамических систем, рассмотрим основные виды бифуркаций и основные сценарии перехода от упорядоченного движения к хаосу. Подробно разберем свойства системы Лоренца, не только сыгравшей важнейшую роль в становлении науки о хаосе, но и имеющей самое прямое отношение к теме нашего курса. Далее приведем пример еще одной динамической системы, имеющей отношение к гидродинамическим системам, — это простейшая модель земного динамо Рикитаке. В завершение будут приведены некоторые результаты лабораторного исследования стохастизации конвективного движения в замкнутой полости.

## 2.1. Консервативные и диссипативные системы

Любые движения можно разделить на монотонные и колебательные, а колебательные, в свою очередь, на регулярные (периодические) и нерегулярные. Среди периодических колебаний наиболее изучены гармонические колебания. Это вполне естественно, так как гармонические колебания чрезвычайно широко распространены в самых различных системах, а также потому, что любой колебательный процесс с помощью преобразования Фурье может быть представлен как сумма гармонических колебаний. Не удивительно, что знакомство с динамическими системами традиционно начинают с рассмотрения простого осциллятора.

Рассмотрим хорошо известный со школьной скамьи математический маятник — точечное тело массой  $m$ , подвешенное на стержне длиной  $l$  и находящееся в поле силы тяжести, характеризуемой ускорением свободного падения  $g$  (рис. 2.1). Маятник имеет одну степень свободы, описываемую углом отклонения от вертикали  $\theta$ . Основной закон механики приводит к уравнению, которое в цилиндрических координатах имеет вид

$$\ddot{\theta} + (g/l) \sin \theta = 0. \quad (2.1)$$

Для малых угловых отклонений, когда  $\sin \theta \approx \theta$ , уравнение (2.1) становится линейным уравнением

$$\ddot{\theta} + (g/l) \theta = 0, \quad (2.2)$$

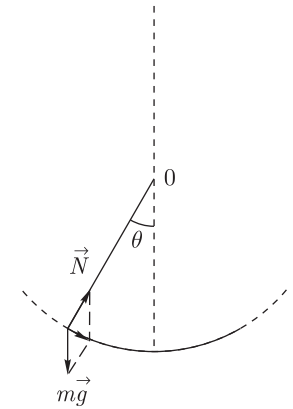


Рис. 2.1

решением которого являются гармонические колебания  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$  с круговой частотой  $\omega = \sqrt{g/l}$ .

### 2.1.1. Фазовое пространство

Состояние маятника в любой момент времени полностью задается двумя величинами: положением  $\theta(t)$  и угловой скоростью  $\dot{\theta}(t)$ . Если мы введем систему координат, осями которой будут служить эти две величины, то точка на плоскости  $(\theta, \dot{\theta})$  будет полностью характеризовать состояние системы, а любому решению будет соответствовать та или иная линия (траектория). *Фазовое пространство* определим как пространство, в котором осями координат служат переменные, описывающие состояние системы, в случае осциллятора — положение и скорость. *Фазовой траекторией* называется кривая в фазовом пространстве, описывающая эволюцию системы. Совокупность фазовых траекторий, описывающих эволюцию системы при различных начальных условиях, образует *фазовый портрет* системы.

На рис. 2.2 приведен фазовый портрет маятника. Картина периодична по оси  $\theta$  с периодом  $2\pi$ . В области применимости уравнения (2.2) фазовые траектории представляют собой окружности с центрами в точках  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\theta = \pm 2\pi n$ ,  $n$  — целое число. Эти кривые соответствуют гармоническим колебаниям, частота которых не зависит от амплитуды. С ростом амплитуды колебаний траектории принимают эллиптическую форму и период колебаний растет. Если энергия колебаний превышает величину  $2g/l$ , то колебания переходят во вращения вокруг оси. Траектории, точно соответствующие

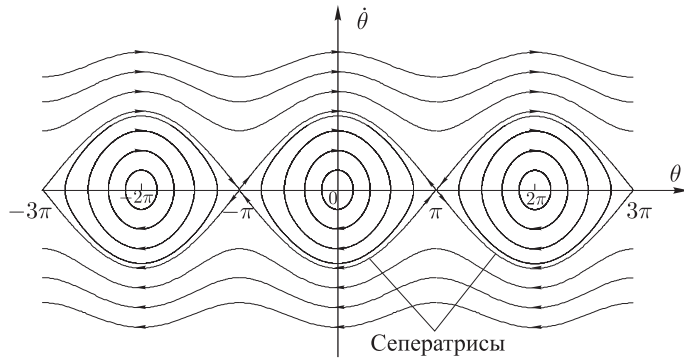


Рис. 2.2

щие этому значению энергии, проходят через верхнее, неустойчивое положение равновесия, и период колебаний стремится к бесконечности. Эта траектория разделяет области фазового пространства с различным характером поведения (колебания и вращение) и является *сепаратрисой*. Стрелки на рисунке указывают направление движения.

### 2.1.2. Консервативные системы

Маятник, описываемый уравнением (2.1), сохраняет энергию. Действительно,

$$E = mv^2/2 + mgl(1 - \cos \theta) = ml^2[\dot{\theta}^2/2 + (g/l)(1 - \cos \theta)]$$

и

$$d_t E = ml^2[\ddot{\theta} + (g/l) \sin \theta] \dot{\theta} \equiv 0. \quad (2.3)$$

Это означает, что линии на рис. 2.2 можно интерпретировать как линии равной энергии. Энергия с точностью до множителя совпадает с функцией Гамильтона, а уравнение (2.1) приводится к системе уравнений первого порядка

$$\dot{\theta} = \partial_p H, \quad \dot{p} = \partial_\theta H.$$

Здесь  $H(p, \theta) = p^2/2l + g(1 - \cos \theta)$  и  $p = l\dot{\theta}$ . Таким образом, рассмотренный маятник относится к гамильтоновым системам, которые, как известно, консервативны.

Из консервативности (сохранения энергии) следует одно очень важное свойство — сохранение площадей (в общем случае — объема) в фазовом пространстве. Элемент объема в фазовом пространстве можно рассматривать как множество начальных условий. В процессе эволюции это множество преобразуется в другой элемент фазового пространства (каждая точка следует своей фазовой траектории), объем которого должен оставаться постоянным.

Следует подчеркнуть, что сохранение объема не подразумевает при этом сохранения формы, так как сохранение объема может достигаться двумя различными способами. В первом случае элемент фазового объема переносится вдоль траектории практически без деформации. Во втором случае происходит экспоненциальное удлинение объема в некотором направлении с одновременным сжатием в перпендикулярном направлении (также экспоненциальным). Хотя фазовый объем сохраняется в обоих случаях, поведение системы отличается принципиально. В первом случае траектории, близкие в начальный момент времени, остаются близкими — траектории (а следовательно, и решения) устойчивы. Во втором случае малое начальное возмущение приводит к быстрому расхождению траекторий со временем — они не устойчивы.

Отметим еще одно свойство консервативных систем, состоящее в том, что они инвариантны к обращению времени (замене  $t$  на  $-t$ ). В случае маятника это означает, что если его движения заснять на видеофильм, то фильм можно прокручивать в обоих направлениях и отличить правильное направление от обратного по воспроизводимым движениям маятника будет невозможно.

### 2.1.3. Диссипативные системы

Примером простейшей диссипативной системы может служить тот же простой маятник, но подверженный действию сил трения. Реально силы трения присутствуют всегда (трение на оси, сопротивление воздуха и т. д.), и ни один свободный осциллятор не совершает колебания неограниченно долго. Для учета действия сил сопротивления нужно добавить в уравнение (2.1) слагаемое, например пропорциональное скорости движения маятника

$$\ddot{\theta} + \mu \dot{\theta} + (g/l) \sin \theta = 0, \quad (2.4)$$

где  $\mu$  есть коэффициент трения. Повторяя вычисления для скорости изменения энергии, вместо (2.3) получим

$$d_t E = -\mu ml^2 \dot{\theta}^2. \quad (2.5)$$

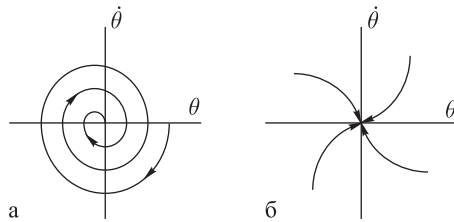


Рис. 2.3

Таким образом, при любом положительном значении коэффициента трения энергия убывает со временем, стремясь в конечном итоге к нулю (отрицательной энергии стать не может). Это означает, что семейство траекторий, представлявшее собой в отсутствие трения множество концентрических окружностей, превращается теперь во множество траекторий, сходящихся к началу координат. На рис. 2.3 показаны фазовые портреты маятника с трением для малого (а) и большого (б) трения. В первом случае характерное время затухания значительно превышает период колебаний и траектории представляют собой спирали с малым шагом.

Соответствующий фазовый портрет называется *фокусом*. Во втором случае затухание происходит за время, меньшее периода. Колебания становятся аperiodическими, а портрет называется *узлом*. В обоих случаях все фазовые траектории заканчиваются в одной точке, которая называется притягивающей точкой или *аттрактором*.

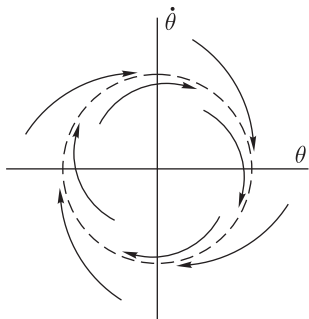


Рис. 2.4

Наличие аттрактора является важнейшим свойством диссипативных систем. Аттрактор является точкой только в простейших случаях. В общем случае аттрактор — это притягивающее множество (линия, поверхность и т. д.). Представим, что в рассматриваемом нами осцилляторе добавлена вынуждающая сила (для конкретности представим себе гиру в часах-ходиках). Теперь независимо от начальных условий фазовые траектории сходятся к окружности, радиус которой определяется действующей силой (рис. 2.4). Эта круговая траектория и является аттрактором (предельным циклом). Важным является тот факт, что в диссипативной системе пропала

зависимость решения от начальных условий (на достаточно больших временах, когда система выходит на аттрактор).

Рассмотренный пример иллюстрирует еще одно важнейшее свойство диссипативных систем — сжатие площадей (объема) в фазовом пространстве. Объем любого множества начальных условий уменьшается в среднем во времени. Однако, как и в консервативных системах, эволюция множества может происходить различным образом. Иногда (как в простом маятнике с трением) это множество равномерно стягивается в точку (или стремится к предельному циклу) и все траектории сближаются со временем. Но не всегда уменьшение объема подразумевает неизбежное сокращение длин. Растяжение объема в одном направлении может компенсироваться более эффективным сжатием в другом направлении. Эти два сценария сжатия фазового объема показаны на рис. 2.5.

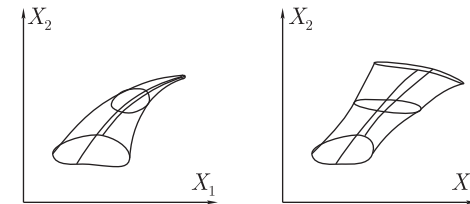


Рис. 2.5

Последнее принципиальное отличие диссипативных систем от консервативных связано с тем, что они не инвариантны к обращению времени. Это означает, что просмотр фильма о маятнике с трением в обратном направлении приведет к физически невозможной ситуации, так как маятник станет раскачиваться с нарастающей амплитудой без воздействия внешних сил.

#### 2.1.4. Пример немеханической системы

Приведем простой пример диссипативной системы из живого мира. Это модель системы жертва–хищник. Система, бесспорно, диссипативна, так как в отсутствие пищи любая биологическая популяция вымирает.

Пусть в изолированном лесу обитают только зайцы и волки, за численностью которых мы и собираемся следить ( $N$  — количество волков,  $n$  — количество зайцев). Фазовое пространство есть в этом случае один квадрант на плоскости  $(n, N)$ , так как отрицательные значения для численности жи-

вотных не возможны. Постараемся нарисовать фазовый портрет системы, не выписывая уравнений.

Какие параметры определяют возможные сценарии развития жизни в лесу? Это рождаемость обоих видов, естественная смертность, аппетит волков. Очевидно, что у каждого вида есть наименьшее критическое число (соответственно,  $n_c$  и  $N_c$ ), необходимое для того, чтобы вид мог воспроизводиться. Отложим на осях эти критические значения и подумаем, как может развиваться система, если начальные условия задают старт фазовой траектории вблизи осей координат. Ясно, что решающим является число зайцев. Если количество зайцев не достаточно для поддержания вида, то вымрут зайцы, а следом с неизбежностью вымрут и волки. Если мало волков ( $N < N_c$ ), а зайцев достаточно, то после вымирания волков численность популяции зайцев (в упрощенной модели) будет зависеть только от наличия травы в нашем лесу (обозначим это число как  $n_m$ ). Таким образом, в системе выявились две притягивающие точки, каждая из которых имеет свою область притяжения.

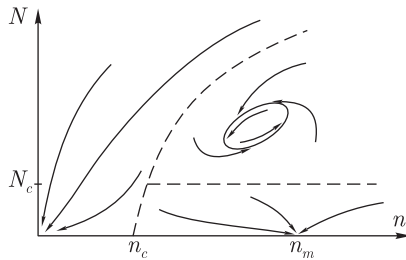


Рис. 2.6

Если число зайцев и волков достаточно, то наиболее вероятное развитие событий — это возникновение колебаний: размножились волки — уменьшается число зайцев, стало мало зайцев — уменьшается численность волков, стало меньше волков — снова размножаются зайцы и т. д. Такой сценарий немедленно следует и из простейшей модельной системы

$$\begin{aligned}\dot{n} &= \alpha n - \beta n N, \\ \dot{N} &= -\gamma N + \delta n N,\end{aligned}\quad (2.6)$$

где  $\alpha$  — рождаемость зайцев,  $\gamma$  — смертность волков (смертностью зайцев от старости пренебрегаем),  $\beta$  и  $\delta$  — коэффициенты, описывающие результат

встречи зайцев с волками (как часто такие встречи заканчиваются трагически и сколько волков могут насытиться в результате одной удачной охоты). Система (2.6) имеет стационарное решение:  $n = \gamma/\delta$ ,  $N = \alpha/\beta$ , а линеаризация системы вблизи точки равновесия приводит к уравнению

$$\ddot{n} = \alpha\gamma n,$$

имеющим своим решением гармонические колебания. Таким образом, если стационарное решение является неустойчивым, то можно ожидать появления в системе предельного цикла. Все сказанное суммирует рис. 2.6, где приведен качественный вид фазового портрета системы зайцы–волки. Видно, что аттрактор системы включает два узла и предельный цикл и что каждый из трех элементов аттрактора имеет свою область притяжения. Области притяжения разделены сепаратрисами, обозначенными пунктиром.

## 2.2. Бифуркации

### 2.2.1. Что такое бифуркация?

В рассмотренных нами примерах диссипативных систем с подводом энергии (маятник, энергия которого поддерживается за счет опускающейся гири, животные в лесу, питающиеся в конечном итоге за счет травы) мы обошли молчанием важный вопрос о том, как устойчивое решение (точка в фазовом пространстве) становится неустойчивым и сменяется предельным циклом. Ясно, что поведение системы зависит от некоторых управляющих параметров (масса гири в часах, при недостатке которой маятник остановится, рождаемость зайцев и т. д.) и при изменении этого параметра возможны не только количественные, но и качественные перестройки характера эволюции системы.

Точка в пространстве параметров, при которой происходят качественные изменения характера решений, называется *точкой бифуркации*, а соответствующее значение параметра называется критическим. Вспомним результаты анализа конвективной устойчивости нагретой жидкости в горизонтальном слое, описанные в первой главе, и представим их на плоскости  $(Ra, A)$ , где  $Ra$  — число Релея, а  $A$  — амплитуда (скорость вращения) конвективных валов (см. рис. 2.7). При  $Ra < Ra_c$  единственным ре-

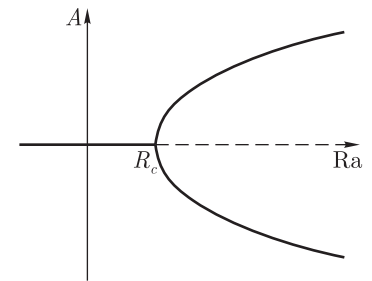


Рис. 2.7

шением является устойчивая неподвижная точка (конвекция отсутствует). В точке  $Ra = Ra_c$  рождается дополнительная пара решений (это также устойчивые точки), каждое из которых соответствует вращению валов в ту или иную сторону. При этом прежнее решение становится неустойчивым. В этой точке имеет место бифуркация, называемая вилкой (ответвление пары решений в виде притягивающих точек). Таким образом, точкой бифуркации называется точка в пространстве параметров, в которой происходит ветвление решений.

### 2.2.2. Бифуркация Хопфа

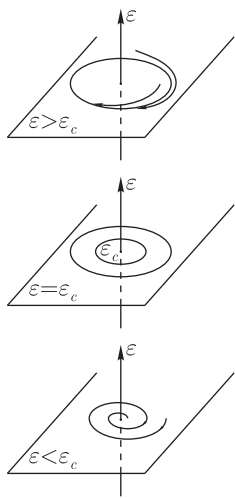


Рис. 2.8

Бифуркацией Хопфа называется процесс рождения предельного цикла из точки. Поведение системы вблизи точки бифуркации иллюстрирует рис. 2.8. На рисунке схематически изображены фазовые траектории при трех значениях управляющего параметра  $\varepsilon$ :  $\varepsilon < \varepsilon_c$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_c$ ,  $\varepsilon > \varepsilon_c$ .

Отметим два важных свойства бифуркации Хопфа. Во-первых, вблизи точки бифуркации период колебаний не зависит от величины надкритичности  $\varepsilon - \varepsilon_c$ . Во-вторых, амплитуда колебаний (амплитуда предельного цикла) зависит от надкритичности по корневому закону, то есть пропорциональна величине  $\sqrt{|\varepsilon - \varepsilon_c|}$ . Именно с бифуркацией Хопфа связан первый предложенный сценарий перехода от ламинарного течения к турбулентности (Ландау, 1944 г.). Согласно сценарию Ландау переход к турбулентности представляет собой бесконечную цепочку бифуркаций Хопфа, каждая из которых приводит к появлению новой частоты. В такой схеме аттрактор представляет собой  $n$ -мерный тор с  $n$ , стремящимся к бесконечности, и хаос рождается в системе с очень большим числом степеней свободы.

### 2.2.3. Нормальные и обратные бифуркации

Представленная на рис. 2.7 бифуркационная диаграмма соответствует нормальной (суперкритической) бифуркации вилки. Это означает, что возникающая в точке бифуркации пара решений ответвляется от начального решения мягко, то есть с нулевой начальной амплитудой, которая монотонно растет по мере роста надкритичности.

Точно также *нормальной* (суперкритической) называется бифуркация Хопфа, если предельный цикл рождается с нулевой амплитудой и в точке бифуркации система находится в состоянии нейтральной устойчивости. По мере удаления от точки бифуркации происходит плавное увеличение амплитуды предельного цикла.

Возможна и другая картина, когда в точке бифуркации происходит жесткий переход к циклу конечной амплитуды (или, в случае вилки, две новые точки появляются на конечном расстоянии друг от друга). Это происходит, когда нелинейные члены в уравнениях стремятся усилить возникающую неустойчивость. Проходя точку бифуркации справа налево (рис. 2.9), можно видеть, что неустойчивая неподвижная точка превращается в устойчивую неподвижную точку и неустойчивый предельный цикл. Такая бифуркация называется *обратной* или *субкритической*.

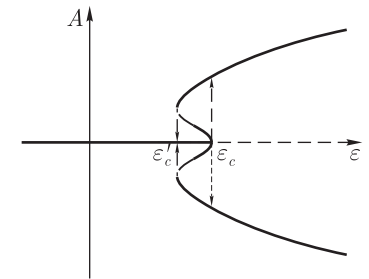


Рис. 2.9

Важной особенностью обратных бифуркаций является наличие интервала управляющего параметра  $\varepsilon'_c < \varepsilon < \varepsilon_c$ , в котором сосуществуют два устойчивых решения. Какое из этих решений реализуется, зависит от предыстории: при движении слева направо неподвижная точка остается устойчивой до значения  $\varepsilon = \varepsilon_c$ , после чего решение перепрыгивает на одну из двух устойчивых ветвей. При движении справа налево решение следует вдоль этой ветви до точки  $\varepsilon = \varepsilon'_c$ , где скачком переходит в устойчивую неподвижную точку на оси.

Такое явление называется *гистерезисом* и хорошо известно в самых различных областях физики и механики.

## 2.3. Как описать переход и хаос?

### 2.3.1. Сечения Пуанкаре

Идея метода Пуанкаре состоит в снижении объема обрабатываемой информации при изучении поведения фазовых траекторий путем рассмотрения лишь дискретного ряда точек на траектории. Реализуется эта идея путем выбора некоторой (вообще говоря, произвольной) плоскости в фазовом пространстве и наблюдения за точками пересечения этой плоскости фазовыми траекториями. Метод поясняет рис. 2.10, где для трехмерного фазового пространства показаны точки пересечения плоскости фазовой тра-

екторией (причем фиксируются только точки, в которых траектории пересекают плоскость в одном направлении, в данном случае сверху вниз).

Множество точек пересечения  $P_i$  образуют *сечение Пуанкаре*, а преобразование, связывающее последующую точку с предыдущей,

$$P_{i+1} = T(P_i) \quad (2.7)$$

называется *отображением Пуанкаре*.

При переходе от фазовых траекторий к сечению Пуанкаре происходит снижение размерности исследуемого множества. При этом рассматривается не система дифференциальных уравнений с непрерывным временем, а отображение (2.7) с дискретным временем, и дифференциальные уравнения заменяются разностными. В то же время, сечение Пуанкаре сохраняет топологические свойства породившего его потока. Так, для консервативной системы сечение сохраняет, а для диссипативной — сокращает площади на плоскости  $S$ .

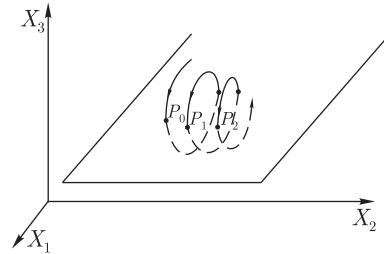


Рис. 2.10

Если решение системы периодическое, характеризуемое частотой  $f_1$ , то фазовая траектория представляет собой замкнутую кривую и сечение Пуанкаре представляет собой в простейшем случае одну единственную точку (или несколько точек, если траектория очень извилистая и/или неудачно выбрана плоскость сечения). Если в решении появляется вторая частота  $f_2$  и аттрактор представляет собой двумерный тор, то точки в сечении Пуанкаре ложатся на замкнутую кривую, которая может иметь или не иметь точек самопересечения (рис. 2.11). При этом точки могут образовывать на этой кривой конечное множество, если отношение частот  $f_1/f_2$  рационально и фазовая траектория представляет собой замкнутую линию, или покрывать кривую непрерывным образом, если отношение частот иррационально.

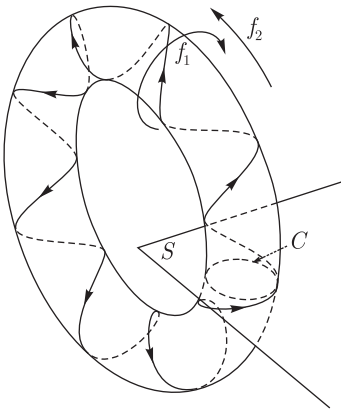


Рис. 2.11

Посмотрим, как выглядит проблема устойчивости периодического решения с точки зрения отображения Пуанкаре. Вопрос состоит в том,

является ли замкнутая траектория устойчивой по отношению к малым возмущениям. Иначе говоря, нужно узнать, как изменится положение точки  $P$  на следующем шаге, если на данном шаге внести возмущение в ее положение. Ограничиваясь линейным анализом устойчивости, для описания отображения Пуанкаре  $T(P)$  вводят матрицу

$$M = [\partial_j T_i], \quad (2.8)$$

называемую матрицей Флоке. Эта матрица характеризует реакцию отображения  $T$  вдоль координаты  $i$  на возмущение вдоль координаты  $j$ . Устойчивость цикла определяется собственными значениями матрицы (2.8). Смещение траектории на следующем витке экспоненциально убывает со временем, если все собственные значения лежат внутри единичной окружности на комплексной плоскости. Если же какое-либо собственное значение становится по модулю больше единицы, то смещения растут со временем и цикл становится неустойчивым.

Изучение свойств матрицы Флоке позволяет не только определить, устойчив или нет предельный цикл, но и узнать вид бифуркации, соответствующей потере устойчивости. Потеря устойчивости, как уже отмечалось выше, происходит при пресечении модулем собственного значения единичной окружности. Это пересечение может происходить тремя различными способами (рис. 2.12).

В первом случае собственное значение действительно и пересекает окружность в точке  $+1$ . Этот переход соответствует бифуркации узел-седло, означающей, что появляется одно неустойчивое направление и периодическое движение разрушается.

Во втором случае собственное значение также действительно, но пересекает окружность в точке  $-1$ . Момент перехода соответствует ситуации, когда траектория через раз снова попадает в прежнюю точку. Это так называемая бифуркация удвоения периода (субгармоническая бифуркация). Она может быть нормальной и обратной. При нормальной субгармонической бифуркации решение заменяется новым устойчивым периодическим решением с удвоенным периодом (см. параграф 2.6), при обратной бифуркации возникает временная перемежаемость, когда долгие интервалы почти периодического движения сменяются хаотическими осцилляциями.

Третий тип перехода возникает при комплексных собственных значениях. В этом случае пара комплексно-сопряженных значений одновременно

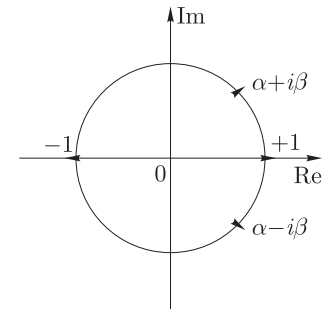


Рис. 2.12

но пересекает единичную окружность. Этот переход отвечает бифуркации Хопфа (возникает блуждание траектории вокруг устойчивой прежде точки). Если бифуркация нормальная, то предельный цикл переходит в тор, если обратная, то вновь возникает перемежаемость.

### 2.3.2. Показатели Ляпунова

Теория Флоке рассматривает устойчивость замкнутой фазовой траектории, интересуясь при этом только поведением всего цикла в целом. Можно поставить вопрос и о локальной устойчивости траектории, независимо от того, является ли она замкнутой или нет. Иначе говоря, речь идет о характеристике скорости расхождения (схождения) начально близких траекторий в фазовом пространстве. Количественной мерой расходимости траекторий являются *показатели Ляпунова*.

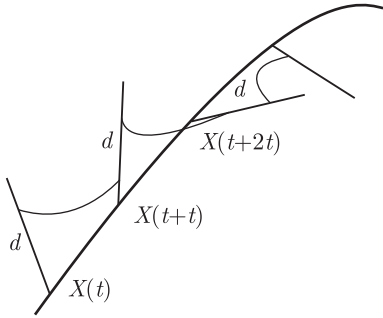


Рис. 2.13

Чтобы ввести показатели Ляпунова, необходимо рассмотреть эволюцию малого возмущения  $\delta X(t)$  фазовой траектории  $X(t)$ . Интегрируя численно исследуемую систему уравнений, можно построить матрицу  $M$ , связывающую вектор возмущений в момент времени  $t + \delta t$  с вектором в момент времени  $t$ :

$$\delta X_i(t + \delta t) = M_{ij}(\delta t) \delta X_j(t).$$

Для  $n$ -мерной системы матрица  $M$  будет иметь размерность  $n^2$  и  $n$  собственных значений. Траектория устойчива,

если модули всех собственных чисел меньше единицы (или показатели степени при экспоненциальном представлении собственных чисел отрицательны). На практике интерес представляет наиболее опасное направление и обычно определяется только один, самый большой показатель Ляпунова. Исходя из того, что на конечных временах возмущенная траектория уходит в самом неустойчивом направлении, практическое определение первого показателя Ляпунова можно реализовать по следующей схеме (рис. 2.13).

В точке  $X(t)$  на заданной траектории вносится возмущение  $\delta X(t)$ , отстоящее на расстояние  $d_0$  от основной траектории (рис. 2.13). Решая далее исследуемую систему уравнений для невозмущенного и возмущенного решения, вычисляют расстояние между траекториями  $d(t)$  через промежуток времени  $\tau$ . Далее, возмущенную точку снова устанавливают на расстоя-

нии  $d_0$  от основной траектории, но так, что она остается в том направлении от точки  $X(t + \tau)$ , что было получено в результате вычислений возмущенного решения.

Таким образом, на каждом шаге вычисляется скорость расхождения траекторий в наиболее опасном направлении. Считая, что расхождение траекторий подчиняется экспоненциальному закону  $d(t + \tau) = d_0 e^{\lambda_1 \tau}$ , и многократно повторяя эту процедуру, приходим к следующей формуле для вычисления первого показателя Ляпунова:

$$\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{i=1}^m \ln \frac{d_i}{d_0}.$$

### 2.3.3. Спектры Фурье

Анализ Фурье играет особую роль при исследовании не только периодических, но также квазипериодических и стохастических сигналов. В контексте задач, рассматриваемых в этой главе, он интересует нас как инструмент, позволяющий отличать периодические режимы от стохастических, но значение метода Фурье в изучении проблемы турбулентности этим не исчерпывается. В дальнейшем мы увидим, насколько он полезен при численном исследовании турбулентных потоков и при обработке результатов измерений. Основные свойства преобразования Фурье можно найти в главе 10.

Функцию  $f(t)$  можно представить интегралом Фурье, если для нее существует интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ . Тогда

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu, \quad \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt. \quad (2.9)$$

Здесь  $\hat{f}(\nu)$  есть фурье-образ функции  $f(t)$ ,  $\nu$  — частота (будем также пользоваться круговой частотой  $\omega = 2\pi\nu$ ). Отметим, что когда речь идет о преобразовании Фурье от функции координат  $f(x)$ , то в преобразовании вместо частот появляются волновые числа  $k$  и  $\gamma$  ( $k = 2\pi\gamma$ , в полной аналогии с частотами).

Для сигнала  $f(t)$  можно ввести корреляционную функцию (автокорреляцию)

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t + \tau) dt. \quad (2.10)$$

Корреляционная функция (2.10) есть среднее произведение двух значений сигнала, сдвинутых на величину  $\tau$ , и характеризует степень зависимости текущего значения сигнала от его предыдущих значений.

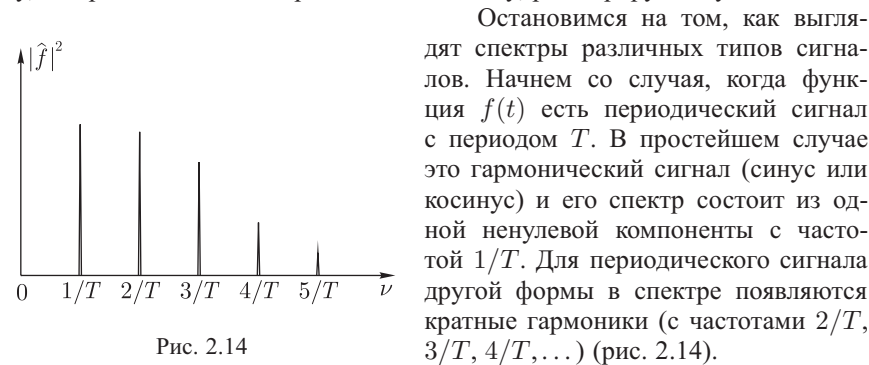
Спектральной плотностью сигнала  $f(t)$  называется функция  $F(\nu) = |\hat{f}(\nu)|^2$ . Связь спектральной плотности с автокорреляционной функцией устанавливает *теорема Хинчина–Винера*:

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) e^{-2\pi i \nu \tau} d\tau. \quad (2.11)$$

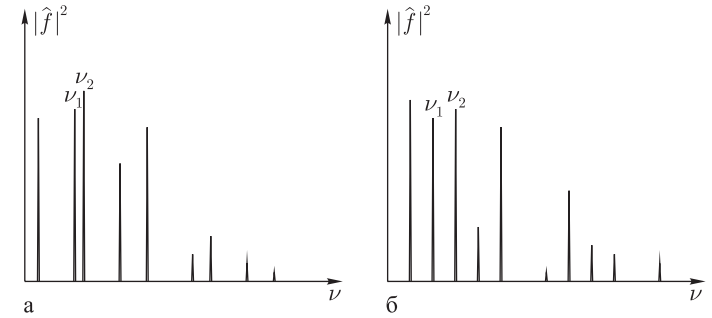
Следует отметить, что обрабатываемые сигналы представляют собой, как правило, последовательность дискретных точек (по крайней мере, сигнал становится таковым на этапе ввода в цифровую вычислительную машину). В этом случае приходится иметь дело с конечной выборкой и важной становится *теорема Котельникова*, утверждающая, что функция  $f(t)$ , спектр которой ограничен конечным интервалом частот  $-\nu_{\max} < \nu < \nu_{\max}$ , однозначно определяется выборкой на дискретном множестве точек с шагом  $\Delta t = 1/2\nu_{\max}$ . Точнее говоря, функция  $f(t)$  восстанавливается по конечной выборке  $f_n = f(n\Delta t)$  с помощью соотношения

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin \pi \left( \frac{t}{\Delta t} - n \right)}{\pi \left( \frac{t}{\Delta t} - n \right)}. \quad (2.12)$$

Другими словами, теорема Котельникова устанавливает предельную частоту, которая может быть определена по сигналу, регистрируемому с шагом  $\Delta t$ .

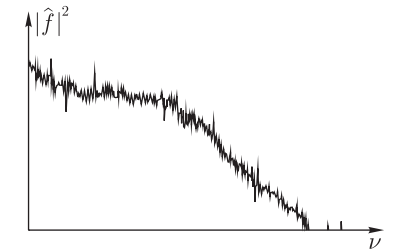


Более сложно выглядит спектр квазипериодического сигнала. Как уже указывалось выше, аттрактор квазипериодического движения представляет собой тор размерности  $d$ . Это означает, что у функции существует  $d$



аргументов, по которым функция периодична с соответствующими периодами  $T_i$ . В общем случае спектр квазипериодического движения может иметь довольно сложный вид. Просто он выглядит только тогда, когда сигнал есть суперпозиция периодических функций и спектр, в силу линейности преобразования, представляет собой сумму спектров отдельных периодических функций. Если квазипериодическая функция есть нелинейная комбинация периодических функций, то ее спектр содержит комбинационные частоты типа  $n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + \dots + n_d\nu_d$ . На рис. 2.15 показаны два спектра квазипериодических сигналов с двумя частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . При этом на рис. 2.15а показан случай, когда отношение частот есть величина иррациональная, а на рис. 2.15б это отношение рационально и равно  $2/3$ . Во втором случае все пики в спектре соответствуют гармоникам с частотами, кратными разности частот  $(\nu_2 - \nu_1)$ . В обоих случаях спектр сигналов остается дискретным.

На рис. 2.16 показан типичный спектр аperiodического сигнала. В отличие от предыдущих спектров он непрерывен (сплошной, или заполненный спектр). На практике вопрос о принадлежности спектра аperiodическому или квазипериодическому сигналу не всегда прост, так как квазипериодический сигнал с большим числом частот приближается по своему виду к спектру стохастического сигнала. Предельный вид стохастического сигнала называют белым шумом. Это сигнал с плоским спектром, корреляционная функция которого есть дельта-функция.



## 2.4. Странный аттрактор

Теперь вернемся к вопросу о том, каким должен быть аттрактор хаотического движения. Мы уже упоминали выше, что первый сценарий перехода к хаосу был предложен Ландау и представлял собой бесконечную цепочку бифуркаций Хопфа. Такому движению соответствует аттрактор в виде тора  $T^\infty$ , который может быть вписан только в пространство со столь же высокой размерностью. Но уже система с тремя степенями свободы дает сплошной спектр Фурье, что является признаком хаотического движения.

Необходим аттрактор, который объясняет хаотическое поведение системы в фазовом пространстве низкой размерности (для определенности будем иметь в виду трехмерное фазовое пространство, так как известно, что в трехмерных нелинейных системах возможно существование хаотических режимов). Соответствующий аттрактор был предложен Рюэлем и Таккенсом в 1971 г. и назван *странным аттрактором*. Эти же авторы предложили и сценарий перехода к турбулентности, состоящий в том, что в системе после двух бифуркаций Хопфа (приводящих к появлению в спектре двух независимых частот) происходит третья бифуркация, приводящая к возникновению странного аттрактора (и появлению заполненного спектра).

Важнейшим свойством, которым должен обладать аттрактор хаотического движения, является чувствительность к заданию начальных условий (ЧЗНУ). Это означает, что близкие траектории должны расходиться (должны быть положительные показатели Ляпунова) или, иными словами, система должна забывать о начальных условиях благодаря наличию малых возмущений.

В то же время нужно помнить, что речь идет о диссипативных системах, в которых объем в фазовом пространстве сокращается и объем аттрактора должен быть равен нулю. Потеря памяти о начальных условиях обеспечивается и сокращением объемов, так как независимо от начальных условий фазовая траектория выходит на аттрактор. Чтобы объем множества точек был равен нулю, его размерность  $d$  должна быть меньше размерности пространства. Следовательно,  $d < 3$ .

Из требования ЧЗНУ следует, что траектории в фазовом пространстве должны расходиться, однако система является детерминированной, а это означает, что в каждой точке должно существовать единственное решение и траектории не должны пересекаться (разве что в конечном числе особых точек). С учетом того, что траектория должна занимать конечную область фазового пространства, на плоскости эти два требования совместить невозможно, и мы приходим ко второму ограничению на размерность аттрактора:  $d > 2$ .

Таким образом, апериодический (странный) аттрактор должен:

- притягивать фазовые траектории из области притяжения;
- удовлетворять требованию ЧЗНУ;
- иметь дробную размерность (в конкретном случае размерность между двойкой и тройкой, то есть  $2 < d < 3$ ).

Отложим вопрос о дробной размерности до следующего параграфа и приведем несколько качественных соображений, касающихся возможной структуры аттрактора с такими свойствами.

Моделью возможного построения странного аттрактора является так называемая *подкова Смейла*. Эта модель отражает важное свойство странных аттракторов — они всегда содержат в себе элементы *растяжения* с последующим *складыванием*.

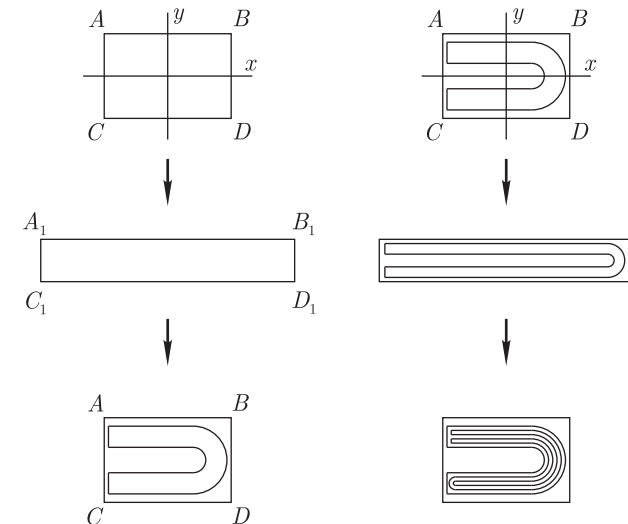


Рис. 2.17

Построение подковы Смейла иллюстрирует рис. 2.17. Имеется прямоугольник, который растягивается в 2 раза вдоль оси  $x$  и сжимается в  $2\eta$  раз вдоль оси  $y$ . Коэффициент  $\eta > 1$  и характеризует степень сжатия площади. На втором шаге вытянутый прямоугольник складывается в подкову и возвращается таким образом в исходную область пространства. При этом он занимает не всю исходную область, так как появились пробелы, обусловленные сжатием. Третий шаг повторяет первый и так далее. Отметим,

что деформацию можно характеризовать числами (показателями) Ляпунова. Растяжение по оси  $x$  характеризуется положительным показателем  $\lambda_1 = \ln 2$ , а сжатие по оси  $y$  — отрицательным показателем  $\lambda_2 = -\ln 2\eta$ .

Вертикальное сечение полученного объекта в точности воспроизводит так называемое канторово множество, размерность которого будет определена в следующем параграфе. Здесь же отметим только, что в пределе слабой диссипации ( $\eta \rightarrow 1$ ) размерность подковы стремится к двум (она занимает почти всю плоскость). В пределе сильной диссипации ( $\eta \rightarrow \infty$ ) на плоскости остаются редкие линии и размерность множества стремится к единице.

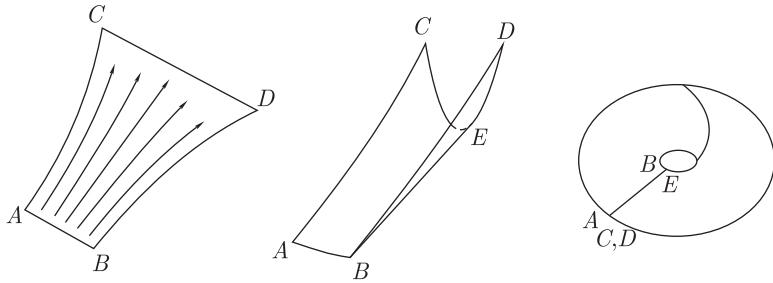


Рис. 2.18

Другую попытку представить возможность существования аттрактора с требуемыми свойствами представляет рис. 2.18. На первом шаге происходит разбегание траекторий (обеспечивающее ЧЗНУ). На втором происходит складывание и на третьем — сворачивание полученной пространственной структуры в «кольцо» таким образом, что сложенная вдвое растянутая сторона смыкается с начальной недеформированной. Вспоминая, что траектории не должны при этом пересекаться, мы приходим к выводу, что должна образоваться многолистная структура.

## 2.5. Фракталы

### 2.5.1. Понятие фрактала

Пусть имеется множество точек, расположенных в некотором пространстве размерностью  $D$ . Введем сферу радиуса  $r$  (гиперсферу, если  $D > 3$ ) и будем подсчитывать среднее число точек  $N$ , попадающих в сферу при различных ее положениях в пространстве. Естественно рассчи-

тывать на то, что зависимость числа точек от радиуса сферы будет иметь степенную форму

$$N(r) \approx r^d, \quad (2.13)$$

и размерность множества можно определить как

$$d = \frac{\ln N(r)}{\ln r}. \quad (2.14)$$

Если точки множества расположены на линии, то  $d = 1$ , если они лежат на плоскости, то  $d = 2$ , а если точки занимают все трехмерное пространство, то опять же получается обычная (евклидова) размерность  $d = 3$ .

Фракталами называют объекты с нецелой размерностью. Простейшим примером фрактального множества является канторово множество, строящееся по следующему правилу. Единичный отрезок разбивается на три равных части, и средняя часть удаляется. На втором шаге каждый из оставшихся двух отрезков снова делится на три части с последующим удалением центральных частей. Процедура повторяется до бесконечности (рис. 2.19). Таким образом, получается такое множество, что любой сколь угодно малый объем области обязательно содержит точки, этому множеству не принадлежащие.

Оценим размерность построенного множества по формуле (2.14). Из процедуры построения множества следует, что при каждом увеличении радиуса сферы в три раза число точек, в нее попадающих, увеличивается вдвое ( $r \approx 3^n$ ,  $N \approx 2^n$ ). Следовательно,

$$d = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63.$$

Это не единственный способ определения фрактальной размерности. Наиболее известна так называемая размерность Хаусдорфа–Безиковича. Она определяется следующим образом. Пусть  $N(l)$  — наименьшее число кубов (сфер) с ребром (диаметром)  $l$ , которым можно покрыть все точки множества. Тогда размерность Хаусдорфа–Безиковича есть

$$D = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}. \quad (2.15)$$



Рис. 2.19

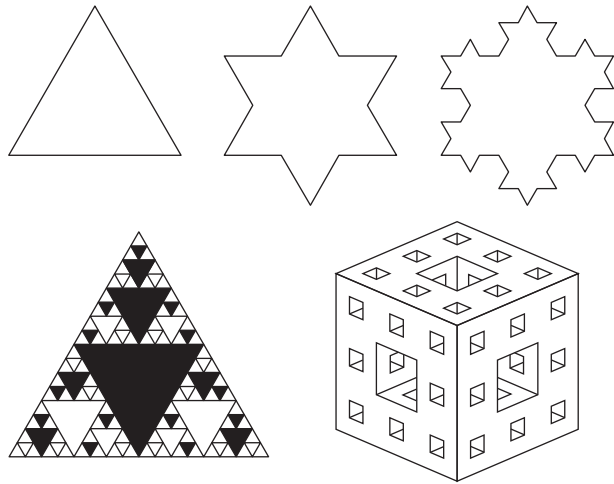


Рис. 2.20

Оценивая размерность введенного выше канторова множества по (2.15), мы приходим к тому же самому результату, что и при вычислениях по формуле (2.14). Одинаковый результат получается при оценке размерности однородных фракталов. Несколько примеров однородных фракталов и получаемые для них размерности приведены на рис. 2.20. В верхней части рисунка показана процедура построения фигуры, называемой «снежинкой Коха». Размерность кривой, ограничивающей эту фигуру, равна величине  $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,2618$ . Размерность «клиновидной кривой» (внизу слева) также лежит между единицей и двойкой и равна  $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,5849$ . Внизу справа показана «губка Серпинского», размерность которой  $D = \ln 20 / \ln 3 = 2,7268$ . В общем случае неоднородных фракталов размерности  $d$  и  $D$  могут не совпадать, но всегда  $d \leq D$  (см. п. 2.5.3).

Объекты с фрактальными свойствами возникают в самых различных приложениях. Одной из первых практических задач, приведших к развитию теории фракталов, была задача об определении длины береговой линии. Проблема состоит в том, что по мере использования карт с более мелким разрешением получаемая длина береговой линии все увеличивается и процесс не сходится. Береговая линия является, таким образом, типичным фрактальным объектом (сравните со структурой снежинки Коха, рис. 2.20). Фрактальными свойствами обладают облака, кораллы, растущие кристаллы, семейства трещин при процессах разрушения и поле диссипации энергии в развитом турбулентном течении.

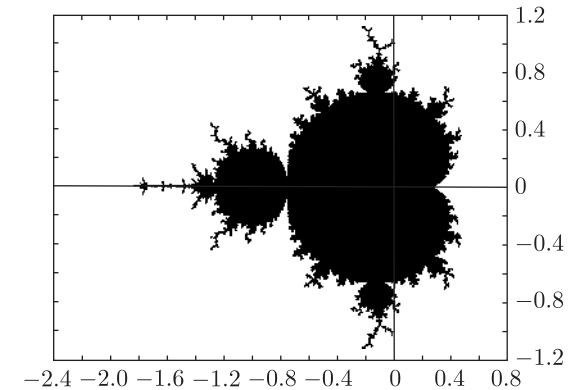


Рис. 2.21

К фракталам приводят многие математические задачи. Простейший пример дает задача о границах областей притяжения рациональных отображений комплексной плоскости в себя. Например, рассматривается уравнение

$$z^3 = 1,$$

имеющее три корня  $(1, -1/2 + i\sqrt{3}/2, -1/2 - i\sqrt{3}/2)$ , и используется итерационный метод Ньютона для его решения. Это значит, что для уравнения  $f(z) = 0$  строится последовательность значений  $z_n$  таких, что

$$f(z_n) + (z_{n+1} - z_n)f'(z_n) = 0.$$

В нашем случае это приводит к выражению

$$z_{n+1} = z_n - (z_n^3 - 1)/(3z_n^2). \quad (2.16)$$

Итерационный процесс (2.16) стартует с различных начальных значений  $z_0$  на комплексной плоскости и приводит, в конце концов, к одному из трех корней уравнения. Задача состоит в том, чтобы построить границы раздела трех областей притяжения. Такие границы называются множествами Жюлиа (задача Жюлиа датируется 1918 годом) и обладают замечательным свойством: каждая точка границы разделяет все три области притяжения.

Множества Жюлиа строятся и для логистического уравнения

$$z_{n+1} = z_n^2 + C,$$

для которого показано (Мандельброт, 1980 г.), что структура получающегося множества зависит от значений  $C$  на комплексной плоскости. На рис. 2.21 черным цветом показана область значений  $C$ , для которых множества Жюлиа представляют собой связные структуры. Видно, что эта область имеет крайне сложную структуру. Приняв за линию уровня число итераций, необходимых для попадания в  $\varepsilon$ -окрестность решения, и рисуя разные уровни разными цветами, получают живописные картинки, украшающие многие книги и журнальные статьи. Мы не приводим их из-за бедности черно-белого представления и отсылаем читателя к соответствующим изданиям (см. список рекомендуемой литературы). Эстетическое наслаждение можно получить и от рассматривания изображений аттракторов динамических систем. Вспоминая, что именно размерность аттракторов динамических систем с хаотическим поведением заставили нас обратиться к фракталам, вернемся к вопросу о том, как именно можно измерить размерность аттрактора.

### 2.5.2. Алгоритм вычисления размерности аттрактора

Вопрос об измерении размерности аттрактора становится особенно сложным при попытках обработки экспериментальных данных, когда даже вопрос о размерности фазового пространства, то есть вопрос о необходимом числе независимых переменных, остается открытым. Подход к решению этой задачи дает так называемая теорема Такенса, доказывающая, что информация о размерности аттрактора системы содержится во временном сигнале, полученном при записи одной-единственной (любой) переменной.

Пусть имеется динамическая система (не слишком большой размерности  $N$ ), описываемая системой дифференциальных уравнений первого порядка. Принципиально, от системы  $N$  уравнений первого порядка можно перейти к дифференциальному уравнению  $N$ -го порядка, содержащему  $N$  производных, но одной переменной (например, остается переменная  $X(t)$  и ее производные  $\dot{X}(t)$ ,  $\ddot{X}(t)$ ,  $\ddot{\ddot{X}}(t)$  и т. д.). При представлении дифференциальных уравнений в конечных разностях это соответствует одновременному знанию величин  $X(t)$ ,  $X(t+\tau)$ ,  $X(t+2\tau)$ ,  $X(t+3\tau)$  и т. д., где  $\tau$  — постоянная. Теорема Такенса утверждает, что каждая переменная системы  $X(t)$  отражает основные свойства этой системы, а аттрактор, построенный в фазовом пространстве переменных  $X(t)$ ,  $X(t+\tau)$ ,  $X(t+2\tau)$ ,  $X(t+3\tau)$ , ..., сохраняет основные топологические свойства аттрактора исходной системы.

Практически, алгоритм вычисления размерности аттрактора строится следующим образом. Для измеряемой величины  $X(t)$  выбирается характерное время сдвига  $\tau$  и строится фазовая траектория на  $p$  переменных  $X(t)$ ,

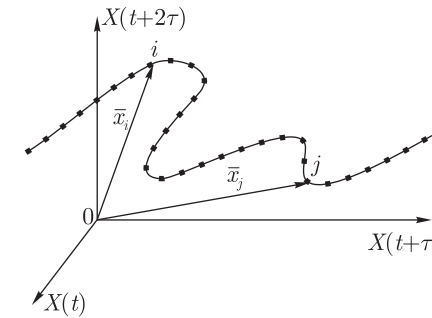


Рис. 2.22

$X(t+\tau)$ , ...,  $X(t+(p-1)\tau)$ , как показано на рис. 2.22. Оптимальный выбор сдвига  $\tau$  является ключевым для успешной работы алгоритма — при слишком малых значениях переменная  $X(t)$  не успевает измениться за время  $\tau$  и все точки лягут вблизи прямой  $X(t) = X(t+\tau) = X(t+2\tau) = \dots = X(t+n\tau)$ , а при слишком больших значениях  $\tau$  получится множество не связанных друг с другом точек.

При правильном выборе  $\tau$  получается последовательность точек, образующих фазовую траекторию. В каждую из этих точек, определяемых в фазовом пространстве вектором  $\mathbf{X}_i$ , помещается гипербесфера радиуса  $r$ , и вычисляется число других точек фазовой траектории, попавших в пределы этой сферы. Затем вводится функция

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^m H(r - |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|), \quad (2.17)$$

характеризующая среднее число пар точек, попадающих в сферу заданного радиуса. Здесь  $H$  — функция Хевисайда, равная, по определению, единице при положительных и нулю при остальных значениях аргумента. Ожидая, что

$$C(r) \approx r^d,$$

строят эту функцию в двойном логарифмическом масштабе и при наличии в таком представлении прямолинейного участка определяют его наклон, равный величине  $d$ . Отметим, что степенной закон можно ожидать только на масштабах  $r$ , заметно меньших размеров области, занимаемой аттрактором.

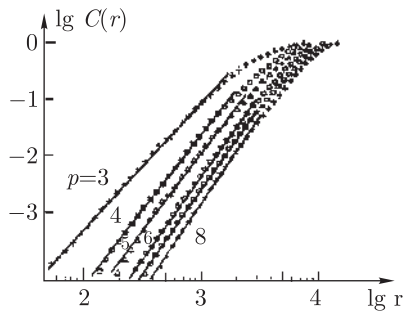


Рис. 2.23

Процедура вычисления величины  $d$  повторяется для все возрастающих значений размерности используемого фазового пространства  $p$ . При этом вычисленные значения  $d$  равны  $p$  до тех пор, пока размерность используемого пространства остается меньшей размерности аттрактора. Если вычисленная размерность  $d$  перестает зависеть от  $p$ , то это означает, что она равна размерности самого аттрактора. Наименьшее целое число, большее полученной (фрактальной) размерности аттрактора, называется *размерностью вложения* и определяет реальное число степеней свободы рассматриваемой системы. Пример поведения функции  $C(r)$  по мере роста  $p$ , построенная по результатам реальных измерений в конвекции Релея–Бенара в работе [81], приведена на рис. 2.23. В этом примере наклон прямых линий перестает возрастать с  $p = 4$ , хотя предельный наклон прямых есть 2.8 (то есть размерность вложения равна трем).

### 2.5.3. Обобщенная размерность

Пусть система эволюционирует в некотором фазовом пространстве. Разобьем это пространство на ячейки ( $n$ -мерные кубики) с ребром  $l$  (всего  $M$  ячеек) и вычислим вероятность попадания системы в каждую  $i$ -ю ячейку:

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N},$$

где  $n_i$  — число точек, попавших в данную ячейку, а  $N$  — общее число рассмотренных точек.

Обобщенная размерность (размерность Рени) определяется как

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_{i=1}^M p_i^q}{\ln l}. \quad (2.18)$$

Таким образом, вводится последовательность величин  $D_q$ , связанных с соответствующими моментами распределения вероятности. Посмотрим, какой смысл имеет эта величина при конкретных значениях  $q$ .

1.  $q = 0$ .

$$D_0 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^M p_i^0}{-\ln l},$$

сумма в числителе равна числу ячеек, в которых оказалась хотя бы одна точка. Следовательно,

$$D_0 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}, \quad (2.19)$$

где  $N(l)$  есть число ячеек, содержащих точки, и (2.19) совпадает, таким образом, с определением размерности Хаусдорфа (2.15).

2.  $q = 1$ . В этом случае возникает проблема деления на ноль. Рассматривается предел  $q \rightarrow 1$ , и с помощью правила Лопиталя

$$D_1 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{(\ln \sum_{i=1}^M p_i^q)'}{(q-1)'} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\sum_{i=1}^M p_i^q \ln p_i}{\sum_{i=1}^M p_i^q} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^M p_i \ln p_i}{\ln l}. \quad (2.20)$$

Числитель под знаком предела есть энтропия Шенона, а размерность  $D_1$  называют информационной размерностью.

3.  $q = 2$ . Теперь в числителе под знаком суммы стоит квадрат вероятности попадания точки в ячейку, то есть совместная вероятность одновременного попадания пары точек. Таким образом,

$$D_2 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^M p_i^2}{\ln l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln C(l)}{\ln l}, \quad (2.21)$$

где  $C(l)$  есть функция (2.17), а размерность (2.21) называется *корреляционной* размерностью.

Справедливо общее правило:  $D_i \geq D_j$ , если  $i < j$ . Это означает, что статистические моменты более высокого порядка сосредоточены на подмножествах все меньшей размерности, а наибольшее значение всегда имеет Хаусдорфова размерность  $D_0$ .

## 2.6. Субгармонический каскад

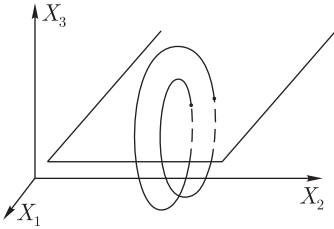


Рис. 2.24

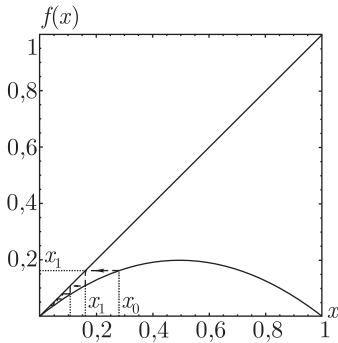


Рис. 2.25

Рассмотрим отображение первого возвращения

$$x_{k+1} = f(x_k) = 4\mu x_k(1 - x_k), \quad (2.22)$$

где  $x \in [0, 1]$  и  $0 \leq \mu \leq 1$ . Отображение ставит в соответствие каждой точке из интервала  $[0, 1]$  другую точку из этого же интервала.  $\mu$  — управляющий параметр. При  $\mu < 0,25$  существует только одна точка, в которой  $x_{k+1} = x_k$ . Это точка  $x = 0$ , и она устойчива. Действительно,

$$f'(x) = 4\mu(1 - 2x)$$

и

$$f'(0) = 4\mu.$$

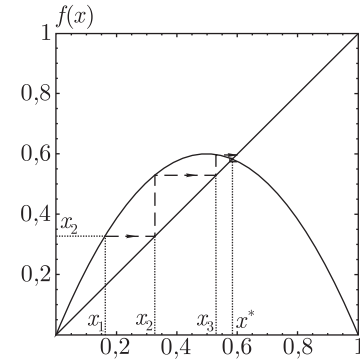


Рис. 2.26

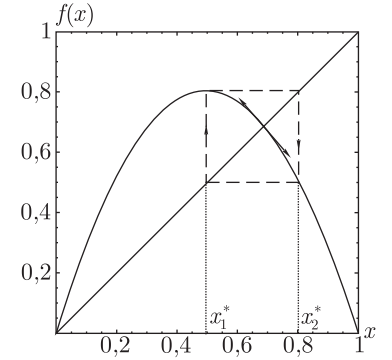


Рис. 2.27

Это означает, что при  $\mu < 1/4$  производная в точке пересечения функции  $f(x)$  с биссектрисой  $x_{k+1} = x_k$  остается меньше единицы, что обеспечивает устойчивость решения (см. рис. 2.25).

При  $0,25 < \mu < 0,75$  решение  $x = 0$  становится неустойчивым, но появляется другое решение —

$$x = 1 - 1/(4\mu),$$

которое устойчиво, так как при  $0,25 < \mu < 0,75$

$$|f'(x)| = 2|1 - 2\mu| < 1.$$

Путь, по которому решение выходит в этом случае на устойчивую точку, показан на рис. 2.26. В точке  $\mu = \mu_1 = 0,75$ , и эта точка становится неустойчивой. Характер возникающего решения иллюстрирует рисунок 2.27, где показано решение для  $\mu = 0,8$ . В решении возникают две неподвижные точки. Это так называемый 2-цикл, при котором решение возвращается в данную точку через шаг. Иначе говоря, решение определяется условием  $x_{k+2} = x_k$ . Запишем

$$x_{k+2} = f(x_{k+1}) = f^2(x_k) = g(x_k),$$

где явный вид функции  $g$  есть

$$g(x) = 16\mu^2(x - x^2 - 4\mu x^2 + 8\mu x^3 - 4\mu x^4).$$

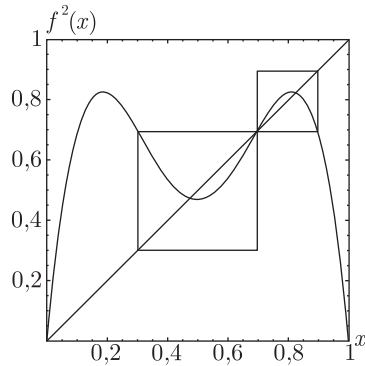


Рис. 2.28

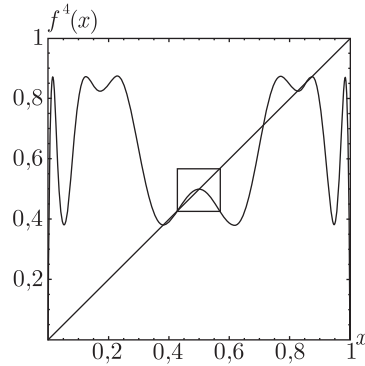


Рис. 2.29

График этой функции показан на рис. 2.28, а два выделенных квадрата поясняют тот факт, что в них воспроизводится картинка, представленная на рис. 2.26. В дальнейшем все повторяется. Функция  $g(x)$  теряет устойчивость при  $\mu = \mu_2 = (1 + \sqrt{6})/4 = 0,86237\dots$ . Далее рассматривается функция

$$h(x) = g^2(x) = f^4(x),$$

представленная на рис. 2.29. Квадрат на рисунке снова показывает, что вблизи каждой устойчивой точки воспроизводится ситуация рисунка 2.26. Функция  $h(x)$  становится неустойчивой при  $\mu = \mu_3 = 0,875$  и т. д. Каждый раз имеет место бифуркация удвоения периода (период цикла удваивается). Фейгенбаум обнаружил два закона подобия, характеризующих субгармонический каскад. Во-первых, он показал, что последовательность  $\mu_i$  быстро сходится:

$$\mu_\infty = 0,892486418\dots,$$

и существует предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i} = \delta.$$

Важно, что величина  $\delta$  не зависит от конкретного вида функции  $f(x)$  (любая выпуклая, непрерывная, дифференцируемая функция с одним максимумом) и равна

$$\delta = 4,6692016091\dots$$

Это первый закон подобия. Второй закон подобия касается положения устойчивых точек. На рис. 2.30 схематически показана структура решений

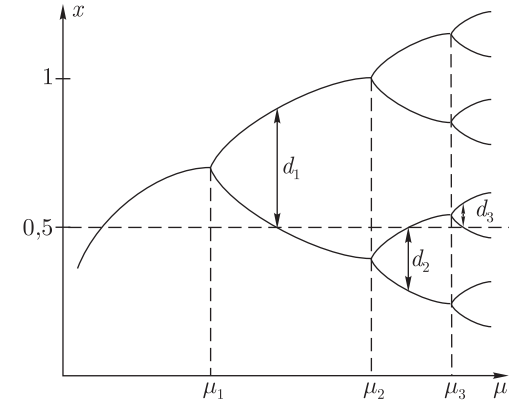


Рис. 2.30

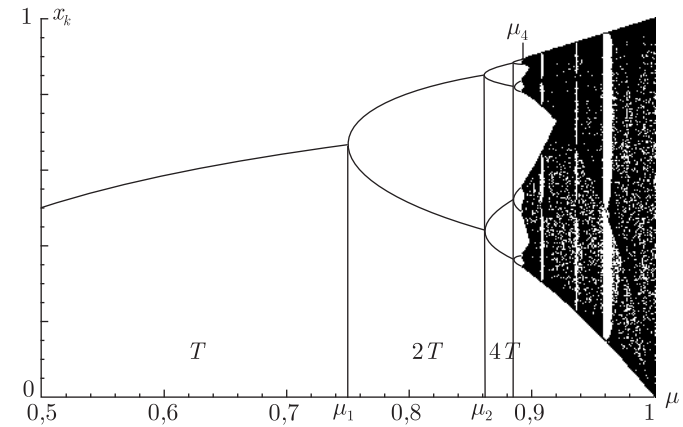


Рис. 2.31

уравнения (2.22). Рассматриваются точки пересечения с прямой  $x = 0,5$  до ближайшей к ней точки на устойчивом  $2^n$ -цикле. Для соответствующих расстояний  $d_n$  справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha,$$

и вторая константа Фейгенбаума

$$\alpha = 2,5029078750 \dots$$

Отметим, что в результате бесконечной последовательности бифуркаций удвоения при  $\mu = \mu_\infty$  возникает бесконечное множество (аттрактор Фейгенбаума), который имеет размерность Хаусдорфа  $D = 0,548 \dots$ . Важно, что при всех  $\mu < \mu_\infty$  показатель Ляпунова отрицателен, стремясь при  $\mu \rightarrow \mu_\infty$  к нулю. Следовательно, аттрактор Фейгенбаума не является странным.

Хаос возникает при  $\mu > \mu_\infty$ , где показатель Ляпунова в основном положителен. Поведение в этой области достаточно сложное. Хаотические области чередуются с «окнами периодичности» (светлые зоны на рис. 2.31).

## 2.7. Некоторые примеры

### 2.7.1. Система Лоренца

Рассмотрим свойства простой динамической системы, описывающей конвективные течения в задаче Релея о конвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое несжимаемой жидкости. Эта система стала одной из наиболее известных динамических систем, иллюстрирующих переход к хаосу и возникновение странных аттракторов. Начнем с процесса получения конечномерных проекций уравнений движения жидкости и перехода к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Учитывая общепринятый вид системы Лоренца, мы сохраним единицы размерности и обозначения его работы [78].

Как и в описанной выше задаче Релея, рассматриваются только плоские движения жидкости (конвективные валы). Вектор скорости имеет две компоненты  $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$ , и уравнения Буссинеска (1.25), записанные покомпонентно, имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t v_x + v_x \partial_x v_x + v_z \partial_z v_x &= -\rho^{-1} \partial_x P + \nu \Delta v_x, \\ \partial_t v_z + v_x \partial_x v_z + v_z \partial_z v_z &= -\rho^{-1} \partial_z P + \nu \Delta v_z + g\beta T, \\ \partial_t T + v_x \partial_x T + v_z \partial_z T &= \chi \Delta T, \\ \partial_x v_x + \partial_z v_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Далее вводится функция тока

$$-\partial_t \partial_z \psi + \partial_z \psi \partial_{xz} \psi - \partial_x \psi \partial_{xz} \psi = -\rho^{-1} \partial_x P - \nu \Delta \partial_z \psi,$$

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_x \psi - \partial_z \psi \partial_{xx} \psi - \partial_x \psi \partial_{xz} \psi &= -\rho^{-1} \partial_z P + \nu \Delta \partial_z \psi + g\beta T, \\ \partial_t T - \partial_z \psi \partial_x T + \partial_x \psi \partial_z T &= \chi \Delta T, \end{aligned}$$

и после обычной процедуры дифференцирования первого и второго уравнений, соответственно, по  $z$  и по  $x$  и вычитания первого из второго получаем

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta \psi + \{\psi, \Delta \psi\} &= \nu \Delta \Delta \psi + g\beta \partial_x T, \\ \partial_t T + \{\psi, T\} &= \chi \Delta T, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где для упрощения записи использованы скобки Пуассона:

$$\{A, B\} = \partial_x A \partial_z B - \partial_z A \partial_x B.$$

Учитывая линейную зависимость равновесной температуры по высоте, представим температуру в виде суммы

$$T = \theta - \Delta T z / h,$$

где  $\theta$  есть отклонение температуры от линейного профиля. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta \psi + \{\psi, \Delta \psi\} &= \nu \Delta \Delta \psi + g\beta \partial_x \theta, \\ \partial_t \theta + \{\psi, \theta\} - h^{-1} \Delta T \partial_x \psi &= \chi \Delta \theta. \end{aligned} \quad (2.25)$$

На границах

$$\psi = \Delta \psi = \theta = 0.$$

Дальнейший путь состоит в том, что функция тока и температура раскладываются в двойные ряды Фурье с зависящими от времени коэффициентами

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \sum \psi_{nm}(t) \sin(\pi m x / h) \sin(\pi n z / h), \\ \theta(x, z, t) &= \sum \theta_{nm}(t) \cos(\pi m x / h) \sin(\pi n z / h). \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в уравнения и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях от  $x$  и  $z$ , получают систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов  $\psi_{nm}(t)$  и  $\theta_{nm}(t)$ . Отличительной особенностью модели Лоренца является то, что в разложениях оставлено минимальное число членов, сохраняющих нелинейность системы, а именно, один член из ряда для функции тока и два — для температуры. Этот выбор был обусловлен результатами численных исследований конечномерных систем, проведенных Сольцменом [100], в которых было

показано, что при некоторых значениях параметров системы действительно возникают режимы, при которых все остальные переменные стремятся к нулю, а поведение трех оставшихся характеризуется нерегулярными непериодическими колебаниями.

Следуя Лоренцу, сразу оставим в разложениях только эти три члена, обозначив амплитуды соответствующих мод как  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Отметим, что при этом используется не совсем обычный способ обезразмеривания, в том смысле, что в единицы измерений входят критические параметры. За единицы измерения приняты величины: длины  $-h$ , времени  $-\tau = h^2/(\pi^2(1+a^2)\chi)$ , функции тока  $-h^2/\tau$ , температуры  $-\Delta T$ . Вводится обозначение  $b = 4/(1+a^2)$  и нормированное число Релея

$$r = \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_c} = \frac{g\beta \Delta T h^3 a^2}{\chi \nu \pi^4 (1+a^2)^3}.$$

Безразмерная система уравнений примет вид

$$\partial_t \Delta \psi + \{\psi, \Delta \psi\} = (4\pi^2)^{-1} \sigma b \Delta \Delta \psi + 4\sigma r (ba^2)^{-1} \partial_x \theta, \quad (2.26)$$

$$\partial_t \theta + \{\psi, \theta\} = \partial_x \psi + (4\pi^2)^{-1} b \Delta \theta. \quad (2.27)$$

В эти уравнения подставляются разложения для функции тока и для температуры в виде

$$\begin{aligned} \psi &= X(t) \sqrt{2} (\pi^2 a)^{-1} \sin(\pi a x) \sin(\pi z), \\ \theta &= (\pi r)^{-1} \left[ Y(t) \sqrt{2} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - Z(t) \sin(2\pi z) \right]. \end{aligned}$$

В уравнении (2.26) скобки Пуассона равны нулю и простые преобразования приводят к уравнению (производная по времени обозначена точкой)

$$\dot{X} = \sigma(Y - X).$$

Уравнение (2.27) дает

$$\begin{aligned} & \left[ \dot{Y} \sqrt{2} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - \dot{Z} \sin(2\pi z) \right] + \\ & + X \sqrt{2} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) \left[ Y \sqrt{2} \cos(\pi a x) \cos(\pi z) - 2Z \cos(2\pi z) \right] + \\ & + X \sqrt{2} \sin(\pi a x) \cos(\pi z) Y \sqrt{2} \sin(\pi a x) \sin(\pi z) = \\ & + X \sqrt{2} r \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - Y \sqrt{2} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) + b Z \sin(2\pi z). \end{aligned}$$

Учитывая, что сумма слагаемых, содержащих произведение  $XY$ , дает  $XY \sin(2\pi z)$ , уравнение можно упростить:

$$\begin{aligned} & \left[ \dot{Y} - rX + Y \right] \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - 2XZ \cos(\pi a x) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) = \\ & = 2^{-1/2} \left[ \dot{Z} - XY + bZ \right] \sin(2\pi z). \end{aligned}$$

Это уравнение разделяется на два путем последовательного умножения на  $\sin(\pi z)$  и на  $\sin(2\pi z)$  и интегрирования по координате  $z$ . Таким образом, система уравнений для амплитуд трех выбранных мод выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Напомним, что система (2.28) имеет отношение к реальным конвективным движениям только при небольших надкритичностях (относительное число Релея не намного превосходит единицу). Несмотря на это, поведение этой системы оказалось интересным само по себе, и многочисленные численные исследования ее свойств проводились в очень широком диапазоне параметра  $r$ . В вычислениях обычно используют число Прандтля  $\sigma = 10$ , а параметр  $b = 8/3$ , что соответствует результату Релея для критического значения  $a = 1/\sqrt{2}$ .

Уравнения (2.28) имеют тривиальное решение  $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$ , отвечающее отсутствию конвекции. Проверим это решение на устойчивость. Для этого представим все три переменные в виде

$$X = X_0 + x e^{-\lambda t}, \quad Y = Y_0 + y e^{-\lambda t}, \quad Z = Z_0 + z e^{-\lambda t}, \quad (2.29)$$

считая  $x$ ,  $y$ ,  $z$  малыми возмущениями. (2.29) подставляем в (2.28) и отбрасываем нелинейные по малым возмущениям члены. В результате, после сокращения на экспоненты, получаем линейную алгебраическую систему

$$\begin{aligned} (\lambda - \sigma)x + \sigma y &= 0, \\ rx + (\lambda - 1)y &= 0, \\ (\lambda + b)z &= 0. \end{aligned}$$

Решая задачу на собственные значения, приравниваем нулю определитель системы и получаем

$$\lambda = 0,5 \left[ (\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)} \right].$$

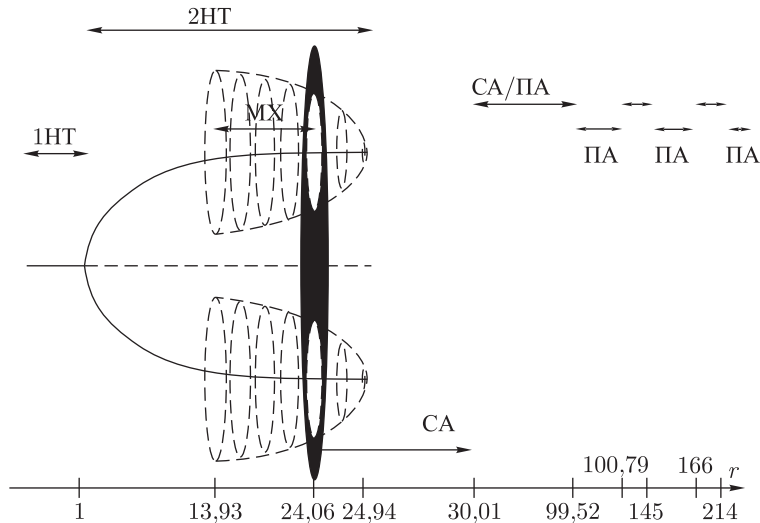


Рис. 2.32

Видно, что при  $r > 1$  один из двух корней становится отрицательным, то есть в точном соответствии с результатом Релея (иначе и быть не может) при  $r = 1$  возникает конвективное движение.

Система (2.28) имеет и нетривиальное решение

$$\begin{aligned} X &= Y = \pm \sqrt{b(r-1)}, \\ Z &= r-1. \end{aligned} \quad (2.30)$$

У переменных  $X$  и  $Y$  действительная часть появляется при  $r > 1$ . Таким образом, в точке  $r = 1$  имеет место нормальная бифуркация вилки и появляется два устойчивых решения, соответствующих стационарной валиковой конвекции с противоположным направлением вращения конвективных валов (рис. 2.32). Повторяя линейный анализ устойчивости для решения (2.30), приходим к кубическому уравнению

$$\lambda^3 - (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda - 2\sigma b(r-1) = 0,$$

в одном из корней которого появляется отрицательная действительная часть при

$$r = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

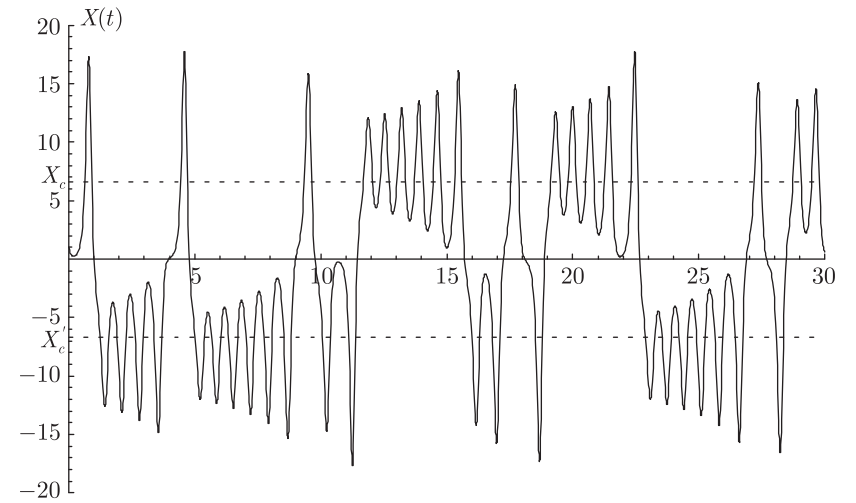


Рис. 2.33

При  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  это выражение дает значение  $r = 24,74$ . В этой точке имеет место субкритическая бифуркация Хопфа. Особенность поведения системы Лоренца состоит в том, что устойчивый предельный цикл не возникает в ней вовсе (напомним, что, согласно сценарию Рюэля–Такенса, странный аттрактор возникает после двух бифуркаций Хопфа) и странный аттрактор возникает сразу после первой (обратной) бифуркации Хопфа.

Бифуркационная диаграмма представлена на рис. 2.32. Следует отметить, что «чистый» странный аттрактор существует в небольшом интервале числа Релея  $24,06 < r < 30,1$ . Обратим внимание и на то, что на левом краю этого интервала существует гистерезис — при понижении числа Релея странный аттрактор существует до  $r = 24,06$ , а не до  $r = 24,74$ . Левее этой границы в интервале чисел Релея  $r > 13,93$  существует область так называемого *метастабильного хаоса*. В этой области малые возмущения стационарного решения монотонно затухают, а большие возмущения приводят к хаотическим режимам, которые в конечном итоге также затухают, но успевают при этом выписать в фазовом пространстве многочисленные хаотические петли, напоминающие поведение системы на странном аттракторе. При  $r > 30,1$  диаграмма режимов представляет собой чередование областей с хаотическим и периодическим движениями, напоминая поведение отображения Фейгенбаума в области  $\mu_\infty < \mu < 1$  (рис. 2.31). Появлению области с периодическим аттрактором предшествует обратный кас-

кад, а само *окно периодичности* включает субгармонический каскад. Число окон периодичности, по-видимому, бесконечно, и при больших числах Релея их ширина растет. Последнее окно неограниченно и занимает всю область  $r > 214,364$ .

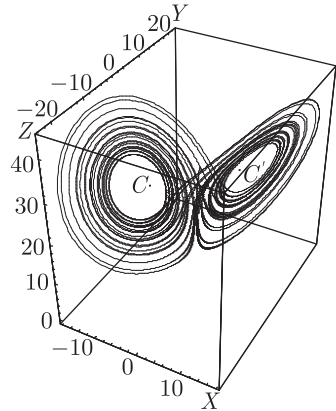


Рис. 2.34

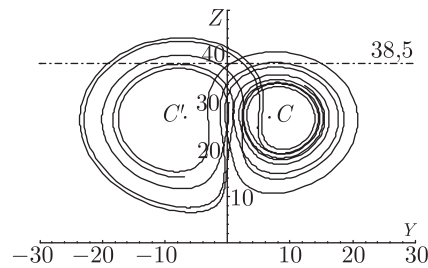


Рис. 2.35

са и все повторяется вновь. При этом число витков, которое совершит траектория, зависит от величины превышения траектории над критическим значением перед перебросом.

Лоренц использовал метод точечных отображений, позволяющий перейти от системы с непрерывным временем к системе с дискретным временем, — вариант сечения Пуанкаре, называемый отображением первого воз-

В своей знаменитой работе Лоренц численно исследовал поведение системы при  $r=28$ . На рис. 2.33 показан фрагмент поведения во времени переменной  $X(t)$  при этом значении  $r$ , а на рис. 2.34 — характерный вид фазовой траектории системы на странном аттракторе. На рис. 2.35 — проекции фазовой траектории на плоскости  $(X, Z)$ . Наблюдение за эволюцией фазовой траектории показывает, что траектория описывает витки вокруг точек, соответствующих ставшим неустойчивыми решениям (2.30), переходя случайным образом от вращения вокруг одного фокуса к вращению вокруг другого.

Наблюдая за эволюцией фазовой траектории в плоскости  $(X, Z)$ , Лоренц сделал важный вывод. Траектория раскручивается вокруг одного фокуса, увеличивая на каждом витке радиус орбиты. Этот процесс происходит до тех пор, пока на очередном витке в точке максимума траектория не выйдет за значение  $Z = 38,5$ . Как только траектория превысит это значение, она уходит в область притяжения другого фокуса

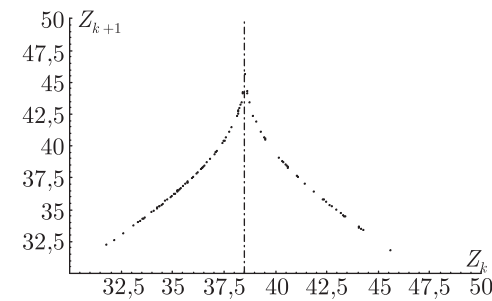


Рис. 2.36

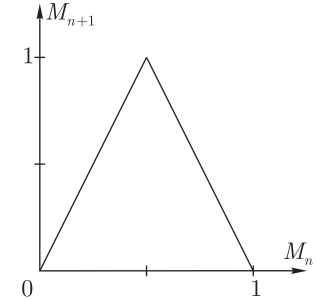


Рис. 2.37

вращения. В качестве отображения использовалось значение величины  $Z$  в текущем локальном максимуме, как функция от значения в предыдущем максимуме (рис. 2.36). Левая, восходящая часть функции соответствует процессу раскручивания, а переход за пик — перебросу к другому фокусу. Лоренц предложил простейшую модель наблюдаемого процесса — отображение отрезка  $[0, 1]$  на себя вида (рис. 2.37)

$$M_{n+1} = \begin{cases} 2M_n, & M_n < 1/2, \\ 2(1 - M_n), & M_n > 1/2. \end{cases} \quad (2.31)$$

Если рассматривается последовательность, начинающаяся со значения  $M_0$ , то она будет развиваться по следующей цепочке:

$$M_1 = \begin{cases} 2M_0, \\ 2 - 2M_0, \end{cases} \quad M_2 = \begin{cases} 4M_0, \\ 2 - 4M_0, \\ 4 - 4M_0, \\ -2 + 4M_0, \end{cases} \quad M_3 = \begin{cases} 8M_0, \\ 2 - 8M_0, \\ 4 - 8M_0, \\ 6 - 8M_0, \\ 8 - 8M_0, \\ -2 + 8M_0, \\ -4 + 8M_0, \\ -6 + 8M_0, \end{cases}$$

$$\dots \quad M_n = m_n \pm 2^n M_0.$$

Здесь  $m_n$  — четное число такое, что оно сдвигает величину  $2^n M_0$  в интервал  $[0, 1]$ . Все возможные последовательности можно разделить на три типа:

1. Последовательности, заканчивающиеся в нуле. Таких последовательностей счетное множество, и они начинаются с элемента вида  $M_0 = u/2^p$ , где  $u$  — нечетное целое число. Тогда  $M_{p-1} = 1/2$  и  $M_p = 0$ .

2. Периодические последовательности. Они возникают, если  $M_0 = u/2^p v$ , где  $u, v$  — простые числа. Тогда  $M_{p+1+k} = m \pm 2^{p+1+k} u / (2^p v) = m \pm 2 \cdot 2^k u / v$ . Простейшие примеры получающихся периодических последовательностей есть

$$(2/3, ) \dots$$

$$(2/5, 4/5, ) \dots$$

$$(2/7, 4/7, 6/7, ) \dots$$

$$(2/9, 4/9, 8/9, ) \dots$$

3. Аперриодические последовательности.

Эта модель иллюстрирует еще одно важное свойство системы — неустойчивость к малым возмущениям (ЧЗНУ). Действительно, если рассмотреть последовательность с малым возмущением начального элемента  $M'_0 = M_0 + \varepsilon$ , то после  $n$  итераций

$$M'_n = m_n \pm 2^n (M_0 \pm \varepsilon) = M_n \pm 2^n \varepsilon,$$

что свидетельствует об экспоненциальном росте возмущений.

Отметим, что модельное отображение (2.31) при всей своей простоте сохраняет важнейшее свойство, приводящее к ЧЗНУ в диссипативных системах, — это растяжение в сочетании со складыванием. Растяжение на каждом шаге приводит к экспоненциальному росту начального смещения (расхождению траекторий), а складывание обеспечивает возвращение в ограниченную область (в данном случае интервал).

### 2.7.2. Модель динамо Рикитакэ

Другой пример динамической системы со стохастическим поведением дает так называемая модель двухдискового динамо Рикитакэ, предложенная в связи с задачей об инверсиях геомагнитного поля. Магнитное поле Земли в первом приближении представляет собой диполь, который по палеомагнитным данным многократно и нерегулярно менял свою полярность. На сегодняшний день шкала полярности геомагнитного поля восстановлена более чем за 1700 миллионов лет, что составляет порядка половины возраста Земли. За это время зарегистрировано 593 переброса магнитного поля, причем время между двумя перебросами колеблется в интервале от 10 тысяч до сотен миллионов лет, демонстрируя хаотическое поведение, лишенное каких-либо периодичностей.

Магнитное поле Земли возбуждается в результате конвективного движения в жидком электропроводящем ядре. Процесс возбуждения магнитного поля в движущейся проводящей среде называют явлением МГД-динамо.

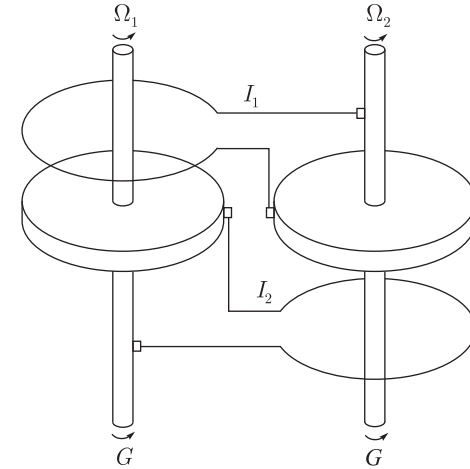


Рис. 2.38

Земное динамо представляет собой сложный нелинейный магнитогидродинамический процесс, исследование которого далеко от своего завершения. Большой интерес представляют поэтому любые упрощенные модели процесса генерации магнитного поля, способные приводить к случайным сменам полярности генерируемого магнитного поля.

Самые простые модели оперируют не потоками проводящей жидкости, а движущимися проводниками. Первая попытка построить такого рода модель принадлежит Булларду [47], который предложил однодисковое динамо, но такая модель не дает смены полярности генерируемого поля. Рикитакэ рассмотрел систему двух дисковых динамо, связанных таким образом, что ток от одного диска питает катушку возбуждения другого и наоборот [97]. Эта ситуация изображена на рис. 2.38. Оба диска вращаются без трения и находятся под действием одинаковых моментов сил  $G$ , компенсирующих омические потери в дисках и обмотках. Уравнения, описывающие эволюцию токов  $I_1, I_2$  и угловых скоростей  $\Omega_1, \Omega_2$ , можно записать в виде

$$\begin{aligned} L\dot{I}_1 + RI_1 &= M\Omega_1 I_2, \\ L\dot{I}_2 + RI_2 &= M\Omega_2 I_1, \\ C\dot{\Omega}_1 &= G - MI_1 I_2, \\ C\dot{\Omega}_2 &= G - MI_1 I_2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где  $L$  — коэффициент самоиндукции,  $R$  — сопротивление каждой цепи,  $M$  — коэффициент взаимной индукции,  $C$  — момент инерции диска.

Два последних уравнения (2.32) показывают, что разность угловых скоростей есть величина постоянная:

$$\Omega_1 - \Omega_2 = A\sqrt{GL/CM},$$

где  $A$  — константа. Это позволяет перейти к системе трех уравнений.

Система записывается в безразмерном виде. При этом за единицу тока принимают величину  $\sqrt{G/M}$ , угловой скорости —  $\sqrt{GL/CM}$ , а за единицу времени — величину  $\sqrt{\tau_e \tau_m}$ . Единица времени выражена через два характерных масштаба времени, присущих системе. Это время  $\tau_m$ , за которое диск под действием приложенного момента сил разгоняется до характерной скорости  $R/M$ ,

$$\tau_m = CR/GM,$$

и время электромагнитной диффузии

$$\tau_e = L/R,$$

характеризующее время вырождения магнитного поля при остановке диска. Их отношение является безразмерным параметром системы

$$\mu = \tau_m / \tau_e = CR^2/GLM.$$

Обозначая безразмерные токи как  $X_i$ , а безразмерные угловые скорости как  $Y_i$  (в уравнениях остается одна переменная  $Y$ , так как  $Y_1 - Y_2 = A$ ), приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 + \mu X_1 &= Y X_2, \\ \dot{X}_2 + \mu X_2 &= (Y - A) X_1, \\ \dot{Y} &= 1 - X_1 X_2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Система (2.33) имеет стационарные решения

$$X_1 = \pm K, \quad X_2 = \pm K^{-1}, \quad Y = Y_1 = \mu K^2, \quad Y_2 = \mu K^{-2},$$

где  $A = \mu(K^2 - K^{-2})$ .

Мы не будем подробно описывать свойства системы Рикитаке, оставляя ее изучение для самостоятельных работ. На рис. 2.39 показана только фазовая траектория системы для случая  $\mu = 1,5$ ;  $K = 2$ . Можно видеть, что ее топология близка аттрактору Лоренца.

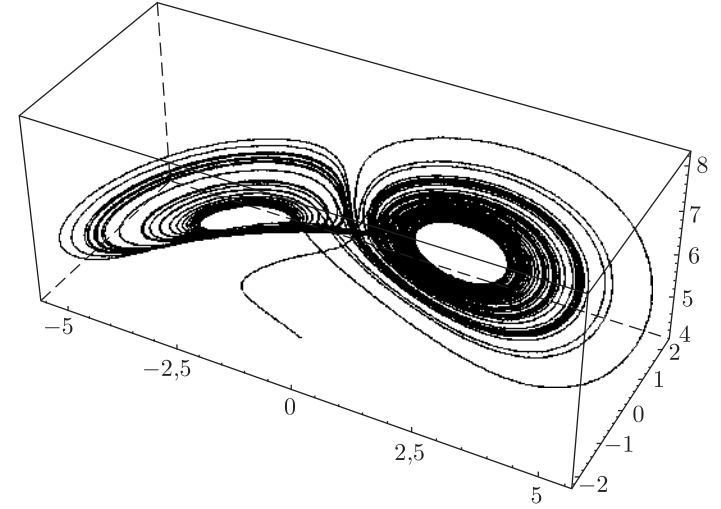


Рис. 2.39

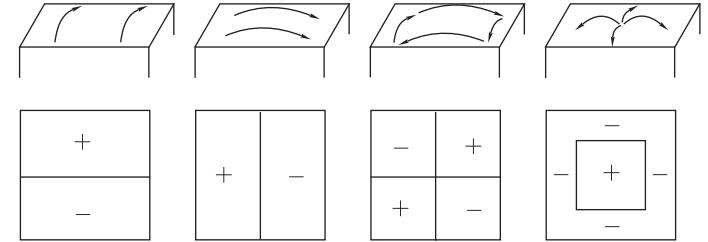


Рис. 2.40

### 2.7.3. Реальная конвекция

Наибольшее число экспериментальных работ по исследованию перехода от упорядоченных течений к хаотическим выполнено, пожалуй, в исследованиях конвективных течений. Мы приведем некоторые результаты исследований перехода от ламинарного движения к турбулентности при конвекции в кубической полости, взятые из работы Зимина и Кетова [11].

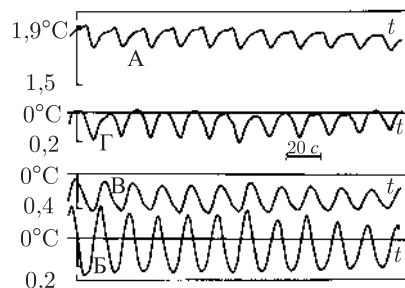


Рис. 2.41

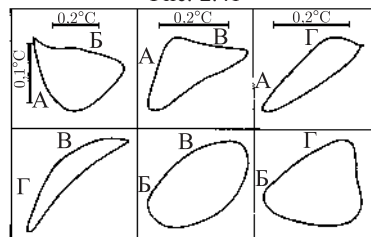


Рис. 2.42

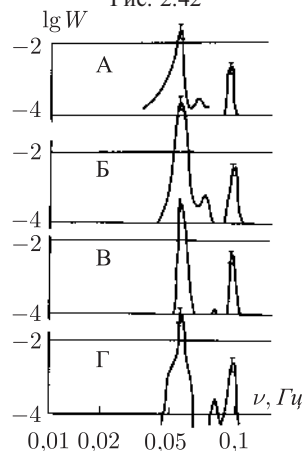


Рис. 2.43

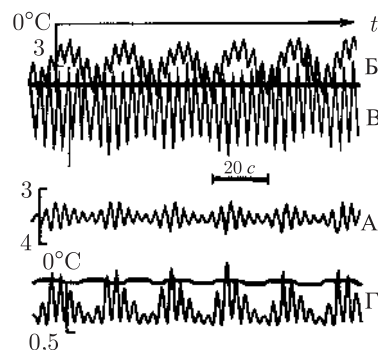


Рис. 2.44

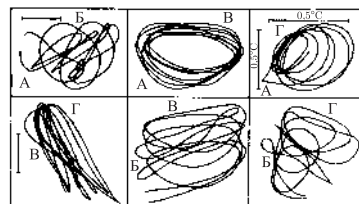


Рис. 2.45

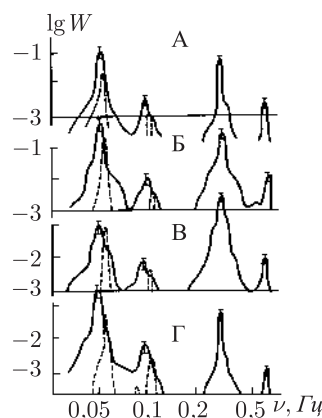


Рис. 2.46

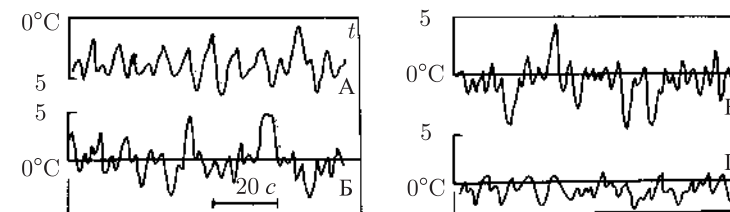


Рис. 2.47

Измерения проводились в подогреваемой снизу кубической полости с ребром 40 мм, образованной медными стенками. Горизонтальные стенки термостатировались, обеспечивая заданную разность температуры, а вертикальные обеспечивали равномерный однородный градиент температуры. Надкритические течения, возникающие в кубической полости и имеющие наиболее низкие уровни устойчивости, схематически показаны на рис. 2.40, где стрелками показано направление движения жидкости в верхней части полости, а знаками «плюс» и «минус» обозначены области, в которых температура оказывается выше или ниже средней. Критические числа Рейля для движений типа А и Б равны 8224, для В — 9184 и для Г — 14 032. В полости были установлены дифференциальные термопары, расположенные таким образом, что их показания позволяли выделять движения всех четырех типов.

Не останавливаясь на деталях развития неустойчивости и переходов от одного режима движения к другому, приведем лишь некоторые данные, иллюстрирующие поведение системы в одночастотном, двухчастотном и стохастическом режимах. Для каждого из трех режимов на рисунках представлены изменения во времени показаний термопар, соответствующих каждому из выделяемых течений, проекции фазовых траекторий на плоскости, образованные всеми парами термопар, и спектры мощностей пульсаций температуры, регистрируемой каждой из четырех термопар.

Рисунки 2.41–2.43 относятся к одночастотному режиму, регистрируемому при числе Рейля  $Ra = 2 \cdot 10^5$ . Первый рисунок показывает характер колебаний показаний всех четырех термопар, второй — соответствующие этим колебаниям проекции фазовых траекторий, ясно указывающие на суще-

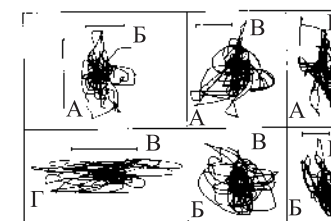


Рис. 2.48

ствование предельного цикла. Об этом же свидетельствуют и спектры Фурье (рис. 2.43), состоящие из одного главного пика на частоте  $0,54 \text{ Гц}$  и пика на удвоенной частоте, обусловленные негармонической формой колебаний.

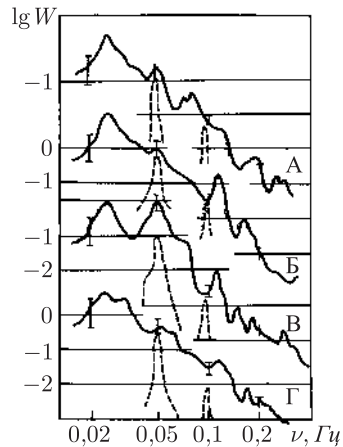


Рис. 2.49

Следующая группа рисунков представляет результаты для числа Рейлея  $Ra = 2,24 \cdot 10^5$ . На рисунке 2.44 показаны пульсации показаний термопар, на рис. 2.45 — соответствующие фазовые траектории (за время, соответствующее периоду низкочастотных колебаний), а на рисунке 2.46 — спектры, свидетельствующие о существовании двухчастотного режима (частоты  $0,0451 \text{ Гц}$  и  $0,304 \text{ Гц}$ ).

Движение становится стохастическим при  $Ra = 2,50 \cdot 10^5$ . Показания термопар для этого режима представлены на рис. 2.47, фазовые траектории — на рис. 2.48, а спектры мощности — на рис. 2.49. Видно, что фазовые траектории имеют чрезвычайно запутанную структуру, а спектры становятся сплошными, сохраняя лишь слабые локальные максимумы, свидетельствующие о сохранении периодических составляющих.

### Рекомендуемая литература ко второй главе

- [2.1] Берже П., Помо И., Видаль Л. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 366 с.
- [2.2] Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
- [2.3] Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [2.4] Странные аттракторы: сб. ст. М.: Мир. 1981, 254 с. (Серия «Математика. Новое в зарубежной науке», вып. 22).
- [2.5] Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
- [2.6] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
- [2.7] Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 128 с.

## ГЛАВА 3

# Подход Рейнольдса. Теория средних полей

### 3.1. Развитая турбулентность

#### 3.1.1. Вводные замечания

В данной главе мы начинаем рассматривать подходы к описанию *развитой* турбулентности, то есть течений, возникающих при значительном превышении критических значений управляющих параметров (числа Рейнольдса, если речь идет об изотермическом течении в отсутствие дополнительных силовых полей). Такие течения характеризуются наполненными спектрами Фурье, причем не только временными, но и пространственными. Напомним еще раз, что именно в этом и есть основное отличие турбулентности от хаоса в динамических системах невысокого порядка: в турбулентном потоке хаос и пространственный, и временной, а хаотическое поведение маломодовых систем (соответствующих, например, конвективным течениям при невысокой надкритичности) представляет собой хаотическую во времени эволюцию мод с относительно простой пространственной структурой.

Приступая к рассмотрению развитых турбулентных течений, следует сделать ряд важных замечаний. Первое из них касается уравнений движения жидкости. В первой главе мы получили уравнения Навье–Стокса как основные уравнения, с помощью которых мы описываем в дальнейшем все течения жидкости. Снова подчеркнем, что мы действительно продолжаем считать, что эти уравнения описывают течения жидкости и в турбулентном режиме, даже при экстремально больших значениях безразмерных параметров (более того, мы будем рассматривать только случай несжимаемой жидкости). Уверенность в том, что это возможно, держится на результатах многочисленных успешных попыток использования этих уравнений для турбулентных течений. Сама возможность приложения уравнений Навье–Стокса к турбулентности совсем не очевидна (и продолжает подвергаться крити-

ке), так как при их выводе было сделано достаточно сильное предположение о том, что тензор вязких напряжений включает в себя только линейные комбинации первых производных поля скорости. В ламинарных и слабонадкритических течениях это предположение кажется разумным и прекрасно работает, но в сильнонелинейных режимах нельзя исключить, что тензор вязких напряжений будет иметь более сложную зависимость от структуры поля скорости. Оправданием использования уравнений движения в принятой форме может служить только сопоставление результатов их решения с экспериментальными данными.

Далее, пусть уравнения движения справедливы, и предположим, что мы располагаем мощнейшим компьютером, способным решать трехмерные уравнения движения с любой желаемой точностью (например, будем считать трехмерный поток на сетке  $1000 \times 1000 \times 1000$ ). Это, однако, не снимает проблемы описания турбулентности, так как в результате такого решения мы будем иметь огромное количество информации, осознание которой требует ее представления в компактном виде, а это фактически опять же предполагает введение определенной модели процесса. По сути, такой суперкомпьютер отличается от реального турбулентного течения, наблюдаемого в лаборатории или природе, только несравненно большими возможностями вывода информации относительно состояния потока в любой точке и в любой момент времени.

Проблема описания турбулентного движения состоит в выделении характеристик, описывающих свойства системы с огромным числом степеней свободы, а любой подход к ее описанию — это тот или иной способ ограничения числа степеней свободы.

Турбулентные поля (скорость, давление, температура и т. д.) представляют собой случайные поля. В любой точке потока можно установить датчик и зарегистрировать реализацию процесса в данной точке. Многократно повторяя эту процедуру, принципиально возможно получить плотность вероятности  $P(f)$  для интересующей нас величины  $f(\mathbf{r}, t)$ . В общем случае, плотность вероятности также есть функция координат и времени. Существует ряд важных частных случаев, которые мы и перечислим.

Турбулентность является *однородной*, если плотность распределения вероятности не зависит от координат точки

$$P(t, \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) = P(t, \mathbf{r}).$$

Турбулентное течение называется *стационарным*, если плотность вероятности не зависит от времени, то есть

$$P(t + \Delta t, \mathbf{r}) = P(t, \mathbf{r}).$$

Процесс называется *эргодическим*, если осреднение по времени эквивалентно для него осреднению по ансамблю реализаций

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \mathbf{r}) dt.$$

Угловыми скобками будем обозначать среднее по ансамблю реализаций. Очевидно, что только стационарный процесс может быть эргодическим. Гипотеза эргодичности широко используется при исследовании стационарных течений, так как на практике в этом случае измеряются именно средние по времени величины. Аналогичным образом, при рассмотрении *однородной* турбулентности предполагают эквивалентность среднего по пространству и среднего по реализациям, а статистику набирают путем осреднения по пространству.

В реальных измерениях широко используется и *гипотеза Тейлора*, позволяющая связать пространственные и временные флуктуации исследуемой величины  $f(\mathbf{r}, t)$ . Согласно этой гипотезе если существует среднее течение, характеризующее скоростью  $U$ , то справедливо соотношение

$$\partial_t f = U_i \partial_i f.$$

Пользуясь этой гипотезой, по измерениям в заданной точке пространства определяют пространственные флуктуации исследуемого поля и их статистические характеристики.

### 3.1.2. Статистические моменты случайных полей

Функция распределения плотности вероятности  $P(\mathbf{r}, t)$  содержит полную информацию о случайном поле  $f(\mathbf{r}, t)$ , однако ее определение в полном объеме практически невозможно. Известно, что заданию плотности вероятности эквивалентно задание последовательности (в принципе — бесконечной) статистических моментов

$$M f^m = \int f^m P(f) df.$$

Интегрирование ведется по всем возможным значениям величины  $f$ . Координаты и время в аргументах не указаны, но следует помнить, что в общем случае нестационарного и неоднородного турбулентного течения все моменты также являются функциями координат и времени. Момент нулевого

порядка равен единице в силу условия нормировки

$$M_0 = \int P(f) df = 1,$$

а момент первого порядка, называемый также математическим ожиданием, дает среднее значение величины

$$Mf^1 = \int fP(f) df = \langle f \rangle.$$

Для моментов второго и более высоких порядков обычно используют центральные моменты, вычисляемые относительно средних значений

$$M_m = M(f - \langle f \rangle)^m = \int (f - \langle f \rangle)^m P(f) df.$$

Напомним, что центральный момент второго порядка называется дисперсией, а в качестве характеристик распределения случайной величины часто используют коэффициенты асимметрии  $a$  и эксцесса  $\gamma$ :

$$a = \frac{M_3}{M_2^{3/2}}, \quad \gamma = \frac{M_4}{M_2^2}.$$

Асимметрия характеризует симметричность функции распределения вероятности относительно среднего значения, а эксцесс является простейшей мерой значимости редких событий (хвостов функции распределения). Для нормального распределения коэффициент эксцесса равен  $\gamma = 3$ , и часто используют величину  $\gamma' = \gamma - 3$ , показывающую, насколько данное распределение отличается от нормального распределения Гаусса.

С точки зрения описания турбулентных полей, необходимы статистические характеристики связи между значениями величины  $f(\mathbf{r}, t)$  в различных точках пространства и (или) времени, а при описании взаимодействия различных случайных полей в турбулентном потоке появляются и характеристики их статистической зависимости. Это требует введения совместной плотности вероятности  $P(f_1(\mathbf{r}_1, t_1), f_2(\mathbf{r}_2, t_2))$  и соответствующих двухточечных моментов.

Важным частным случаем являются одноточечные корреляционные моменты, связывающие значения различных величин в одной точке пространства. Наиболее известным среди них является тензор напряжений Рейнольдса, характеризующий связь пульсаций компонент скорости в заданной точке пространства,

$$\tau_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle (v_i(\mathbf{r}, t) - \langle v_i(\mathbf{r}, t) \rangle)(v_j(\mathbf{r}, t) - \langle v_j(\mathbf{r}, t) \rangle) \rangle = \langle u_i(\mathbf{r}, t)u_j(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

где  $u_i(\mathbf{r}, t) = v_i(\mathbf{r}, t) - \langle v_i(\mathbf{r}, t) \rangle$  есть пульсация соответствующей компоненты скорости относительно ее среднего значения, а угловые скобки используются для обозначения среднего по реализациям. Мы увидим в данной главе, что одноточечные корреляционные моменты играют центральную роль в подходе Рейнольдса, описывая вклад случайных пульсаций в эволюцию средних полей в турбулентном потоке.

В подходе Колмогорова, о котором пойдет речь в следующей главе, на передний план выходят двухточечные моменты, необходимые для помасштабного анализа турбулентных полей. Важнейшим среди двухточечных моментов является момент второго порядка, называемый корреляционной функцией. Если речь идет о взаимной корреляции двух скалярных полей, то вводят кросс-корреляционную функцию

$$\begin{aligned} b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= \\ &= \int (f_1(\mathbf{r}_1, t_1) - \langle f_1 \rangle)(f_2(\mathbf{r}_2, t_2) - \langle f_2 \rangle) P(f_1(\mathbf{r}_1, t_1), f_2(\mathbf{r}_2, t_2)) df_1 df_2 = \\ &= \langle (f_1 - \langle f_1 \rangle)(f_2 - \langle f_2 \rangle) \rangle. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если же  $f_2 = f_1$ , то говорят об автокорреляционной функции. Нормированная автокорреляционная функция характеризует степень корреляции данного поля в двух различных точках  $(\mathbf{r}, t)$ .

Случайное векторное поле характеризует корреляционный тензор. Корреляционный тензор поля пульсаций скорости есть

$$b_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle u_i(\mathbf{r}_1, t_1)u_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \quad (3.2)$$

Для стационарной, однородной турбулентности (3.1) и (3.2) зависят только от взаимного расположения двух точек, то есть, если  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}$ , а  $t_2 = t_1 + \tau$ , то

$$b_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = b_{ij}(\mathbf{r}, \tau). \quad (3.3)$$

На практике, даже для стационарной и однородной турбулентности измерение корреляционных функций в общем виде (3.1) представляет собой чрезвычайно трудоемкую операцию и измеряют либо временную, либо пространственную корреляционную функцию (тензор).

При одноточечных измерениях скалярной величины  $f(\mathbf{r}, t)$ , определяются временная автокорреляционная функция

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{r}, t)f(\mathbf{r}, t + \tau) dt, \quad (3.4)$$

связанная с *временным спектром* (спектральной плотностью энергии пульсаций)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3.5)$$

Для случайного процесса автокорреляционная функция убывает с ростом  $\tau$ , стремясь к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ . В качестве характеристики того, насколько долго «помнит» случайная величина свою предысторию используют *корреляционное время*

$$\tau_c = \frac{1}{C(0)} \int_0^{\infty} C(\tau) d\tau. \quad (3.6)$$

Если измеряется пространственное распределение случайной величины для фиксированного момента времени, то вычисляются пространственные корреляционные функции и спектры. Важным частным случаем является *однородная и изотропная* турбулентность, в которой совместная плотность вероятности (а, следовательно, и двухточечные моменты) не зависят ни от сдвига точек измерений, ни от направления вектора  $\mathbf{r}$ . Тогда пространственный корреляционный тензор поля скорости зависит только от расстояния между точками  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$

$$b_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = b_{ij}(|\mathbf{r}|) = b_{ij}(r) \quad (3.7)$$

и полностью определяется значениями двух своих компонент (см. раздел 4.3.2). На практике измеряют корреляционные функции  $b_{ll}(r)$  и  $b_{nn}(r)$ , характеризующие корреляцию продольных и поперечных составляющих пульсаций скорости. Здесь индексом  $l$  обозначена составляющая скорости вдоль линии, соединяющей точки  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , а индексом  $n$  — составляющая, нормальная этой линии.

Структуру корреляционной функции (продольной) для развитой турбулентности иллюстрирует рис. 3.1. *Развитая* турбулентность подразумевает наличие широкого интервала масштабов, меньших масштаба возбуждения, но больших масштабов действия вязких сил, в котором для пульсаций скорости выполняется степенной закон  $|u_l(\mathbf{r}_2) - u_l(\mathbf{r}_1)| \sim r^\mu$  (закону Колмогорова-Обухова соответствует  $\mu = 1/3$ , см. формулу (4.18) в следующей главе). Для корреляционной функции это соответствует наличию интервала масштабов, в котором

$$b_{ll}(r) \approx b_{ll}(0) \left[ C - \left( \frac{r}{L} \right)^{2\mu} \right], \quad (3.8)$$

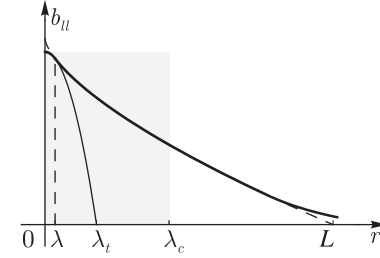


Рис. 3.1

где  $C$  — константа порядка единицы,  $L$  — внешний (макро) масштаб турбулентности. На малых масштабах ( $r \rightarrow 0$ ) структура течения определяется вязкими силами и можно ожидать линейной зависимости пульсаций скорости от масштаба  $|u_l(\mathbf{r}_2) - u_l(\mathbf{r}_1)| \sim r$ . Для корреляционной функции это предполагает выполнение закона

$$b_{ll}(r) \approx b_{ll}(0) \left[ 1 - \left( \frac{r}{\lambda_t} \right)^2 \right], \quad (3.9)$$

где величину  $\lambda_t$  называют тейлоровским (микро) масштабом турбулентности. Аппроксимация корреляционной функции вблизи нуля параболой дает значение *тейлоровского* масштаба в точке пересечения кривой (3.9) с осью масштабов (рис. 3.1). Это означает, что тейлоровский масштаб определяется значением второй производной корреляционной функции при  $r = 0$

$$\lambda_t = [b_{ll}''(0)/(2b_{ll}(0))]^{-1/2}. \quad (3.10)$$

Переход от закона (3.8) к закону (3.9) происходит на масштабе  $\lambda$ , на котором начинает действовать вязкость. Этот масштаб можно оценить, приравняв правые части формул (3.8) и (3.9), что дает

$$\lambda \approx \lambda_t \left( \frac{\lambda_t}{L} \right)^{\mu/(1-\mu)} \approx \lambda_t \left( \frac{\lambda_t}{L} \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Эта оценка показывает, что вязкий масштаб существенно меньше тейлоровского,  $\lambda \ll \lambda_t \ll L$ .

По аналогии с корреляционным временем можно определить и корреляционный масштаб

$$\lambda_c = \frac{1}{b_{ll}(0)} \int_0^{\infty} b_{ll}(r) dr, \quad (3.12)$$

который также показан на рис. 3.1 — его положение определяется площадью фигуры под корреляционной функцией.

### 3.1.3. Пространственные спектры

Предположим, что рассматриваемое случайное (турбулентное) поле занимает ограниченный объем и величина  $f(\mathbf{r}, t)$  может быть представлена интегралом Фурье

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad \hat{f}(\mathbf{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (3.13)$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор,  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  — волновой вектор.

Считая рассматриваемую турбулентность стационарной, определим *трехмерный* энергетический спектр случайного поля:

$$F(\mathbf{k}) = \langle |\hat{f}(\mathbf{k}, t)|^2 \rangle. \quad (3.14)$$

Угловые скобки в этом случае могут означать осреднение по времени. Трехмерный спектр связан с корреляционной функцией  $b(\mathbf{r})$  (теорема Хинчина)

$$F(\mathbf{k}) = \int b(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (3.15)$$

В теории турбулентности, говоря о ее спектральных свойствах, обычно имеют в виду энергетический спектр  $E(k)$  (спектральную плотность энергии), который характеризует энергию всех гармоник с заданным модулем волнового вектора, независимо от его направления.

$$E(k) = \int_{|\mathbf{k}|} F(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (3.16)$$

или, в сферической системе координат,

$$E(k) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\mathbf{k}) k^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

В важном частном случае изотропной турбулентности, когда  $F(\mathbf{k}) = F(k)$ , связь становится очень простой:

$$E(k) = 4\pi k^2 F(k). \quad (3.17)$$

Отметим, что все оценки для спектральных законов развитой турбулентности касаются обычно именно энергетического спектра  $E(k)$ .

Если в турбулентном потоке измерения проводятся вдоль одной прямой, то по этим измерениям можно построить *одномерное* фурье-преобразование. Ограничиваясь однородной и изотропной турбулентностью, в которой все прямые равноправны, рассмотрим прямую  $y = z = 0$  и запишем

$$\hat{f}_1(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) e^{-ixk_x} dx.$$

Квадрат модуля этой величины есть *одномерный* энергетический спектр

$$F_1(k_x) = \langle |\hat{f}_1(k_x)|^2 \rangle. \quad (3.18)$$

Чтобы получить связь между одномерным и трехмерным спектрами, выразим исходную величину на прямой  $y = z = 0$  через обратное преобразование Фурье. С одной стороны,

$$f(x, 0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}_1(k_x) e^{ixk_x} dk_x,$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} f(x, 0, 0) &= \frac{1}{8\pi^3} \int \hat{f}(k_x, k_y, k_z) e^{i(xk_x + 0k_y + 0k_z)} dk_x dk_y dk_z = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left( \frac{1}{4\pi^2} \int \hat{f}(\mathbf{k}) dk_y dk_z \right) e^{ixk_x} dk_x. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\hat{f}_1(k_x) = \frac{1}{4\pi^2} \int \hat{f}(\mathbf{k}) dk_y dk_z,$$

а

$$F_1(k_x) = \frac{1}{16\pi^4} \int F(\mathbf{k}) dk_y dk_z.$$

В следующих главах, рассматривая структуру мелкомасштабной турбулентности, мы постоянно будем обращаться к спектрам, описываемым степенными законами. Покажем, как связаны между собой введенные спектры турбулентности при степенной зависимости энергии от масштаба (волнового числа). Пусть имеется однородное изотропное поле скалярной величины, энергетический спектр которой следует степенному закону

$$E(k) \sim k^\alpha.$$

Тогда трехмерный спектр

$$F(k) \sim k^{\alpha-2} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{(\alpha-2)/2},$$

а одномерный

$$\begin{aligned} F_1(k_x) &\sim \iint (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{(\alpha-2)/2} dk_y dk_z = \\ &= k_x^\alpha \iint (1 + \eta^2 + \xi^2)^{(\alpha-2)/2} d\eta d\xi \sim k_x^\alpha \end{aligned}$$

(проведена замена переменных  $\eta = k_y/k_x$ ;  $\xi = k_z/k_x$ ).

Таким образом, в однородной изотропной турбулентности энергетический спектр  $E(k)$  и одномерный спектр  $F_1(k)$  следуют одному степенному закону, а степень убывания трехмерного спектра меньше на двойку (трехмерный спектр значительно круче).

Обратимся теперь к корреляционному тензору (3.3) и введем спектральный тензор пульсаций скорости

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \iint b_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega\tau)} d\mathbf{r} d\tau. \quad (3.19)$$

По спектральному тензору можно определить спектральную плотность энергии в пространстве  $(k, \omega)$  (спектральную функцию)

$$E(k, \omega) = \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{k}|} \Phi_{ii}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}, \quad (3.20)$$

который связан с пространственным энергетическим спектром (3.16) соотношением

$$E(k) = \int E(k, \omega) d\omega. \quad (3.21)$$

По аналогии со спектральным тензором пульсаций скорости можно ввести и спектральный тензор завихренности  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ . В пространстве Фурье  $\hat{\boldsymbol{\omega}} = i\mathbf{k}\hat{\mathbf{u}}$  и спектральный тензор завихренности

$$\Omega_{ij}(\mathbf{k}) = e_{ijk} e_{ilm} k_j k_l \Phi_{km}(\mathbf{k}). \quad (3.22)$$

Следствием (3.22) является соотношение между спектральной плотностью энергии и спектральной плотностью энтропии (энтропией называется половина среднего квадрата завихренности  $\Omega = \langle \omega^2 \rangle / 2$ )

$$\Omega(k) = k^2 E(k). \quad (3.23)$$

В заключение, введем важную для гидродинамики величину, называемую спиральностью  $H = \langle \mathbf{u}\boldsymbol{\omega} \rangle$ , и определим спектральную плотность спиральности

$$H(k) = i \int_{|\mathbf{k}|} e_{ijk} k_j \Phi_{ik}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (3.24)$$

### 3.2. Уравнение Рейнольдса

С именем Рейнольдса связана первая попытка систематического подхода к описанию турбулентных течений. Идея подхода Рейнольдса состоит в выделении из случайных полей, характеризующих турбулентный поток, средних величин и написании для них уравнений движения. Понятно, что, приступая к изучению случайных процессов, описываемых сложными нелинейными уравнениями, логично начать с попытки получить некие результаты хотя бы для низших моментов, то есть для математического ожидания характеристик потока. Подход оправдан и с практической точки зрения — во многих прикладных задачах приходится иметь дело с турбулентными потоками и требуется знать *средние* характеристики потока: средний расход нефти в трубопроводе, среднюю подъемную силу крыла самолета, среднюю силу сопротивления при движении корабля и т. д. Именно прикладные исследования стимулировали интенсивные поиски эффективных схем замыкания уравнения Рейнольдса, которые продолжаются до настоящего времени.

В основе подхода Рейнольдса лежит разделение всех входящих в уравнения движения величин на средние поля и поля пульсаций. Например, скорость и давление записываются в виде

$$v_i(\mathbf{r}, t) = U_i(\mathbf{r}, t) + u_i(\mathbf{r}, t), \quad p(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}, t) + p'(\mathbf{r}, t). \quad (3.25)$$

При этом предполагаются следующие правила осреднения (угловые скобки по-прежнему обозначают осреднение по ансамблю реализаций):

$$\langle v_i \rangle = U_i, \quad \langle U_i \rangle = U_i, \quad \langle u_i \rangle = 0; \quad (3.26)$$

$$\langle p \rangle = P, \quad \langle P \rangle = P, \quad \langle p' \rangle = 0; \quad (3.27)$$

Важно отметить, что разложение (3.25) не подразумевает малости пульсаций  $u$  в сравнении со средними скоростями  $U$ . Более того, именно в пульсациях скорости часто сосредоточена основная кинетическая энергия движущейся жидкости. Не делается предположений и относительно масшта-

бов, на которых сосредоточены средние величины и пульсации. Хотя и кажется очевидным, что пульсациям отвечает мелкомасштабная часть спектра, а средним полям — интегральные (максимальные) масштабы, вопрос о спектральном составе полей  $U$  и  $u$  совсем не тривиален и при применении конкретных схем замыкания уравнений для средних величин требует внимательного рассмотрения.

Запишем уравнения Навье–Стокса в тензорных обозначениях

$$\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i = -\rho^{-1} \partial_i p + \nu \partial_{jj}^2 v_i + f_i, \quad (3.28)$$

$$\partial_k v_k = 0 \quad (3.29)$$

и подставим в них разложения (3.25)

$$\partial_t U_i + \partial_t u_i + U_j \partial_j U_i + U_j \partial_j u_i + u_j \partial_j U_i + u_j \partial_j u_i =$$

$$= -\rho^{-1} (\partial_i P + \partial_i p') + \nu (\partial_{jj}^2 U_i + \partial_{jj}^2 u_i) + F_i + f'_i, \quad (3.30)$$

$$\partial_k U_k + \partial_k u_k = 0. \quad (3.31)$$

Полученные уравнения подвергаем операции осреднения

$$\begin{aligned} \partial_t U_i + \partial_t \langle u_i \rangle + U_j \partial_j U_i + U_j \partial_j \langle u_i \rangle + \langle u_j \rangle \partial_j U_i + \langle u_j \rangle \partial_j u_i &= \\ = -\rho^{-1} (\partial_i P + \partial_i \langle p' \rangle) + \nu (\partial_{jj}^2 U_i + \partial_{jj}^2 \langle u_i \rangle) + \langle F_i \rangle + \langle f'_i \rangle, \\ \partial_k U_k + \partial_k \langle u_k \rangle &= 0 \end{aligned}$$

и, учитывая правила осреднения (3.26)–(3.27), приходим к уравнению Рейнольдса

$$\partial_t U_i + U_j \partial_j U_i = -\rho^{-1} \partial_i P + \nu \partial_{jj}^2 U_i - \partial_j \langle u_j u_i \rangle + F_i \quad (3.32)$$

и уравнению неразрывности для среднего поля скорости

$$\partial_k U_k = 0. \quad (3.33)$$

В уравнении Рейнольдса для средних полей появился одноточечный корреляционный тензор пульсаций скорости, называемый тензором напряжений Рейнольдса

$$\tau_{ij} = \langle u_i u_j \rangle. \quad (3.34)$$

Появление корреляционных характеристик в уравнениях для средних характеристик турбулентных полей является неизбежным следствием нелинейности исходных уравнений движения. Тензор напряжений Рейнольдса нельзя выразить через осредненные характеристики турбулентных полей. Следовательно, число неизвестных превышает число имеющихся уравнений и система (3.32)–(3.33) является незамкнутой.

### 3.3. Цепочка уравнений Фридмана–Келлера и проблема замыкания

В уравнении Рейнольдса появилась новая неизвестная величина — тензор напряжений Рейнольдса (3.34). Чтобы замкнуть полученную систему, требуется написать дополнительное уравнение для этой величины. Наиболее последовательный путь состоит в попытке написать для нее эволюционное уравнение. Так как

$$\partial_t \tau_{ij} = \partial_t \langle u_i u_j \rangle = \langle u_i \partial_t u_j \rangle + \langle u_j \partial_t u_i \rangle,$$

то сначала требуется получить уравнение для пульсаций скорости, для чего из уравнения (3.30) необходимо вычесть уравнение (3.32). Получим (немые индексы  $j$  заменены на  $k$ )

$$\partial_t u_i + U_k \partial_k u_i + u_k \partial_k U_i + u_k \partial_k u_i = -\rho^{-1} \partial_i p' - \partial_k \langle u_i u_k \rangle + \nu \partial_{kk}^2 u_i + f'_i. \quad (3.35)$$

Аналогичное уравнение получается и для компоненты  $u_j$ :

$$\partial_t u_j + U_k \partial_k u_j + u_k \partial_k U_j + u_k \partial_k u_j = -\rho^{-1} \partial_j p' - \partial_k \langle u_j u_k \rangle + \nu \partial_{kk}^2 u_j + f'_j. \quad (3.36)$$

Уравнение (3.35) умножается на  $u_j$  и складывается с уравнением (3.36), умноженным на  $u_i$ :

$$\begin{aligned} u_i \partial_t u_j + u_j \partial_t u_i &= \\ = -U_k \partial_k (u_i u_j) - u_j u_k \partial_k U_i - u_i u_k \partial_k U_j - u_j \partial_k (u_i u_k) - u_i \partial_k (u_j u_k) - \\ - u_i \partial_k \langle u_j u_k \rangle - u_j \partial_k \langle u_i u_k \rangle - \rho^{-1} (u_i \partial_j p' + u_j \partial_i p') - \\ - \nu (u_i \partial_{kk}^2 u_j + u_j \partial_{kk}^2 u_i) + u_i f'_j + u_j f'_i. \end{aligned}$$

После осреднения приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \partial_t \langle u_i u_j \rangle + U_k \partial_k \langle u_i u_j \rangle &= -(\langle u_i u_k \rangle \partial_k U_j + \langle u_j u_k \rangle \partial_k U_i) - \partial_k \langle u_i u_j u_k \rangle - \\ - \rho^{-1} (\langle u_i \partial_j p' \rangle + \langle u_j \partial_i p' \rangle) &- \nu (\langle u_i \partial_{kk}^2 u_j \rangle + \langle u_j \partial_{kk}^2 u_i \rangle) + \langle u_i f'_j \rangle + \langle u_j f'_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.37)$$

В уравнении для корреляционного тензора пульсаций скорости второго порядка (3.37) появились корреляционный тензор (момент) третьего порядка  $\langle u_i u_j u_k \rangle$  и новые моменты второго порядка, описывающие корреляции пульсаций компонент скорости с давлением и скорости со вторыми производными скорости.

Для вновь появившихся статистических моментов также можно написать эволюционные уравнения типа (3.37), но проблемы это не решит, так как в уравнение для момента третьего порядка войдут момент четвертого порядка и новые моменты третьего порядка и так далее. Система уравнений для моментов все возрастающих порядков называется цепочкой уравнений Фридмана–Келлера и является незамкнутой в принципе. Проблема обрыва этой цепочки и получения замкнутой системы называется *проблемой замыкания* и является центральной проблемой на пути построения моделей турбулентности, предназначенных для описания осредненных полей скорости (а также полей температуры, концентрации примеси и т. д.).

Все процедуры замыкания основаны на том или ином способе обрыва цепочки уравнений Фридмана–Келлера и приводят к так называемым полуэмпирическим моделям турбулентности. Любая полуэмпирическая модель тем или иным способом выражает моменты порядка  $n$  через моменты низших порядков с помощью неких гипотез и содержит параметры, определяемые из экспериментальных данных. Моделями замыкания первого порядка называют модели, выражающие моменты второго порядка через моменты первого порядка. Модели замыкания второго порядка оставляют моменты второго порядка, выражая через них моменты третьего порядка и т. д. Название *полуэмпирические* модели отражает тот факт, что все модели непременно содержат константы, требующие их определения из опыта.

Проблему замыкания можно проиллюстрировать и на примере уравнения для давления. Как известно, уравнение для определения давления получается из уравнения Навье–Стокса (3.28) путем применения к последнему операции  $\nabla$ . В результате получается уравнение

$$\Delta p = -\rho(\partial_i v_j \partial_j v_i - \partial_i f_i). \quad (3.38)$$

В уравнение (3.38) подставляем разложения (3.25):

$$\Delta P + \Delta p' = -\rho \partial_{ij}^2 (U_i U_j + U_i u_j + U_j u_i + u_i u_j) - \rho(\partial_i F_i + \partial_i f'_i), \quad (3.39)$$

и после осреднения получаем

$$\Delta P = -\rho \partial_{ij}^2 (U_i U_j + \langle v_i v_j \rangle) - \rho \partial_i F_i. \quad (3.40)$$

Таким образом, в уравнении для средних величин снова появился тензор напряжений Рейнольдса. Для того чтобы выразить статистические моменты, включающие пульсации давления (см. уравнение (3.37)), потребуется написать уравнение для величины  $p'$ , что можно сделать, вычтя (3.40) из (3.39):

$$\Delta p' = -\rho[\partial_{ij}^2 (U_i v_j + U_j v_i + v_i v_j - \langle v_i v_j \rangle) - \partial_i f'_i]. \quad (3.41)$$

Это уравнение включает и тензор напряжений Рейнольдса, и произведение пульсаций, что неминуемо приведет при попытках написания уравнений для моментов, включающих пульсации давления, к появлению новых моментов старших порядков.

### 3.4. Турбулентная вязкость

Самыми простыми являются модели первого порядка, которые тем или иным образом выражают тензор напряжений Рейнольдса через характеристики среднего поля скорости. При этом практически все модели первого порядка оперируют понятием «турбулентная вязкость». В наиболее общем виде турбулентная вязкость вытекает из формулы Буссинеска, предложенной для тензора напряжений Рейнольдса по аналогии с выражением для вязких напряжений, принятом для несжимаемой жидкости (1.10),

$$\tau_{ij} = \langle u_i^2 \rangle \delta_{ij} / 3 - \nu_t (\partial_j U_i + \partial_i U_j). \quad (3.42)$$

Важно подчеркнуть, что, в отличие от молекулярной вязкости, турбулентная вязкость  $\nu_t$  не является свойством жидкости, а зависит от самого течения и даже для заданного течения может меняться от точки к точке. Другими словами, концепция турбулентной вязкости основана на рассмотрении некой «турбулентной жидкости», отличной по своим свойствам от вязкой жидкости в турбулентном течении.

Самый простой подход к рассмотрению турбулентных течений состоит в том, чтобы предположить, что турбулентная вязкость и энергия турбулентных пульсаций  $k = \langle u_i^2 \rangle / 2$  для данного течения есть величины постоянные, не изменяющиеся от точки к точке. В этом случае уравнение Рейнольдса (3.32) принимает простейший вид:

$$\partial_t U_i + U_j \partial_j U_i = -\rho^{-1} \partial_i P + (\nu + \nu_t) \partial_{jj}^2 U_i + F_i. \quad (3.43)$$

Несмотря на чрезвычайную грубость такого предположения, оно позволяет в некоторых случаях правдоподобно описывать крупномасштабную структуру турбулентного течения. Полученное решение представляет в этом случае «ламинарный аналог» реального течения, так как получаемые профили скорости соответствуют ламинарным, а не турбулентным режимам течения. Значения турбулентной вязкости часто превышают при этом молекулярную вязкость на многие порядки. Так, например, для задач описания крупномасштабных течений в атмосфере принимают значения турбулентной вязкости в диапазоне  $10^2$ – $10^4$  м<sup>2</sup>/с, в то время как молекулярная кинематическая вязкость воздуха равна  $2 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с (т. е. различие составляет 7–9 порядков!).

### 3.5. Длина пути смешения

Многие простые схемы замыкания опираются на идею Прандтля о *длине пути смешения*, характеристике потока, под которой понимают расстояние, проходимое жидкой частицей *поперек* потока, прежде чем происходит ее смешение с окружающей жидкостью. Понятие пути смешения исходит из аналогии между турбулентным перемешиванием и молекулярным переносом в газах, когда характеристики молекул остаются постоянными в промежутках между соударениями.

Модель Прандтля применяется обычно к простым потокам, в которых средняя скорость имеет только одну компоненту (пограничные слои, каналы, трубы). Для определенности будем считать, что  $\mathbf{U} = (U_x, 0, 0)$ , а существенным является только градиент средней скорости вдоль оси  $z$ . Тогда, следуя Прандтлю (1925 г.), можно написать, что

$$\langle u_x u_z \rangle = -l^2 (\partial_z U_x)^2. \quad (3.44)$$

Формула (3.40) получается и из качественных соображений, использующих идею турбулентной вязкости. Действительно, если считать, что величина пульсаций скорости в турбулентном потоке пропорциональна градиенту средней скорости, то из размерных соображений появляется коэффициент с размерностью длины:  $u_i \approx l |\partial_z U_x|$ . Логично также предположить, что турбулентная вязкость тем больше, чем выше уровень турбулентных пульсаций. Соображения размерности снова требуют наличия множителя с размерностью длины:  $\nu_t \approx l u$ . Тогда

$$\nu_t \approx l^2 |\partial_z U_x|,$$

что в принципе эквивалентно формуле (3.44).

Перечислим некоторые задачи, в которых широко используется гипотеза Прандтля о пути смешения.

*Свободный слой со сдвигом шириной  $d$ .* В этом случае длина пути смешения считается постоянной:

$$l = Cd,$$

где  $C$  — эмпирическая константа, величина которой имеет порядок  $C \approx 0,1$ .

*Турбулентный пограничный слой.* Предположение о том, что размер доминирующих вихрей пропорционален расстоянию от стенки  $z$ , приводит к выражению

$$l = Cz.$$

В этом случае эмпирическая константа  $C \approx 0,4$ .

*Течение в открытом канале.* Для канала глубиной  $d$  используется оценка

$$l = Cz \sqrt{1 - z/d}.$$

Эта формула применима и для закрытого канала. В этом случае глубина  $d$  заменяется на полуширину  $d/2$ . Формула работает и в случае круглой трубы (вместо глубины в ней появляется радиус канала). Значение эмпирической константы в каждом случае свое.

Важно отметить, что определение длины пути смешения (длины перемешивания), предложенное Прандтлем (3.40), не является единственно возможным. Широко используются и некоторые другие модели, опирающиеся на это понятие. Например, Тейлор ввел модель, в которой тензор напряжений Рейнольдса для одномерного турбулентного потока задается выражением

$$\langle u_x u_z \rangle = -l U_x \partial_z U_x. \quad (3.45)$$

### 3.6. Модели переноса турбулентной вязкости

В общем случае турбулентная вязкость меняется от точки к точке и может изменяться со временем, то есть  $\nu_t = \nu_t(t, \mathbf{r})$ . К моделям переноса турбулентной вязкости относятся модели, в которых для турбулентной вязкости записывается эволюционное уравнение.

Формально, для любой переносимой течением скалярной величины  $a$ , для которой выполняется закон сохранения, можно записать уравнение вида

$$\partial_t a + (\mathbf{v} \nabla) a = \partial_j q_j + G + D, \quad (3.46)$$

где  $\mathbf{q}$  — поток величины  $a$  за счет диффузии,  $G$  — слагаемое, характеризующее генерацию величины  $a$ ,  $D$  — слагаемое, характеризующее диссипацию этой величины.

Если предположить, что полная вязкость (сумма молекулярной и турбулентной вязкостей) есть переносимая потоком скалярная величина, то для нее можно записать уравнение вида (3.46).

Приведем в качестве примера такой модели переноса турбулентной вязкости уравнение, предложенное Ни и Коважным для плоского пограничного слоя [88],

$$\partial_t \nu_t + U_j \partial_j \nu_t = \partial_j ((\nu + \nu_t) \partial_j \nu_t) + A \nu_t |\partial_z U_x| - B \nu_t (\nu + \nu_t). \quad (3.47)$$

Выражение для потока полной вязкости записано в предположении, что коэффициент диффузии равен этой же полной вязкости (условие самодиффузии). Уравнение включает две эмпирические константы. Параметр  $A$

характеризует интенсивность генерации турбулентной вязкости за счет сдвига (авторы модели принимали его значение близким к 0,1), и параметр  $B$  характеризует «самосжигание» турбулентной вязкости.

### 3.7. Двухпараметрические модели

Большую группу моделей составляют модели, основанные на рассмотрении кинетической энергии пульсаций скорости  $k = \langle u_i^2 \rangle / 2$ . В моделях этого типа обычно появляется и вторая важная характеристика — скорость диссипации энергии  $\varepsilon$ . Турбулентная вязкость выражается через эти две величины. Соображения размерности приводят к соотношению

$$\nu_t = Ck^2/\varepsilon.$$

Уравнение для энергии пульсаций скорости можно получить из уравнения (3.37), положив в нем  $j = i$  (не путаем в уравнении кинетическую энергию пульсаций и индекс  $k$ ):

$$\partial_t k + U_k \partial_k k = -\langle u_i u_k \rangle \partial_k U_i - \partial_k \left[ \langle u_k (u_i^2/2 - p'/\rho) \rangle - \nu \partial_k k \right] + \langle u_i f_i' \rangle, \quad (3.48)$$

однако это уравнение по-прежнему включает неизвестные моменты и не снимает проблему замыкания. Замыкание уравнения (3.48) приводит к широкой группе моделей переноса кинетической энергии. Не претендуя даже на беглый обзор полуэмпирических моделей этого типа, мы только приведем пример  $k - \varepsilon$  модели для описания течения в плоском пограничном слое на стенке:

$$\partial_t k + U_x \partial_x k + U_z \partial_z k = \partial_z (\nu_t \partial_z k) + \nu_t (\partial_z U_x)^2 - \varepsilon, \quad (3.49)$$

$$\partial_t \varepsilon + U_x \partial_x \varepsilon + U_z \partial_z \varepsilon = \partial_z (\nu_t \partial_z \varepsilon) + C_1 \varepsilon k^{-1} \nu_t (\partial_z U_x)^2 - C_2 \varepsilon^2 k^{-1}. \quad (3.50)$$

Замкнутую систему образуют при этом уравнения (3.32), (3.33), (3.42), (3.49) и (3.50).

Для иллюстрации возможностей полуэмпирических моделей на рисунке 3.2, взятом из работы [45], показаны результаты вычислений осесимметричного следа за шаром в несжимаемой жидкости с помощью различных моделей. Точками на рисунке обозначены экспериментальные данные, пунктирной линией — результаты расчета с помощью однопараметрической модели, штрихпунктирной — результаты расчета с помощью  $k - \varepsilon$  модели, сплошной — результаты расчета с помощью другой двухпараметрической модели, специально разработанной для свободных течений.

Очевидно, что уравнения для статистических моментов, характеризующих более сложное течение, например турбулентную конвекцию, должны

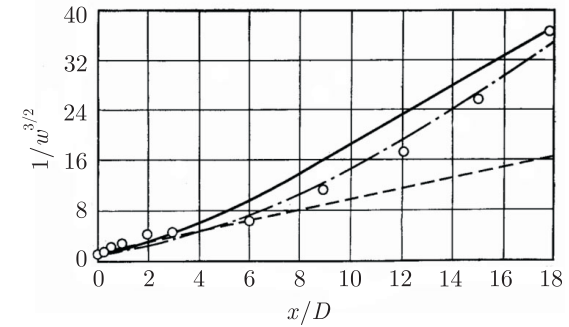


Рис. 3.2

включать соответствующие моменты для температурных пульсаций и смешанные моменты, характеризующие корреляции поля скорости и поля температуры.

В заключение еще раз отметим, что полуэмпирические модели представляют наиболее разработанное направление в изучении турбулентных течений и подробно описаны в литературе. Для начального систематического знакомства с ними можно порекомендовать удачно подобранные сборники статей под редакцией Фроста и Моулдена [3.4] и под редакцией Кольмана [3.5].

### 3.8. Крупномасштабное магнитное поле в турбулентной среде

Краткое описание подхода Рейнольдса к рассмотрению средних полей в турбулентном потоке завершим задачей, являющейся одним из примеров наиболее успешного его применения. Речь идет о задаче об эволюции магнитного поля в турбулентной проводящей среде, возникшей в связи с проблемой объяснения происхождения магнитных полей планет, звезд, галактик.

Наблюдения показывают, что большинство *жидких, вращающихся* космических тел обладает собственным магнитным полем. Среди планет Солнечной системы наибольшее магнитное поле имеет Юпитер (около  $10^{-3}$  тесла, что соответствует 10 Гаусс в системе СГСЕ). Поле Земли примерно в 10 раз слабее. Магнитное поле на поверхности Солнца характеризуется величинами порядка 1 Гс, но известны примеры быстро вращающихся звезд, имеющих поля, достигающие тысяч Гаусс.

Идею о том, что магнитное поле в космических телах может генерироваться движущейся проводящей средой, впервые высказал Лармор в 1919 г.

при обсуждении происхождения магнитного поля Солнца. Явление возбуждения магнитного поля движущейся проводящей средой получило название магнитогидродинамического динамо (сокращенно, *МГД-динамо*), и именно оно считается на сегодня ответственным за формирование космических магнитных полей. Однако с работы Лармора до построения первых реалистических моделей этого процесса прошло много времени, так как многие попытки предложить простые схемы течений, способных возбуждать магнитные поля, окончились неудачей. Более того, эти попытки привели к доказательству так называемых «антидинамо»-теорем. Первая такая теорема принадлежит Каулингу (1934 г.) [52], доказавшему, что никакое осесимметричное течение не может поддерживать стационарное осесимметричное поле. Эта теорема фактически вынесла приговор ламинарным моделям динамо космических тел, где осевая симметрия навязывается самой задачей. Ключевая идея, позволяющая избежать запрет, налагаемый теоремой Каулинга, состоит в том, что симметрия может быть нарушена *только на мелких масштабах*. Эта идея наиболее последовательно была сформулирована в работе Штейнбека, Краузе и Редлера (1966 г.) [104], совместивших подход Рейнольдса к описанию средних турбулентных полей с анализом топологических свойств мелкомасштабного поля скорости.

### 3.8.1. Турбулентная электродвижущая сила

Движения проводящей жидкости описываются уравнениями магнитной гидродинамики (см. раздел 1.5), которые включают уравнение движения несжимаемой жидкости

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + (\rho \mu_0)^{-1} (\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}), \quad (3.51)$$

уравнение магнитной индукции

$$\partial_t \mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \quad (3.52)$$

а также условия несжимаемости среды и соленоидальности магнитного поля

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Следуя подходу Рейнольдса, скорость и магнитное поле представляются в виде сумм средних (крупномасштабных) и пульсационных частей

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{r}, t), \quad (3.54)$$

где для пульсаций справедливы условия  $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{b} \rangle = 0$ .

Строго говоря, в теории динамо средних полей к разложению (3.53)–(3.54) предъявляют более жесткое требование, чем то, что использовал Рейнольдс. По сути, используют так называемое *двухмасштабное* приближение, состоящее в том, что со средними полями  $\mathbf{U}_0$  и  $\mathbf{B}_0$  связывают характерный масштаб  $L$  (и характерное время изменения  $T$ ), а случайные пульсации считают сосредоточенными на масштабах  $l$  (и соответственных временных масштабах  $t$ ) таких, что  $l \ll L$  и  $t \ll T$ . Такое разделение масштабов позволяет провести корректное осреднение макроскопических полей на промежуточных временах (масштабах).

Попытка применения подхода Рейнольдса к системе уравнений (3.51)–(3.52) очевидным образом приведет к уравнениям, значительно превосходящим по сложности обсуждавшееся выше уравнение Рейнольдса. В теории динамо ставится более скромная задача. Считается, что поле скорости известно, то есть известны структура крупномасштабного поля скорости  $\mathbf{U}_0$  и статистические характеристики мелкомасштабного поля скорости  $\mathbf{u}$ , и требуется решить только уравнение индукции (3.52).

В уравнение индукции подставим разложения (3.53)–(3.54) и получим для среднего поля уравнение

$$\partial_t \mathbf{B}_0 = \text{rot}(\mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}_0) + \text{rot } \boldsymbol{\epsilon} + \nu_m \Delta \mathbf{B}_0, \quad (3.55)$$

где величина

$$\boldsymbol{\epsilon} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle \quad (3.56)$$

имеет размерность напряженности электрического поля и является эффективной электродвижущей силой, описывающей средний результат взаимодействия пульсаций поля скорости и магнитного поля.

Таким образом, применение подхода Рейнольдса, как и следовало ожидать, привело к появлению новых переменных, описывающих вклад мелкомасштабных пульсаций в средние поля. Преимущество рассматриваемой задачи состоит в том, что осредненное уравнение индукции *линейно* по магнитному полю (в отличие от уравнения Навье–Стокса, нелинейного по самой скорости). Это позволяет значительно продвинуться в описании структуры получаемого корреляционного вектора  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

Вычитая уравнение (3.55) из исходного уравнения индукции (3.52), можно получить уравнение для пульсаций магнитного поля

$$\partial_t \mathbf{b} = \text{rot}(\mathbf{U}_0 \times \mathbf{b}) + \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) + \text{rot } \mathbf{g} + \nu_m \Delta \mathbf{b}, \quad (3.57)$$

где

$$\mathbf{g} = \mathbf{u} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle. \quad (3.58)$$

Если на турбулентный поток наложить крупномасштабное регулярное поле  $\mathbf{B}_0$ , то, согласно уравнению (3.57), основным источником пульсаций

магнитного поля служит слагаемое  $\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)$ . Следовательно, пульсации поля линейны по отношению к крупномасштабному магнитному полю. Возвращаясь к выражению (3.56) для эффективной электродвижущей силы  $\epsilon$ , можно сделать вывод, что и она должна быть связана с крупномасштабным полем линейным образом, а, опираясь на предположении о том, что вариации средних полей возможны только на масштабах, много больших масштабов пульсаций, ожидаемую линейную зависимость можно представить в виде ряда

$$\epsilon_i = \alpha_{ij} B_{0j} + \beta_{ijk} \partial_k B_{0j} + \dots \quad (3.59)$$

Важно отметить, что вектор  $\mathbf{B}$  является псевдовектором, а  $\epsilon$  — истинным вектором. Это означает, что коэффициенты в разложении (3.59) являются псевдотензорами, то есть величинами, не обладающими отражательной симметрией. Именно соображения симметрии играют важнейшую роль в построении моделей процессов генерации магнитного поля движущейся проводящей средой.

Ограничимся для начала первым членом ряда (3.59)

$$\epsilon_i = \alpha_{ij} B_{0j} \quad (3.60)$$

и сделаем существенное предположение, состоящее в том, что поле пульсаций скорости  $\mathbf{u}$  статистически однородно и изотропно. Важно, что *изотропия* подразумевает в этом случае только инвариантность относительно поворотов системы отсчета, но не инвариантность относительно отражений. Считая, что псевдотензор  $\alpha_{ij}$  определяется свойствами мелкомасштабного поля скорости, приходим к выводу, что изотропность пульсаций скорости подразумевает и изотропность псевдотензора  $\alpha_{ij}$ :

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}.$$

В этом случае соотношение (3.60) приходит к виду

$$\epsilon = \alpha \mathbf{B}_0, \quad (3.61)$$

и неопределенной остается только скалярная величина  $\alpha$ , которая должна быть *псевдоскаляром*. Последнее означает, что величина  $\alpha$  должна менять знак при отражении системы отсчета относительно начала координат (замене правосторонней системы отсчета на левостороннюю).

Уравнение (3.61) содержит в себе достаточно неожиданный результат, состоящий в том, что турбулентный поток может генерировать электродвижущую силу (ток) в направлении наложенного магнитного поля. Это противоречит «здравому смыслу», так как исходное уравнение индукции (3.52) прямо указывает на то, что индуцированный ток пропорционален векторному произведению  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  и, соответственно, должен быть перпендикулярен

приложенному магнитному полю. Явление генерации турбулентным потоком эффективной электродвижущей силы вида (3.61) получило название альфа-эффекта. Этот эффект используется в большинстве моделей динамо космических тел, позволяя избежать проблемы замыкания динамо-цикла для макроскопического *осесимметричного* магнитного поля.

Чтобы довести полученную картину возбуждения магнитного поля турбулентным потоком до уровня физически оправданной модели, необходимо указать статистическую характеристику поля пульсаций скорости, лишенную отражательной симметрии, которая могла бы обеспечить появление альфа-эффекта. Требуемым псевдоскаляром может служить величина

$$H = V^{-1} \int_V (\mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) dV = \langle \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle, \quad (3.62)$$

называемая *спиральностью*. Величина  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$  называется *завихренностью* и, являясь псевдовектором, обеспечивает смену знака спиральности при отражении системы координат. Именно спиральность и является на сегодня основной (но не единственной) характеристикой турбулентного поля, с которой связаны физические модели альфа-эффекта. Изотропное турбулентное поле скорости с отличной от нуля средней спиральностью можно представить себе как поле, образованное совокупностью произвольно ориентированных мелкомасштабных *винтовых* вихрей, в котором доминируют либо правовинтовые, либо левовинтовые структуры.

Иллюстрацией того, как спиральный поток может индуцировать электрический ток вдоль поля, служит картина, предложенная Паркером [92] еще до появления теории альфа-эффекта (рис. 3.3). Поток проводящей жидкости увлекает за собой силовые линии магнитного поля. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси  $x$ , а спиральные (винтовые) вихри — перпендикулярно им (должна быть компонента скорости  $v_z$  и компонента завихренности  $\omega_z$ ). Тогда вихрь вытягивает петлю в направлении оси  $z$  и одновременно разворачивает ее. В результате внутри петли индуцируется электрический ток, направленный по магнитному полю (или против него, в зависимости от закрутки вихря).

Второй член разложения (3.59) в простейшем случае изотропной турбулентности также поддается достаточно простой интерпретации. Изотроп-

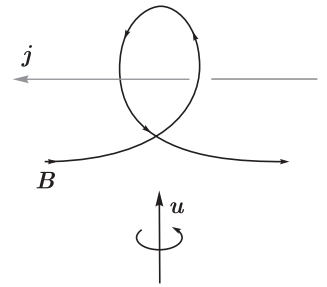


Рис. 3.3

ность поля скорости выливается в изотропность псевдотензора  $\beta_{ijk}$ , что подразумевает соотношение

$$\beta_{ijk} = \beta e_{ijk},$$

где коэффициент  $\beta$  есть истинный скаляр. Уравнение (3.59) запишется в этом случае как

$$\epsilon = \alpha \mathbf{B}_0 - \beta \operatorname{rot} \mathbf{B}_0. \quad (3.63)$$

Таким образом, действие второго слагаемого приводит к дополнительной диффузии крупномасштабного магнитного поля. Если коэффициент  $\beta$  постоянен по пространству (однородная турбулентность), то в уравнении индукции для среднего поля (3.55) эффективный коэффициент диффузии складывается из суммы  $(\nu_m + \beta)$ .

### 3.8.2. Вычисление коэффициентов $\alpha$ и $\beta$

Уравнение для среднего (крупномасштабного) магнитного поля в турбулентной среде (3.55) содержит неизвестное векторное поле  $\epsilon$ , описывающее эффективную турбулентную электродвижущую силу (3.56)

$$\epsilon = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle.$$

Структура этой силы была проанализирована выше исходя из самых общих свойств исходных уравнений и рассматриваемых полей. Покажем теперь как можно провести более строгие оценки и вычисления для коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  в некоторых частных случаях.

Начнем с самых общих замечаний. Сначала подчеркнем еще раз, что все вычисления проводятся в кинематическом приближении, подразумевающим, что свойства поля скорости известны и требуется определить свойства магнитного поля. Это значит, что при вычислении электродвижущей силы  $\epsilon$  пульсации скорости  $\mathbf{u}$  считаются заданными, а неизвестными остаются только пульсации магнитного поля  $\mathbf{b}$ , для которых справедливо уравнение (3.57). Это уравнение перепишем для случая  $\mathbf{U}_0 = 0$  (средняя скорость отсутствует) в виде

$$\partial_t \mathbf{b} = \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) + \operatorname{rot} \mathbf{g} + \nu_m \Delta \mathbf{b}, \quad (3.64)$$

где  $\mathbf{g} = \mathbf{u} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$ .

Следующий важный шаг состоит в том, что в уравнении (3.64) отбрасываются слагаемые, квадратичные по пульсациям (второе слагаемое в правой части уравнения). Это приближение будем называть «квазилинейным приближением», хотя оно известно и как «корреляционное приближение второго порядка», и как «сглаживание первого порядка». Приближение подразумевает, что турбулентность является «слабой» в смысле ее воздействия на магнитное поле. Отметим, что именно этот шаг невозможен

при рассмотрении тензора напряжений Рейнольдса, что не позволяет оценить по аналогичной методике турбулентную вязкость. В магнитной гидродинамике квазилинейное приближение можно оправдать, по меньшей мере, в двух случаях. Во-первых, если отбрасываемое слагаемое существенно слабее диссипативного, что соответствует условию малости магнитного числа Рейнольдса

$$\operatorname{Rm} = \frac{u_L L}{\nu_m} \ll 1, \quad (3.65)$$

где  $u_L$  — характерная амплитуда пульсаций скорости на интегральном (энергонесущем) масштабе турбулентности  $L$ . Во-вторых, если в уравнении доминирует производная по времени ( $|\operatorname{rot} \mathbf{g}| \ll |\partial_t \mathbf{b}|$ ). Это соответствует условию малости числа Струхала

$$\operatorname{St} = \frac{u_L \tau_c}{\lambda_c} \ll 1, \quad (3.66)$$

где  $\tau_c$  — корреляционное время, а  $\lambda_c$  — корреляционный масштаб. Условие (3.66) выполняется, например, в случае, когда течение представляет собой совокупность случайных волн (так называемая слабая турбулентность), либо в приближении дельта-коррелированной турбулентности (предполагается, что наблюдается обычный для турбулентности пространственный спектр пульсаций скорости, но временной спектр имеет вид белого шума — это турбулентность «без памяти»). Следует отметить, что в общем случае для развитой турбулентности естественно предположить  $\operatorname{St} \approx 1$ , а в случае космических объектов и  $\operatorname{Rm} \gg 1$ . Таким образом, оба предела ( $\operatorname{St} \ll 1$  и  $\operatorname{Rm} \ll 1$ ), для которых квазилинейное приближение работает надежно, достаточно далеки от реальности, однако, получаемые с его помощью оценки дают в ряде случаев удовлетворительное согласие с наблюдениями [18, 9].

Рассмотрим оценку коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , получаемую в пределе большой проводимости среды, когда в уравнении (3.64) отбрасывается не только слагаемое, квадратичное по пульсациям, но и диссипативное слагаемое [18]. Уравнения для пульсаций поля принимают вид

$$\partial_t \mathbf{b} = \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0), \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad (3.67)$$

допускающий формальное решение вида

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t_0) + \int_{t_0}^t \operatorname{rot} (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t') \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t')) dt', \quad (3.68)$$

где  $t_0$  — произвольный момент времени. Если интервал времени  $t - t_0$  достаточно большой, а именно,

$$t - t_0 \gg \lambda_c^2 \nu_m^{-1} \gg \tau_c,$$

то любое начальное возмущение магнитного поля затухнет и можно принять  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t_0) = 0$ , а  $t_0 = -\infty$ . Выражение для электродвижущей силы получается после умножения этого решения на пульсацию скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и усреднения

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \text{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t') \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t')) \rangle dt'. \quad (3.69)$$

Существенно, что операция усреднения оставляет в подынтегральном выражении только вклад в интервале времени  $t - t' < \tau_c$ . Сделанные выше предположения о крупномасштабном поле позволяют считать, что величина  $\mathbf{B}_0$  не успевает измениться за это время и  $\mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t') = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t)$ . После замены  $t' = t - \tau$  получаем

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \int_0^{\infty} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \text{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t - \tau) \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t)) \rangle d\tau. \quad (3.70)$$

Структура электродвижущей силы должна соответствовать выражению (3.63), что позволяет ограничиться при написании выражения для компонент вектора  $\epsilon$  только соответствующими членами. Например, для компоненты  $\epsilon_x$  (в системе координат  $(x, y, z)$ ) получаем

$$\epsilon_x = (w_{yxz} - w_{zxy})B_{0x} - w_{yy}\partial_y B_{0z} + w_{zz}\partial_z B_{0y}, \quad (3.71)$$

где

$$w_{ijk} = \int_0^{\infty} \langle u_i(\mathbf{x}, t) \partial_j u_k(\mathbf{x}, t - \tau) \rangle d\tau, \quad w_{ij} = \int_0^{\infty} \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, t - \tau) \rangle d\tau.$$

Сопоставление (3.71) с (3.63) дает

$$\alpha = (w_{yxz} - w_{zxy}) = -\frac{1}{3}(w_{xyz} + w_{yzx} + w_{zxy} - w_{xzy} - w_{zyx} - w_{yxz}),$$

$$\beta = w_{xx} = w_{yy} = w_{zz} = \frac{1}{3}(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}).$$

Подстановка явных выражений для величин  $w_{ii}$  и  $w_{ijk}$  приводит к окончательным формулам

$$\alpha = -\frac{1}{3} \int_0^{\infty} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \text{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t - \tau) \rangle d\tau, \quad (3.72)$$

$$\beta = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t - \tau) \rangle d\tau. \quad (3.73)$$

Подынтегральные выражения в формулах (3.72), (3.73) быстро убывают с ростом  $\tau$  (точнее, основной вклад дают времена  $\tau < \tau_c$ ), а при  $\tau \rightarrow 0$  стремятся, соответственно, к значениям спиральности и удвоенной энергии турбулентных пульсаций поля скорости. Это позволяет принять в качестве оценки коэффициентов выражения

$$\alpha = -\frac{1}{3} H \tau_c, \quad (3.74)$$

$$\beta = \frac{2}{3} E_u \tau_c, \quad (3.75)$$

где  $E_u = \langle u^2 \rangle / 2$ ,  $H = \langle \mathbf{u} \text{rot} \mathbf{u} \rangle$ . Видно, что коэффициент  $\beta$  всегда положителен, то есть эффективная диффузия магнитного поля в турбулентной среде растет (это соответствует снижению эффективной электрической проводимости среды). Коэффициент  $\alpha$  может иметь произвольный знак, как и спиральность турбулентного потока.

Вернемся к квазилинейному приближению и рассмотрим развитую турбулентность в слабопроводящей среде (предел, определяемый условием (3.65)). В этом случае членом  $\partial_t \mathbf{b}$  можно пренебречь ( $|\partial_t \mathbf{b}| \ll |\nu_m \Delta \mathbf{b}|$ ) и для медленноменяющегося крупномасштабного поля записать уравнение (3.64) в виде

$$B_{0j} \partial_j u_i - u_j \partial_j B_{0i} + \nu_m \partial_{jj} b_i = 0. \quad (3.76)$$

Считая, что поля пульсаций  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{b}$  есть случайные функции координат, для которых существует преобразование Фурье, вычислим эффективную электродвижущую силу в пространстве Фурье.

Применение преобразования Фурье к уравнению (3.76) дает

$$\nu_m k^2 \hat{b}_i = i B_{0l} k_l \hat{u}_i - \hat{u}_l \partial_l B_{0i}.$$

Для произвольной компоненты электродвижущей силы можно написать

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle_i = e_{ijk} \langle u_j b_k \rangle = \\ &= e_{ijk} \int \int \frac{i \langle \hat{u}_j^*(\mathbf{k}) \hat{u}_k(\mathbf{k}') \rangle k_l B_{0l} - \langle \hat{u}_j^*(\mathbf{k}) \hat{u}_l(\mathbf{k}') \rangle \partial_l B_{0k}}{\nu_m k^2} \star \\ &\quad \cdot e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} d\mathbf{k} d\mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (3.77)$$

При переходе к фурье-представлению учли, что в силу вещественности поля  $\mathbf{u}$  справедливо равенство  $\hat{u}^*(\mathbf{k}) = \hat{u}(-\mathbf{k})$ . Выражение (3.77) соответствует равенству  $\epsilon_i = \alpha_{il} B_{0l} + \beta_{ilk} \partial_l B_{0k}$ , в котором компоненты тензоров  $\alpha_{il}$  и  $\beta_{ilk}$  выражаются через спектральный тензор (3.19)

$$\alpha_{il} = i e_{ijk} \int \frac{\Phi_{jk}(\mathbf{k}) k_l}{\nu_m k^2} d\mathbf{k}, \quad (3.78)$$

$$\beta_{ilk} = -\operatorname{Re} \left[ e_{ijl} \int \frac{\Phi_{lk}(\mathbf{k})}{\nu_m k^2} d\mathbf{k} \right]. \quad (3.79)$$

При переходе от (3.77) к (3.78) использовано равенство  $\langle \hat{u}_j^*(\mathbf{k}) \hat{u}_k(\mathbf{k}') \rangle = \Phi_{jk}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ . Поскольку мы ограничили себя рассмотрением изотропной турбулентности, в которой  $\alpha_{il} = \alpha \delta_{il}$  с псевдоскалярным коэффициентом  $\alpha = \alpha_{ii}/3$ , то, воспользовавшись связью (3.24) спектрального тензора  $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$  со спектральной плотностью спиральности  $H(k)$ , из (3.78) можно получить

$$\alpha = -\frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{H(k)}{\nu_m k^2} dk. \quad (3.80)$$

Аналогично,  $\beta_{ilk} = \beta e_{ilk}$  со скалярным коэффициентом  $\beta = e_{ilk} \beta_{ilk}/6$ , который выражается через спектральную плотность энергии

$$\beta = \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{E(k)}{\nu_m k^2} dk. \quad (3.81)$$

Спектральная плотность энергии  $E(k)$  сама по себе достаточно быстро спадает с ростом волнового числа (подробно ее свойства обсуждаются в следующей главе), а наличие дополнительного множителя  $k^{-2}$  указывает на то, что эффективная (турбулентная) магнитная вязкость определяется максимальным (энергонесущим) масштабом турбулентности. На первый взгляд кажется удивительным, что магнитная вязкость оказалась в знаменателе полученного выражения (чем меньше исходная магнитная вязкость, тем выше эффективная магнитная вязкость турбулентного потока). Однако, корректный анализ зависимости бета-эффекта от магнитной вязкости требует рассмотрения структуры подынтегрального выражения в (3.81), причем нельзя забывать и условия применимости квазилинейного приближения, в рамках которого получена формула. При известной спектральной плотности  $E(k)$  формула (3.81) дает связь коэффициента  $\beta$  с параметрами турбулентного потока. Поскольку рассматривается кинематическое приближение, исключаяющее влияние магнитного поля на свойства потока, то для вычислений логично воспользоваться классическим спектром Колмогорова для одно-родной изотропной турбулентности (4.20)

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3},$$

который дает

$$\beta \approx \frac{1}{\nu_m} \varepsilon^{2/3} \int_{k_L}^{k_\nu} k^{-11/3} dk \approx \frac{\varepsilon^{2/3}}{\nu_m k_L^{8/3}}.$$

Здесь  $\varepsilon$  — скорость диссипации энергии турбулентных пульсаций, равная энергии, поступающей от внешних сил в турбулентный поток за единицу времени на единицу массы;  $k_L$  и  $k_\nu$  определяют границы интервала, в котором существует спектр « $-5/3$ », — с одной стороны это энергонесущий масштаб  $L$ , на который приходится максимум энергии, а с другой стороны это вязкий (внутренний) масштаб турбулентности. При вычислениях учли, что  $C \approx 1.5$ .

Чтобы выделить безразмерный параметр, характеризующий турбулентный поток проводящей жидкости, воспользуемся простыми соображениями размерности, которые позволяют связать характерную скорость  $u_L$  на энергонесущем масштабе  $L \sim 1/k_L$  со скоростью диссипации энергии  $\varepsilon$  (см. главу 4)

$$\varepsilon \approx u_L^3 k_L$$

и получить окончательно

$$\beta \approx \frac{u_L^2 L^2}{\nu_m} = \operatorname{Rm}^2, \quad (3.82)$$

где  $\operatorname{Rm} = u_L L / \nu_m$  есть магнитное число Рейнольдса (см. раздел 1.5). Таким образом, эффективная турбулентная диффузия магнитного поля (эффективная магнитная вязкость) пропорциональна исходной (молекулярной) магнитной вязкости жидкости и квадратична по магнитному числу Рейнольдса. Однако, нельзя забывать, что эта оценка справедлива только при малых магнитных числах Рейнольдса. Реально, она годится для жидкостей с малым магнитным числом Прандтля (напомним, что для металлов типичное значение  $\operatorname{Pr} \sim 10^{-5}$ ), в которых турбулентный режим с достаточно высоким значением числа Рейнольдса достигается при магнитных числах Рейнольдса  $\operatorname{Rm} < 1$ .

В заключение сделаем два замечания. Во-первых, еще раз подчеркнем, что мы рассмотрели только простейшие предельные случаи. В неоднородной и неизотропной турбулентности появляется целый ряд дополнительных эффектов, способных приводить к генерации крупномасштабного магнитного поля. Важно, что спиральность не является при этом обязательным условием для появления альфа-эффекта. Значительные успехи теории динамо последних лет связаны как раз с исследованием *неспиральных* механизмов МГД динамо средних полей. Так например, неспиральный альфа-эффект в неоднородной турбулентности (в которой существует градиент

энергии турбулентных пульсаций) может возникнуть при наличии крупномасштабного вращения или сдвига (из недавних работ, см., например, [73, 98, 95, 94]). Для более подробного знакомства с проблемами генерации магнитных полей потоками проводящей жидкости можно порекомендовать книгу Моффата [3.6] и книгу Зельдовича, Рузмайкина и Соколова [3.7].

Во-вторых, коснемся проблемы измерений турбулентных коэффициентов переноса, которыми, по-сути, являются введенные выше коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ . Исторически первым турбулентным коэффициентом переноса стала турбулентная вязкость, присутствующая в том или ином виде практически во всех полуэмпирических моделях турбулентности. Экспериментальные оценки турбулентной вязкости (либо коэффициентов в формулах, используемых для ее параметризации) выполнялись параллельно с развитием моделей, так как последние остаются бесполезными при отсутствии эмпирических коэффициентов. В динамо средних полей ситуация сложилась прямо противоположная — теория динамо средних полей активно развивается в течение почти полувека, причем на ее основе строятся модели генерации магнитных полей различных космических тел. При этом, до последнего времени не было даже попыток прямых измерений используемых в теории коэффициентов турбулентного переноса. Объясняется это чрезвычайной сложностью лабораторных МГД-экспериментов при больших числах Рейнольдса и даже умеренных магнитных числах Рейнольдса (в лабораторных опытах используются жидкие металлы, для которых магнитная вязкость на 5–6 порядков превосходит кинематическую вязкость). К тому же требуется создание потоков со сложной топологией. Для исследования базового (спирального) турбулентного альфа-эффекта необходимо создать развитую *изотропную* турбулентность с контролируемой спиральностью. Однако, до сегодняшнего дня нет ни одного примера успешной реализации турбулентного течения с контролируемой *мелкомасштабной* спиральностью даже в прозрачной жидкости (воде или воздухе, где измерения значительно проще, чем в жидких металлах). Первая успешная попытка экспериментальной реализации турбулентного альфа-эффекта (и измерения коэффициента  $\alpha$ ) была выполнена в импульсном винтовом течении сплава галлия в замкнутом тороидальном канале [106] — альфа-эффект в этом случае был вызван совместным действием градиента турбулентных пульсаций и крупномасштабной завихренности.

Бета-эффект кажется более простым — в турбулентном потоке коэффициент диффузии магнитного поля, обратно пропорциональный проводимости среды, должен расти по аналогии с турбулентной вязкостью. Несмотря на то, что эффект считается почти очевидным, регистрация малых вариаций проводимости в турбулентном потоке чрезвычайно сложна и до по-

следнего времени не было достоверных прямых измерений эффективной электрической проводимости турбулентного потока проводящей жидкости. Первая попытка измерений проводимости жидкого натрия, перемешиваемого в колбе, была описана в работе [96], а измерения в турбулентном нестационарном потоке сплава галлия в тороидальном канале выполнены в работе [6]. Измерения проведены для чисел Рейнольдса  $Re \sim 10^6$  и магнитных числах Рейнольдса  $Rm < 1$ , что соответствует условиям применимости квазилинейного приближения, и подтвердили выполнение в этой области параметров зависимости (3.82).

### Рекомендуемая литература к третьей главе

- [3.1] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965, 639 с.
- [3.2] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967, 720 с.
- [3.3] Рейнольдс А.Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. М.: Энергия, 1979, 408 с.
- [3.4] Турбулентность. Принципы и применения / под. ред. У. Фроста, Т. Моулдена. М.: Мир, 1980, 536 с.
- [3.5] Методы расчета турбулентных течений / под. ред. В. Кольмана. М.: Мир, 1984, 464 с.
- [3.6] Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 340 с.
- [3.7] Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. М-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. 384 с.

## ГЛАВА 4

## Подход Колмогорова. Мелкомасштабная турбулентность

### 4.1. Однородная и изотропная турбулентность

Начиная изучение свойств мелкомасштабной турбулентности, сделаем несколько важных замечаний, частично повторяющих выводы, обсуждавшиеся ранее. Прежде всего напомним, что мы ограничиваемся рассмотрением течений *несжимаемой* жидкости, описываемых уравнениями Навье–Стокса, которые запишем в виде

$$\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i = -\rho^{-1} \partial_i p + \nu \partial_{jj}^2 v_i + F_i, \quad (4.1)$$

$$\partial_k v_k = 0. \quad (4.2)$$

Здесь  $v_i$  — компоненты скорости,  $F_i$  — компоненты силы,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\nu$  — вязкость. При этом нужно не забывать, что сама возможность применения уравнений (4.1)–(4.2) к описанию турбулентных течений при огромных значениях числа Рейнольдса не является очевидной, так как при их выводе использовано предположение о том, что тензор вязких напряжений является *линейной* функцией только *первых* производных поля скорости (см. вводные замечания к разделу 3).

Важно также подчеркнуть, что рассматривается *развитая* турбулентность, характеризующаяся наполненными спектрами Фурье (как временными, так и пространственными), что свидетельствует о существовании *многомасштабной* структуры поля скорости. Именно многомасштабность и является важнейшим признаком развитой турбулентности, приводя к возбуждению гигантского числа степеней свободы.

Мы уже говорили о том, что любой подход к описанию развитой турбулентности, по сути, представляет собой тот или иной способ ограничения числа степеней свободы, приводящий к соответствующим моделям. В главе 3 был рассмотрен подход Рейнольдса, состоящий в разложении входящих в (4.1)–(4.2) полей на средние поля и пульсации и последующем

осреднении уравнений. Подход приводит к уравнениям для средних величин (3.32)–(3.33), в которых появляется новый неизвестный член — тензор напряжений Рейнольдса, описывающий влияние пульсаций на средние поля. Различные способы замыкания уравнений Рейнольдса составляют суть полуэмпирических моделей.

Подход Рейнольдса направлен на описание *средних* полей скорости, возникающих в *конкретных* потоках. Каждая полуэмпирическая модель адаптируется для заданного (как правило, достаточно узкого) класса течений и включает ряд параметров, экспериментально определяемых именно для данного класса течений и справедливых в определенном диапазоне значений числа Рейнольдса. Таким образом, делается попытка ограничиться описанием *крупномасштабных* полей, а влияние *мелкомасштабных* полей охарактеризовать с помощью небольшого числа параметров.

Зададимся теперь вопросом о том, есть ли у турбулентности некие *универсальные* свойства, не зависящие от конкретных условий ее возбуждения? Очевидно, что рассчитывать на обнаружение таких универсальных свойств можно только вдали от границ и на масштабах, существенно меньших размеров области, занятых турбулентным течением. Таким образом, мы начинаем изучение *мелкомасштабной* турбулентности, в смысле, что основной интерес представляют для нас масштабы  $l \ll L$  ( $L$  — внешний, или интегральный, масштаб турбулентности). В то же время, говоря о развитой турбулентности, мы подразумеваем, что числа Рейнольдса столь велики, что остается широкий диапазон возбужденных масштабов, удовлетворяющих этому условию. Иначе говоря,  $\lambda \ll l \ll L$ , где  $\lambda$  — микромасштаб турбулентности, характеризующий масштабы пульсаций скорости, на которых становится существенной вязкая диссипация.

На рис. 4.1 схематически показаны три различных турбулентных потока (турбулентный след, течение в трубе и конвективный факел) и области в них, изображенные в виде кубов, в которых можно надеяться на выявление таких универсальных свойств. При наличии осредненного течения (поток в трубе, след) выделенный куб движется со средней скоростью этого потока.

Выделенные области не случайно имеют кубическую форму. Дело в том, что, желая избежать влияния границ, мы в то же время хотим рассматривать ограниченную область потока, причем свойства течения в этой области не должны зависеть от ее точного положения (другими словами, используется гипотеза об однородности турбулентности на масштабах, много меньших масштаба ее возбуждения  $L$ ). Наиболее простой путь удовлетворения этих противоречивых требований состоит в рассмотрении кубической области с ребром  $D$ , на гранях которого выполняются периодические

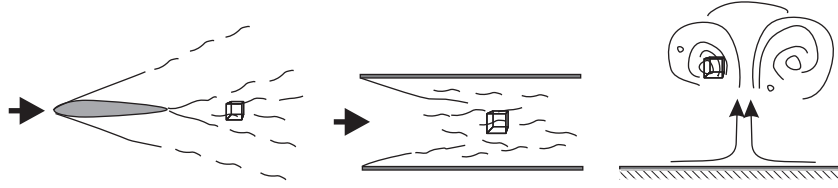


Рис. 4.1

граничные условия. Это условие состоит в том, что для всякой функции и любых целых  $n, m, q$

$$f(x + nD, y + mD, z + qD) = f(x, y, z). \quad (4.3)$$

Такая постановка задачи очень удобна для прямых численных решений уравнений (4.1)–(4.2). Именно для куба с периодическими граничными условиями (для квадрата в случае двумерных течений) выполнены практически все численные эксперименты по исследованию свойств однородной турбулентности. Заметим, что условие однородности немедленно приводит к тому, что уравнение Рейнольдса допускает только тривиальное решение  $\mathbf{U}(t, \mathbf{r}) = 0$ . Кубическая геометрия и условие периодичности создают идеальные условия для применения спектральных (и спектрально-сеточных) методов, так как любая функция  $f(t, \mathbf{r})$  может быть представлена в виде

$$f(t, \mathbf{r}) = \sum_{n, m, q} \hat{f}_{nmq}(t) e^{\frac{2\pi i}{D}(nx + my + qz)} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{f}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{D}(ne_x + me_y + qe_z)$  есть волновой вектор, а коэффициенты Фурье определяются формулой

$$\hat{f}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{D^3} \int_0^D \int_0^D \int_0^D f(t, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (4.5)$$

В свете поставленной задачи фурье-представление удобно тем, что каждая гармоника соответствует движению определенного пространственного масштаба. Для того чтобы получить среднюю энергию всех пульсаций

заданного масштаба  $l = 2\pi/k$ , нужно просуммировать все гармоники, волновые векторы которых равны по модулю, и провести осреднение:

$$E(k) = \sum_{|\mathbf{k}|=k} \langle |\hat{f}_{\mathbf{k}}|^2 \rangle. \quad (4.6)$$

Если турбулентность *изотропна*, то *статистические* характеристики фурье-гармоник связанных с ней случайных полей инвариантны относительно поворотов волнового вектора.

## 4.2. Баланс энергии по масштабам. Каскад

Для получения уравнения, описывающего баланс энергии в одном отдельно взятом масштабе, нужно записать уравнения Навье–Стокса (4.1)–(4.2) в пространстве Фурье. При этом можно воспользоваться рядами Фурье вида (4.4), имея в виду кубическую геометрию с периодическими условиями, либо интегралами Фурье, опираясь на рассмотрение турбулентного течения, сосредоточенного в ограниченной части бесконечного пространства. Чтобы не создать впечатление, что получающиеся уравнения связаны с искусственно выбранной формой области, воспользуемся в данном параграфе интегралами Фурье (вывод уравнений для рядов оставим для самостоятельных упражнений). Итак, пусть течение занимает ограниченную область, затухая на бесконечности, и все входящие в уравнения Навье–Стокса величины допускают представление в виде

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (4.7)$$

где

$$\hat{f}(\mathbf{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (4.8)$$

$\mathbf{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор,  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  — волновой вектор.

Все величины в уравнении (4.1) выразим через фурье-образы (4.7)

$$\partial_t \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}', t) e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} d\mathbf{k}' + (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}'', t) e^{i\mathbf{k}''\mathbf{r}} d\mathbf{k}'' \nabla \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}''', t) e^{i\mathbf{k}'''\mathbf{r}} d\mathbf{k}''' =$$

$$= -\rho^{-1} \nabla \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\mathbf{k}', t) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}' + \nu \Delta \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(\mathbf{k}', t) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}' + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}', t) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}'$$

и воспользуемся теоремой о дифференцировании

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}' + i(2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{v}(\mathbf{k}'') \mathbf{k}'''] \hat{v}(\mathbf{k}''') e^{i(\mathbf{k}'' + \mathbf{k}''') \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}'' d\mathbf{k}''' = \\ & = -\frac{i}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{k}' \hat{p}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}' - \nu \int_{-\infty}^{\infty} k'^2 \hat{v}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}' + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}'. \end{aligned}$$

Для упрощения записи во всех функциях здесь и далее опускается аргумент  $t$ . Уравнение умножается на  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  и интегрируется по  $d\mathbf{r}$ . Учитывая, что

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{k}') \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) d\mathbf{k}' = f(\mathbf{k}),$$

и переобозначив  $\mathbf{k}'' = \mathbf{q}$ , получаем

$$\begin{aligned} & \partial_t \hat{v}(\mathbf{k}) + \frac{i}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{v}(\mathbf{q})(\mathbf{k} - \mathbf{q})] \hat{v}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) d\mathbf{q} = \\ & -i\rho^{-1} \mathbf{k} \hat{p}(\mathbf{k}) - \nu k^2 \hat{v}(\mathbf{k}) + \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Уравнение неразрывности (4.2) в пространстве Фурье имеет простой вид

$$\mathbf{k} \cdot \hat{v}(\mathbf{k}) = 0 \quad (4.10)$$

и может быть использовано для исключения из уравнения (4.2) члена с давлением. Умножение (4.2) на  $\mathbf{k}$  с учетом (4.10) приводит к выражению

$$\rho^{-1} \hat{p}(\mathbf{k}) = \frac{-\mathbf{k}}{8\pi^3 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{v}(\mathbf{q})(\mathbf{k} - \mathbf{q})] \hat{v}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) d\mathbf{q} - \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}). \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.2) и используя формулу  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  для объединения нелинейных членов, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{v}(\mathbf{k}) + \frac{i}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\mathbf{k} \times (\hat{v}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \times \mathbf{k})]}{k^2} [\hat{v}(\mathbf{q})(\mathbf{k} - \mathbf{q})] d\mathbf{q} = \\ = -\nu k^2 \hat{v}(\mathbf{k}) + \hat{\mathbf{F}}'(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $\hat{\mathbf{F}}'(\mathbf{k}) = k^{-2} [\mathbf{k} \times (\hat{\mathbf{F}} \times \mathbf{k})]$ .

Целью проводимых преобразований является уравнение для энергии, заключенной в данных масштабах (волновых числах), которая получается путем интегрирования квадрата модуля фурье-компонент поля скорости по всем векторам с заданным значением модуля  $|\mathbf{k}| = k$ :

$$E(k) = \int_{\mathbf{k}=|\mathbf{k}|} |\hat{v}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}. \quad (4.13)$$

Соответствующее уравнение получается из (4.12) путем его домножения на  $\hat{v}^*(\mathbf{k})$  и интегрирования в пространстве Фурье по поверхности сферы заданного радиуса  $k$  и имеет следующую структуру:

$$\partial_t E(k) = T(k) - D(k) + F(k). \quad (4.14)$$

Здесь  $T(k)$  — член, получающийся из нелинейного слагаемого уравнения (4.12) и описывающий перенос энергии в заданный масштаб в результате взаимодействия пульсаций скорости различного масштаба,  $D(k) = \nu k^2 E(k)$  и описывает скорость диссипации энергии за счет действия молекулярной вязкости, а  $F(k)$  характеризует приток энергии за счет сил, поддерживающих турбулентное течение (работа внешних сил). Точный вид для  $T(k)$  и  $F(k)$  легко получается из (4.12). Мы не выписываем соответствующих выражений, так как интересующие нас выводы можно сделать исходя из общих соображений об их структуре.

Рассмотрим случай стационарного турбулентного потока. Стационарность означает, что энергия, вводимая в поток за единицу времени, в точности равна энергии, превращающейся в тепло за счет действия вязкости, а  $\partial_t E(k) = 0$  для любого значения волнового числа (для любого масштаба). Следовательно,

$$T(k) - D(k) + F(k) = 0,$$

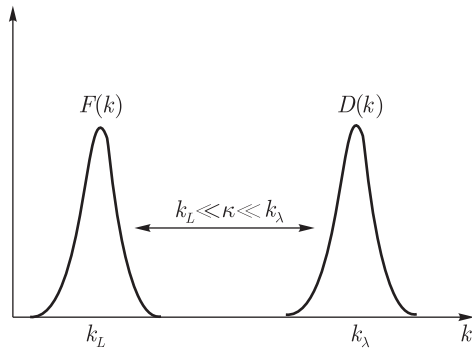


Рис. 4.2

причем приток энергии в течение и ее диссипация происходят в различных масштабах. Ситуацию поясняет рис. 4.2, где схематически изображены функции  $D(k)$  и  $F(k)$ . Приток энергии происходит вблизи волнового числа  $k_L$ , соответствующего макромасштабу турбулентности  $L$ . Диссипация становится эффективной только на малых масштабах (больших волновых числах), так как  $D(k) \sim k^2$  и функция  $D(k)$  локализована вблизи волнового числа  $k_\lambda$  ( $\lambda$  — микромасштаб турбулентности, называемый часто масштабом Колмогорова). Отметим, что площади, заключенные под обеими кривыми, должны быть в точности равны друг другу. Между двумя кривыми остается значительный (тем больший, чем больше число Рейнольдса) интервал масштабов  $k_L \ll k \ll k_\lambda$ , в которых  $D(k) = F(k) = 0$ , а, следовательно, и  $T(k) = 0$ . Этот интервал масштабов называют *инерционным интервалом*, и его присутствие является признаком развитой турбулентности. Поскольку энергия вносится в поток на одном краю инерционного интервала, а выносится — на другом, то она очевидным образом должна быть перенесена вдоль всего интервала. Условие  $T(k) = 0$  означает, что приток в данный масштаб из больших масштабов в точности равен оттоку энергии из данного масштаба в меньшие.

Полезно рассмотреть величину

$$\mathcal{E}(k) = \int_0^k E(k') dk',$$

равную энергии, заключенной во всех масштабах, больших данного ( $k' < k$ ). Соответствующее уравнение получается интегрированием уравнения (4.14) от нуля до текущего значения волнового числа и имеет вид

$$\partial_t \mathcal{E}(k) = \Pi(k) - \int_0^k D(k') dk' + \int_0^k F(k') dk'.$$

Если рассмотреть масштаб, принадлежащий инерционному интервалу, и считать течение стационарным, то

$$\Pi(k) = \Phi = \varepsilon = \text{const.}$$

$\Pi(k)$  есть поток энергии через текущий масштаб  $k$ . Этот поток равен суммарной энергии  $\Phi$ , вносимой в поток за единицу времени на единицу массы. Этот поток равен и скорости диссипации энергии  $\varepsilon$ , то есть энергии, превращающейся в тепло за единицу времени на единицу массы.

Таким образом, мы подошли к ключевому моменту теории мелкомасштабной турбулентности, состоящему в том, что процессы возбуждения течения, нелинейных взаимодействий вихрей и вязкой диссипации, сосуществующие в физическом пространстве, строго разнесены в пространстве масштабов. Первый шаг в понимании проблемы сделал Л. Ричардсон, который выдвинул в 1922 году идею *каскада энергии*, то есть процесса передачи энергии по цепочке от больших вихрей к меньшим. Строгую формулировку проблемы, давшую количественные результаты, предложил А. Н. Колмогоров в серии работ 1941 года [15, 16, 17].

### 4.3. Теория Колмогорова 1941 года (K41)

#### 4.3.1. Анализ размерностей

А. Н. Колмогоров в своей классической работе 1941 года, положившей начало систематическому изучению мелкомасштабной турбулентности, сформулировал две гипотезы, касающиеся статистических свойств *однородной и изотропной* турбулентности при больших числах Рейнольдса.

*1-я гипотеза Колмогорова.* Статистические свойства в инерционном и диссипативном интервале (т. е. на масштабах  $l \ll L$ ) не зависят от способа возбуждения турбулентности и универсальным образом определяются тремя параметрами: скоростью диссипации энергии  $\varepsilon$ , кинематической вязкостью  $\nu$  и самим масштабом  $l$ .

*2-я гипотеза Колмогорова.* Статистические свойства турбулентности в инерционном интервале универсальны и зависят только от скорости диссипации энергии  $\varepsilon$  и масштаба  $l$ .

Эти гипотезы содержат ответ на вопрос, какие величины могут влиять на динамику инерционного интервала. Говоря о статистических свойствах, мы, в первую очередь, имеем в виду распределение энергии между движениями различного масштаба, хотя, конечно же, помним, что поле скорости — это поле случайной величины и чтобы описать его, нужно знать функцию распределения вероятности либо, что то же самое, совокупность всех статистических моментов этой величины.

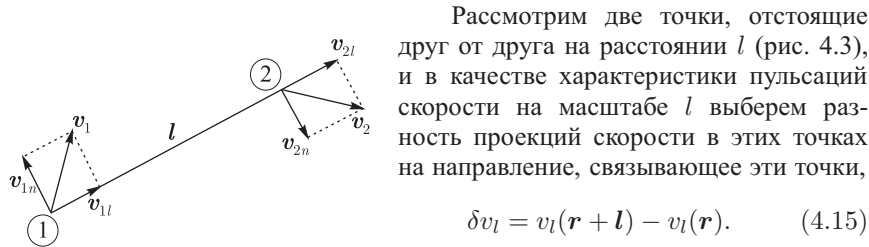


Рис. 4.3

Рассмотрим две точки, отстоящие друг от друга на расстоянии  $l$  (рис. 4.3), и в качестве характеристики пульсаций скорости на масштабе  $l$  выберем разность проекций скорости в этих точках на направление, связывающее эти точки,

$$\delta v_l = v_l(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - v_l(\mathbf{r}). \quad (4.15)$$

Введенная таким образом величина  $\delta v_l$  характеризует продольные пульсации скорости (на связи продольных и поперечных пульсаций мы остановимся ниже). Статистические моменты этой величины

$$S_q(l) = \langle \delta v_l^q \rangle \quad (4.16)$$

называют структурными функциями, и, в силу изотропии течения, они не должны зависеть от направления отрезка  $l$ . Наряду со структурными функциями  $S_q$  рассматривают и структурные функции вида

$$T_q(l) = \langle |\delta v_l|^q \rangle. \quad (4.17)$$

Очевидно, что структурные функции (4.16) и (4.17) четных порядков  $q$  идентичны и отличия появляются только в функциях нечетных порядков.

Вторая гипотеза Колмогорова утверждает, что в инерционном интервале структурные функции зависят только от масштаба и скорости диссипации энергии

$$S_q(l) = f(\varepsilon, l).$$

Далее делается самое сильное предположение, являющееся, по сути, главной гипотезой теории К41. Оно состоит в том, что скорость диссипации энергии считается универсальной константой для заданного течения,

то есть в любой момент времени и в любой точке пространства диссипация энергии за единицу времени на единицу массы равна  $\varepsilon$ . Величина  $\varepsilon$  определяется энергией, вводимой в поток на единицу массы, и характеризует поток энергии, прокачиваемой вдоль всего инерционного интервала до диссипативных масштабов.

Приняв сформулированные гипотезы, можно получить ряд важных результатов, пользуясь только соображениями размерности. Напомним, что, говоря об энергии, мы все время имеем в виду энергию на единицу массы, то есть энергия измеряется в  $m^2/c^2$ . Тогда размерность скорости диссипации энергии есть  $m^2/c^3$ , и для пульсаций скорости можно составить только одну комбинацию величин  $\varepsilon$  и  $l$  с требуемой размерностью ( $m/c$ ).

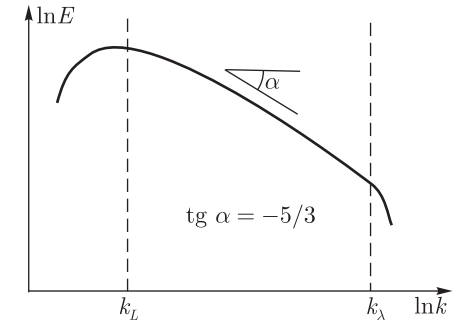


Рис. 4.4

$$\delta v_l \sim (\varepsilon l)^{1/3}. \quad (4.18)$$

Эту зависимость называют законом Колмогорова–Обухова.

Попытка применить соображения размерности к структурным функциям произвольного порядка очевидным образом приводит к формуле

$$S_q(l) \sim (\varepsilon l)^{q/3}. \quad (4.19)$$

Соображения размерности позволяют получить и форму энергетического спектра пульсаций скорости (4.13). Размерность энергии имеет величина  $E(k)dk$ . Следовательно, размерность величины  $E(k)$  есть  $m^3/c^2$ . Поскольку спектр энергии может зависеть только от величин  $\varepsilon$  и  $k$ , то единственно возможная комбинация есть

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (4.20)$$

Формулу (4.20) называют законом Колмогорова, а входящую в нее константу  $C$  — константой Колмогорова.

Чтобы увидеть степенной закон, соответствующую зависимость нужно представить в логарифмических координатах (рис. 4.4). В таком представлении инерционному интервалу соответствует прямолинейный участок спектра, наклон которого равен показателю степени в законе (4.20).

Можно ли оценить диссипативный масштаб  $\lambda$ ? Исходя из первой гипотезы Колмогорова, этот масштаб может зависеть только от скорости диссипации энергии и величины молекулярной вязкости (размерность кинематической вязкости  $[\nu] = m^2/c$ ). Тогда подбор нужной размерности приводит к формуле

$$\lambda \sim (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}. \quad (4.21)$$

Интересно выразить диссипативный (внутренний) масштаб через макропараметры турбулентности. Пусть течение на макромасштабе  $L$  характеризуется скоростью  $U$ . Характеристикой течения является число Рейнольдса  $R = UL/\nu$ . Скорость диссипации энергии, равная скорости подвода энергии в турбулентность, может быть выражена и через макропараметры  $\varepsilon \sim U^3 L^{-1}$ . Тогда

$$\lambda \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \sim \left(\frac{\nu^3 L}{U^3}\right)^{1/4} \sim \left(\frac{\nu^3 L^4}{U^3 L^3}\right)^{1/4} \sim LR^{-3/4}. \quad (4.22)$$

Формула (4.22) дает возможность оценить число степеней свободы, возбужденных в турбулентном течении при заданном числе Рейнольдса. Считая, что  $N \sim (L/\lambda)^3$ , немедленно получаем

$$N \sim \left(\frac{L}{LR^{-3/4}}\right)^3 \sim R^{9/4}. \quad (4.23)$$

Выражение (4.23) может служить оценкой размеров сетки, необходимой для прямого численного моделирования турбулентного течения с заданным числом Рейнольдса.

Важно отметить, что спектру энергии (4.20) отвечает растущий спектр энтропии

$$\Omega(k) \sim k^2 E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{1/3} \quad (4.24)$$

и максимум спектральной плотности энтропии приходится на коротковолновый край инерционного интервала. Таким образом, энергия сосредоточена вблизи энергонесущего масштаба  $L$ , а энтропия — вблизи вязкого масштаба  $\lambda$ . Учитывая, что  $\delta v_l \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3}$ , а  $\delta \omega_l \sim \varepsilon^{1/3} l^{-2/3}$ , введем масштаб, определяемый отношением характерной скорости пульсаций к характерной завихренности

$$\lambda_t = \frac{\delta v_l}{\delta \omega_l} \sim \frac{\varepsilon^{1/3} L^{1/3}}{\varepsilon^{1/3} \lambda^{-2/3}} \sim L^{1/3} \lambda^{2/3}. \quad (4.25)$$

Это и есть введенный выше при обсуждении вида автокорреляционной функции (п.3.1.2) тейлоровский масштаб (3.10), причем оценка (4.25) эквивалентна соотношению (3.11). Подчеркнем еще раз, что  $\lambda \ll \lambda_t \ll L$  и отметим, что тейлоровский масштаб можно интерпретировать как характерный радиус кривизны мгновенной линии тока.

Приведем еще одну оценку, касающуюся закона вырождения энергии в свободно вырождающейся однородной турбулентности. Пусть имеется турбулентный поток, характеризуемый спектром (4.20) и максимальным масштабом  $L$  (в данной оценке важно отсутствие возрастающего участка спектра в длинноволновой области). Внешние силы отсутствуют, и общая энергия потока убывает по мере ее диссипации. Считая, что основная кинетическая энергия содержится в максимальном масштабе ( $E \approx U^2$ ,  $\varepsilon = U^3/L$ ), можно записать

$$d_t E = \varepsilon \approx E^{3/2} L^{-1}.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$E^{-3/2} dE \approx L^{-1} dt$$

и проинтегрировать. В результате получается соотношение

$$E \sim t^{-2}, \quad (4.26)$$

определяющее закон свободного вырождения однородного турбулентного потока при фиксированном масштабе  $L$ .

#### 4.3.2. Уравнения Кармана–Ховарта и закон «4/5»

Методом анализа размерностей удалось получить оценки (4.18)–(4.19), качественно описывающие корреляции скорости в двух точках однородного и изотропного турбулентного течения, отстоящих друг от друга на расстоянии  $l$ . Продолжая следовать работам Колмогорова 1941 года, покажем, что существует и точный результат, касающийся структурной функции третьего порядка.

Рассмотрим двухточечный корреляционный тензор второго ранга

$$B_{ik} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k}) \rangle, \quad (4.27)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости в двух точках, отстоящих на расстоянии  $l$  (см. рис. 4.3). Считаем по-прежнему, что турбулентность однородна и изотропна, а средняя скорость равна нулю.

Введенный тензор, в силу изотропии и однородности потока, может зависеть только от модуля вектора  $\mathbf{l}$ , соединяющего две точки. Введем единичный вектор  $\mathbf{e}$ , направленный вдоль вектора  $\mathbf{l}$ , и запишем общий вид симметричного тензора второго ранга, зависящего от расстояния  $l$ ,

$$B_{ik} = A(l)\delta_{ik} + B(l)e_i e_k. \quad (4.28)$$

Чтобы придать физический смысл функциям  $A(l)$  и  $B(l)$ , направим вектор  $\mathbf{l}$  вдоль одной из осей координат (это возможно, опять же, благодаря изотропии). Компоненту скорости вдоль этой оси обозначим как  $v_l$ , а перпендикулярную компоненту — как  $v_n$ . В таком представлении компонента  $B_{ll}$  равна среднему квадрату относительной скорости частиц в двух точках в направлении друг к другу. Компонента  $B_{nn}$  равна среднему квадрату относительной скорости частиц в перпендикулярном направлении и характеризует, таким образом, вращательное движение частиц относительно друг друга. При выбранном направлении отрезка единичный вектор  $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$  и, согласно (4.28),

$$B_{ll}(l) = A(l) + B(l), \quad B_{nn}(l) = A(l), \quad B_{ln}(l) = 0. \quad (4.29)$$

Используя (4.29), перепишем (4.28) в виде

$$B_{ik} = B_{nn}(l)\delta_{ik} + (B_{ll}(l) - B_{nn}(l))e_i e_k. \quad (4.30)$$

Раскроем произведение в определении (4.27)

$$B_{ik} = \langle v_{2i}v_{2k} \rangle - \langle v_{1i}v_{2k} \rangle - \langle v_{1k}v_{2i} \rangle + \langle v_{1i}v_{1k} \rangle$$

и учтем, что в силу однородности потока одноточечные корреляции не зависят от положения точки

$$\langle v_{2i}v_{2k} \rangle = \langle v_{1i}v_{1k} \rangle = \delta_{ik}\langle v^2 \rangle/3,$$

а в силу изотропии

$$\langle v_{1i}v_{2k} \rangle = \langle v_{1k}v_{2i} \rangle$$

(при перестановке точек местами результат не меняется). Тогда

$$B_{ik} = 2\langle v^2 \rangle \delta_{ik}/3 - 2b_{ik}, \quad (4.31)$$

где  $b_{ik} = \langle v_{1i}v_{2k} \rangle$  есть вспомогательный, симметричный тензор, компоненты которого стремятся к нулю при  $l \rightarrow \infty$  (бесконечно удаленные точки статистически независимы).

Выражение (4.31) продифференцируем по координатам точки 2 и воспользуемся уравнением неразрывности:

$$\partial_{2k}B_{ik} = -2\partial_{2k}b_{ik} = -2\langle v_{1i}\partial_{2k}v_{2k} \rangle = 0. \quad (4.32)$$

Дифференцирование  $B_{ik}$  по координате второй точки эквивалентно дифференцированию по соответствующей проекции вектора  $\mathbf{l}$ , поскольку тензор зависит только от этого вектора. Следовательно,  $\partial_{2k}B_{ik} = \partial_k B_{ik} = 0$ , и, подставляя в эту формулу выражение (4.30), получим

$$\begin{aligned} \partial_k B_{ik} &= \delta_{ik}B'_{nn}(l)\partial_k l + (B'_{ll}(l) - B'_{nn}(l))e_i e_k \partial_k l + \\ &+ (B_{ll}(l) - B_{nn}(l))\partial_k(e_i e_k) = (B'_{ll} + 2(B_{ll} - B_{nn})/l)e_i = 0, \end{aligned}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по  $l$ . При вычислениях было учтено, что

$$\partial_k l = \partial_k \sqrt{x_i^2} = x_k/l = e_k,$$

$$\partial_k e_i = \partial_k(x_i/l) = (\delta_{ik} - e_i e_k)/l,$$

$$\partial_k e_k = 2/l,$$

$$\partial_k(e_i e_k) = e_k \partial_k e_i + e_i \partial_k e_k = 2e_i/l.$$

Таким образом, мы получили уравнение, называемое первым уравнением Кармана–Ховарта [72]

$$B'_{ll} + 2(B_{ll} - B_{nn})/l = 0. \quad (4.33)$$

Это уравнение дает связь между продольными и поперечными корреляциями  $B_{ll}$  и  $B_{nn}$ . Важно подчеркнуть, что при его выводе использовалось только уравнение неразрывности. Уравнение (4.33) перепишем в виде

$$B_{nn} = B_{ll} + lB'_{ll}/2 = (2l)^{-1}\partial_l(l^2 B_{ll}) \quad (4.34)$$

и посмотрим, как выглядит связь между величинами  $B_{ll}$  и  $B_{nn}$  при конкретных степенных законах для корреляций. Пусть  $l$  столь малы, что соответствуют диссипативному интервалу ( $l < \lambda$ ). В этом случае можно ограничиться первым членом ряда Тейлора и, предположив, что  $\delta v_l \sim l$ , записать

$$B_{ll} = cl^2, \quad (4.35)$$

где  $c$  — некоторая константа. Подставляя (4.35) в (4.34), легко получаем, что  $B_{nn} = 2cl^2$ . Следовательно, в диссипативном интервале корреляции связаны как

$$B_{nn} = 2B_{ll}.$$

В инерционном интервале ( $\lambda \ll l \ll L$ ), согласно (4.18), имеем оценку  $B_{ll} = cl^{2/3}$ . С помощью (4.34) вновь получается связь продольных и поперечных корреляций, которая в этом случае имеет вид

$$B_{nn} = (4/3)B_{ll}.$$

Важный вывод, который следует из уравнения (4.33), состоит в том, что при любом степенном поведении корреляционные функции  $B_{ll}$  и  $B_{nn}$  с точностью до постоянного множителя следуют одному и тому же степенному закону.

Попытка написания эволюционного уравнения для корреляционного тензора (4.27) приводит, с учетом (4.31), к выражению

$$\partial_t B_{ik} = -(4/3)\delta_{ik}\varepsilon - 2\partial_t b_{ik}.$$

При вычислении производной по времени от среднего квадрата скорости мы учли, что это есть скорость диссипации энергии

$$\partial_t \langle v^2/2 \rangle = -\varepsilon.$$

Производную по времени от тензора  $b_{ik} = \langle v_{1i}v_{2k} \rangle$  можно определить, используя уравнение Навье–Стокса для производных от скорости

$$\begin{aligned} \partial_t b_{ik} &= \langle v_{2k}\partial_t v_{1i} \rangle + \langle v_{1i}\partial_t v_{2k} \rangle = \\ &= -\partial_{1j} \langle v_{1j}v_{1i}v_{2k} \rangle - \partial_{2j} \langle v_{1i}v_{2k}v_{2j} \rangle - \rho^{-1} (\partial_{1i} \langle p_1 v_{2k} \rangle + \partial_{2k} \langle p_2 v_{1i} \rangle) + \\ &\quad + \nu (\partial_{1jj}^2 \langle v_{1i}v_{2k} \rangle + \partial_{2jj}^2 \langle v_{1i}v_{2k} \rangle). \end{aligned}$$

Двухточечная корреляционная функция давления и скорости равна нулю. Это следует из того, что, в силу изотропии, эта функция должна иметь вид

$$\langle p_1 v_2 \rangle = ef(l),$$

причем ее дивергенция  $\partial_{2k} \langle p_1 v_{2k} \rangle = \langle p_1 \partial_{2k} v_{2k} \rangle = 0$ . Действительно, чтобы удовлетворить последнему требованию, нужно положить  $f(l) = c/l^2$  (тогда  $\partial_{2k} (ce_k/l^2) = c(-2e_k^2/l^3 + 2/l^3) = 0$ ), а так как при  $l \rightarrow 0$  корреляционная функция должна быть конечна, то единственно возможное значение константы есть  $c = 0$ .

Следующий шаг состоит в замене производных по координатам точек 1 и 2 на производные по компонентам вектора  $l$ . Это оправдывается тем, что все корреляционные характеристики в однородном потоке зависят только от этого вектора. При этом  $\partial_{1k} = -\partial_k$ , а  $\partial_{2k} = \partial_k$ . Получаем

$$\partial_t b_{ik} = \partial_j \langle v_{1j}v_{1i}v_{2k} \rangle - \partial_j \langle v_{1i}v_{2k}v_{2j} \rangle + 2\nu \Delta \langle v_{1i}v_{2k} \rangle$$

и, окончательно,

$$\partial_t b_{ik} = \partial_j (b_{ij,k} + b_{kj,i}) + 2\nu \Delta b_{ik}. \quad (4.36)$$

В уравнении появилась новая величина — корреляционный тензор

$$b_{ik,m} = \langle v_{1i}v_{1k}v_{2m} \rangle = -\langle v_{2i}v_{2k}v_{1m} \rangle. \quad (4.37)$$

Ситуация совершенно аналогична той, что имела место при попытках написания замкнутой системы уравнений для одноточечных корреляционных характеристик в подходе Рейнольдса. Точно так же и при написании уравнений для двухточечных корреляционных тензоров нелинейность исходных уравнений неизбежно приводит к появлению тензоров более высокого порядка.

Для того, чтобы прийти к физически понятной статистической характеристике пульсаций скорости третьего порядка (таковой является структурная функция третьего порядка для продольных пульсаций скорости, которая в используемых здесь терминах есть величина  $B_{lll}$ ), введем корреляционный тензор третьего ранга

$$B_{ikm} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})(v_{2m} - v_{1m}) \rangle, \quad (4.38)$$

компоненты которого легко связать с компонентами тензора  $b_{ik,m}$ . Раскрывая произведение в (4.38) и учитывая, что  $\langle v_{1i}v_{1k}v_{1m} \rangle = \langle v_{2i}v_{2k}v_{2m} \rangle = 0$  (среднее значение произведения нечетного числа случайных сомножителей, среднее значение каждого из которых равно нулю), получаем

$$B_{ikm} = 2(b_{ik,m} + b_{km,i} + b_{mi,k}). \quad (4.39)$$

Тензор  $b_{ik,m}$  симметричен по первой паре индексов, относящихся к одной точке, и меняет знак при перестановке точек местами, так как эта перестановка эквивалентна изменению знака  $l$ , а инверсия координат меняет знак тензора третьего ранга. При  $l \rightarrow \infty$  все компоненты тензоров (4.38) и (4.37) должны стремиться к нулю.

Теперь нужно записать общий вид тензора, симметричного по первой паре индексов и зависящего от расстояния  $l$  и компонент единичного вектора  $e$ :

$$b_{ik,m} = C(l)\delta_{ik}e_m + D(l)(\delta_{im}e_k + \delta_{km}e_i) + F(l)e_ie_ke_m. \quad (4.40)$$

Требуется выразить функции  $C(l)$ ,  $D(l)$  и  $F(l)$  через имеющие физический смысл корреляционные функции третьего порядка. Для этого снова воспользуемся уравнением неразрывности, из которого следует, что

$$\partial_{2m} b_{ik,m} = \langle v_{1i}v_{1k}\partial_{2m} v_{2m} \rangle = 0. \quad (4.41)$$

Подставляем в (4.41) выражение (4.40) и, учитывая, что

$$\partial_{2m}(e_i e_k e_m) = 2e_i e_k / l,$$

получаем два уравнения, позволяющие выразить функции  $D(l)$  и  $F(l)$  через  $C(l)$ :

$$D = -C - lC'/2, \quad F = lC' - C.$$

В результате

$$b_{ik,m} = C\delta_{ik}e_m - (C + lC'/2)(\delta_{im}e_k + \delta_{km}e_i) + (lC' - C)e_i e_k e_m,$$

и выражение для корреляционного тензора также включает только одну неизвестную функцию  $C(l)$ :

$$B_{ikm} = -2(lC' + C)(\delta_{ik}e_m + \delta_{im}e_k + \delta_{km}e_i) + 6(lC' - C)e_i e_k e_m. \quad (4.42)$$

Вновь направим вектор  $l$  вдоль одной из осей координат ( $e = (1, 0, 0)$ ) и выпишем компоненты тензора (4.42):

$$B_{lll} = -12C, \quad B_{lnn} = -2(C + lC'), \quad B_{lln} = B_{nnn} = 0. \quad (4.43)$$

Таким образом, отличны от нуля только две компоненты тензора, которые можно связать соотношением

$$B_{lnn} = (lB_{lll})'/6. \quad (4.44)$$

Комбинируя формулы (4.40)–(4.43), выразим вспомогательный тензор  $b_{ik,m}$  через компоненты тензора  $B_{ikm}$  и получим 2-е уравнение Кармана–Ховарта

$$b_{ik,m} = -B_{lll}\delta_{ik}e_m/12 + (lB'_{lll} + 2B_{lll})(\delta_{im}e_k + \delta_{km}e_i)/24 - (lB'_{lll} - B_{lll})e_i e_k e_m/12. \quad (4.45)$$

Еще раз подчеркнем, что при выводе обоих уравнений Кармана–Ховарта использовалось только уравнение непрерывности.

Теперь в уравнение (4.36) можно подставить выражения для тензоров  $b_{ij,k}$  и  $b_{ik}$ . Опуская достаточно длинные вычисления, приведем окончательное уравнение

$$-\frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{2}\partial_t B_{ll} = \frac{1}{6l^4}(l^4 B_{lll})' - \frac{\nu}{l^4}(l^4 B'_{ll})'. \quad (4.46)$$

Рассматривая стационарную или, по крайней мере, квазистационарную турбулентность, когда член  $\partial_t B_{ll}$  все равно много меньше скорости диссипации, можно отбросить слагаемое с производной по времени. Интегрирование (4.46) по  $l$  дает в этом случае уравнение Колмогорова

$$B_{lll} = -\frac{4}{5}\varepsilon l + 6\nu B'_{ll}. \quad (4.47)$$

Константа интегрирования принята равной нулю в силу требования обращения в нуль корреляций при  $l \rightarrow \infty$ .

Уравнение (4.47), как и уравнение (4.46), включает две независимые корреляционные функции и не является достаточным для их нахождения. Попытка написать дополнительное уравнение для корреляционного тензора третьего порядка приведет к уравнению, содержащему тензор четвертого порядка и т. д. Таким образом, снова возникает проблема замыкания, с которой мы уже сталкивались при рассмотрении уравнений для одноточечных моментов турбулентных полей.

Уравнение (4.47) справедливо для всех  $l \ll L$ , то есть и для инерционного, и для диссипативного интервалов. В инерционном интервале проблема замыкания не возникает, так как последним слагаемым, пропорциональным вязкости, можно пренебречь и получить замкнутое уравнение для корреляционной функции третьего порядка

$$B_{lll} = -\frac{4}{5}\varepsilon l. \quad (4.48)$$

Уравнение (4.48), которое часто называют «законом 4/5», остается одним из важнейших результатов, полученных для мелкомасштабной турбулентности. Следует еще раз подчеркнуть, что закон (4.48) представляет собой точный результат, полученный для инерционного интервала только на основе уравнений Навье–Стокса и гипотезы об однородности и изотропности мелкомасштабной турбулентности. Таким образом, среди оценок (4.19) есть одна, справедливость которой является доказанной, а именно,

$$S_3(l) \sim \varepsilon l.$$

Для всех остальных структурных функций формула (4.19) является лишь оценкой, на слабость которой впервые указал Л. Ландау уже в 1942 году. Суть знаменитого замечания Ландау состоит в том, что в правой части формулы стоит скорость диссипации энергии  $\varepsilon$ , которая в действительности не является постоянной, а также представляет собой случайную величину, характеризуемую собственной функцией распределения. В выражение

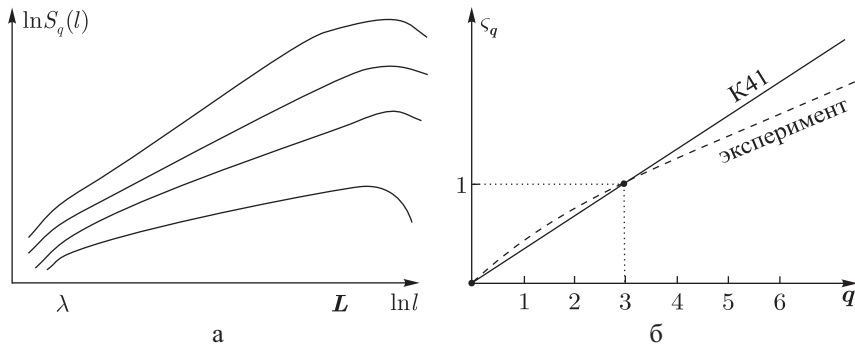


Рис. 4.5

для структурной функции третьего порядка входит собственно среднее значение скорости диссипации, и проблемы среднего значения не возникает. Во всех остальных случаях в оценки входят различные степени случайной величины и, естественно, среднее значение от величины в некоторой степени не есть эта же степень от среднего.

#### 4.4. Логнормальная модель (K62)

Экспериментальные исследования статистических свойств мелкомасштабной турбулентности ведутся, начиная с пятидесятих годов. На первых порах основной интерес представляло экспериментальное подтверждение закона «пяти третей» (4.20) и определение входящей в него константы. В многочисленных экспериментах было подтверждено существование инерционного интервала с распределением энергии пульсаций скорости, близким к закону «5/3». Измерения входящей в закон константы дали значения  $C \approx 1,5$ ,<sup>1</sup> но интерес к точному измерению этой величины упал после того, как стало ясно, что закон (4.20) описывает реальную ситуацию только приблизительно.

Наиболее точные измерения энергетического спектра однородной турбулентности показывают, что в инерционном интервале он подчиняется степенному закону вида

$$E(k) \sim k^{-\alpha} \quad (4.49)$$

с показателем степени  $\alpha = 1,71 \pm 0,02$ . Отличие от пяти третей, на первый взгляд, не велико, но оно принципиально. Более полную картину мож-

<sup>1</sup>Итог этим экспериментам подведен в обзоре А. М. Яглома [33], посвященном 40-летию работ Колмогорова.

но получить, исследуя поведение структурных функций высоких порядков. На практике измеряют значения скорости в двух точках, вычисляют структурные функции (4.16) и, ожидая существования степенных законов вида

$$S_q(l) \sim l^{\zeta_q}, \quad (4.50)$$

строят структурные функции в двойном логарифмическом масштабе. При выполнении (4.50) должна получиться картинка, условно изображенная на рис. 4.5 а, — в инерционном интервале возникают линейные участки, наклон которых дает величину степенных показателей  $\zeta_q$ . Качественно вид получающегося графика для показателей степени представлен на рисунке 4.5 б. Сплошная линия соответствует зависимости (4.17) и помечена надписью «K41». На этой линии выделены две точки, для которых оценка (4.19) является точной. Это начало координат ( $\zeta_0 = 0$ ) и точка  $\zeta_3 = 1$ , соответствующая закону «четырёх пятых» (4.48). Экспериментальная кривая действительно пересекает эти две точки, удаляясь от прямой  $\zeta_q = q/3$  по мере роста порядка  $q$ . Подчеркнем, что измерение структурных функций высоких порядков является чрезвычайно сложной задачей, и только в 90-х годах появились надежные измерения для структурных функций порядка  $q > 10$ . Тем не менее, уже первые измерения структурных функций относительно невысоких порядков подтвердили справедливость замечания Ландау — локальные вариации скорости диссипации энергии нарушают колмогоровский сценарий однородной турбулентности.

Нарушение глобальной однородности турбулентности получило название «перемежаемости». Суть этого явления состоит в том, что в турбулентности даже при сколь угодно больших числах Рейнольдса активные области сосуществуют с пассивными, в которых течение «квазиламинарно».

Первую попытку скорректировать закон (4.19) путем учета статистических свойств поля диссипации энергии сделал сам Колмогоров в 1962 году [74] (эту модель будем называть K62). Для учета структуры поля диссипации энергии Колмогоров ввел в рассмотрение величину  $\varepsilon_l$ , которая представляет собой среднюю скорость диссипации, измеренную внутри объема с характерным размером  $l$  (например, сферы или куба). Соответствующая такому подходу турбулентность получила название *локально-однородной*.

Модифицированная модель Колмогорова держится на двух дополнительных гипотезах. Первая гипотеза — это гипотеза подобия

$$S_q(l) = \langle \delta v_l^q \rangle \sim \langle \varepsilon_l^{q/3} \rangle l^{q/3}, \quad (4.51)$$

обобщающая формулу (4.19) в том смысле, что теперь в правой части стоит не постоянная величина  $\varepsilon$  в степени  $q/3$ , а статистический момент поряд-

ка  $q/3$ , характеризующий структуру случайного поля диссипации энергии на соответствующих масштабах  $l$ .

Гипотезу подобия (4.51) можно записать в другом виде. Если предположить существование степенных законов вида (4.50) и для моментов поля диссипации, то есть

$$\langle \varepsilon_l^q \rangle \sim l^{\tau_q}, \quad (4.52)$$

то гипотеза (4.51) выражается в виде простого соотношения между показателями степени в (4.50) и (4.51):

$$\varsigma_q = q/3 + \tau_q/3. \quad (4.53)$$

Очевидно, что (4.53) возвращает нас к модели K41, если  $\tau_q = 0$  для любых  $q$ .

Вторая гипотеза K62 касается вида функции распределения вероятности для величины  $\varepsilon_l$ . Обычно в качестве простейшей вероятностной модели рассматривается нормальное распределение, однако в нашем случае оно не годится, так как диссипация — величина сугубо положительная, а хвост нормального распределения уходит в область отрицательных значений. Колмогоров предложил избежать эту трудность путем рассмотрения логнормального распределения (по нормальному закону распределен логарифм диссипации энергии)

$$P(\varepsilon_l) = ce^{-\frac{(\ln \varepsilon - a)^2}{2\sigma_l^2}}. \quad (4.54)$$

Здесь  $P$  — функция распределения вероятности,  $a = \ln \bar{\varepsilon}$ ,  $\sigma_l^2$  — дисперсия, равная на масштабе  $l$  величине

$$\sigma_l^2 = A + \mu \ln(L/l). \quad (4.55)$$

Логнормальная модель приводит к следующим выражениям для показателей степени:

$$\tau_q = \mu q(1 - q)/2, \quad \varsigma_q = q/3 + \mu q(3 - q)/18. \quad (4.56)$$

Величина  $\mu$ , называемая коэффициентом перемежаемости, имеет простой физический смысл — с точностью до знака это показатель степени для момента второго порядка поля диссипации энергии ( $\tau_2 = -\mu$ ), т. е.

$$\langle \varepsilon_l^2 \rangle \sim l^{-\mu}.$$

Связанный со вторым моментом поля диссипации шестой момент поля скорости также позволяет просто определить коэффициент перемежаемости. Действительно, согласно (4.56),

$$\varsigma_6 = 2 - \mu,$$

то есть коэффициент перемежаемости равен отклонению степенного показателя  $\varsigma_6$  от значения, следующего из модели однородной турбулентности K41.

Гипотеза о логнормальном распределении была опровергнута и экспериментально, и теоретически. Экспериментальные измерения функции распределения вероятности показывают, что в координатах  $(\ln \varepsilon, \ln P)$  функция распределения имеет несимметричный вид, в то время как логнормальное распределение в таких координатах должно приводить к параболе.

Относительно свойств функции  $\varsigma(q)$  было доказано два утверждения [69]. Во-первых,  $\varsigma(q)$  — функция выпуклая, т. е.  $\varsigma'' < 0$ , и, во-вторых,  $\varsigma_{q+1} \geq \varsigma_q$  для любых  $q$ . Формула (4.56) удовлетворяет первому требованию (а также обеспечивает выполнение условий  $\varsigma_0 = 0$  и  $\varsigma_3 = 1$ ), но не удовлетворяет второму — при некотором значении  $q$  функция (это парабола) имеет максимум, после которого значения  $\varsigma(q)$  начинают убывать.

В отличие от второй гипотезы, гипотеза подобия (4.51) используется до настоящего времени, хотя ее интерпретация претерпела существенные изменения. Дело в том, что в формулировке (4.51) эта гипотеза несет в себе два противоречия. Во-первых, левая часть выражения содержит величину, относящуюся к инерционному интервалу, а правая — величину, эффективную только в диссипативном. Во-вторых, диссипация энергии есть величина сугубо положительная, а пульсации скорости — нет. В таком случае трудно рассчитывать, что статистические свойства этих величин одинаковы, а именно в этом и состоит суть гипотезы подобия.

Избежать отмеченных противоречий можно следующим образом. Выделим в пространстве, занятом турбулентным течением, произвольный объем с характерным размером  $l$  и рассмотрим изменения плотности энергии пульсаций скорости в этом объеме:

$$\begin{aligned} \partial_t E_l &= \partial_t \frac{1}{V} \int_V \frac{v^2}{2} d\mathbf{r} = \\ &= -\frac{1}{V} \int_V \mathbf{v}(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} d\mathbf{r} - \frac{1}{V\rho} \int_V \mathbf{v} \nabla P d\mathbf{r} + \frac{\nu}{V} \int_V \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} d\mathbf{r} + \frac{1}{V} \int_V \mathbf{v} f d\mathbf{r} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{V} \int_V \operatorname{div} \left[ \left( \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) \mathbf{v} \right] d\mathbf{r} - \varepsilon_l + q_l = \\
&= \frac{1}{V} \oint_S \left( \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} - \varepsilon_l + q_l = \eta_l - \varepsilon_l + q_l.
\end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon_l$  есть диссипация энергии за единицу времени на единицу массы,  $q_l$  — приток энергии за счет работы внешних сил (также за единицу времени и на единицу массы). Первое слагаемое в правой части, обозначенное как  $\eta_l$ , описывает приток энергии в выделенный объем через его поверхность.

Из скорости диссипации энергии можно выделить ее среднее значение  $\varepsilon_l = \bar{\varepsilon} + \varepsilon'_l$ . Если рассматривается стационарно возбуждаемая турбулентность, то средняя скорость диссипации должна быть равна плотности притока энергии за счет внешних сил, т. е.  $q_l = \bar{\varepsilon}$ . Тогда

$$\partial_t E_l = \eta_l - \varepsilon'_l, \quad (4.57)$$

то есть изменения энергии в выделенном объеме определяются потоком энергии через его поверхность и вариациями диссипации. Избежать отмеченных выше противоречий можно путем рассмотрения не скорости диссипации энергии в объеме заданного масштаба, а потоков энергии через поверхность этого объема. Последний определяется действием нелинейного члена в уравнении Навье–Стокса, то есть именно того члена, который определяет нелинейную динамику потока при больших числах Рейнольдса.

Именно величина  $\eta_l$  и будет использована в дальнейшем как характеристика потоков энергии на различных масштабах движения. Необходимо отметить, что переход от использования  $\varepsilon_l$  к  $\eta_l$  произошел совсем недавно, а традиция применения в моделях мелкомасштабной турбулентности скорости диссипации энергии столь крепка, что часто даже в работах, где реально пользуются величиной  $\eta_l$ , авторы, тем не менее, используют термин «скорость диссипации энергии».

## 4.5. Фракталы и турбулентность

Колмогоровская модель однородной турбулентности (К41) подразумевает равномерное заполнение пространства вихрями каждого масштаба. Такую структуру турбулентности иллюстрирует рис. 4.6 а, на котором схематически изображен каскад энергии от вихрей большего масштаба к вихрям меньшего масштаба и для простоты представлена ситуация, когда каждый

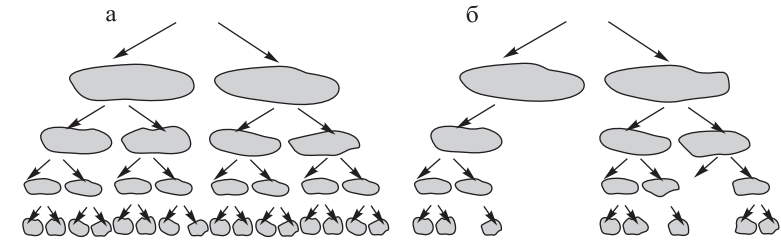


Рис. 4.6

вихрь данного масштаба имеет под собой два вихря меньшего. При этом вихри каждого масштаба занимают все пространство (на рисунке оно одномерно).

Иная картина соответствует турбулентности с перемежаемостью (рис. 4.6 б). В рамках аналогичной схемы в этом случае часть вихрей не получает энергию от вихрей верхнего уровня. На следующем уровне энергия оставшихся (активных) вихрей вновь передается только части вихрей и так далее. В результате в пространстве образуется многомасштабная система активных и пассивных областей, которая по построению представляет собой фрактальное множество (см. главу 2). Идея использования фракталов для описания структуры поля диссипации энергии впервые была высказана в работе Новикова и Стьюарта в 1964 г. [22]. Простейшая динамическая модель инерционного интервала, приводящая к фракталам, была предложена в работе [68]. Эта модель, названная авторами  $\beta$ -моделью, описана в следующем параграфе.

Фракталы принесли в теорию турбулентности еще одну важную идею — идею о неоднозначности масштабных показателей, иначе говоря, идею о сосуществовании в развитых турбулентных полях подмножеств с различными законами масштабного подобия (скейлинга).

Напомним, что уравнения Навье–Стокса подчиняются шести принципам инвариантности, то есть допускают шесть видов преобразований, при которых любое решение уравнений  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  остается решением этих уравнений:

1. пространственный сдвиг,
2. сдвиг по времени,
3. преобразование Галилея,
4. четность,

5. вращение,
6. масштабная инвариантность (скейлинг).

Последнее свойство означает, что уравнения Навье–Стокса инвариантны к преобразованию

$$t, \mathbf{r}, \mathbf{v} \mapsto l^{1+\alpha}t, l\mathbf{r}, l^{-\alpha}\mathbf{v}.$$

Действительно, такое преобразование приводит к появлению в уравнении движения следующих множителей:

$$l^{-2\alpha-1}\partial_t\mathbf{v} + l^{-2\alpha-1}[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \rho^{-1}\nabla P] = \nu l^{-\alpha-2}\Delta\mathbf{v}.$$

При конечной вязкости инвариантность (подобие) обеспечивается единственно возможным решением  $\alpha = 1$ , эквивалентным требованию постоянства числа Рейнольдса (во сколько раз увеличивается масштаб, во столько же раз должна быть уменьшена скорость). Однако при  $\nu \rightarrow 0$  масштабное подобие обеспечивается любым  $\alpha$ . К41 дает решение  $\alpha = 1/3$ , монофрактальная модель типа  $\beta$ -модели приводит к другому, но также единственному решению. Бифрактальная модель (параграф 4.5.2) предполагает сосуществование в потоке двух подмножеств с различными законами подобия (различными  $\alpha$ ), а мультифрактальная модель (параграф 4.5.3) рассматривает непрерывную последовательность таких подмножеств, приводя к понятию мультифрактального спектра.

#### 4.5.1. $\beta$ -модель

Обратимся к турбулентности в кубической области и рассмотрим последовательность масштабов

$$l_n = l_0 2^{-n}.$$

На каждом масштабе  $n$  исходная область разбивается на кубики с ребром  $l_n$ , общее число которых есть  $N = (l_0/l_n)^3 = 2^{3n}$ . Следуя схеме рис. 4.6 б, будем считать, что при переходе к каждому следующему масштабу активной остается только заданная часть кубиков  $\beta$ , причем эта часть есть величина постоянная, являющаяся параметром модели. Двумерная картинка, соответствующая такому построению с  $\beta = 3/4$ , представлена на рис. 4.7.

На масштабе  $n$  число активных вихрей есть  $M = N\beta_n$ , где

$$\beta_n = \beta^n = (l_0/l_n)^{D-3} = 2^{n(D-3)}, \quad (4.58)$$

а  $D$  есть фрактальная размерность активной области. Величина  $d = 3 - D$ , равная разности размерности пространства и размерности фрактального множества, называется коразмерностью и просто связана с параметром  $\beta$ :

$$d = \ln 2 / \ln \beta. \quad (4.59)$$

Рассмотрим теперь каскад энергии в такой модели. Характерное значение пульсации скорости на масштабе  $l_n$  обозначим как  $\delta v_n$ . Тогда характерное время (время оборота вихря соответствующего масштаба) есть  $t_n \sim l_n / \delta v_n$ . При сплошном заполнении пространства (случай однородной турбулентности) плотность энергии пульсаций масштаба  $n$

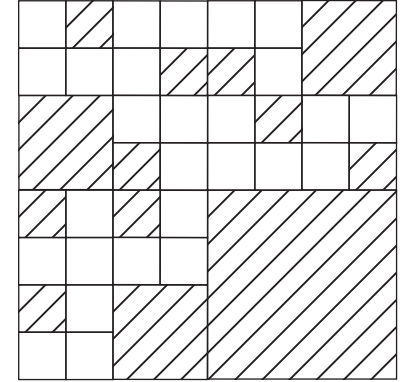


Рис. 4.7

$$E_n \sim \delta v_n^2, \quad (4.60)$$

а скорость переноса энергии через данный масштаб есть

$$\varepsilon_n \sim E_n / t_n \sim \delta v_n^3 / l_n. \quad (4.61)$$

Тогда из гипотезы постоянства потока энергии в любом масштабе, относящемся к инерционному интервалу,

$$\varepsilon_n = \bar{\varepsilon} = \text{const}, \quad (4.62)$$

немедленно получается колмогоровское выражение

$$\delta v_n \sim (l_n \bar{\varepsilon})^{1/3}. \quad (4.63)$$

В  $\beta$ -модели энергия данного масштаба сосредоточена только в активной части потока и средняя плотность энергии на этом масштабе равна

$$E_n \sim \delta v_n^2 \beta_n. \quad (4.64)$$

Гипотеза (4.62) остается в силе — поток энергии по-прежнему постоянен, но по мере продвижения к малым масштабам он сосредотачивается все в меньшей части пространства. Следовательно,

$$\varepsilon_n \sim E_n / t_n \sim \beta^n \delta v_n^3 l_n^{-1} = \bar{\varepsilon}, \quad (4.65)$$

а вместо (4.63) получается следующая оценка для пульсаций скорости:

$$\delta v_n \sim (l_n \bar{\varepsilon})^{1/3} \beta^{-n/3} \sim \bar{\varepsilon}^{1/3} l_n^{(D-2)/3}. \quad (4.66)$$

Очевидно, что фрактальная размерность  $D$  не может быть меньше двух, так как в этом случае интенсивность пульсаций скорости будет нарастать с уменьшением масштабов.

Получим теперь оценку для структурных функций произвольного порядка. Имеем

$$S_q(l_n) = \langle \delta v_l^q \rangle \sim \beta_n \delta v_n^q \sim \bar{\varepsilon}^{q/3} l_n^{q/3 + (3-D)(3-q)/3} \quad (4.67)$$

или

$$\varsigma_q = \frac{q}{3} + \frac{(3-D)(3-q)}{3}. \quad (4.68)$$

В отличие от логнормальной модели, которая дает квадратичную поправку к колмогоровскому закону  $q/3$  для масштабных показателей,  $\beta$ -модель дала линейную поправку, которая удовлетворяет условию  $\varsigma_3 = 1$ , но нарушает требование  $\varsigma_0 = 0$ .

#### 4.5.2. Бифрактальная модель

В основе  $\beta$ -модели лежит представление о турбулентном поле скоростей как об однородном фрактале, характеризуемом единственным параметром. Даваемый этой моделью результат представляется разумным для больших  $q$ , где линейная зависимость  $\varsigma(q)$  хорошо согласуется с известными экспериментальными данными, однако вступает в явные противоречия и с экспериментальными данными, и с теоретическими соображениями при  $q \rightarrow 0$ . Проблема возникает из-за того, что модель, разделяя пространство на активные и пассивные области, оперирует только полярными состояниями (белой и черной краской, опуская все оттенки серого). Этот недостаток особенно явно проявляется в моментах низших порядков, так как в реальной турбулентности абсолютно пассивных областей нет, а именно они уводят кривую  $\varsigma(q)$  из начала координат.

Среди попыток усовершенствования  $\beta$ -модели можно выделить две. Первая — это так называемая случайная  $\beta$ -модель [43]. Если в стандартной  $\beta$ -модели области делятся на активные и пассивные, т.е. вероятность того, что турбулентность в данной точке существует, равна либо нулю, либо единице, то в случайной  $\beta$ -модели вводятся два дополнительных параметра  $p_1$  и  $p_2$ , определяющие вероятность существования турбулентности при очередном дроблении на более активную и менее активную части.

Остановимся более подробно на второй модификации  $\beta$ -модели, получившей название бифрактальной модели. Идея этой модели состоит в том,

что предполагается сосуществование двух фрактальных подмножеств с различными законами скейлинга вида (4.66) и соответствующими размерностями  $D_1$  и  $D_2$ . Для пульсаций скорости на масштабе  $n$  получаем оценку

$$\delta v_n \sim \mu_1 l_n^{\alpha_1} P_1 + \mu_2 l_n^{\alpha_2} P_2,$$

где  $\mu_i$  — некоторые числовые множители, а вероятности появления элементов подмножеств определяются точно так же, как в предыдущем параграфе, и равны  $P_i = \beta_i^n = (l_n/l_0)^{3-D_i}$ . В результате для пульсаций скорости имеем

$$\delta v_n \sim \mu_1 (l_n/l_0)^{\alpha_1+3-D_1} + \mu_2 (l_n/l_0)^{\alpha_2+3-D_2},$$

а для структурных функций произвольного порядка

$$S_q(l_n) = \langle \delta v_l^q \rangle \sim \mu_1 l_n^{q\alpha_1} P_1 + \mu_2 l_n^{q\alpha_2} P_2 \sim \mu_1 (l_n/l_0)^{q\alpha_1+3-D_1} + \mu_2 (l_n/l_0)^{q\alpha_2+3-D_2}. \quad (4.69)$$

Нас интересует вид масштабных множителей в степенных законах  $S_q(l) \sim l^{\varsigma_q}$ . Поскольку  $(l_n/l_0)$  есть величина малая, то определяющий вклад в выражении (4.69) дает слагаемое с наименьшим показателем степени. Из этого следует, что

$$\varsigma_q = \min(q\alpha_1 + 3 - D_1, q\alpha_2 + 3 - D_2). \quad (4.70)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда одно из двух подмножеств представляет собой однородное колмогоровское поле ( $D_1 = 3$ ,  $\alpha_1 = 1/3$ ), а второе — фрактальное ( $2 < D_2 < 3$ ,  $\alpha_2 = (D_2 - 2)/3$ ). Условие (4.70) приводит к

$$\varsigma_q = \begin{cases} q/3, & \text{при } q \leq 3, \\ q/3 + (3 - D_2)(3 - q)/3, & \text{при } q > 3. \end{cases} \quad (4.71)$$

Полученный результат иллюстрирует рис. 4.8, на котором показаны решения, соответствующие K41,  $\beta$ -модели и их комбинации (4.71), к которой приводит бифрактальная модель.

#### 4.5.3. Мультифрактальная модель

Естественным обобщением описанной выше бифрактальной модели является мультифрактальная модель, которая основана на предположении, что

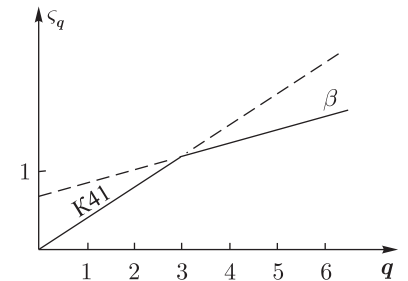


Рис. 4.8

в турбулентности существует непрерывная последовательность подмножеств, каждое из которых характеризуется своим показателем  $\alpha$ . Значения  $\alpha$  лежат в интервале  $\alpha_{\min} < \alpha < \alpha_{\max}$ .

Структурные функции получают вклад от всех подмножеств и определяются интегралами

$$S_q = \langle \delta v_l^q \rangle \sim \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} (l/l_0)^{q\alpha} P(\alpha) d\alpha,$$

в которых распределение вероятности записывается в виде  $P(\alpha) \sim (l/l_0)^{-f(\alpha)}$ . Тогда

$$S_q \sim \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} (l/l_0)^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha. \quad (4.72)$$

Поскольку  $l/l_0 \ll 1$ , то наибольший вклад в интеграл дает составляющая с минимальным показателем степени. Следовательно,

$$\varsigma_q = \min(q\alpha - f(\alpha)). \quad (4.73)$$

Условие минимума дает

$$q = f'(\alpha). \quad (4.74)$$

В такой модели  $\alpha$  есть локальная характеристика скейлинговых свойств, а функция  $f(\alpha)$ , называемая мультифрактальным спектром, описывает глобальную природу распределения областей с различным скейлингом. Очевидно, что мультифрактальная модель имеет, по сути, бесконечное число параметров и может описать любую экспериментально обнаруженную зависимость  $\varsigma(q)$ .

Рассмотрим алгоритм вычисления мультифрактального спектра. Пусть имеется положительно-определенная величина  $\xi$  (это может быть плотность энергии, энтропии, скорости диссипации энергии и т.д.). Исследуемую область разобьем на кубики с ребром  $l$  (всего  $N$  кубиков) и введем величины

$$\rho_i = \frac{\xi_i}{\sum_{i=1}^N \xi_i},$$

где  $\xi_i$  есть среднее по кубу  $i$  значение рассматриваемой величины. Определим структурные функции

$$S_q = \sum_i \rho_i^q \quad (4.75)$$

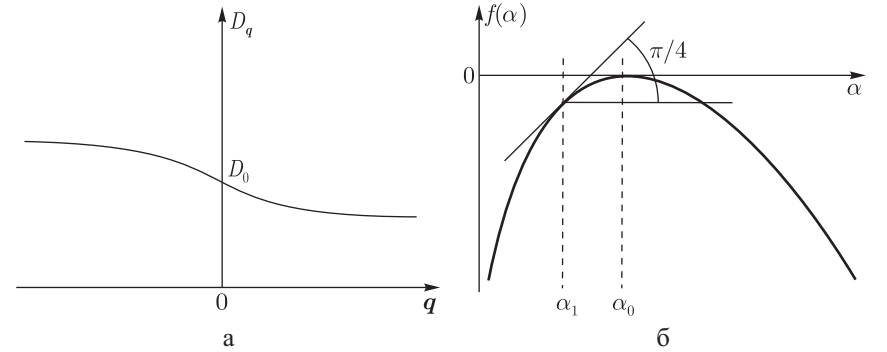


Рис. 4.9

и вспомним введенное в параграфе 2.6.3 понятие обобщенной размерности, которая есть

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_i \rho_i^q}{(q-1) \ln l}. \quad (4.76)$$

Исходя из мультифрактальной структуры рассматриваемого поля, то есть считая, что в различных точках пространства исследуемая величина подчиняется масштабному закону типа  $\rho(l) \sim l^\alpha$  с различными значениями показателя  $\alpha$ , структурные функции можно записать в виде (4.72), а именно,

$$S_q \sim \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} l^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha. \quad (4.77)$$

При  $l \rightarrow 0$  в интеграле (4.77) доминирующую роль играют области, обеспечивающие минимальное значение показателя степени. Следовательно, значение величины  $\varsigma_q$  определяется условиями (4.73)–(4.74).

Пусть  $\tilde{\alpha}(q)$  есть значение  $\alpha$ , обеспечивающее условие минимума (4.74) для заданного значения  $q$ . Тогда

$$S_q \sim l^{q\tilde{\alpha} - f(\tilde{\alpha})}.$$

Согласно определению (4.76)

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln S_q}{(q-1) \ln l} \cong \frac{q\tilde{\alpha} - f(\tilde{\alpha})}{(q-1)}$$

или

$$f(\tilde{\alpha}) = q\tilde{\alpha}(q) - D_q(q-1). \quad (4.78)$$

Выражение (4.78) дифференцируем по  $q$ . Учитывая, что  $d_q f = d_\alpha f d_q \alpha$  и условие (4.74), получаем

$$\tilde{\alpha}(q) = d_q [(q-1) D_q]. \quad (4.79)$$

Таким образом, алгоритм вычисления мультифрактального спектра состоит в следующем. Имея измерения  $\xi_i$ , по формуле (4.76) вычисляют размерность  $D(q)$  для различных значений  $q$  (как положительных, так и отрицательных). Затем по формуле (4.79) определяют значения  $\tilde{\alpha}(q)$ , обеспечивающие минимум (4.73) для данного  $q$ . После этого по формуле (4.78) вычисляют спектр  $f(\alpha)$ .

Типичный вид функций  $D(q)$  и  $f(\alpha)$  показан на рис. 4.9. Функция  $D(q)$  пересекает ось ординат в точке, дающей размерность пространства (три, если речь идет об обычном трехмерном потоке, либо два, если исследуется двумерная картина). На графике  $f(\alpha)$  точка максимума соответствует моменту нулевого порядка ( $f'(\alpha) = q = 0$ ). Абсцисса этой точки, обозначенная на рисунке как  $\alpha_0$ , дает среднее значение показателя скейлинга  $\alpha$ . Наиболее вероятное значение величины  $\alpha$  дает точка  $\alpha_1$ , определяющая точку кривой, в которой  $q = f' = 1$ .

#### 4.6. Логпуассоновские модели

В этом разделе мы рассмотрим модели последнего поколения, возникшие в середине 90-х годов. Первой описана модель, предложенная Ше и Левеком в 1994 году [101]. Основанная на трех гипотезах, из которых две казались не очень убедительными, модель дала простую формулу для зависимости  $\varsigma_q$ . По счастливому стечению обстоятельств, в это же время группой итальянских и французских исследователей экспериментально был обнаружен любопытный факт, получивший название *расширенной автомодельности* [42], который позволил существенно повысить точность экспериментального определения показателей  $\varsigma_q$  для структурных функций высоких порядков. Новые экспериментальные результаты удивительно хорошо совпали с формулой Ше–Левека. Существенное обобщение этой модели было сделано Б. Дюбрюль [56], которая включила в модель и идею расширенной автомодельности. Расширенной автомодельности посвящен следующий параграф, а модель Дюбрюль описана в последнем параграфе этого раздела.

##### 4.6.1. Модель Ше–Левека

Модель Ше–Левека держится на трех гипотезах. Первая — это гипотеза подобия, введенная Колмогоровым в модели K62

$$S_q(l) = \langle \delta v_l^q \rangle \sim \langle \varepsilon_l^{q/3} \rangle l^{q/3}, \quad (4.80)$$

которая записывалась выше и в виде

$$\varsigma_q = q/3 + \tau_{q/3}, \quad (4.81)$$

предполагающем существование степенного закона  $\langle \varepsilon_l^q \rangle \sim l^{\tau_q}$  для статистических моментов поля диссипации энергии.

Модель содержит в себе и идею мультифрактальности развитой турбулентности. Напомним, что основной (качественный) вывод из мультифрактального подхода к проблеме мелкомасштабной турбулентности состоит в том, что в потоке сосуществуют области с различными законами скейлинга и что для моментов (структурных функций) различного порядка определяющую роль играют области с различным скейлингом. В рассматриваемой модели Ше–Левека считается, что диссипация энергии  $\varepsilon_l$  характеризуется «иерархией флуктуирующих структур»  $\varepsilon_l^{(q)}$ , которые определяются как отношение последующих моментов поля диссипации

$$\varepsilon_l^{(q)} = \frac{\langle \varepsilon_l^{q+1} \rangle}{\langle \varepsilon_l^q \rangle}. \quad (4.82)$$

Последовательность относительных моментов  $\varepsilon_l^{(q)}$  ограничена, с одной стороны, членом  $\varepsilon_l^{(0)}$ , который соответствует среднему значению скорости диссипации ( $\varepsilon_l^{(0)} = \bar{\varepsilon}$ ), и членом

$$\varepsilon_l^{(\infty)} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\langle \varepsilon_l^{q+1} \rangle}{\langle \varepsilon_l^q \rangle}, \quad (4.83)$$

с другой стороны. Относительные моменты (4.82) удобны тем, что все они имеют размерность скорости диссипации. Поле диссипации крайне неоднородно и формируется структурами с различными скейлинговыми свойствами. Чем больше номер относительного момента  $q$ , тем более неоднородные структуры он описывает. Считается, что предел последовательности (4.83) существует и определяется видом предельных диссипативных структур, в которых скорость диссипации достигает экстремально больших значений. Исходя из экспериментальных наблюдений последних лет, авторы модели предположили, что эти предельные структуры имеют вид вихревых нитей с размерностью  $D = 1$ .

Две оставшиеся гипотезы касаются свойств относительных моментов  $\varepsilon_l^{(q)}$ . Гипотеза 2 вводит универсальную связь между соседними относительными моментами

$$\varepsilon_l^{(q+1)} = A_q \varepsilon_l^{(q)\beta} \varepsilon_l^{(\infty)(1-\beta)}. \quad (4.84)$$

Соотношение включает неизвестный пока параметр  $\beta$  и является, пожалуй, самым сильным предположением, сделанным при построении модели. Ясно, что любая гипотеза относительно связи статистических моментов различных порядков есть, по сути, гипотеза относительно функции распределения случайной величины, моменты которой рассматриваются. Забегая вперед, скажем, что гипотеза (4.84) подразумевает логпуассоновскую функцию распределения вероятности [56].

Третья гипотеза касается величины  $\varepsilon_l^{(\infty)}$ . Предполагается, что она подчиняется степенному закону

$$\varepsilon_l^{(\infty)} \sim l^{-2/3}. \quad (4.85)$$

Физическая мотивировка (4.85) состоит в следующем. Как указывалось выше, величина  $\varepsilon_l^{(\infty)}$  зависит от предельных диссипативных структур и имеет размерность скорости диссипации энергии. Следовательно, из размерных соображений,

$$\varepsilon_l^{(\infty)} \sim \delta E^\infty / t_l,$$

где  $\delta E^\infty$  есть плотность энергии, доступной диссипации в тех нитевидных структурах, о которых идет речь. Считается, что в этих диссипативных структурах имеет место квазиразрыв, то есть независимо от масштаба  $\delta v_l \approx \delta v_0$  и энергия не зависит от масштаба  $l$ . Масштаб времени принимается колмогоровским ( $t_l \sim \bar{\varepsilon}^{-1/3} l^{2/3}$ ), что приводит к оценке

$$\varepsilon_l^{(\infty)} \sim t_l^{-1} \sim l^{-2/3}.$$

На основе введенных гипотез можно получить выражение для структурных функций поля диссипации, а затем и поля скорости. Из третьей гипотезы (4.85) следует, что при  $q \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_l^{(q)} = \frac{\langle \varepsilon_l^{q+1} \rangle}{\langle \varepsilon_l^q \rangle} \sim \frac{l^{\tau_{q+1}}}{l^{\tau_q}} \sim l^{-2/3}$$

и, следовательно, при больших  $q$

$$\tau_q = -2q/3 + C. \quad (4.86)$$

Пользуясь представлениями о фрактальной структуре с размерностью  $D$ , можно записать (по-прежнему для больших  $q$ )

$$\langle \varepsilon_l^q \rangle \sim l^{-2q/3} l^{3-D},$$

откуда следует, что константа  $C$  имеет смысл коразмерности, а поскольку сделано предположение о том, что структуры есть нити, то их коразмерность равна двум. Таким образом,  $C = 2$ .

Для произвольных значений  $q$  к выражению (4.86) следует добавить функцию, вид которой определяется с помощью второй гипотезы. Итак,

$$\tau_q = f(q) - 2q/3 + C, \quad (4.87)$$

причем  $f(q) \rightarrow 0$  при  $q \rightarrow \infty$ . Выражение (4.84) перепишем в виде

$$\frac{\langle \varepsilon_l^{q+2} \rangle}{\langle \varepsilon_l^{q+1} \rangle} = A_q \left( \frac{\langle \varepsilon_l^{q+1} \rangle}{\langle \varepsilon_l^q \rangle} \right)^\beta \varepsilon_l^{(\infty)(1-\beta)},$$

эквивалентном уравнению

$$\tau_{q+2} = (1 + \beta)\tau_{q+1} - \beta\tau_q - 2(1 - \beta)/3.$$

Пользуясь формулой (4.87), получаем уравнение для функции  $f(q)$

$$f(q+2) - (1 + \beta)f(q+1) + \beta f(q) = 0, \quad (4.88)$$

решение которого есть  $f(q) = \alpha\beta^q$ , и, следовательно,

$$\tau_q = \alpha\beta^q - 2q/3 + C.$$

Входящие в решение константы определяются из условий  $\tau_0 = \tau_1 = 0$  ( $\langle \varepsilon_l^0 \rangle = 1$ ,  $\langle \varepsilon_l^1 \rangle = \bar{\varepsilon} \sim l^0$ ). Из первого условия

$$\alpha = -C = -2,$$

из второго —

$$\beta = \frac{C - 2/3}{C} = \frac{2}{3}.$$

Окончательно имеем

$$\tau_q = -2q/3 + 2(1 - (2/3)^q), \quad (4.89)$$

а пользуясь первой гипотезой — гипотезой подобия K62 (4.81), получаем искомую формулу для показателей степени структурных функций поля скорости

$$\varsigma_q = q/9 + 2(1 - (2/3)^{q/3}). \quad (4.90)$$

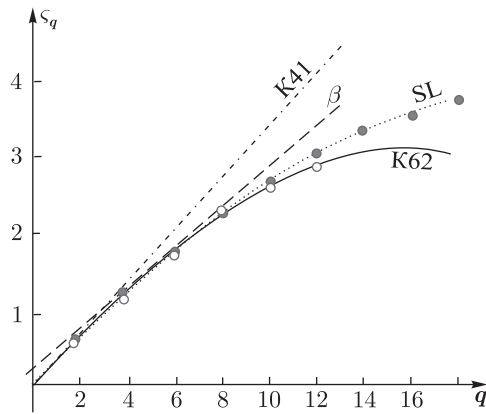


Рис. 4.10

Модель Ше–Левека претендует на то, что она лишена параметров. Это не совсем так, поскольку лежащие в ее основе гипотезы содержат в себе количественные характеристики (например, степень две трети в гипотезе 3). Тем не менее, полученная формула замечательным образом воспроизводит экспериментальные данные для величин  $\zeta_q$ . На рис. 4.10 экспериментальные данные (точки), взятые из различных работ, приведены вместе с кривыми, соответствующими всем рассмотренным нами моделям.

#### 4.6.2. Расширенная автомодельность

Расширенная автомодельность (в оригинале — Extended Self Similarity, давшая уже устоявшуюся аббревиатуру ESS, которой мы также будем пользоваться) — это экспериментально установленный факт, не нашедший еще достаточного теоретического осмысления.

Первые результаты были получены при измерениях свойств мелкомасштабной турбулентности в аэродинамической трубе и опубликованы в работе [42]. Цель работы состояла в изучении свойств структурных функций  $S_q(l)$  и  $T_q(l) = \langle |\delta v_l|^q \rangle$  (4.17). Во-первых, в этой работе было показано, что функции  $T_q$  статистически более устойчивы (для их определения требуется меньшее число реализаций) и подчиняются тем же степенным законам, что и функции  $S_q$  (речь идет о функциях нечетных порядков, поскольку для четных функции просто совпадают). Во-вторых, была обнаружена интересная связь между структурными функциями различных порядков.

Напомним, что для определения степенных показателей  $\zeta_q$  обычно используют двойные логарифмические координаты, откладывая логарифм соответствующей структурной функции в зависимости от логарифма масштаба. На графиках выделяют прямолинейный участок и, считая, что именно он соответствует инерционному интервалу, определяют по его наклону показатель  $\zeta_q$ . Чем выше порядок структурной функции, тем короче и менее выраженным становится прямолинейный участок на графике.

На рис. 4.11 показаны результаты измерения структурной функции второго порядка, полученные для течения в аэродинамической трубе при трех значениях числа Рейнольдса (квадраты —  $Re = 6000$ , кружки —  $Re = 22\,500$  и кресты —  $Re = 47\,000$ ). Изучая эти данные, можно видеть, что вопрос об идентификации инерционного интервала далеко не прост даже для достаточно высоких значений числа Рейнольдса.

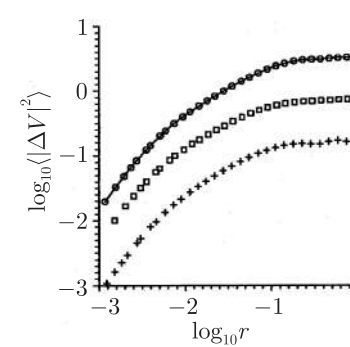


Рис. 4.11

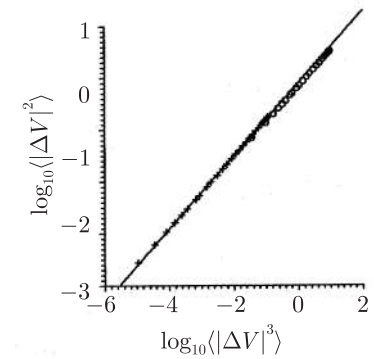


Рис. 4.12

Обработывая результаты измерений структурных функций пульсаций скорости, авторы предложили необычное представление данных. По оси абсцисс вместо масштаба  $l$  была отложена структурная функция третьего порядка  $S_3$ . В инерционном интервале, согласно закону «четырех пятых» (4.48), эта замена тождественна и не может изменить наклон кривой. Неожиданный результат состоял в том, что при представлении результатов в координатах  $(\ln S_q, \ln S_3)$  инерционный интервал становится более выраженным — прямолинейный участок графика продлевается до масштабов, лишь в несколько раз превышающих диссипативный масштаб  $\lambda$ . Важно, что наклон кривой остается при этом прежним.

На рис. 4.12, взятом из той же работы, все данные предыдущего рисунка представлены в таких координатах. Видно, что все данные (даже принадлежащие разным режимам течения) легли на одну прямую, определение наклона которой не вызывает труда. Таким образом, обнаруженный эффект позволяет значительно увеличить точность определения показателей  $\varsigma_q$ .

Интересно, что ESS приводит к появлению «инерционного интервала» и при относительно низких значениях числа Рейнольдса, когда в обычном представлении инерционный интервал не обнаруживается вовсе.

В более общем виде расширенная автомодельность (ESS) проявляется при любом представлении вида

$$S_q(l) = S_p^{s_q/\varsigma_p}, \quad (4.91)$$

то есть расширение «видимого» инерционного интервала происходит при использовании в качестве осей координат любой пары структурных функций.

#### 4.6.3. Модель Ше–Левека–Дюбрюль

В заключение рассмотрим обобщение модели Ше–Левека, предложенное Б. Дюбрюль. В основе обобщения лежат следующие идеи. Во-первых, используя расширенную автомодельность, избавиться от абсолютного масштаба  $l$ . Во-вторых, отказаться от попытки получения беспараметрической модели. Последнее означает, что уменьшается число гипотез, априорно заложенных в модель, но расплатой за это являются дополнительные параметры, требующие экспериментального определения. В-третьих, вместо величины  $\varepsilon_l$  рассматривается безразмерная величина

$$\pi_l = \varepsilon_l / \varepsilon_l^{(\infty)}, \quad (4.92)$$

являющаяся безразмерной характеристикой поля диссипации энергии (либо потока энергии) на масштабе  $l$ .

В формулировке Дюбрюль три гипотезы Ше–Левека приобретают следующий вид:

I) модифицированная гипотеза подобия

$$\frac{\delta v_l^3}{\langle \delta v_l^3 \rangle} \stackrel{\text{stat}}{=} \frac{\varepsilon_l}{\langle \varepsilon_l \rangle} = \frac{\pi_l}{\langle \pi_l \rangle}, \quad (4.93)$$

где знак  $\stackrel{\text{stat}}{=}$  означает наличие одинаковых статистических свойств;

II) иерархия моментов

$$\frac{\langle \pi_l^{q+1} \rangle}{\langle \pi_l^q \rangle} = A_q \left( \frac{\langle \pi_l^q \rangle}{\langle \pi_l^{q-1} \rangle} \right)^\beta; \quad (4.94)$$

III) гипотеза о перемежаемости (о наличии степенного закона для величины  $\langle \pi_l \rangle$ )

$$\langle \pi_l \rangle \sim \left( \frac{\langle \delta v_l^3 \rangle}{\overline{\varepsilon} \lambda} \right)^\Delta. \quad (4.95)$$

Связь модифицированной гипотезы подобия с гипотезой подобия K62 будет обсуждена ниже. Вторая гипотеза представляет собой точную копию соответствующей гипотезы Ше–Левека, переписанной в терминах величины  $\pi_l$ . В третьей гипотезе появился независимый параметр  $\Delta$ , характеризующий скейлинговые свойства экстремальных структур (в выражении (4.92) в знаменателе стоит величина  $\varepsilon_l^{(\infty)}$ ).

Гипотезы (4.93)–(4.95) позволяют получить после несложных вычислений формулу для показателей  $\varsigma_q$ . Для этого, пользуясь второй гипотезой, получаем связь высших моментов величины  $\pi_l$  с первым. Действительно, (4.94) можно записать в виде

$$\langle \pi_l^{q+1} \rangle = \langle \pi_l^q \rangle^{\beta+1} \langle \pi_l^{q-1} \rangle^{-\beta} \quad (4.96)$$

и построить цепочку выражений

$$\begin{aligned} \langle \pi_l^2 \rangle &= \langle \pi_l \rangle^{1+\beta}, \\ \langle \pi_l^3 \rangle &= \langle \pi_l^2 \rangle^{1+\beta} \langle \pi_l \rangle^{-\beta} = \langle \pi_l \rangle^{1+\beta+\beta^2}, \\ &\dots \\ \langle \pi_l^q \rangle &= \langle \pi_l \rangle^S, \end{aligned}$$

где  $S = \sum_{k=0}^{q-1} \beta^k$ . Вычислив сумму ряда

$$\sum_{k=0}^{q-1} \beta^k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k - \sum_{k=q}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1-\beta} - \frac{\beta^q}{1-\beta} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta},$$

получаем

$$\langle \pi_l^q \rangle = \langle \pi_l \rangle^{\frac{1-\beta^q}{1-\beta}}. \quad (4.97)$$

Используя третью гипотезу (4.95), приходим к выражению

$$\langle \pi_l^q \rangle \sim \langle \delta v_l^3 \rangle^{\Delta \frac{1-\beta^q}{1-\beta}}. \quad (4.98)$$

Чтобы получить выражение для структурных функций пульсаций поля скорости, нужно воспользоваться первой гипотезой (4.93)

$$\langle \delta v_l^q \rangle \sim \langle \delta v_l^3 \rangle^{q/3} \frac{\langle \pi_l^{q/3} \rangle}{\langle \pi_l \rangle^{q/3}} = \langle \delta v_l^3 \rangle^{\frac{q}{3}(1-\Delta) + \Delta \frac{1-\beta^{q/3}}{1-\beta}}.$$

Тогда формула для показателей степени есть

$$\varsigma_q = \frac{q}{3} (1 - \Delta) + \Delta \frac{1 - \beta^{q/3}}{1 - \beta}. \quad (4.99)$$

В результирующую формулу входят два параметра, которые должны быть определены опытным путем:  $\beta$  и  $\Delta$ . В последующих главах мы увидим, что эти параметры в различных случаях могут принимать различные значения, делая модель работоспособной в самых разнообразных турбулентных потоках. Очевидно, что выбор  $\beta = \Delta = 2/3$  делает формулу (4.99) эквивалентной формуле Ше–Левека (4.90).

Еще один важный результат работы Дюбрюль состоял в том, что был показан смысл гипотезы об «иерархической связи моментов». Точнее говоря, она показала, что гипотеза (4.94) при  $A_q \equiv 1$  соответствует логпуассоновскому распределению величины  $\pi_l$ .

Распределению Пуассона соответствует функция распределения вероятности вида

$$P(y) = \frac{\mu^y e^{-\mu}}{\Gamma(y+1)}, \quad (4.100)$$

где  $\mu = \langle y \rangle$ , а  $\Gamma$  есть гамма-функция. Логпуассоновское распределение, удовлетворяющее гипотезе (4.94), получается при

$$y = \frac{\ln \pi_l}{\ln \beta}.$$

Некоторые аргументы в пользу логпуассоновского распределения вероятности в турбулентных течениях будут даны ниже. Справедливости ради следует отметить, что в последние годы были сделаны попытки описать

случайные турбулентные поля и с помощью других функций распределения (например, логлеви), и окончательный ответ на вопрос о законах распределения вероятности в турбулентных потоках далеко не ясен.

### Рекомендуемая литература к четвертой главе

- [4.1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988, 736 с.
- [4.2] Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965, Ч. 1. 639 с.
- [4.3] Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967, Ч. 2. 720 с.
- [4.4] Frisch U. Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, 296 p. (Имеется перевод: Фриш У. Турбулентность. Наследие Колмогорова. М.: ФАЗИС, 1998. 343 с.)

## ГЛАВА 5

## Законы сохранения и инерционные интервалы. Двумерная турбулентность

Распространенным способом упрощения физической задачи при ее теоретическом и численном решении является снижение размерности пространства. Именно для двумерной постановки получены почти все точные решения уравнений Навье–Стокса. Как правило, и численные решения задач о ламинарном течении жидкости проводят для двумерной геометрии. При переходе к турбулентным течениям, когда число точек, необходимых для моделирования потока, растет, согласно оценке (4.23), как число Рейнольдса в степени «9/4» и быстро достигает пределов компьютерных возможностей, также кажется естественным начать численное моделирование с рассмотрения плоских течений.

Однако турбулентность — явление существенно трехмерное, и в случае турбулентных потоков переход к плоской геометрии приводит к качественным изменениям свойств течений. Факт, что двумерная турбулентность не является упрощенной моделью трехмерной, был установлен независимо Крейчаном [77] и Бэтчелором [39] в середине шестидесятых годов. Практически сразу стало ясно и то, что шансов на реализацию чисто двумерной турбулентности в природных и даже в лабораторных условиях фактически нет. Несмотря на это, двумерная турбулентность привлекла к себе значительное внимание исследователей, которое не ослабевает и по сей день. Объясняется это несколькими причинами. Во-первых, качественное своеобразие двумерной турбулентности дает прекрасные возможности для опробования различных моделей турбулентности (модель, претендующая на адекватное описание турбулентности, должна быть чувствительной к изменению размерности пространства и правильно отражать ее свойства в случае трех и двух измерений). Во-вторых, двумерная турбулентность стала доступной для прямых численных экспериментов уже в 70-х годах (в 80-х с появлением ЭВМ типа «Сгау» удалось выйти на сетки размером  $1024 \times 1024$ , достаточные для удовлетворительного воспроизведения инерционных интервалов, а такое же разрешение для трехмер-

ных потоков стало возможным только в последние годы). Третья причина состоит в том, что, хотя строго двумерных турбулентных течений и не существует, некоторые черты двумерной турбулентности проявляют многие крупномасштабные геофизические и астрофизические течения (в этих случаях обычно говорят о квазидвумерной турбулентности).

### 5.1. Законы сохранения и инерционные интервалы

#### 5.1.1. Трехмерные течения

Снова вернемся к уравнениям Навье–Стокса и остановимся на вопросе об интегралах движения, то есть величинах, сохраняемых уравнениями при *невязкой* эволюции. Уравнение движения запишем в переменных Лагранжа

$$d_t \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (5.1)$$

умножим на скорость и проинтегрируем по объему  $V$ , включающему всю движущуюся жидкость:

$$d_t \int_V \frac{v^2}{2} dV = -\rho^{-1} \int_V \mathbf{v} \nabla p dV + \nu \int_V \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} dV. \quad (5.2)$$

Первый интеграл в правой части уравнения (5.2) равен нулю:

$$\int_V \nabla p \mathbf{v} dV = \int_V \nabla (p \mathbf{v}) dV - \int_V p \nabla \mathbf{v} dV = \int_V \nabla (p \mathbf{v}) dV = \oint_S p \mathbf{v} d\mathbf{S} = 0.$$

При вычислении интеграла использовано уравнение непрерывности и теорема Гаусса. Поверхность выбирается такой, что она охватывает весь объем, занятый движущейся жидкостью, и скорость в любой точке этой поверхности равна нулю. Последнее слагаемое в (5.2) преобразуем, используя две формулы векторного анализа,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}, \quad (5.3)$$

$$\nabla (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (5.4)$$

и получим

$$\int_V \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} dV = - \int_V \mathbf{v} (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})) dV =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_V \nabla (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) dV - \int_V (\nabla \times \mathbf{v}) (\nabla \times \mathbf{v}) dV = \\
&= \oint_S (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) d\mathbf{S} - \int_V (\text{rot } \mathbf{v})^2 dV = - \int_V (\text{rot } \mathbf{v})^2 dV.
\end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} \quad (5.5)$$

(напомним, что  $\boldsymbol{\omega}$  называется завихренностью), приходим к уравнению для эволюции общей энергии движения жидкости

$$d_t E = -\nu \int_V |\boldsymbol{\omega}|^2 dV = -2\nu\Omega, \quad (5.6)$$

где величина

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_V |\boldsymbol{\omega}|^2 dV, \quad (5.7)$$

равная интегралу от квадрата завихренности по всему объему, называется *энстрофией*.

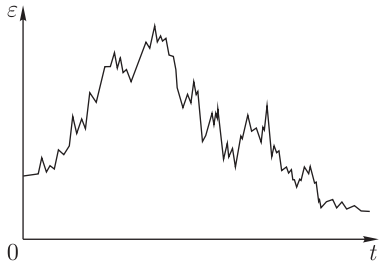


Рис. 5.1

Свободная эволюция трехмерной турбулентности сопровождается, как мы выяснили выше, переносом энергии к малым масштабам. В терминах спектральной плотности энергии  $E(k)$  это соответствует переносу энергии к большим волновым числам. Для энстрофии также можно ввести спектральную плотность  $\Omega(k)$ , причем, в силу (5.5), она связана со спектральной плотностью энергии простым соотношением

$$\Omega(k) \sim k^2 E(k), \quad (5.8)$$

из которого следует, что перенос энергии к большим волновым числам (малым масштабам) влечет за собой рост энстрофии. Рост энстрофии, в свою очередь, согласно (5.6), приводит к росту скорости диссипации энергии ( $\varepsilon \equiv d_t E$ ). Эти рассуждения приводят к следующей качественной картине для эволюции скорости диссипации энергии в свободно выражающейся

трехмерной турбулентности (рис. 5.1): на ранних этапах происходит увеличение скорости диссипации с последующим ее убыванием. Изменение  $\varepsilon$  носит при этом крайне нерегулярный характер, изобилуя кратковременными всплесками и провалами.

Качественно процессы передачи энергии к малым масштабам с одновременным ростом завихренности описываются так называемым «механизмом растяжения вихревых трубок». Этот механизм состоит в следующем. Вихрь, попадая в зону деформации вихря большего масштаба, растягивается и раскручивается в силу действия закона сохранения момента импульса. При этом деформируются вихри, ориентированные перпендикулярно к большому вихрю, то есть механизм имеет принципиально трехмерную природу.

### 5.1.2. Двумерные течения

Запишем уравнение для завихренности, для чего на уравнение (5.1) необходимо подействовать оператором  $\text{rot}$ :

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (5.9)$$

и рассмотрим вопрос об интегралах движения при двумерном движении жидкости. Двумерность движения подразумевает, что вектор скорости имеет только две отличные от нуля компоненты  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ , а завихренность — только одну  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ , становясь, таким образом, псевдоскалярной величиной.

Уравнение (5.9) принимает в этом случае очень простой вид

$$\partial_t \omega + (\mathbf{v} \nabla) \omega = \nu \Delta \omega, \quad (5.10)$$

совпадая с уравнением переноса скалярной примеси. На сходстве и различии уравнения для завихренности и уравнения для пассивной примеси мы остановимся более подробно ниже, а сейчас запишем (5.10) в переменных Лагранжа

$$d_t \omega = \nu \Delta \omega. \quad (5.11)$$

Из (5.11) очевидным образом следует, что при  $\nu \rightarrow 0$  жидкая частица переносит завихренность без изменений и любая функция  $f(\omega)$  становится интегралом движения. Таким образом, двумерный поток в невязком пределе обладает бесконечным набором интегралов движения. Среди этих интегралов особое место занимает энстрофия (5.7), которая, как и энергия, остается сохраняющейся величиной и при конечномерном представлении

полей скорости и завихренности (при обрыве рядов Фурье, если говорить о спектральном представлении полей).

Запишем уравнение эволюции энтропии при двумерном течении

$$\begin{aligned} d_t \Omega &= d_t \int_V \frac{\omega^2}{2} dV = \nu \int_V \omega \Delta \omega dV = \nu \int_V \omega \nabla (\nabla \omega) dV = \\ &= \nu \int_V \nabla (\omega \nabla \omega) dV - \nu \int_V (\nabla \omega)^2 dV = -\nu \int_V (\nabla \omega)^2 dV. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$d_t \Omega = -\nu \int_V (\nabla \omega)^2 dV = -\varepsilon_\omega, \quad (5.12)$$

где  $\varepsilon_\omega$  есть скорость диссипации энтропии.

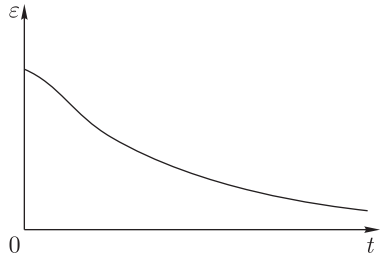


Рис. 5.2

Отличия в свободной эволюции двумерной турбулентности от эволюции трехмерной следуют из совместного анализа уравнений (5.6) и (5.12). При нулевой вязкости энтропия есть величина постоянная, а при конечной вязкости энтропия, как видно из (5.12), может только убывать со временем. Это означает, что и скорость диссипации энергии в двумерном потоке может лишь монотонно убывать со временем (рис. 5.2). Физически в двумерном потоке блокирован механизм растяжения вихревых трубок, который обеспечивает рост энтропии в трехмерном течении.

Появление второй сохраняющейся величины меняет и характер каскадных процессов в турбулентности. В двумерном турбулентном потоке имеются две квадратичные величины, переносимые от одних масштабов к другим, и процессы переноса определяются теперь двумя величинами — скоростью диссипации энергии  $\varepsilon$  и скоростью диссипации энтропии  $\varepsilon_\omega$ .

Если энергия и энтропия вносятся в поток на неких промежуточных масштабах  $k_I$ , далеких от диссипативного масштаба, то они обе должны вовлекаться в каскадный процесс. Однако связь спектральных плотностей энергии и энтропии (5.8) запрещает одновременный перенос обеих величин к мелким масштабам. При свободной эволюции потока средние спектральные потоки энергии и энтропии должны быть направлены к проти-

воположным концам спектра, причем к малым масштабам направлен поток энтропии, а к большим — поток энергии.

В развитой двумерной турбулентности можно ожидать появления двух инерционных интервалов. В больших масштабах (малых волновых числах  $k < k_I$ ) каскадный процесс определяется скоростью диссипации энергии  $\varepsilon$ , и анализ размерности естественно приводит нас к формуле Колмогорова

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (5.13)$$

с тем существенным отличием, что энергия передается от меньших масштабов к большим — имеет место обратный (красный) каскад энергии.

Для малых масштабов ( $k > k_I$ ) определяющей величиной является скорость диссипации энтропии. Ее размерность  $[\varepsilon_\omega] = c^{-3}$ , и единственно возможная комбинация дает спектральное распределение

$$E(k) = C_\omega \varepsilon_\omega^{2/3} k^{-3}, \quad (5.14)$$

описывающее инерционный интервал переноса энтропии. Каскад энтропии — это прямой каскад, то есть энтропия переносится от больших масштабов к меньшим.

Качественную структуру спектра двумерной турбулентности иллюстрирует рис. 5.3. На рисунке показаны оба инерционных интервала с законами (5.13) и (5.14) и направления переноса по спектру энергии и энтропии.

Правая граница инерционного интервала переноса энтропии определяется величиной вязкости и потоком энтропии от больших масштабов. Требуемую размерность дает выражение

$$k_\nu \sim (\varepsilon_\omega / \nu^3)^{1/6}. \quad (5.15)$$

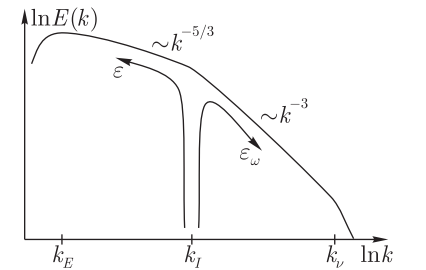


Рис. 5.3

Левая граница инерционного интервала переноса энергии не может быть постоянной, так как диссипации энергии в этих масштабах не происходит. Следовательно, масштаб, на который приходится максимум энергии в спектре,  $k_E = f(\varepsilon, t)$ , и соображения размерности дают оценку

$$k_E \sim (\varepsilon t^3)^{-1/2}, \quad (5.16)$$

которая характеризует процесс накопления энергии в больших масштабах и соответствующий дрейф максимума в спектре в сторону малых волновых чисел.

## 5.2. Лабораторные эксперименты

Совершенно особенное поведение двумерной турбулентности делает интересным детальное изучение ее свойств и заставляет задуматься над вопросом о реализуемости турбулентности с такими свойствами. Надеяться на существование чисто двумерного турбулентного потока при больших числах Рейнольдса, по-видимому, не приходится. Однако можно рассчитывать на существование «квазидвумерных потоков», обладающих некоторыми чертами двумерной турбулентности.

Простейший фактор, приводящий к «двумеризации» турбулентного потока — это геометрия полости, в которой существует турбулентное течение. Точнее говоря, речь идет о тонких слоях жидкости, в которых один размер области значительно меньше двух других. Начиная с первых же работ по двумерной турбулентности обсуждалась возможность обнаружения свойств двумерной турбулентности в крупномасштабных течениях океана и атмосферы. Действительно, толщина плотной атмосферы всего лишь 10 км, в то время как характерный масштаб крупномасштабных вихрей (циклонов и антициклонов) составляет тысячи километров.

Геометрия — только один из возможных способов подавления движений вдоль одной из координат. К другим возможностям относятся устойчивая стратификация жидкости, сильное вращение, магнитные поля.

Первая попытка реализовать двумерную турбулентность в лабораторных условиях была основана на идее подавления одной компоненты поля скорости магнитным полем [14]. Опыты проводились с турбулентным течением ртути за решеткой при включении сильного поперечного магнитного поля. Удалось показать, что турбулентные пульсации вдоль поля действительно менее интенсивны, чем в двух других направлениях, но измеренные спектры с трудом поддавались даже качественной интерпретации.

Следующий эксперимент по двумерной турбулентности был проведен И. Кудером [51], который изучал свободное вырождение турбулентного движения жидкости, возбуждаемого в мыльных пленках с помощью движений гребенки с заданным шагом между зубьями. В этих опытах удалось показать наличие обратного каскада энергии (точнее говоря, был зафиксирован рост среднего размера вихря со временем).

Первое количественное подтверждение существования обратного каскада было получено в работе Соммерия [102], в которой исследовался об-

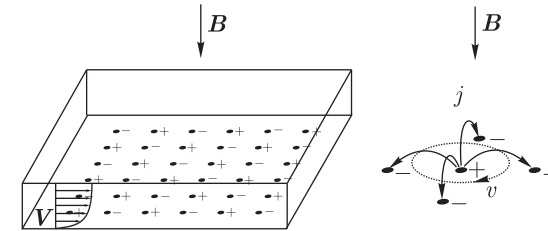


Рис. 5.4

ратный каскад энергии в плоском течении в тонком слое ртути, возбуждаемом электромагнитными силами на малых масштабах. Схема эксперимента показана на рис. 5.4. На плоскую горизонтальную кювету размерами  $120 \times 120 \times 22 \text{ мм}$ , заполненную ртутью, накладывалось вертикальное магнитное поле, достигавшее величины  $1 \text{ Тл}$ . Такое сильное магнитное поле практически подавляет вертикальные движения и приводит к формированию горизонтального течения с вертикальным профилем, описываемым известным решением Гартмана, которое характеризуется наличием ядра с однородным распределением скорости и узким пограничным слоем, толщина которого тем меньше, чем сильнее наложенное магнитное поле.

Для описания плоских течений в тонких слоях жидкости существует простой, но эффективный способ приведения уравнений движения к двумерной форме, состоящий в том, что поле скорости  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$  представляется в виде

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(x, y)f(z), \quad (5.17)$$

где функция  $f(z)$  описывает структуру профиля поперек слоя (в данном случае это решение Гартмана (1.34)). Выражение (5.17) подставляется в трехмерные уравнения движения, которые интегрируются затем поперек слоя:

$$\partial_t \mathbf{v} \int_0^h f dz + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \int_0^h f^2 dz = -\rho^{-1} \nabla \int_0^h p dz + \nu \Delta_{\perp} \mathbf{v} \int_0^h f dz + \nu \mathbf{v} \int_0^h f'' dz.$$

Оператор Лапласа представлен в виде  $\Delta = \Delta_{\perp} + \partial_{zz}$ , где  $\Delta_{\perp} = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ . Получается двумерное уравнение

$$\partial_t \mathbf{v} + \alpha (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla \bar{p} + \nu \Delta_{\perp} \mathbf{v} - \mu \mathbf{v}, \quad (5.18)$$

в котором коэффициенты  $\alpha$  и  $\mu$  зависят от конкретного профиля течения в слое. Уравнение (5.18) называют часто уравнением с *линейным трением*. Линейное трение, в отличие от обычной вязкости, одинаково эффективно на всех масштабах (физически это трение в вязком погранслое) и осуществляет отвод энергии из течения на энергосодержащих масштабах  $k_E$ . Это приводит к тому, что этот масштаб перестает зависеть от времени. Учитывая, что коэффициент линейного трения  $\mu$  имеет размерность обратной секунды, легко получить оценку

$$k_E = k_E(\varepsilon, \mu) \sim \sqrt{\mu^3/\varepsilon}. \quad (5.19)$$

Возбуждение течения в опытах производилось с помощью электромагнитных сил. В дно кюветы были встроены 36 точечных электродов, к которым подводилось постоянное напряжение (полярность чередовалась в шахматном порядке). Растекающиеся в слое электрические токи взаимодействовали с вертикальным магнитным полем и приводили к формированию 36 планарных вихрей, закрученных также в шахматном порядке. Варьируя значения приложенного магнитного поля и силы тока, можно было менять интенсивность движения и величину линейного трения.

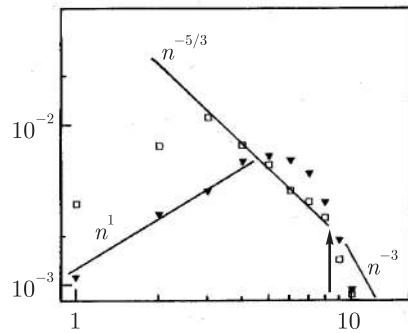


Рис. 5.5

В опытах исследовались турбулентные режимы, в которых удалось наблюдать формирование обратного каскада энергии со спектром « $-5/3$ » и показать справедливость оценки (5.19). На рис. 5.5 приведен экспериментальный спектр пульсаций скорости, полученный в этой работе, и отмечен ожидаемый наклон спектра. Очевидно, что диапазон масштабов, в котором можно ожидать формирования инерционного интервала, достаточно мал и результат носит скорее качественный характер, но именно эта работа

убедительно доказала возможность существования (и наблюдения) обратного каскада энергии в *квазидвумерных* турбулентных потоках.

Идея эксперимента Ж.Соммерия получила развитие в серии работ П. Табелинга с соавторами [71, 90], посвященных исследованиям течений в тонком слое электролита ( $150 \times 150 \times 3$  мм), по которому пропускался электрический ток. Под дном кюветы размещалось несколько десятков по-

стоянных магнитов размерами  $5 \times 8 \times 4$  мм каждый. Над отдельным магнитом формировался вихрь с характерным размером порядка 15 мм. Изменяя положения магнитов можно было менять поле сил, определяющее подкачку энергии в систему. Применение современных методов измерений скоростей по трассерам (так называемый метод PIV — particle image velocimetry) позволило авторам не только измерить спектры пульсаций скорости, но и восстановить функцию плотности распределения вероятности.

### 5.3. Численные исследования

Мы уже упоминали о том, что основным объектом численных исследований однородной турбулентности являются двумерные течения. Справедливо и обратное утверждение: основные результаты по двумерной турбулентности получены численными методами. Мы кратко остановимся на методах решения уравнений и перечислим основные результаты. В следующем параграфе мы отдельно обсудим результаты применения к двумерной турбулентности модели, описанной в параграфе 4.6.3.

При численных решениях уравнения движения рассматриваются, как правило, в переменных функция тока — завихренность

$$\partial_t \omega + \{\psi, \omega\} = \nu \Delta \omega + F + D, \quad (5.20)$$

$$\omega = \Delta \psi, \quad (5.21)$$

где  $\psi$  — функция тока,  $\omega$  — завихренность. Уравнения дополнены двумя членами:  $F$  — это функция, описывающая силы, возбуждающие течение,  $D$  — функция, описывающая дополнительную диссипацию энергии. Введение внешних сил необходимо для получения стационарной турбулентности. Дополнительная диссипативная функция также неизбежна для получения стационарной картины, так как в двумерной турбулентности происходит накопление энергии на крупных масштабах, и требуется обеспечить ее отвод именно из больших масштабов.

Решение проводится практически всегда для квадратной области с периодическими граничными условиями. В качестве методов решения в ранних работах использовали либо сеточные, либо спектральные методы, но после появления алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) практически во всех вычислениях используют спектрально-сеточный метод Орсага. Суть метода состоит в следующем: 1) на каждом шаге по времени сначала решается уравнение (5.20) методом сеток и получают поле завихренности, 2) используя БПФ, получают фурье-разложение поля завихренности, 3) в пространстве Фурье решают уравнение (5.21), 4) вновь используют

БПФ для получения поля функции тока в физическом пространстве. Метод использует лучшие свойства и сеточных, и спектральных методов и дает значительный выигрыш в скорости вычислений.

Все численные эксперименты можно разделить на две группы. Первая группа — это эксперименты по свободному вырождению турбулентности, вторая — по стационарно возбуждаемой турбулентности. Свободное вырождение подразумевает отсутствие внешних сил. В этом случае в (5.20)  $F = D = 0$  и решение зависит только от начальных условий.

С точки зрения динамики инерционных интервалов (5.13) и (5.14) более интересны эксперименты по моделированию стационарной турбулентности. Для получения стационарных режимов необходимо обеспечить подвод энергии. В двумерной турбулентности интересны динамические процессы по обе стороны от масштабов возбуждения, поэтому сила  $F$  записывается в пространстве Фурье таким образом, что она поддерживает на заданном уровне энергию гармоник с заданным модулем волнового числа  $|k| = k_I$ .

Особого разговора заслуживает диссипативный член  $D$ . Во-первых, он должен обеспечить отвод энергии из течения на больших масштабах (малых волновых числах). Во-вторых, для получения более выраженного инерционного интервала переноса энтропии часто модифицируют и характер трения в малых масштабах (больших волновых числах). При написании обычного диссипативного слагаемого в фурье-представлении получаем член вида  $\hat{D}(k) \sim -\nu k^2 \hat{\omega}(k)$ . В численных экспериментах искусственным образом повышают степень волнового числа и записывают диссипацию в виде

$$\hat{D}(k) = -(\mu k^{-n} + \nu k^m) \hat{\omega}(k) \quad (5.22)$$

с типичным значением показателей степени  $n = m = 8$ . Диссипативный член вида (5.22) приводит к тому, что действие диссипации концентрируется в узких интервалах вблизи граничных значений рассматриваемых волновых чисел.

Численные решения уравнений (5.20)–(5.21) для больших чисел Рейнольдса принесли много неожиданных результатов. Большой неожиданностью стал очень крутой спектр в инерционном интервале переноса энтропии. Вместо закона (5.14) с наклоном « $-3$ » численные эксперименты дали значения от  $-3,5$  до  $-5$ . Напомним, что в трехмерной турбулентности перемежаемость дает поправки к колмогоровскому закону « $-5/3$ » порядка нескольких сотых, а в двумерной расхождение составило единицы!

Рассмотрим три численных эксперимента, которые будем называть А, В и С, взятые из работы [35]. Эксперимент А моделирует прямой кас-

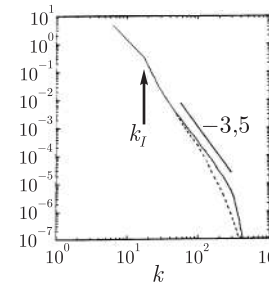


Рис. 5.6

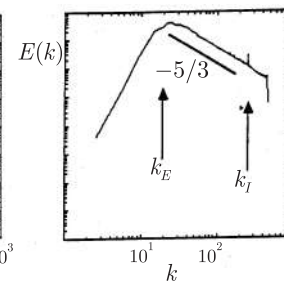


Рис. 5.7

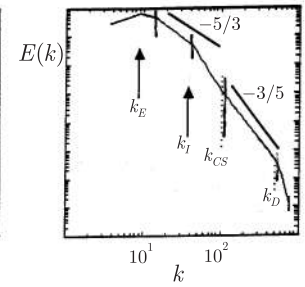


Рис. 5.8

кад энтропии. Используется сетка  $1024 \times 1024$ , случайная сила действует на волновых числах  $k_I = 10$ , диссипативный член используется в форме (5.22). Эксперимент В моделирует обратный каскад энергии. Сетка также  $1024 \times 1024$ , но сила действует на малых масштабах ( $k_I = 256$ ). В третьем численном эксперименте (С) делается попытка одновременно получить оба инерционных интервала. Использована сетка  $1728 \times 1728$ , и возбуждение на промежуточных масштабах ( $k_I = 40$ ). На рис. 5.6–5.8 показаны спектры энергии для всех трех случаев.

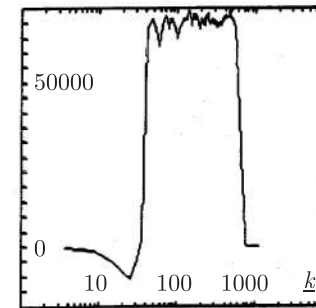


Рис. 5.9

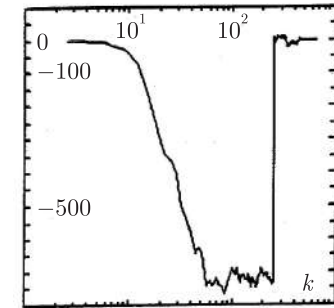


Рис. 5.10

На рис. 5.9 показан график зависимости потока энтропии по спектру, полученный в эксперименте А. Видно, что в крупных масштабах (малых  $k$ ) поток энтропии практически отсутствует, а в малых масштабах выделяет-

ся интервал с постоянным значением величины, переносимой по спектру энтропии. На следующем рисунке (рис. 5.10) показан спектральный поток энергии, соответствующий численному эксперименту В. В этом случае виден участок с постоянным отрицательным потоком, являющимся признаком инерционного интервала переноса энергии к крупным масштабам (обратный каскад). Именно наличие интервалов с постоянным потоком и является определяющим признаком наличия инерционного интервала (соответствующая квадратичная величина переносится от масштаба к масштабу без диссипации).

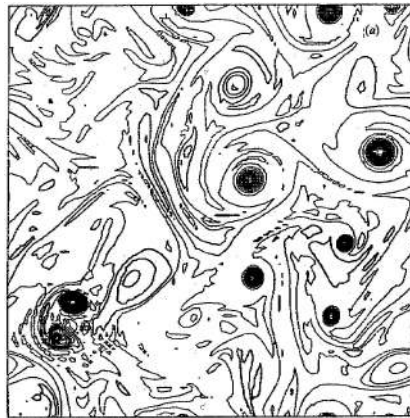


Рис. 5.11

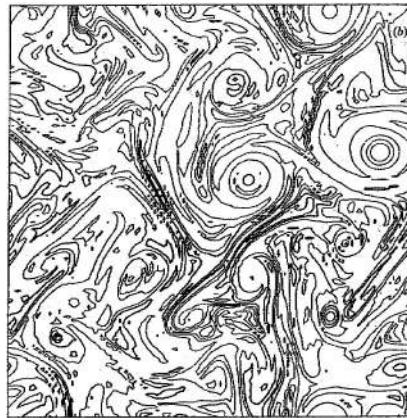


Рис. 5.12

На рис. 5.11 показан пример поля завихренности, полученный при моделировании инерционного интервала переноса энтропии (этот и два последующих рисунка взяты из работы [36]). На рисунке показаны линии равной завихренности. Темные пятна указывают на области с высокой завихренностью, характеризующиеся большой плотностью изолиний. Эти области имеют близкие размеры и получили название «когерентных структур», хотя это название нельзя признать удачным. Правильнее говорить об изолированных вихрях, которые, как будет видно из дальнейшего изложения, слабо взаимодействуют с окружающим их турбулентным потоком. Именно эти изолированные вихри и являются причиной возникновения столь крутых спектров. В цитируемой работе был проведен интересный эксперимент. Изолированные вихри разрушались искусственно таким образом, что

при этом не изменялось распределение энергии по спектру (это делается путем внесения случайных сдвигов фаз в фурье-компоненты). В результате спектральное распределение энергии возвращалось к виду (5.14).

Мы уже говорили о том, что уравнение для завихренности (5.10) совпадает по виду с уравнением для переноса пассивной скалярной примеси. В качестве пассивной примеси может выступать, например, температура, уравнение для которой имеет вид

$$\partial_t T + \{\psi, T\} = \chi \Delta T, \quad (5.23)$$

где  $\chi$  — температуропроводность жидкости. В инерционном интервале переноса энтропии, где спектральная плотность энергии следует закону (5.14), спектр энтропии, согласно соотношению (5.8), подчиняется закону

$$\Omega(k) \sim k^{-1}. \quad (5.24)$$

Соображения размерности очевидным образом приводят к такой же форме зависимости и для спектральной плотности пульсаций температуры.

Однако аналогия между уравнениями (5.10) и (5.23) не работает. На рис. 5.12 показано поле концентраций пассивной примеси (температуры), полученной в том же численном эксперименте, что и поле завихренности, показанное на предыдущем рисунке. Существенное отличие состоит в том, что в поле пассивной примеси нет столь выраженных изолированных структур. След от каждого изолированного вихря можно ясно увидеть и в поле пассивной примеси, и это кажется естественным, но при этом не наблюдается интенсивный рост концентрации к центру вихря, как это имеет место в случае завихренности. На рис. 5.13 показаны спектры пульсаций завихренности и концентрации пассивной примеси, соответствующие показанным полям. Можно видеть, что спектр пассивной примеси соответствует закону (5.24), в то время как спектр завихренности (энтропии) после сравнительно короткого участка, близкого к наклону «-1», дает крутой спад с законом, близким к «-3» (это закон «-5» для спектра энергии).

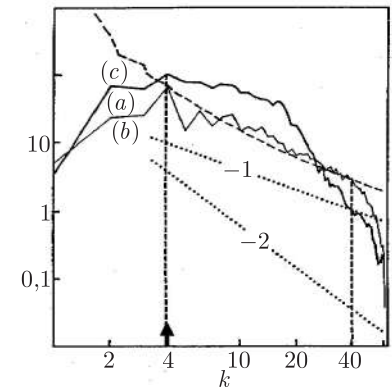


Рис. 5.13

Различие в спектральном поведении завихренности и пассивной примеси обусловлено тем, что при всем сходстве уравнений (5.10) и (5.23) между ними существует принципиальное отличие. Состоит оно в том, что в уравнении (5.23) функция тока (поле скорости) действительно не зависит от поля температуры (примесь пассивна), а в уравнении (5.10) функция тока и завихренность однозначно связаны уравнением (5.11).

Спектр энергии, полученный в эксперименте С (см. рис. 5.8), показывает общую структуру спектра двумерной турбулентности при наличии широкого интервала масштабов и возбуждении на промежуточных масштабах. Влево от масштаба возбуждения формируется инерционный интервал переноса энергии и спектр близок закону « $-5/3$ ». Справа от масштаба возбуждения присутствует достаточно широкая область ( $k_I < k < k_{KS}$ ), в которой нет выраженного степенного закона. Эта область масштабов соответствует тем самым изолированным вихрям (когерентным структурам), о которых шла речь выше. Далее ( $k_{KS} < k < k_D$ ) виден инерционный интервал переноса энтропии, наклон спектра в котором в этом численном эксперименте близок к « $-4$ ».

#### 5.4. Перемежаемость в двумерной турбулентности

Мы видели, что в двумерной турбулентности, как и в трехмерной, получаемые спектральные распределения отличаются от законов, предсказываемых из соображений размерности. Локальная структура оказывается значительно сложнее, чем предполагает гипотеза о статистической однородности турбулентности. В этом параграфе мы попытаемся дать количественные характеристики перемежаемости в двумерной турбулентности на основе модели Ше–Левека–Дюбрюль (ШЛД) и сравнить полученные характеристики с теми, что были получены для трехмерной турбулентности. Мы будем использовать результаты тех же численных экспериментов (А, В, С), о которых уже шла речь выше.

Приложение модели, описанной в параграфе 4.6.3, к двумерной турбулентности требует ряда дополнительных комментариев. Прежде всего, нужно остановиться на вопросе о том, что понимать под величиной  $\pi_l$ . Этот вопрос распадается, в свою очередь, на два: какую из двух квадратичных величин (энергии и энтропии) рассматривать и что конкретно и как измерять в численном эксперименте?

Мы уже обсуждали выше вопрос о том, что вместо скорости диссипации энергии, которая традиционно присутствует во всех моделях турбулентности, следует рассматривать спектральный поток, который реально определяет динамику инерционного интервала. В двумерном случае речь

может идти о потоке энергии либо о потоке энтропии. Численные опыты показывают, что использовать можно и ту, и другую величину, причем независимо от того, рассматривается ли интервал переноса энергии или энтропии. Статистически более устойчивые результаты получаются при вычислении потоков энтропии. Итак, определим в качестве характеристики спектрального потока на масштабе  $l$  величину

$$\eta_l = l^{-2} \int_S |\omega(\mathbf{v} \nabla) \omega| dS = l^{-2} \oint_L \omega^2 v_n dl, \quad (5.25)$$

равную потоку завихренности через границу области (квадрата) со стороной  $l$ . Далее, следуя модели ШЛД (см. п. 4.6.3), введем величину

$$\pi_l = \frac{\eta_l}{\eta_l^\infty}, \quad \eta_l^\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\langle \eta_l^{q+1} \rangle}{\langle \eta_l^q \rangle}. \quad (5.26)$$

Требуется доказать справедливость гипотез и предположений, лежащих в основе модели. Модель ШЛД включает в себя идею расширенной автомодельности (см. п. 4.6.2). Для начала необходимо убедиться в том, что она работает в двумерной турбулентности. На рис. 5.14а показаны структурные функции поля скорости порядков и третьего порядка ( $q = 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12$ ), вычисленные в эксперименте В и представленные в двойных логарифмических координатах как функции масштаба. На рис. 5.14б эти же структурные функции представлены с использованием идеи расширенной автомодельности, то есть по оси абсцисс отложена структурная функция третьего порядка. Можно видеть, что линии на графике выпрямляются, но особенно наглядно эффект виден на рис. 5.15, где показаны степенные показатели  $\zeta_q$ , вычисленные, соответственно, по данным рисунка 5.14а и 5.14б. Если в первом случае (рис. 5.15а) на графике вовсе отсутствуют горизонтальные участки (а именно они и должны подтверждать наличие инерционного интервала), то во втором случае (рис. 5.15б) выраженные горизонтальные участки появляются, по крайней мере, для  $q < 8$ . Следует обратить внимание на то, как быстро растет уровень ошибок с ростом порядка структурных функций. Таким образом, применение ESS действительно помогает выделить инерционный интервал и определить значения степенных показателей.

Следующим положением, требующим проверки, является существование предельной величины  $\eta_l^\infty$  (5.26) и возможность ее получения с помощью подающихся измерению моментов относительно небольшого порядка. Наличие предела последовательности (5.26) подтверждает рис. 5.16,

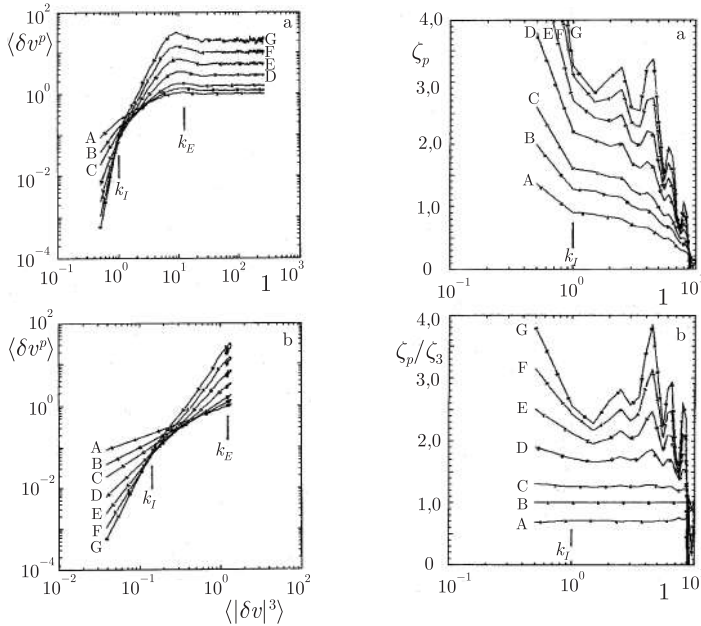


Рис. 5.14

причем можно видеть, что последовательность сходится уже при  $q \approx 10$ . Убедившись в существовании предельной величины  $\eta_l^\infty$ , можно приступить к непосредственной проверке третьей гипотезы модели ШЛД (4.95), касающейся наличия степенного закона у величины  $\pi_l$ .

На рис. 5.17 показана последовательность графиков величин  $\langle \eta_l \rangle / \langle \eta_l(q) \rangle$  для все возрастающих значений  $q$ , полученных также для данных эксперимента В. По оси абсцисс отложены значения структурной функции поля скорости третьего порядка. Используются логарифмические координаты. Можно видеть, что последовательность сходится и в интервале каскадного переноса энергии ( $k_E < k < k_I$ ) предельная функция подчиняется степенному закону. Наклон прямой дает значение показателя степени в законе (4.95)  $\Delta = 0,47$ . Аналогичные измерения, проведенные в эксперименте А для инерционного интервала переноса энтропии, дали значение  $\Delta = 0,13$ . Близкие значения были получены и в эксперименте С, где одновременно наблюдались оба интервала ( $\Delta = 0,4$  для интервала переноса энергии и  $\Delta = 0,1$  для интервала переноса энтропии). Заметим, что

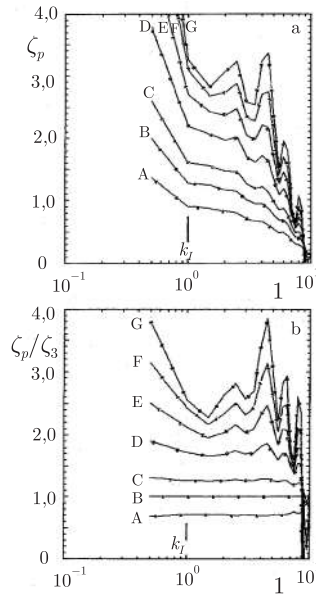


Рис. 5.15

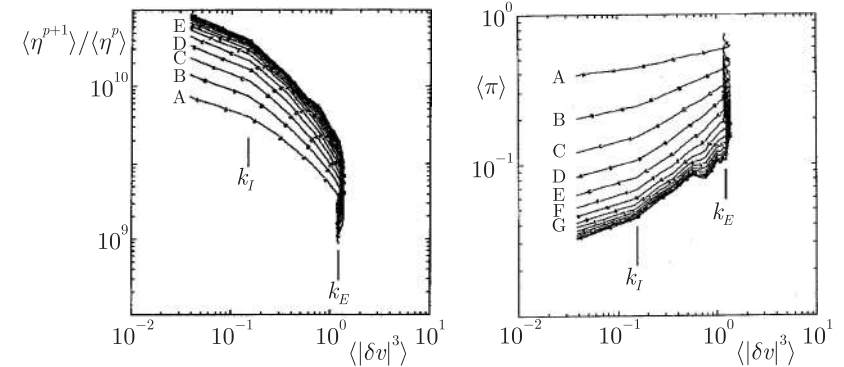


Рис. 5.16

Рис. 5.17

малые значения  $\Delta$  соответствуют низкому уровню перемежаемости (в трехмерном случае  $\Delta = 0,67$ ), и, следовательно, полученные результаты свидетельствуют о том, что именно в инерционном интервале переноса энтропии перемежаемость почти отсутствует (несмотря на то, что отклонение от ожидаемого закона «-3» очень значительно).

Вторая гипотеза модели ШЛД (4.94) может быть проверена двумя способами. Можно строить моменты различного порядка  $\langle \pi_l^q \rangle$  как функции момента первого порядка, проверяя тем самым справедливость соотношения (4.97), вытекающего из (4.94). При выполнении гипотезы на графиках должны выделяться инерционные интервалы, а углы наклона дадут оценку параметра  $\beta$ . Такой график, построенный для эксперимента С, показан на рис. 5.18, где хорошо различимы оба инерционных интервала.

Возможна и прямая проверка формулы (4.94). Этот способ иллюстрирует рис. 5.19, на котором сведены вместе результаты вычислений для экспериментов А и В. В точном соответствии с формулой (4.94) строятся отношения последовательных моментов друг от друга. Каждая группа точек соответствует определенному значению величины  $q$ . При невыполне-

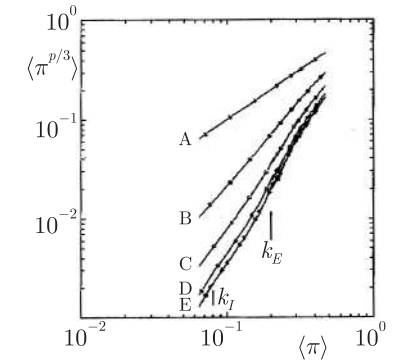


Рис. 5.18

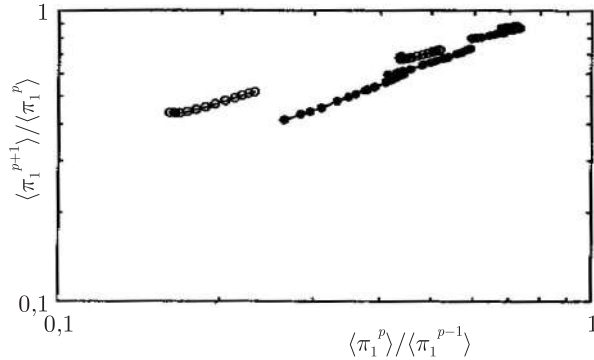


Рис. 5.19

нии связи (4.94) эти группы точек дали бы непараллельные отрезки (либо вообще не отрезки), а при выполнении равенства с отличающимися константами  $A_q$  отрезки были бы параллельны, но не лежали бы на одной прямой. Таким образом, рисунок свидетельствует о выполнении гипотезы II, причем с одинаковыми константами  $A_q$ . Последнее обстоятельство свидетельствует в пользу логпуассоновского закона распределения случайных величин. Вычисленные значения параметра  $\beta$  дали близкие, но отличающиеся значения ( $\beta = 0,7$  в интервале переноса энергии и  $\beta = 0,55$  в интервале переноса энтропии).

Вернемся к вопросу о физическом смысле гипотез, лежащих в основе модели. В соотношение (4.94) (и/или (4.84)) входят относительные моменты, каждый из которых также можно записать в степенной форме вида

$$\eta_l^{(q)} = \langle \eta_l^{q+1} \rangle / \langle \eta_l^q \rangle \sim l^{-\delta_q}. \quad (5.27)$$

Последовательность показателей  $\delta_q$  ограничена, с одной стороны, членом  $\delta_0$ , характеризующим поведение среднего значения потока  $\eta_l^{(0)} = \langle \eta_l \rangle$ , и членом  $\delta_\infty$ , отвечающим за поведение  $\eta_l^{(\infty)}$ , с другой стороны. Ряд  $\delta_q$  образует неубывающую последовательность и может иметь одну из следующих четырех форм (рис. 5.20): случай а) соответствует модели K41 ( $\delta_q \equiv 0$ ); случай б) характеризует ситуацию, когда даже момент первого порядка зависит от масштаба, но степень неоднородности не растет с ростом порядка ( $\delta_q = C$ ); случай в) воспроизводит картину, заложенную в модель Ше–Левека (среднее значение не зависит от масштаба усреднения, но существует

предел для больших моментов,  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_\infty = 2/3$ ); и последний случай г) описывает ситуацию, когда среднее значение зависит от масштаба, но показатель растет с ростом  $q$ .

Легко видеть, что гипотеза (4.95) эквивалентна утверждению

$$\Delta = (\delta_\infty - \delta_0) / \zeta_3, \quad (5.28)$$

то есть параметр  $\Delta$  в модели ШЛД характеризует разность  $\delta_\infty - \delta_0$ . Ряд  $\delta_q$  можно представить тогда в виде

$$\delta_q = \delta_\infty + \zeta_3 \Delta h(q), \quad (5.29)$$

где  $h(q)$  есть монотонно убывающая функция такая, что  $h(0) = 1$ , а  $h(\infty) = 0$ . Простейшая подходящая функция есть экспонента  $h(q) = e^{-aq}$ , причем  $a = \delta_q'(0) / (\zeta_3 \Delta)$ . Непосредственная подстановка (5.29) в (4.84) показывает, что вторая гипотеза Ше–Левека равносильна предположению об экспоненциальной форме функции  $h(q)$  и  $\beta = e^{-a}$ .

Возвращаясь к результатам численного моделирования двумерной турбулентности, нужно отметить, что ее поведение различно в интервалах переноса энергии и энтропии, но нигде не соответствует модели Ше–Левека (т.е. рис. 5.20 в). В интервале переноса энтропии уровень перемежаемости низок ( $\Delta$  близка к нулю), но первый момент потока  $\eta$  (среднее значение) зависит от масштаба усреднения. Такая ситуация отвечает случаю, показанному на рис. 5.20 б, и вызвана наличием сильных изолированных вихрей. Именно с вихрями связано сильное отличие в спектре инерционного интервала энтропии (а не с перемежаемостью, как таковой).

Более сложно поведение в интервале обратного каскада энергии. Уровень перемежаемости в нем близок тому, что получается в трехмерных течениях, но, в отличие от последних,  $\delta_0 \neq 0$ . Это означает, что нарушается основная гипотеза Колмогорова относительно постоянства потока энергии по спектру! Естественно, речь не идет о нарушении закона сохранения энергии, и нужно еще раз обратить внимание на определение величин  $\eta_l$  (5.25) (и величины  $\varepsilon_l$  в случае трехмерной турбулентности). Эта

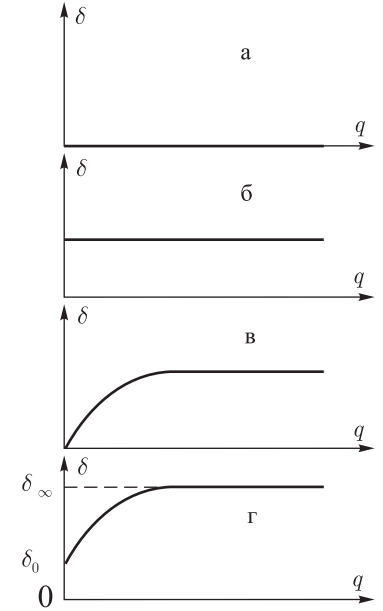


Рис. 5.20

величина характеризует интенсивность процессов переноса энергии независимо от их направления. Это означает, что полученный нами результат свидетельствует о наличии потоков энергии, обратных основному направлению переноса, и общая интенсивность потоков изменяется с изменением масштаба. Качественно такой сценарий переноса энергии по спектру иллюстрирует рис. 5.21.

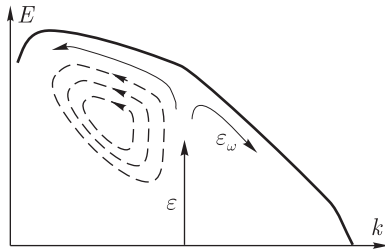


Рис. 5.21

Последний важный вопрос касается связи гипотезы подобия в форме (4.93), использованной в модели ШЛД с гипотезой подобия K62 (4.51). Из (4.93) следует, что

$$\frac{\langle \delta v_l^q \rangle}{\langle \delta v_l^3 \rangle^{q/3}} \sim \frac{\langle \delta \pi_l^{q/3} \rangle}{\langle \delta \pi_l \rangle^{q/3}},$$

а это равносильно утверждению

$$\varsigma_q = q(\varsigma_3 - \delta_0)/3 + \tau_q/3. \quad (5.30)$$

Очевидно, что (5.30) совпадает с модифицированной гипотезой подобия Колмогорова (K62) только в случае, когда  $\varsigma_3 = 1$  и  $\delta_0 = 0$ . Оба условия выполняются в трехмерной турбулентности, но нарушаются в двумерной, где, таким образом, применима только гипотеза подобия в виде (4.93).

## 5.5. О каскадах в спиральной турбулентности

Вернемся еще раз к законам сохранения в трехмерной гидродинамике. Двадцать лет спустя после работ Колмогорова было обнаружено, что трехмерные уравнения Навье–Стокса имеют второй интеграл движения [85]. В вязком пределе сохраняющейся величиной является *спиральность*, определяемая как

$$H = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v} \boldsymbol{\omega} dV. \quad (5.31)$$

Эволюция спиральности в свободном вязком потоке описывается уравнением

$$d_t H = -\nu \int_V \boldsymbol{\omega} \cdot \text{rot } \boldsymbol{\omega} dV. \quad (5.32)$$

В отличие от энергии и энтропии, спиральность не является положительно-определенной величиной. Она является псевдоскаляром (меняет знак при переходе от правовинтовой системы координат к левовинтовой) и отлична от нуля в случае, если в течении существуют спиральные вихри и количество спиралей с правой закруткой больше (меньше), чем с левой. О роли спиральности в процессах генерации магнитных полей течениями проводящей жидкости говорилось выше (см. раздел 3.8), теперь же нас интересует вопрос о влиянии второго интеграла движения на каскадные процессы в турбулентности. Впервые роль спиральности в гидродинамике несжимаемой жидкости обсуждалась в работе Моффата в 1969 г. [84], но до настоящего времени вопрос о влиянии спиральности на эволюцию турбулентности остается открытым. Частично это обусловлено тем, что спиральность становится существенной только в некоторых специальных течениях, как правило, анизотропных. Кроме того, ситуацию сильно затрудняет и тот факт, что до сегодняшнего дня нет ни одной экспериментальной работы, в которой удалось бы непосредственно измерить спиральность и построить ее спектральную плотность  $H(k)$ .

Проблема выяснения роли спиральности в каскадных процессах связана с тем, что она не является положительно-определенной величиной, и простые аргументы, приводящие к выводу о существовании двух инерционных интервалов в двумерной турбулентности, в этом случае не работают. Действительно, если в двумерном случае спектральные плотности двух сохраняемых величин (энтропии и энергии) связаны соотношением  $\Omega(k) \sim k^2 E(k)$ , то для спектральной плотности спиральности можно указать только ограничение сверху

$$|H(k)| \leq k E(k), \quad (5.33)$$

что оставляет возможность для двух сценариев поведения спиральности в турбулентном потоке [46]. Во-первых, можно предположить, что, по аналогии с двумерной турбулентностью, реализуется каскад сохраняемых величин к противоположным концам спектра, причем прямой каскад спиральности к мелким масштабам должен сопровождаться в этом случае обратным каскадом энергии. Во-вторых, нельзя исключить и возможность одновременного *прямого* каскада обеих величин к малым масштабам.

В первом случае используется гипотеза о том, что спектр может зависеть только от волнового числа и спектрального потока спиральности  $\chi$  (этот поток определяется спиральностью, вносимой в поток на макромасштабе, он должен оставаться постоянным во всем инерционном интервале и быть равным скорости диссипации спиральности). Соображения размер-

ности приводят к спектральному закону вида

$$E(k) \sim \chi^{2/3} k^{-7/3}. \quad (5.34)$$

Этот сценарий приводит к выводу о том, что спиральная турбулентность должна вести себя качественно иным образом, чем неспиральная, и дает почву для объяснения возникновения мощных спиральных вихрей в атмосфере (смерчей, тайфунов, тропических циклонов) на основе обратного *спирального* каскада энергии. Однако проведенные до настоящего времени численные эксперименты не дают оснований для поддержки идеи обратного каскада.

Второй сценарий предполагает «пассивное» поведение спиральности в турбулентном потоке. Это означает, что реализуется обычный колмогоровский каскад энергии к малым масштабам с законом  $E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ , а спектральная плотность спиральности подчиняется в этом интервале закону

$$H(k) \sim \chi \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} \quad (5.35)$$

(поведение пассивных примесей рассмотрено подробно в следующей главе). В пользу последнего сценария говорят результаты прямых численных расчетов спиральной турбулентности [48], хотя достигнутые значения числа Рейнольдса не позволяют получить инерционный интервал, достаточный для надежной интерпретации результатов. Особенности каскадных процессов в спиральной турбулентности будут рассмотрены ниже в главе 8.

Отметим в заключение *точный* результат, полученный О. Чхетиани для спиральной турбулентности [32]. Речь идет о «спиральном аналоге» закона «4/5» Колмогорова для продольной корреляционной функции третьего порядка (см. уравнение (4.48) в параграфе 4.3.2). Для спирального потока в рассмотрение вводится двухточечная корреляционная функция третьего порядка, связывающая продольную пульсацию скорости  $\delta v_l$  с векторным произведением поперечных компонент скорости  $\mathbf{v}_n$  в точках, отстоящих на расстоянии  $l$  друг от друга. Для этой функции получен закон «2/15»:

$$\langle \delta \mathbf{v}_l \cdot [\mathbf{v}_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{v}_n(\mathbf{r} + \mathbf{l})] \rangle = (2/15) \chi l^2, \quad (5.36)$$

где величина  $\chi$  есть скорость диссипации спиральности, определяющая поток спиральности по спектру. Будучи точным результатом, соотношение (5.36) должно выполняться в спиральной, однородной и изотропной (изотропной в смысле вращений, но не зеркальных отображений) турбулентности не зависимо от того, какой из предложенных сценариев спиральных каскадных процессов реализуется в турбулентном потоке.

## ГЛАВА 6

# Турбулентность с пассивными и активными примесями

## 6.1. Пассивная примесь

Турбулентный поток эффективно перемешивает любую переносимую им величину. Если эта величина не оказывает существенного воздействия на поток, то ее называют пассивной примесью. В качестве пассивной примеси могут выступать вещество (тогда для количественного описания процесса вводят концентрацию примеси), температура (при малых числах Грассгофа), магнитные поля (при малых параметрах МГД-взаимодействия) и т. д. Для определенности будем рассматривать поле температуры, описываемое безразмерным уравнением

$$\partial_t T + (\mathbf{v} \nabla) T = \sigma^{-1} \Delta T, \quad (6.1)$$

где  $\sigma = \nu/\chi$  есть число Прандтля, определяющее отношение вязкости жидкости к ее температуропроводности.

Остановимся на возможном поведении пассивной примеси в турбулентном потоке с заданными свойствами. Вид спектра пульсаций пассивной примеси можно оценить, исходя из следующих соображений. В пределе малой температуропроводности уравнение (6.1) сохраняет квадрат пульсаций температуры, а величиной, регулирующей процессы переноса энергии пульсаций температуры по спектру, является величина  $\varepsilon_T$  — скорость диссипации энергии пульсаций температуры. Повторяя колмогоровские рассуждения, предполагаем, что неоднородность температуры вносится в поток на макромасштабе, а температуропроводность (диссипация) становится существенной только на микромасштабе, и в инерционном интервале должен существовать постоянный, не зависящий от масштаба поток энергии пульсаций температуры, равный скорости ее диссипации.

В инерционном интервале поток энергии пульсаций температуры  $P_T$  на масштабе  $l$  можно оценить как отношение энергии пульсаций  $\delta T_l^2$  к ха-

рактерному времени переноса

$$\Pi_T \approx \frac{\delta T_l^2}{t_l}.$$

Следовательно,

$$\Pi_T \approx \frac{\delta T_l^2}{t_l} \approx \frac{\delta T_l^2 \delta v_l}{l} = \text{const} = \varepsilon_T. \quad (6.2)$$

Чтобы получить зависимость пульсаций температуры от масштаба, нужно в (6.2) подставить соответствующую зависимость для пульсаций скорости. Так, если спектр кинетической энергии следует закону Колмогорова « $-5/3$ » (5.13) и  $\delta v_l \sim (\varepsilon l)^{1/3}$ , то получаем оценку

$$\delta T_l \sim \varepsilon_T^{1/2} \varepsilon^{-1/6} l^{1/3}, \quad (6.3)$$

соответствующую спектру энергии пульсаций температуры вида

$$E_T(k) = C_T \varepsilon_T \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}. \quad (6.4)$$

Рассмотрим поведение примеси в двумерной турбулентности. Для инерционного интервала переноса энергии, где справедлив спектральный закон « $-5/3$ », остаются в силе все сделанные нами оценки и спектр пульсаций температуры также имеет вид (6.4). Причем и для трехмерной турбулентности, и для интервала обратного переноса энергии в двумерной турбулентности направление каскада энергии пульсаций примеси прямое, то есть энергия пульсаций переносится в малые масштабы независимо от направления каскада кинетической энергии.

В инерционном интервале переноса энтропии, где спектр кинетической энергии следует закону « $-3$ » (5.14), а пульсации скорости оцениваются как  $\delta v_l \sim \varepsilon_\omega^{1/3} l$ , (6.2) приводит к соотношению

$$\delta T_l \sim \varepsilon_T^{1/2} \varepsilon_\omega^{-1/6}$$

и спектру

$$E_T(k) = C'_T \varepsilon_T \varepsilon_\omega^{-1/3} k^{-1}. \quad (6.5)$$

Проведенные оценки справедливы, вообще говоря, для случая, когда число Прандтля  $\sigma \approx 1$ , то есть вязкость и температуропроводность имеют один порядок величины. При этом вязкий масштаб  $\lambda_\nu$  (масштаб, на котором становится существенной диссипация кинетической энергии) и теплопроводный масштаб  $\lambda_\chi$  (масштаб, на котором становится существенным

молекулярный теплоперенос, то есть диссипация энергии пульсаций температуры) близки  $\lambda_\chi \approx \lambda_\nu$ . Теперь посмотрим, как ведет себя пассивная примесь при экстремальных значениях числа Прандтля.

Пусть  $\sigma \ll 1$ , что соответствует рассмотрению жидкости с очень хорошей температуропроводностью (для определенности можно представить себе, что мы рассматриваем турбулентность в ртути или другом жидком металле). В такой среде диффузия тепла эффективней каскадных процессов и  $\lambda_\chi \gg \lambda_\nu$  (соответственно,  $k_\chi \ll k_\nu$ ). Если турбулентность существует и есть каскад кинетической энергии, то поле скорости непрерывно создает и пульсации температуры, но последние рассасываются на тех же масштабах, что и создаются, не успевая вступить в нелинейный каскадный процесс. Источником пульсаций температуры служит крупномасштабное поле  $\delta T_0$ , а оценку для величины пульсаций температуры на масштабе  $l$  получаем, сравнивая величину конвективного и диссипативного слагаемых в уравнении (6.1)

$$\frac{\delta v_l \delta T_0}{L} \approx \frac{\delta T_l}{l^2}.$$

Используя колмогоровскую оценку для пульсаций скорости, получаем  $\delta T_l \sim \sim l^{7/3}$ , что соответствует спектру

$$E_T(k) \sim k^{-17/3}. \quad (6.6)$$

Интервал масштабов с такими свойствами называют *инерционно-диффузионным* интервалом. В двумерной турбулентности в инерционном интервале энтропии при спектре скорости « $-3$ » аналогичные оценки дают еще более быстрое падение спектральной плотности энергии пульсаций температуры

$$E_T(k) \sim k^{-7}. \quad (6.7)$$

В другом предельном случае рассматриваются большие числа Прандтля  $\sigma \gg 1$ , что соответствует турбулентному потоку вязкой жидкости с плохой температуропроводностью (такими свойствами обладают многие масла). В этом случае каскад пульсаций скорости быстро затухает под действием вязких сил, но пульсации температуры уносятся в значительно более мелкие масштабы, чем масштаб вязкой диссипации. Возникает так называемый *вязкоконвективный* интервал. Его динамика определяется крупномасштабным полем скорости, так как на этих масштабах пульсации скорости подавлены вязкостью. Тогда

$$\Pi_T \approx \sim \frac{\delta T_l^2}{t_L} \approx \varepsilon_T$$

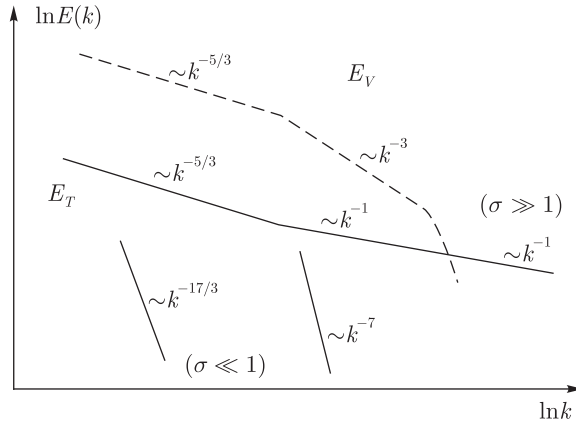


Рис. 6.1

и  $\delta T_l \sim l^0$ . В результате получается спектр, на который впервые указал Бэтчелор,

$$E_T(k) \sim k^{-1}. \quad (6.8)$$

Сводная картина возможных спектральных законов для пульсаций пассивной примеси приведена на рис. 6.1.

## 6.2. Конвективная турбулентность

Рассмотрим пример турбулентности, развивающейся под действием силового поля, связанного с самим течением. Таким примером может служить конвективное течение при больших числах Грассгофа. Мы рассмотрим специфику конвективной турбулентности как в случае трехмерного, так и в случае двумерного движения.

Выпишем уравнения термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \Delta \mathbf{v} + \text{Gr} T \mathbf{e}_z, \quad (6.9)$$

$$\partial_t T + (\mathbf{v} \nabla) T = \sigma^{-1} \Delta T, \quad (6.10)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (6.11)$$

Уравнения записаны в безразмерной форме и включают два безразмерных параметра: число Грассгофа  $\text{Gr} = g\beta T_0 L^3 / \nu^2$  и число Прандтля  $\sigma = \nu / \chi$ .

Обратимся теперь собственно к *конвективной* турбулентности, то есть турбулентности, в которой основной движущей силой является неоднородность температуры. Число Грассгофа  $\text{Gr} \gg 1$ , а число Прандтля для простоты будем считать порядка единицы. Пусть движение вызывается неоднородным нагревом на максимальном масштабе  $L$  и возникающее движение столь интенсивно, что течение становится турбулентным. В этом случае возможно представить себе два сценария развития турбулентности. Первый (колмогоровский) состоит в том, что турбулентность развивается по обычному изотермическому сценарию и динамика меньших масштабов определяется спектральным потоком энергии, который оказывается на этих масштабах существеннее, чем работа сил Архимеда. На возможность другого сценария впервые указали независимо друг от друга А. Обухов [23] и Р. Болджиано [44]. Этот сценарий (будем называть его обуховским) предполагает существенную роль сил Архимеда в широком интервале масштабов. Так как режим движения заведомо нелинейный, то это возможно в случае, если на каждом масштабе имеет место баланс между нелинейным и архимедовым слагаемыми в уравнении (6.9). Это условие выражается (в размерном виде) соотношением

$$\frac{\delta v_l^2}{l} \approx g\beta \delta T_l. \quad (6.12)$$

Наряду с этим условием остается справедливым условие (6.2), требующее постоянства потока энергии пульсаций температуры по спектру. Оно дает второе соотношение

$$\varepsilon_T \approx \frac{\delta T_l^2 \delta v_l}{l}. \quad (6.13)$$

Решая систему (6.12)–(6.13), получаем

$$\delta v_l \sim \varepsilon_T^{1/5} (g\beta)^{2/5} l^{3/5}, \quad (6.14)$$

$$\delta T_l \sim \varepsilon_T^{2/5} (g\beta)^{-1/5} l^{1/5}. \quad (6.15)$$

Оценки (6.14)–(6.15) соответствуют спектральным законам

$$E(k) \sim k^{-11/5}, \quad (6.16)$$

$$E_T(k) \sim k^{-7/5}. \quad (6.17)$$

Важно отметить, что полученные спектральные законы не зависят от размерности пространства, то есть они могут возникнуть как в трех-, так

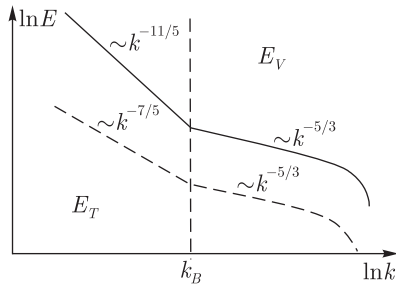


Рис. 6.2

и в двумерном течении. Под двумерным конвективным движением мы подразумеваем при этом течение в вертикальной плоскости, то есть плоскости, в которой лежит вектор ускорения свободного падения. Такие двумерные конвективные течения могут быть реализованы в вертикальной щели с неравномерным нагревом.

Конвективный (обуховский) интервал вида (6.16)–(6.17) не может расти неограниченно даже в пределе бесконечно больших значений числа Грассгофа. Дело в том, что работа, совершаемая силами Архимеда за единицу времени на единицу массы

$$P_A \approx (g\beta)\delta v_l \delta T_l \approx \varepsilon_T^{3/5} (g\beta)^{6/5} l^{4/5}, \quad (6.18)$$

падает с уменьшением масштаба. Это означает, что должен существовать масштаб, на котором обычный колмогоровский механизм станет эффективней конвективного и на смену обуховскому режиму должен прийти колмогоровский. Этот масштаб принято называть масштабом Болджиано, и он легко получается, если приравнять (6.18) скорости диссипации энергии

$$L_B \approx (g\beta)^{-3/2} \varepsilon_T^{5/4} \varepsilon_T^{-3/4}. \quad (6.19)$$

Ожидаемая картина спектральных распределений энергии для трехмерной турбулентной конвекции показана на рис. 6.2.

В двумерном случае ситуация на масштабах  $l > L_B$  полностью аналогична ситуации в трехмерном течении. Отличия возникают на малых масштабах, так как прямой каскад энергии в двумерном потоке невозможен. Конвективный интервал обеспечивает прямой поток энергии по спектру, а на масштабе Болджиано каскад блокируется. Справа от этого масштаба должен установиться интервал переноса энтропии, а слева начнется формирование интервала обратного каскада энергии. Ожидаемая структура спектров в двумерной конвективной турбулентности показана на рис. 6.3.

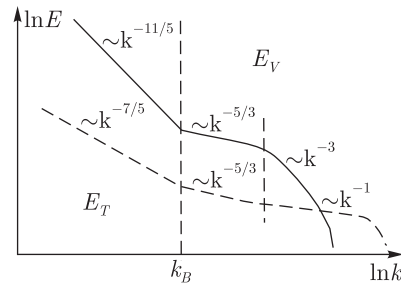


Рис. 6.3

Отметим еще один интервал, который может появиться при турбулентной конвекции в жидкости с большим числом Прандтля. Сильная вязкость подавляет движение на масштабах, на которых еще существуют пульсации температуры. Без учета сил плавучести это приводит к спектру Бэтчелора (6.8). При больших числах Грассгофа возможна ситуация, когда нелинейные члены в уравнении для скорости становятся малы, а динамика пульсаций определяется балансом сил Архимеда и сил вязкости. Это означает, что

$$g\beta\delta T_l \approx \frac{\delta v_l}{l^2}. \quad (6.20)$$

Считая, что пульсации температуры следуют закону Бэтчелора (6.8), получаем из (6.7) спектральный закон для пульсаций скорости [19]

$$E(k) \sim k^{-5}. \quad (6.21)$$

В заключение отметим, что лабораторные эксперименты подтвердили возможность реализации обоих сценариев эволюции конвективной турбулентности. В экспериментах с жидким гелием [108] и водой [49] для температурных пульсаций был получен закон « $-7/5$ », а в работе [50] описан эксперимент по конвекции в ртути, где получен колмогоровский закон распределения энергии по спектру. Отметим, что измерения касаются спектра пульсаций температуры, для которого отличия между колмогоровским и обуховским режимами менее выражены, чем для спектра пульсаций скорости.

### 6.3. МГД-турбулентность

Рассмотрим особенности каскадных процессов при развитой турбулентности в проводящих жидкостях. Уравнения магнитной гидродинамики для несжимаемой жидкости запишем в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla(P + B^2/2) + \text{R}^{-1} \Delta \mathbf{v}, \\ \partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \text{Rm}^{-1} \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (6.22)$$

где  $\text{R}$  — число Рейнольдса,  $\text{Rm} = \text{R} \cdot \sigma_m$  — магнитное число Рейнольдса,  $\sigma_m = \nu/\nu_m$  — магнитное число Прандтля.

Обратимся к законам сохранения для трехмерной магнитной гидродинамики. В бездиссипативном пределе уравнения (6.22) сохраняют три квадратичных интеграла. Это полная энергия  $E$ , перекрестная спиральность  $H_C$

и магнитная спиральность  $H_B$ :

$$E = E_V + E_B = \int (v^2 + B^2) dV, \quad (6.23)$$

$$H_C = \int (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) dV, \quad (6.24)$$

$$H_B = \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) dV, \quad (6.25)$$

где  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Необходимо отметить, что гидродинамическая спиральность

$$H_V = \int (\mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) dV \quad (6.26)$$

сохраняется, только если  $\mathbf{B} \rightarrow 0$ , т. е. в кинематической постановке (в этом случае  $H_C, H_B \rightarrow 0$ , а  $E \rightarrow E_V$ ).

Поскольку речь идет о развитой турбулентности, то подразумевается, что гидродинамическое число Рейнольдса имеет огромные значения  $R \gg 1$ . Однако это далеко не всегда означает, что и магнитное число Рейнольдса  $R_m \gg 1$ , поскольку в огромном большинстве случаев  $\sigma_m \ll 1$ . Рассмотрим ситуацию, когда  $R \gg 1$ , а  $R_m < 1$  и на турбулентное течение наложено внешнее (слабое) крупномасштабное магнитное поле. Влиянием магнитного поля на поток можно пренебречь (кинематическое приближение) и рассматривать уравнение индукции отдельно от уравнения для скорости. В уравнении индукции доминируют два слагаемых:  $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  и  $R_m^{-1} \Delta \mathbf{B}$ . Предполагая, что существует интервал масштабов, в котором соблюдается баланс этих двух членов (пульсации поля скорости данного масштаба возмущают внешнее магнитное поле, а диффузия справляется с этими возмущениями на этом же масштабе, не позволяя развиваться каскадному процессу), то есть

$$\frac{\delta v_l B_0}{l} \approx \frac{\delta B_l}{l^2},$$

с учетом колмогоровского закона для пульсаций скорости легко получить  $\delta B_l \sim l^{4/3}$ , что соответствует спектральному закону [5]

$$E_B(k) \sim k^{-11/3}. \quad (6.27)$$

Вернемся к случаю больших магнитных чисел Рейнольдса  $R, R_m \gg 1$ , и рассмотрим турбулентное течение, в котором энергия пульсаций магнитного поля сопоставима с энергией пульсаций скорости. Взаимодействие

двух силовых полей дает возможность появления новых физических механизмов, обеспечивающих каскадный перенос энергии. С одной стороны, симметрия уравнений (6.22) дает основание предположить, что колмогоровский каскад возможен и в МГД-турбулентности (при этом  $E_B(k) \sim \sim E_V(k) \sim k^{-5/3}$ ). С другой стороны, в магнитной гидродинамике появляется принципиально новый механизм обмена энергией между пульсациями скорости и магнитного поля, связанный с существованием волн Альфвена.

Волны Альфвена возникают в проводящей жидкости на фоне наложенного (крупномасштабного) магнитного поля  $B_0$ . По аналогии с натянутой струной, вдоль силовой линии магнитного поля распространяется поперечная гидромагнитная волна с альфвеновской скоростью  $U_a = B_0(\mu_0 \mu \rho)^{-1/2}$  (см. п. 1.5). Это означает, что в инерционном интервале на масштабе  $l$ , наряду с характерным временем оборота вихря  $t_v \approx l/\delta v_l$ , появляется характерное альфвеновское время  $t_a \approx l/U_a$ , которое может оказаться существенно меньше. В альфвеновской волне энергия пульсаций поля равна энергии пульсаций скорости, следовательно, рассмотрение мелкомасштабной турбулентности как совокупности альфвеновских волн различного масштаба также предполагает равномерное распределение кинетической и магнитной энергии  $E_B(k) \approx E_V(k)$ . Спектральная плотность энергии определяется постоянным в пределах инерционного интервала спектральным потоком энергии  $\varepsilon$ , характерным временем взаимодействия на данном масштабе  $t_l$  и самим масштабом (волновым числом). Для того чтобы воспользоваться соображениями размерности, требуется дополнительная связь этих величин. Крейчнан [76] и Ирошников [13] предположили, что спектральный поток пропорционален времени взаимодействия  $t_l$ . Тогда на основе соображений размерности получаем  $\varepsilon \sim t_l k^4 E^2(k)$ , что равносильно соотношению

$$E(k) = C_a(\varepsilon/t_l)^{1/2} k^{-2}. \quad (6.28)$$

Если теперь предположить, что время взаимодействия есть колмогоровское время, то есть  $t_l = l/\delta v_l = (k^2 \varepsilon)^{-1/3}$ , то формула (6.28) даст колмогоровский закон « $-5/3$ ». Если же считать, что взаимодействия обусловлены альфвеновским механизмом и  $t_l = t_a \approx (kB_0)^{-1}$ , то получается распределение Крейчнана–Ирошникова

$$E(k) \sim (B_0 \varepsilon)^{1/2} k^{-3/2}. \quad (6.29)$$

Отметим, что гипотеза Крейчнана–Ирошникова не единственная возможность решения задачи. Соображения размерности допускают и соотношение

$$E(k) = C_a(\varepsilon t_l) k^{-1}, \quad (6.30)$$

по сути, предполагающее, что, чем меньше характерное время, тем эффективней спектральный поток энергии. Подстановка в (6.30) колмогоровского времени также дает классический закон « $-5/3$ », а вот альфеновское время ( $t_l = t_a$ ) в этом случае приводит к распределению вида

$$E(k) \sim (\varepsilon/B_0)k^{-2}. \quad (6.31)$$

Вопрос о спектральных законах в МГД-турбулентности изучался во многих численных экспериментах. Так, в [86] в расчетах на сетке  $512^3$  было показано, что в некоррелированной турбулентности в отсутствие внешнего поля спектр Крейчнана–Ирошника не возникает, а в инерционном интервале реализуется турбулентность со спектром, близким к  $E^b(k) \sim \sim E^v(k) \sim k^{-5/3}$ . В [87] сетка была расширена до  $1024^3$  и рассмотрена как турбулентность с наложенным внешним полем, так и без него. Для МГД турбулентности без внешнего поля подтвержден закон « $-5/3$ », а во внешнем поле выявлена существенная анизотропия, при которой поперечные пульсации следуют закону Ирошника–Крейчнана.

В 1950 г. Бэтчелор высказал гипотезу о том, что мелкомасштабные магнитные поля в космических телах возникают не только за счет запутывания крупномасштабных магнитных полей турбулентными движениями, но и за счет отдельного механизма генерации мелкомасштабных магнитных полей турбулентными потоками, получившего название мелкомасштабного динамо [38]. В отличие от крупномасштабного динамо, действие которого связано со спиральным характером турбулентности во вращающемся теле, работа мелкомасштабного динамо не связана со спиральностью. Очевидно, что для генерации мелкомасштабного (как и всякого другого) магнитного поля механизмом динамо магнитное число Рейнольдса  $Rm$  должно быть достаточно большим. Простейшие модели мелкомасштабного динамо дают оценку критического  $Rm$  в несколько десятков. Хотя такие  $Rm$  и велики по лабораторным меркам, в звездах, галактиках, аккреционных дисках турбулентные потоки имеют несравненно большие магнитные числа Рейнольдса (см., например, [110]). Поэтому кажется естественным ожидать, что мелкомасштабное динамо работает практически в каждом астрофизическом теле.

Мелкомасштабное динамо может работать и в однородной турбулентности, но на него все же распространяется действие одной из *антидинамо* теорем, а именно, теоремы Зельдовича [8], запрещающей устойчивую генерацию магнитного поля двумерным потоком проводящей жидкости. Кроме того, переход к двумерному пространству в магнитной, как и в обычной, гидродинамике связан со сменой интегралов движения, а следовательно, можно ожидать и качественных отличий в процессах каскадных переносов

по спектру. Действительно, уравнения (6.22) в двумерном случае (рассматриваются поля  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ ,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$ , и считается, что  $\partial_z = 0$ )<sup>1</sup> в пределе  $\nu, \nu_m \rightarrow 0$  по-прежнему сохраняют общую энергию (6.23) и перекрестную спиральность (6.24), но вместо магнитной спиральности (6.25) имеют новый интеграл движения — квадрат векторного потенциала

$$a = \int |\mathbf{A}|^2 dV. \quad (6.32)$$

Величина  $a$  является положительно-определенной величиной, спектральная плотность которой связана со спектральной плотностью магнитной энергии  $a(k) \sim k^{-2}E_B(k)$ . Это означает, что прямой каскад энергии магнитного поля (к малым масштабам) должен сопровождаться обратным каскадом квадрата векторного потенциала (к большим масштабам). В полной аналогии с двумерной гидродинамической турбулентностью, соображения размерности дают для инерционного интервала переноса энергии закон « $-5/3$ », а для инерционного интервала обратного переноса квадрата векторного потенциала — закон вида

$$E_B(k) \sim \varepsilon_a k^{-1/3}, \quad (6.33)$$

где  $\varepsilon_a$  есть скорость диссипации (спектральный поток) квадрата векторного потенциала. Таким образом, в двумерном случае появление магнитного поля снимает запрет на прямой каскад энергии и делает двумерную МГД-турбулентность более похожей на трехмерную, чем на двумерную гидродинамическую турбулентность (вместе с прямым каскадом энергии становится возможным и рост энтропии, а вместе с ним и увеличение скорости диссипации энергии).

Вернемся к более естественному случаю трехмерной МГД-турбулентности и отметим, что в приведенных выше рассуждениях о возможных спектральных законах никак не учитывалась роль двух дополнительных интегралов движения, появляющихся в трехмерной магнитной гидродинамике, перекрестной спиральности (6.24) и магнитной спиральности (6.25). Фактически это означает, что обе спиральности предполагались близкими нулю ( $H_C \approx H_B \approx 0$ ). Подчеркнем, что если турбулентность в проводящей жидкости возбуждается случайной *механической* силой, никак не связанной с магнитным полем, то такая сила не может обеспечить стационарную

<sup>1</sup>Теорема Зельдовича запрещает генерацию и при наличии зависимости от координаты  $z$ , требуя лишь отсутствия компоненты скорости  $v_z$ , но мы ограничимся рассмотрением чисто двумерного случая.

подкачку средней спиральности (ни  $H_C$ , ни  $H_B$ ) в турбулентность. Однако, это не исключает возможности разделения спиральности разного знака либо в физическом пространстве (скажем, накопление магнитной спиральности разного знака в разных полушариях космического тела), либо в пространстве масштабов (накопление магнитной спиральности одного знака в крупномасштабном магнитном поле при одновременном оттоке спиральности другого знака в мелкие масштабы с последующей диссипацией).

Предположим, что внешняя сила обеспечивает на масштабе возбуждения  $L$  приток в систему энергии и магнитной спиральности (удельной мощностью  $\varepsilon$  и  $\chi_B$ , соответственно). Для магнитной спиральности введем спектральную плотность  $H_B(k)$ , связь которой со спектральной плотностью магнитной энергии определяется неравенством

$$k|H_B(k)| \leq E_B(k). \quad (6.34)$$

В отличие от неравенства для спектральной плотности гидродинамической спиральности (5.33), множитель  $k$  стоит в левой части и указывает на то, что перенос магнитной спиральности к малым масштабам (большим  $k$ ) ограничен. В предельном случае, в котором магнитное поле на масштабе возбуждения «полностью спирально» (то есть  $\chi_B k_L \approx \varepsilon$  и  $k_L H_B(k_L) \approx E_B(k_L)$ ), перенос магнитной спиральности к малым масштабам невозможен.

Более вероятна ситуация, когда  $\chi_B k_L \ll \varepsilon$  и неравенство (6.34) не приводит к столь жестким ограничениям. Рассмотрим изотропную МГД-турбулентность в жидкости с магнитным числом Прандтля порядка единицы и предположим, что в рассматриваемом диапазоне масштабов выполняется гипотеза равномерного распределения энергии, то есть  $E_B(k) \approx E_V(k)$  (или, что то же самое,  $\delta B_l \approx \delta v_l$ ). В стационарном случае в системе должен установиться постоянный, не зависящий от масштаба спектральный поток магнитной спиральности, равный мощности источника спиральности  $\chi_B$

$$\Pi_B = \frac{\langle \delta A_l \delta B_l \rangle}{t_l} = \chi_B. \quad (6.35)$$

Из соображений размерности оценкой магнитной спиральности на масштабе  $l$  является величина  $l \delta B_l^2$ , но в соответствии с (6.34) это оценка верхнего предела, а реально

$$\langle \delta A_l \delta B_l \rangle \approx l \delta B_l^2 C_l,$$

где величина  $C_l = \langle \delta A_l \delta B_l \rangle / (l \delta B_l^2)$  есть мера коррелированности пульсаций магнитного поля и пульсаций векторного потенциала на соответствующем

масштабе. Подставляя эту оценку в (6.35) и принимая время обмена  $t_l \approx l / \delta v_l \approx l / \delta B_l$ , получим

$$\Pi_B \approx \delta B_l^3 C_l \approx \chi_B. \quad (6.36)$$

Таким образом, условие постоянства потока магнитной спиральности дает связь коэффициента корреляции  $C_l$  с пульсациями магнитного поля. Если уровень магнитной спиральности мал (критерием малости служит именно коэффициент корреляции  $C_l \ll 1$ ), то магнитную спиральность можно рассматривать как пассивную примесь, не влияющую на распределение энергии по масштабам, и принять колмогоровскую оценку  $\delta B_L^3 \approx \delta v_L^3 \approx l \varepsilon$ , что приводит к соотношению

$$C_l \approx \frac{\chi_B}{l \varepsilon}, \quad (6.37)$$

показывающему, что при прямом каскаде магнитной спиральности коэффициент корреляции растет обратно пропорционально масштабу, и прямой каскад возможен только при малых значениях корреляции на масштабах возбуждения. Спектральная плотность магнитной спиральности должна следовать при этом обычному для пассивных примесей закону «5/3»

$$H_B(k) \sim \chi_B \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}. \quad (6.38)$$

При обратном каскаде магнитной спиральности коэффициент корреляции падает с ростом масштаба. В предельном случае  $C_L \rightarrow 1$ , предполагая, что на масштабах  $l > L$  устанавливается инерционный интервал обратного каскада магнитной спиральности, в котором спектральные законы определяются только величиной  $\chi_B$ , приходим к спектральным законам

$$E(k) \sim \chi_B^{2/3} k^{-1}, \quad H_B(k) \sim \chi_B^{2/3} k^{-2}. \quad (6.39)$$

При этом инерционный интервал с законами (6.39) подразумевает постоянное, не зависящее от масштаба значение коэффициента корреляции  $C_l$ .

Рассмотрим, следуя работе [20], влияние на каскадные процессы перекрестной спиральности  $H_C$ . Представление о развитой турбулентности как о случайном процессе позволяет рассчитывать на то, что при отсутствии особых причин развитая турбулентность проводящей жидкости должна характеризоваться низким уровнем перекрестной спиральности. Именно такая ситуация обычно и рассматривается. Интерес к перекрестной спиральности возник после того, как высокоррелированные пульсации скорости и магнитного поля были обнаружены в солнечном ветре [40]. В случае солнечного ветра эта корреляция может быть обусловлена процессами на Солнце, порождающими солнечный ветер, либо возникать при его

распространении в межпланетном пространстве. Анализ эволюции энергии и спиральности в свободно вырождающейся МГД-турбулентности показал, что спиральность затухает медленнее энергии и, следовательно, степень коррелированности полей  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ , определяемая интегральным коэффициентом корреляции  $C = H_C/E$ , при свободном вырождении со временем может расти [55].

Рассмотрим МГД-турбулентность с магнитным числом Прандтля порядка единицы. На интегральном масштабе  $L$  действуют внешние силы, удельная мощность которых равна  $\varepsilon$ . Эти же силы вносят в турбулентный поток определенную удельную перекрестную спиральность  $\chi_C$  и не вносят магнитной спиральности. Предполагаем, что в инерционном интервале выполняется равнораспределение кинетической и магнитной энергии  $\delta v_l^2 \approx \delta B_l^2 \approx E_l$ . В пределах инерционного интервала поток энергии на любом масштабе  $l$  постоянен и равен скорости диссипации энергии (удельной мощности внешних сил)

$$\frac{E_l}{t_l} = \varepsilon, \quad (6.40)$$

где  $t_l$  — характерное время обмена, которое снова принимаем равным времени оборота вихря  $\tau_l \approx l/\delta v_l$ . В случае некоррелированных пульсаций скорости и магнитного поля  $H_C = 0$ , и эту оценку можно принять и для МГД-турбулентности, в которой доминируют нелинейные взаимодействия, а не волны Альфвена.

Структура уравнений магнитной гидродинамики (6.22) такова, что в случае совпадения магнитного поля и поля скорости  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r})$  (а это и есть предельный случай  $H_C = E$ ), нелинейные слагаемые сокращаются и в уравнении движения, и в уравнении индукции, исключая тем самым любые каскадные процессы. Основная идея дальнейших рассуждений состоит в том, что вносимая в поток (умеренная) перекрестная спиральность замедляет обмен (увеличивает характерное время)

$$t_l = \frac{l}{\delta v_l} \xi_l = \tau_l \xi_l, \quad (6.41)$$

а коэффициент замедления  $\xi_l$  связан с уровнем корреляции пульсаций скорости и магнитного поля на данном масштабе. Гипотеза (6.41) приводит к оценке энергии пульсаций на масштабе  $l$  вида

$$\delta v_l^2 \approx (\varepsilon l \xi_l)^{2/3}. \quad (6.42)$$

При этом коэффициент замедления фактически определяет отклонение от закона Колмогорова «4/5»

$$\xi_l \approx \frac{\delta v_l^3}{\varepsilon l}, \quad (6.43)$$

а формула (6.42) при  $\xi_l = 1$  совпадает с законом Колмогорова–Обухова  $\delta v_l^2 \approx (\varepsilon l)^{2/3}$ .

Замедление процессов переноса должно приводить к росту энергии турбулентного движения (в сравнении с некоррелированной турбулентностью при той же мощности источника). Применение оценки (6.42) к энергонесущему масштабу  $l = L$ , для которого  $v_L^2 \approx E$ , дает

$$E \approx (\varepsilon L \xi_L)^{2/3}. \quad (6.44)$$

Простейшее предположение о виде  $\xi_L$  состоит в том, что на масштабах действия внешних сил замедление каскадного переноса определяется величиной  $(1 - \chi_C/\varepsilon)$ , являющейся мерой некоррелированности возмущений, вносимых внешними силами. Учитывая квадратичность слагаемых, описывающих процессы спектрального переноса, можно предположить  $\xi_L \approx (1 - \chi_C/\varepsilon)^{-2}$ , что дает оценку средней энергии стационарно возбуждаемой турбулентности

$$E \approx \frac{(\varepsilon L)^{2/3}}{(1 - \chi_C/\varepsilon)^{4/3}}. \quad (6.45)$$

Таким образом, перекрестная спиральность препятствует каскадному переносу энергии и приводит к накоплению энергии в системе. Это накопление происходит до тех пор, пока интенсификация вихрей не компенсирует падающую эффективность нелинейных взаимодействий.

Полагая, что внешние силы вносят в турбулентность перекрестную спиральность, удельный поток которой равен  $\chi_C$ , для стационарного состояния следует принять и гипотезу о постоянстве потока перекрестной спиральности по спектру, которая дает

$$\frac{H_{Cl}}{t_l^{(\chi_C)}} = \chi_C, \quad (6.46)$$

причем время обмена перекрестной спиральностью  $t_l^{(\chi_C)} = \tau_l \xi_l^{(\chi_C)}$ , вообще говоря, может не совпадать со временем обмена энергией  $t_l$ .

Пусть  $C_l$  есть в этом случае коэффициент корреляции пульсаций скорости и магнитного поля на масштабе  $l$

$$C_l = \frac{\langle \delta v_l \delta b_l \rangle}{\sqrt{\langle \delta v_l^2 \rangle \langle \delta b_l^2 \rangle}} \approx \frac{H_{Cl}}{E_l}. \quad (6.47)$$

где угловые скобки означают осреднение, а  $H_{Cl}$  есть перекрестная спиральность на данном масштабе. Таким образом,  $H_{Cl} \approx C_l E_l$  и подстановка в (6.46) дает

$$C_l \delta v_l^3 \approx \chi_C l \xi_l^{(\chi_C)}. \quad (6.48)$$

Сравнивая это выражение с (6.42), можно связать коэффициент корреляции с характеристиками скорости обмена на соответствующем масштабе

$$C_l \approx \frac{\chi_C}{\varepsilon} \frac{\xi_l^{(\chi_C)}}{\xi_l}. \quad (6.49)$$

Если замедление обмена спиральностью и обмена энергией зависят от масштаба одинаковым образом, т. е.  $\xi_l^{(\chi_C)} \sim \xi_l$ , то корреляция скорости и магнитного поля не должна зависеть от масштаба (и наоборот — независимость корреляции от масштаба означает одинаковую зависимость коэффициентов  $\xi_l^{(\chi_C)}$  и  $\xi_l$  от масштаба).

В сильно коррелированной турбулентности соотношение времен обмена и оборота вихря, которое должно быть очень большим на энергонесущем масштабе, будет уменьшаться с уменьшением масштаба, приближаясь к единице на диссипативном масштабе. Если в инерционном интервале он зависит от масштаба по степенному закону

$$\xi_l \approx \xi_L \left( \frac{l}{L} \right)^\mu, \quad (6.50)$$

то коррекция спектрального распределения энергии пульсаций однозначно связана с показателем  $\mu$

$$\delta v_l^2 \approx \varepsilon^{2/3} l^{2/3(1+\mu)}. \quad (6.51)$$

В заключение отметим, что относительно мелкомасштабной МГД-турбулентности остается много открытых вопросов, о чем свидетельствует заметный рост числа публикаций по этой теме в последнее время. Много проблем связано с влиянием крупномасштабного магнитного поля, генерируемого крупномасштабным динамо, на перенос по спектру, в частности,

спиральности. Концепция Крейчнана–Ирошникова рассматривает крупномасштабное магнитное поле как предписанное внешним источником, но не вполне ясно, можно ли так поступать с магнитным полем, генерируемым самим течением. К особенностям каскадных процессов в МГД-турбулентности и генерации магнитных полей турбулентным динамо мы вернемся в главе 9.

## ГЛАВА 7

# Иерархические модели турбулентности и вейвлеты

В этой главе мы рассмотрим модели, основанные на идее применения функционального базиса специального типа, наиболее точно соответствующего структуре турбулентных полей. Идея такого базиса впервые была предложена В. Зиминим в конце семидесятых годов и состояла в использовании семейства самоподобных функций прогрессивно убывающего масштаба [10]. Базис был назван иерархическим, и на его основе были построены и исследованы многочисленные модели, также названные иерархическими (см. книгу В. Зимина и П. Фрика [12]). В конце восьмидесятых годов в научной литературе появилось слово «вейвлет», а к началу девяностых вейвлет-анализ превратился в самостоятельную, хорошо развитую область математической физики. Идеи, лежащие в основе теории вейвлетов, совпадают с идеями иерархического представления турбулентных полей, и в терминах этой молодой науки иерархические модели — это модели, построенные с помощью вейвлет-представления описываемых полей.

Поскольку цель книги состоит в изложении подходов к моделированию турбулентности, то главу мы начнем с идей, приведших к иерархическим моделям. В то же время, нельзя не остановиться и на формулировке основных положений вейвлет-анализа, который оказывается чрезвычайно полезным при анализе временной и пространственной структуры нелинейных гидродинамических систем. Базовые идеи вейвлет-представления даны в последнем параграфе этой главы, а систематическое изложение основ вейвлет-анализа и некоторые примеры его использования составят содержание последней, десятой главы книги.

### 7.1. Иерархический базис для турбулентных полей

Рассматривая численные методы решения уравнений движения жидкост

и, мы говорили о том, что чаще всего для этих целей используются либо сеточные, либо спектральные методы, либо их комбинация. И те, и другие можно отнести к проекционным методам решения уравнений в частных производных, когда для решения используют проекции всех полей на функциональные базисы.

В сеточных методах функции представлены значениями в точках, плотность которых связана со спектральными свойствами рассматриваемых полей (мелкомасштабные вихри не должны проваливаться между точками сетки). Более строго эта связь выражается теоремой Котельникова, согласно которой функция  $f(x)$ , спектр которой ограничен пространственной частотой  $2\pi/h$ , может быть представлена суммой функций отсчетов (синусов), центры которых размещены на сетке с шагом  $h$ . Очевидно, что сеточное представление эффективно при описании локальных структур — мелкомасштабный вихрь описывается небольшим числом точек, находящихся в соответствующей области пространства. В то же время, для описания даже очень простого по структуре крупномасштабного вихря требуется использование всех базисных функций.

Спектральные методы используют разложение по гармоническим функциям. В этом случае каждая базисная функция описывает, по сути, систему когерентных вихрей, занимающих все пространство. В таком представлении очень просто описать вихрь, занимающий всю область, или периодическую систему вихрей — и в том, и в другом случае достаточно одной базисной функции. Однако если требуется описать отдельный вихрь, занимающий малую часть рассматриваемой области, то потребуется весь гармонический ряд.

Выше уже обсуждались и преимущества, и недостатки обоих методов с точки зрения решения уравнений гидродинамики. Сеточные методы эффективны при вычислении нелинейных членов, так как позволяют выразить значение в точке через небольшое число соседних точек, но приводят к большим затратам машинного времени при решении уравнения Пуассона, требующего построения итерационного процесса, в который вовлечены все точки области. Спектральные методы, наоборот, делают решение уравнения Пуассона тривиальным, но приводят к очень сложной структуре нелинейных членов.

Проблемы двух функциональных базисов связаны с их локализованностью в физическом и в фурье-пространствах. Сетки строго локализованы в физическом пространстве, но спектр точки (дельта-функции) есть белый шум. Это означает, что функции делокализованы в пространстве Фурье. Обратная ситуация возникает при разложении Фурье. Каждая гармоника представляет строго одну частоту, но соответствующая ей функция занимает все физическое пространство.

В турбулентном потоке сосуществуют вихри самого различного масштаба, но наиболее эффективные взаимодействия происходят между вихрями (структурами), близкими и в физическом, и в фурье-пространстве. Первое очевидно — чтобы вихри взаимодействовали, они должны перекрываться в пространстве. Второе утверждение составляет основу концепции каскадных процессов — взаимодействуют вихри сравнимых размеров (если размеры не сопоставимы, то маленькие вихри просто переносятся большими без обмена энергией). Это заставляет обратиться к поиску специальных функций, более точно соответствующих структуре турбулентного потока.

В теории турбулентности важную роль играет идея масштабного подобия. Это значит, что искомый базис должен быть составлен из подобных функций.

Еще один недостаток использования рядов Фурье состоит в низкой информативности высоких частот. Хорошо понятен смысл рассмотрения вихрей с характерным размером  $L$ ,  $L/2$ ,  $L/3$ , ..., но отдельное описание масштабов  $L/957$ ,  $L/958$ ,  $L/959$ , ... и т.д. мало оправдано. Это соображение наводит на мысль о необходимости использования функций, масштаб которых изменяется прогрессивно, — такое соотношение получается при равномерном разбиении пространства масштабов в логарифмическом представлении.

Суммируя сказанное, можно сформулировать требования, которым должен удовлетворять функциональный базис, предназначенный для описания турбулентных потоков:

- функции базиса должны быть локализованы и в физическом, и в фурье-пространствах;
- функции должны быть подобны и описывать иерархию вихрей прогрессивно убывающих масштабов;
- мелкомасштабные вихри должны переноситься в поле вихрей большего масштаба;
- при подстановке в уравнения Навье–Стокса функциональный базис должен приводить к слабосвязанной динамической системе.

Попробуем построить базис, удовлетворяющий этим требованиям. Построение будем проводить для двумерного случая, так как это упрощает иллюстрацию результатов и запись функций.

Итак, имеем двумерное пространство  $\mathbf{r} = (x, y)$  и соответствующее ему пространство волновых векторов  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ . Фурье-плоскость разобьем на кольцевые зоны (рис. 7.1) таким образом, что для зоны с номе-

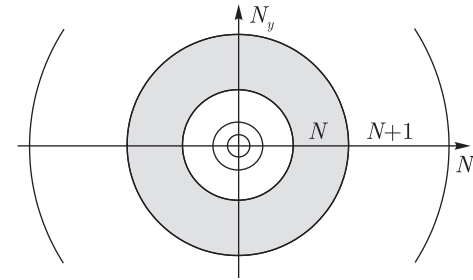


Рис. 7.1

ром  $N$

$$k_N < |\mathbf{k}| < k_{N+1}, \quad k_N = \pi 2^N, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.1)$$

Каждая кольцевая зона включает, таким образом, одну октаву волновых чисел (напомним, что октавой называется интервал, в пределах которого частота изменяется в два раза).

Рассмотрим, например, поле завихренности  $\omega(t, x, y)$  и представим его в виде

$$\omega(t, x, y) = \sum_N \omega_N(t, x, y), \quad (7.2)$$

где каждая функция  $\omega_N$  есть результат фильтрации в фурье-плоскости по соответствующему кольцу (7.1):

$$\omega_N(t, x, y) = \iint \omega(t, x', y') g_N(x - x', y - y') dx' dy'. \quad (7.3)$$

Здесь  $g_N(\mathbf{r})$  есть функция, фурье-образ которой  $\hat{g}_N(\mathbf{k})$  локализован в кольце:

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1 & \text{в кольце } N, \\ 0 & \text{вне кольца } N. \end{cases} \quad (7.4)$$

В силу определения операции фильтрации (7.3)–(7.4)

$$\int \omega_N \omega_M d\mathbf{r} \sim \delta_{NM},$$

и, следовательно, энтропия распадается на сумму

$$\Omega = \frac{1}{2} \int \omega^2 d\mathbf{r} = \sum_N \Omega_N, \quad \Omega_N = \frac{1}{2} \int \omega_N^2 d\mathbf{r}. \quad (7.5)$$

Такую же операцию фильтрации можно применить и к полю скорости, разбив тем самым и энергию на сумму энергий, принадлежащих различным октавам волновых чисел:

$$E = \sum_N E_N = \sum_N \frac{1}{2} \int v_N^2 dr. \quad (7.6)$$

Таким образом, мы провели первую часть построения — разбили исходное поле по масштабам. На втором этапе нужно провести разбиение полученных полей  $\omega_N$  на сумму функций, каждая из которых характеризует поле завихренности данного масштаба только в определенной области пространства:

$$\omega_N = \sum_n \omega_{Nn}(t) f_N(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}), \quad (7.7)$$

где  $f_N(\mathbf{r})$  есть базисные функции масштаба  $N$ ,  $\mathbf{r}_{Nn}$  — радиус-вектор центра вихря (функции). Функции  $f_N(\mathbf{r})$  должны быть подобны и обеспечивать разряженную матрицу нелинейных взаимодействий  $X_{NnMmLl}$  в уравнении

$$d_t \omega_{Nn} = \sum_{MmLl} X_{NnMmLl} \omega_{Mm} \omega_{Ll} + \dots, \quad (7.8)$$

получающемся при проектировании уравнений Навье–Стокса на функциональный базис. При этом хотелось бы иметь полный ортонормированный базис функций.

Увы, удовлетворить всем приведенным требованиям не удастся. Задача имеет решение в такой постановке только в одномерном случае. Одномерный базис, конечно, не имеет интереса с точки зрения описания турбулентности, но его построение представляет методический интерес, и мы его проведем.

### 7.1.1. Одномерный иерархический базис

Рассмотрим функцию  $f(x)$ , для которой существует преобразование Фурье  $\hat{f}(\gamma)$ . Ось волновых чисел  $\gamma$  (напомним, что  $k = 2\pi\gamma$ ) разбиваем на октавы  $\gamma_N = 2^N$  (рис. 7.2) и вводим функции

$$\hat{f}_N(\gamma) = \begin{cases} \hat{f}(\gamma), & \gamma_N < |\gamma| < \gamma_{N+2}, \\ 0, & |\gamma| < \gamma_N, \quad |\gamma| > \gamma_{N+1}. \end{cases} \quad (7.9)$$



Рис. 7.2

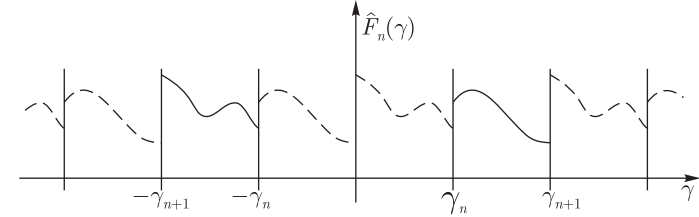


Рис. 7.3

Очевидно, что  $\hat{f}(\gamma) = \sum \hat{f}_N(\gamma)$ . Полученные функции  $\hat{f}_N$  обладают замечательным свойством — они допускают периодическое продолжение на всю ось  $\gamma$  с периодом  $2\gamma_N$  (рис. 7.3):

$$\hat{F}_N(\gamma) = \begin{cases} \hat{f}_N(\gamma - 2(m+1)\gamma_N), & \text{если } 2m\gamma_N < \gamma < (2m+1)\gamma_N, \\ \hat{f}_N(\gamma - 2(m-1)\gamma_N), & \text{если } (2m-1)\gamma_N < \gamma < 2m\gamma_N. \end{cases}$$

Это позволяет разложить функции  $\hat{F}_N(\gamma)$  в ряд Фурье

$$\hat{F}_N(\gamma) = \sqrt{h_N} \sum_n A_{Nn} e^{-2\pi i h_N n \gamma}, \quad (7.10)$$

где  $h_N = 1/(2\gamma_N)$ . Функции  $h_N e^{-2\pi i h_N n \gamma}$  образуют полный базис в классе функций  $\hat{F}_N$ , а те же функции, определенные внутри зоны (7.9), — полный базис в классе функций  $\hat{f}_N$ . Чтобы получить вид базисной функции в физическом пространстве, нужно взять обратное преобразование Фурье. Получается функция вида

$$f_{Nn}(x) = h_N^{-3/2} \text{sinc} \left[ \frac{\pi}{2h_N} (x - nh_N) \right] \cos \left[ \frac{3\pi}{2h_N} (x - nh_N) \right], \quad (7.11)$$

где  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ .

Вид функции (7.11) для  $N = n = 0$  показан на рис. 7.4. Эти функции известны в математике как функции Литлвуда–Пелли. Функции медленно убывают в физическом пространстве ( $f_{Nn}(x) \sim x^{-1}$ ), что является

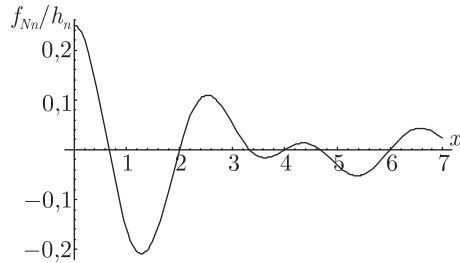


Рис. 7.4

результатом обрыва функций в пространстве Фурье. Все базисные функции взаимно ортогональны, то есть

$$\int f_{Nn}(x)f_{Mm}(x)dx = \delta_{NM}\delta_{nm},$$

что следует из ортогональности функций в фурье-пространстве и инвариантности скалярного произведения двух функций относительно преобразования Фурье. Коэффициенты в разложении (7.10) определяются формулой

$$A_{Nn} = \int f(x)f_{Nn}(x)dx. \quad (7.12)$$

Базисные функции имеют двойную индексацию. Большой индекс отвечает за масштаб, малый — за положение функции в пространстве. Увеличение индекса  $N$  на единицу сжимает функцию вдвое, увеличение индекса  $n$  на единицу сдвигает функцию вдоль оси  $x$  на величину  $h_N$ .

### 7.1.2. Двумерный базис

Простейший способ получения двумерного базиса состоит в определении двумерной функции как произведения одномерных

$$f_{NnMm}(x, y) = f_{Nn}(x)f_{Mm}(y),$$

однако такие функции не являются изотропными и не удовлетворяют требованию подобия. Последнее обстоятельство не оставляет надежд на получение простой динамической системы для коэффициентов разложения. Исходя из локальной изотропии мелкомасштабной турбулентности и стремления получить базис, образованный разномасштабными, но однотипными

функциями, построим относительно простой, но «не совсем ортогональный» базис.

Итак, раскладываем поле завихренности в ряд

$$\omega(t, x, y) = \sum_{Nn} A_{Nn}(t)\omega_{Nn}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}), \quad (7.13)$$

где  $A_{Nn}$  — зависящая от времени амплитуда,  $\omega_{Nn}$  — осесимметричная базисная функция, у которой большой индекс отвечает за масштаб, а малый — за положение в пространстве, и  $\mathbf{r}_{Nn}$  — радиус-вектор центра функции. Используем введенное выше разбиение спектральной плоскости на расширяющиеся кольцевые зоны (7.4) и определим базисную функцию таким образом, что ее фурье-образ равен константе в пределах соответствующего кольца:

$$\hat{\omega}_{Nn}(\gamma) = \begin{cases} \alpha e^{-2\pi i \gamma \mathbf{r}_{Nn}}, & \gamma_N < |\gamma| < \gamma_{N+1}, \\ 0, & \text{вне зоны.} \end{cases} \quad (7.14)$$

Экспоненциальный множитель задает сдвиг центра вихря в физическом пространстве (см. теорему о сдвиге и другие свойства преобразования Фурье в главе 10). Коэффициент  $\alpha$  может быть выбран из условия нормировки  $\int \hat{\omega}_{Nn}^2 d\gamma = 1$ , которое дает

$$\alpha = (3\pi)^{-1/2} 2^{1-N}. \quad (7.15)$$

Наряду с базисными функциями для завихренности можно записать и функции для скорости и функции тока. В пространстве Фурье все три функции связаны простыми соотношениями:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{Nn}(\gamma) &= -(4\pi^2 \gamma^2)^{-1} \hat{\omega}_{Nn}(\gamma), \\ \hat{v}_{Nn}(\gamma) &= 2\pi i (\mathbf{e} \times \gamma) \hat{\psi}_{Nn}(\gamma), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, нормальный рассматриваемой плоскости.

Чтобы получить вид функции в физическом пространстве, нужно взять обратное преобразование Фурье от (7.14). Соответствующие вычисления дают

$$\psi_{Nn}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}) = 2^{-N} (3\pi^3)^{-1/2} \int_s^{2s} z^{-6} J_0(z) dz, \quad (7.16)$$

$$\mathbf{v}_{Nn}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}) = 2^{-N} (\mathbf{s} \times \mathbf{e}) (3\pi)^{-1/2} (J_0(2s) - J_0(s)) / s^2, \quad (7.17)$$

$$\omega_{Nn}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}) = 2^{-N} (\pi/3)^{1/2} (2J_1(2s) - J_1(s)) / s, \quad (7.18)$$

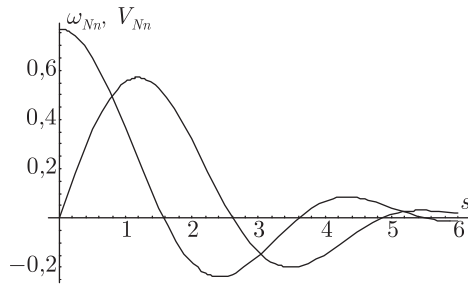


Рис. 7.5

где  $s = \pi 2^N |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}|$ , а  $J_0(s)$ ,  $J_1(s)$  — функции Бесселя. Базисные функции для скорости и завихренности показаны на рис. 7.5.

Мы оставили без внимания вопрос о количестве базисных функций и об их распределении в пространстве. Плотность функций в физическом пространстве можно оценить исходя из принципа неопределенности. Если области локализации в  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{k}$  пространствах имеют, соответственно, размеры  $\Delta r$  и  $\Delta k$ , то, требуя

$$\Delta r \Delta k = 2\pi, \quad (7.19)$$

получаем, что плотность функций заданного масштаба  $\rho_N$  связана с площадью области локализации функции в пространстве фурье  $\Delta S_k$  как

$$\rho_N = \Delta S_k / 4\pi^2 = (3\pi/4) 2^{2N}. \quad (7.20)$$

При вычислении (7.20) учли, что  $\Delta S_k$  есть площадь кольцевой области (7.1). Формула (7.20) отражает тот факт, что число вихрей при переходе от масштаба к масштабу растет в четыре раза (естественно, что в трехмерном случае это отношение будет равно восьми).

Вопрос о распределении функций в пространстве более сложен. Формулируя требования к базису, мы хотели воспроизвести структуру турбулентного потока, в котором мелкие вихри переносятся крупными. Это означает, что радиус-вектор центра функции должен подчиняться уравнению

$$d_t \mathbf{r}_{Nn} = \sum_{M < N} \sum_m \mathbf{v}_{Mm} (\mathbf{r}_{Nn} - \mathbf{r}_{Mm}), \quad (7.21)$$

в котором суммирование ведется по всем масштабам, большим данного.

Введенный таким образом базис ортогонален по индексу  $N$ , так как в фурье-пространстве функции различного масштаба занимают неперекрывающиеся области. Неортогональность функций по малому индексу, отвечающему за положение вихрей в пространстве, можно оценить путем

вычисления интеграла  $\int \omega_{Nn} \omega_{Mm} d\mathbf{r}$  для двух вихрей одного масштаба, расположенных друг от друга на расстоянии  $\rho_N^{-1/2}$ , равном среднему расстоянию между вихрями данного масштаба. Такая оценка дает для функций (7.18) значение порядка 0,1.

### 7.1.3. Трехмерный базис

Построение иерархического базиса для трехмерного скалярного поля принципиально не отличается от двумерного случая. В пространстве Фурье функции локализуются в сферических слоях и, после перехода в физическое пространство, получаются функции со сферической симметрией, имеющие вид

$$f_{Nn}(s) = \alpha 2^{3N/2} (\sin 2s - 2s \cos 2s - \sin s + s \cos s) / s^3, \quad (7.22)$$

где  $\alpha$  — нормировочный коэффициент, а  $s$  имеет тот же смысл, что и в двумерных функциях.

Для векторных полей ситуация отличается, так как появляется третий индекс, связанный с ориентацией вихря в пространстве. Так, например, функцию для поля скорости можно записать в виде

$$\mathbf{v}_{Nn\nu} = \alpha (\mathbf{e}_\nu \times \mathbf{s}) f_{Nn}(s). \quad (7.23)$$

Здесь  $\mathbf{e}_\nu$  — единичный вектор, направленный вдоль одной из осей координат, а  $f_{Nn}(s)$  — скалярная функция с шаровой симметрией.

## 7.2. Иерархическая модель двумерной турбулентности

Используем введенный выше функциональный базис для построения модели двумерной турбулентности. Речь идет именно о модели, а не о прямом численном расчете с помощью этого функционального базиса, так как базис не является строго ортогональным и не решает проблемы граничных условий.

Рассмотрим уравнение для завихренности

$$\partial_t \omega + (\mathbf{v} \nabla) \omega = \nu \Delta \omega \quad (7.24)$$

и спроектируем его на базис (7.13)–(7.18). Получаем уравнение вида

$$\sum_{Mm} d_t A_{Mm} P_{NnMm} = \sum_{Mm} \sum_{Ll} R_{NnMmLl} A_{Mm} A_{Ll} + \nu \sum_{Mm} A_{Mm} K_{NnMm}, \quad (7.25)$$

где

$$P_{NnMm} = \int \omega_{Nn} \omega_{Mm} d\mathbf{r}, \quad (7.26)$$

$$K_{NnMm} = \int \omega_{Nn} \Delta \omega_{Mm} d\mathbf{r}, \quad (7.27)$$

$$R_{NnMmLl} = \int \omega_{Nn} (\mathbf{v}_{Mm} \nabla) \omega_{Ll} d\mathbf{r}. \quad (7.28)$$

Элементы матриц  $P_{NnMm}$ ,  $K_{NnMm}$  и  $R_{NnMmLl}$  зависят от времени, так как они зависят от взаимного расположения взаимодействующих вихрей, а положения вихрей меняются в соответствии с уравнением (7.21). Энтропия и энергия системы определяются выражениями

$$\Omega = \sum_{Nn} \sum_{Mm} P_{NnMm} A_{Nn} A_{Mm}, \quad (7.29)$$

$$E = \sum_{Nn} \sum_{Mm} P'_{NnMm} A_{Nn} A_{Mm}, \quad (7.30)$$

где

$$P'_{NnMm} = \int \mathbf{v}_{Nn} \mathbf{v}_{Mm} d\mathbf{r}. \quad (7.31)$$

На этом этапе делается первое сильное предположение, состоящее в том, что мы пренебрегаем недиагональностью матриц  $P$ ,  $P'$  и  $K$  по малому индексу (по большому индексу матрицы диагональны в силу способа разбиения пространства волновых векторов). Тогда

$$\Omega = \sum_{Nn} A_{Nn}^2, \quad E = E_0 \sum_{Nn} 2^{-2N} A_{Nn}^2, \quad (7.32)$$

а уравнение (7.2) принимает вид

$$d_t A_{Nn} = \sum_{Mm} \sum_{Ll} R_{NnMmLl} A_{Mm} A_{Ll} - \nu K_0 2^{2N} A_{Nn}. \quad (7.33)$$

Следует подчеркнуть, что диагональность матрицы  $P$  не влечет за собой диагональности матрицы  $K$  (этим замечательным свойством обладает представление функций в ряд Фурье) и последнее является самостоятельным предположением.

Ясно, что степень простоты (или сложности) получаемой модели зависит от структуры матрицы нелинейных взаимодействий  $R_{NnMmLl}$ . Перед

тем как приступить к следующим конкретным шагам по упрощению модельных уравнений, проанализируем общую структуру этой матрицы. Для этого запишем вид ее элементов в пространстве Фурье:

$$\begin{aligned} R_{NnMmLl} &= \int \omega_{Nn} (\mathbf{v}_{Mm} \nabla) \omega_{Ll} d\mathbf{r} = \\ &= 2\pi i \iint \hat{\omega}_{Nn}(\gamma) [\gamma' \hat{\mathbf{v}}_{Mm}(\gamma - \gamma')] \hat{\omega}_{Ll}(\gamma') d\gamma d\gamma'. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Интегрирование в (7.34) ведется по пересечению областей

$$2^N < |\gamma| < 2^{N+1}, \quad 2^M < |\gamma - \gamma'| < 2^{M+1}, \quad 2^L < |\gamma'| < 2^{L+1}, \quad (7.35)$$

что и определяет характер заполнения матрицы. Все три условия (7.35) выполняются только в случае, если два из трех индексов  $N$ ,  $M$  и  $L$  отличаются не больше, чем на единицу. Это означает, что все ненулевые элементы матрицы сосредоточены вблизи диагоналей  $N = M$ ,  $N = L$  и  $L = M$ , причем третий индекс может сильно отличаться от двух, близких по значению, но быть меньше последних (можно построить треугольник из двух длинных отрезков и одного короткого, но нельзя построить из одного длинного и двух коротких). Структуру матрицы иллюстрирует рис. 7.6, на котором помечены все ненулевые элементы матрицы. Черным цветом выделен элемент  $T_{NnNn}$ , а крестиками — диагональ  $T_{NnMn}$ .

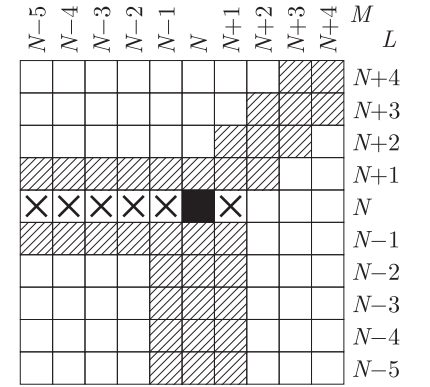


Рис. 7.6

Черным цветом выделен элемент  $T_{NnNn}$ , а крестиками — диагональ  $T_{NnMn}$ .

Дальнейшее построение модели требует новых предположений и гипотез, которые могут быть сделаны различными способами. Не останавливаясь на альтернативных способах, мы кратко опишем модель, рассмотренную в работе [34], и приведем некоторые результаты.

Модель называется иерархической потому, что базисные функции образуют иерархическую структуру, условно изображенную на рис. 7.7. Совокупность вихрей одного масштаба будем называть ярусом. Каждый вихрь данного яруса несет на себе четыре вихря следующего и так далее. При этом предполагается, что меньший вихрь переносится большим без дефор-

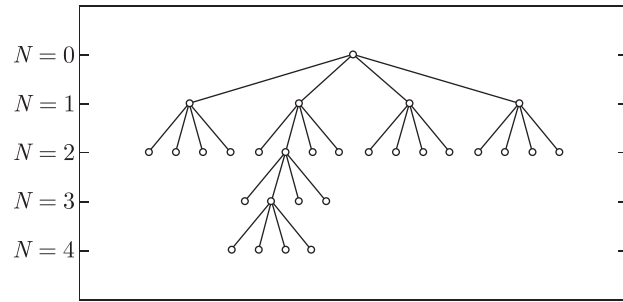


Рис. 7.7

мации, то есть меньший совершает строго осесимметричное относительно большего движение, которое описывается уравнениями для центра вихря (7.21). Это предположение означает, что расстояние между центрами пары вихрей, связанных вертикальной связью на схеме рис. 7.7, остается постоянным.

Следующий шаг касается вида матрицы нелинейных взаимодействий (7.26). Обязательным условием является соблюдение законов сохранения — уравнения при отсутствии диссипативного члена должны сохранять энергию и энтрофию, определенные выражениями (7.30). Для того чтобы обеспечить сохранение квадратичных величин, нужно, чтобы они сохранялись в единичном взаимодействии трех вихрей. Перепишем уравнение (7.31) в виде

$$d_t A_{Nn} = \sum_{L>M} \sum_{ml} T_{NnMmLl} A_{Mm} A_{Ll} - \nu K_0 2^{2N} A_{Nn}, \quad (7.36)$$

где матрица  $T$  включает все взаимодействия между данной тройкой вихрей  $T_{NnMmLl} = R_{NnMmL} + R_{NnLlMm}$  (матрицу  $R$  сложили вдоль диагонали  $L = M$ ) и заметим, что элементы матрицы  $T$  зависят только от относительного положения трех вихрей и отношения их масштабов (номеров ярусов):

$$T_{NnMmLl}(\mathbf{r}_{Nn}, \mathbf{r}_{Mm}, \mathbf{r}_{Ll}) = T_{NML}(\mathbf{r}_{mn}, \mathbf{r}_{ln}) = 2^N T_{0, M-N, L-N}(2^N \mathbf{r}_{mn}, 2^N \mathbf{r}_{ln}), \quad (7.37)$$

где  $\mathbf{r}_{mn} = \mathbf{r}_{Mm} - \mathbf{r}_{Nn}$  и  $\mathbf{r}_{ln} = \mathbf{r}_{Ll} - \mathbf{r}_{Nn}$ .

С учетом (7.37) запишем условия сохранения энергии и энтропии, используя только большие индексы матрицы:

$$T_{N, N-j, N+1} + 2^j T_{N, N+j, N+j+1} + 2^{-1} T_{N, N-j-1, N-1} = 0, \quad (7.38)$$

$$T_{N, N-j, N+1} + 2^{-j} T_{N, N+j, N+j+1} + 2 T_{N, N-j-1, N-1} = 0. \quad (7.39)$$

Отметим, что наличие двух законов сохранения исключает наличие ненулевых диагональных членов и оставляет в матрице только элементы трех типов, вошедшие в соотношения (7.38)–(7.39). Решая систему (7.38)–(7.39), выражаем все элементы через один, который для упрощения записи обозначим как  $T_j$  (индекс  $j$  характеризует степень удаленности взаимодействующих вихрей:  $j = 1$  означает, что взаимодействуют вихри из трех последующих ярусов;  $j = 2$  соответствует взаимодействию двух вихрей из соседних ярусов с третьим, который отстоит от них через один ярус, и т. д.):

$$\begin{aligned} T_{N, N-j, N+1} &= 2^N T_{0, -j, 1} = 2^N T_j, \\ T_{N, N-j-1, N-1} &= 2^N T'_j = 2^N (1 - 2^{-2j}) (2^{-2j-1} - 2)^{-1} T_j, \\ T_{N, N+j, N+j+1} &= 2^N T''_j = 3 \cdot 2^N (2^{-j} - 2^{2+j})^{-1} T_j. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Таким образом, для любой тройки взаимодействующих вихрей осталась одна величина  $T_j$ , требующая вычисления при их заданном взаимном положении. Заметим, что положение вихрей полностью определяется значением углов  $\beta$  между векторами, соединяющими центры большего вихря с меньшим и т. д. (рис. 7.8). Величина  $T_j$  вычисляется непосредственно по формуле (7.34) с учетом вида функций (7.17)–(7.18) и табулируется для всевозможных значений углов. Суммируя сказанное, запишем систему уравнений для двух переменных, характеризующих каждый вихрь  $n$  яруса (масштаба)  $N$ : амплитуды  $A_{Nn}$  и угла  $\beta_{Nn}$ :

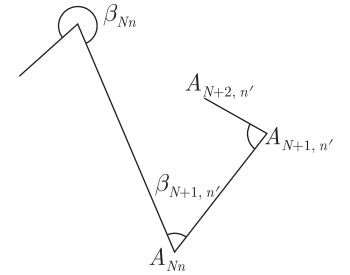


Рис. 7.8

$$\begin{aligned} d_t A_{Nn} &= 2^N \sum_{j=1}^J \left\{ A_{N-j-1}^- A_{N-1}^- T'_j(\beta_{N-1}, \beta_{N-2}, \dots) + \right. \\ &\quad \left. + A_{N-j}^- \sum_{i=1}^4 A_{N+1, i}^+ T_j(\beta_N, \beta_{N-1}, \dots) \right\} \end{aligned}$$

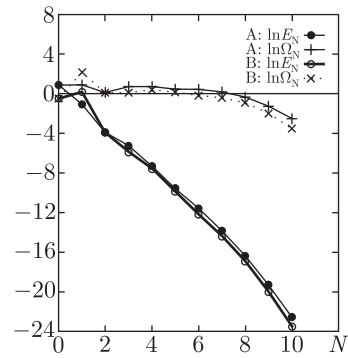


Рис. 7.9

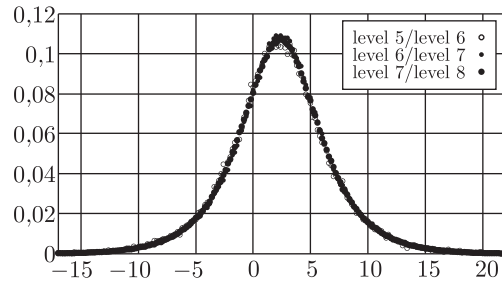


Рис. 7.10

$$+ \sum_{i=1}^{2^j} \sum_{k=1}^{2^{j+1}} A_{N+j,i}^+ A_{N+j+1,k}^+ T_j''(\beta_{N+1}, \beta_{N+2}, \dots) \Big\} - \\ - \nu K_0 2^{2N} A_{Nn} + f_{Nn}, \quad (7.41)$$

$$d_t \beta_{Nn} = A_{Nn}. \quad (7.42)$$

В уравнении (7.41) использованы обозначения  $A_{N-k}^-$  для индикации вихря, находящегося в иерархическом дереве на  $k$  ярусов выше данного, и  $A_{N+k,i}^+$  для  $i$ -го вихря, находящегося в дереве на  $k$  ярусов ниже данного (таких вихрей всего  $2^{2k}$  штук).

Система (7.41)–(7.42) хороша тем, что в ней каждая переменная (каждый вихрь) связана лишь с небольшим числом соседей по иерархическому дереву, изображенному на рис. 7.7. Такого типа системы удобны для применения систем массивованного параллельного программирования. В цитируемой работе эта система решалась на параллельном компьютере типа CM-200 фирмы Thinking Machines Corporation, имеющем 8192 процессора. Компьютер относится к параллельным системам типа SIMD (Single Instruction Multi Data), допускающим одновременное выполнение всеми процессорами только одной и той же операции. Такие вычислительные системы эффективны только при решении задач, в которых требуется одновременное выполнение большого числа одинаковых действий с различными данными. Рассматриваемая иерархическая модель как раз и относится к таким задачам.

Решалась система для 12 ярусов ( $N$  от 0 до 11), включающая всего 5 592 405 вихрей. Моделировался инерционный интервал переноса эн-

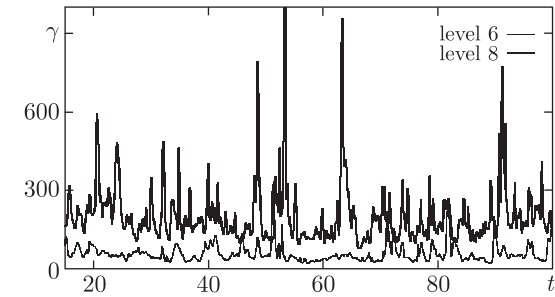


Рис. 7.11

строфии — подкачка осуществлялась в первом и втором ярусе, а отвод энергии — в нулевом. В стационарном режиме измерялись интегральные и локальные характеристики полей завихренности и скорости. На рис. 7.9 показаны осредненные по времени распределения энергии и энстрофии по ярусам. Наклон графика энергии в инерционном интервале соответствует спектральному закону  $E(k) \sim k^{-3,3 \pm 0,05}$ . Преимущество иерархической модели состоит в том, что она позволяет непосредственно пронаблюдать локальные вариации наклона спектрального закона для плотности энергии. Действительно, локальный наклон спектра может быть определен по отношению энергии пары вертикальных соседей в иерархическом дереве. Рис. 7.10 показывает гистограмму таких локальных наклонов (точнее, на графике показан логарифм отношения энергий последовательной пары вихрей в дереве). Разными значками обозначены данные, относящиеся к различным ярусам. Локальные значения наклона спектра лежат в широком интервале значений, непосредственно подтверждая концепцию мультифрактальной структуры турбулентного потока.

В пределах инерционного интервала точки, относящиеся к различным ярусам, ложатся на гистограммах на одну кривую линию, однако более тщательное исследование свойств распределения вероятности показывает систематическое изменение ее структуры по мере уменьшения масштабов. В качестве меры отличия распределения вероятности от нормального часто используют коэффициент эксцесса, определяемый в нашем случае для каждого яруса:

$$\gamma_N = \langle (A_{Nn}^2)^4 \rangle / \langle (A_{Nn}^2)^2 \rangle^2 - 3. \quad (7.43)$$

На рис. 7.11 показано изменение во времени коэффициентов эксцесса, вычисляемых для шестого и восьмого ярусов (оба внутри инерционного интервала). Глядя на рисунок, можно сделать два важных вывода. Во-

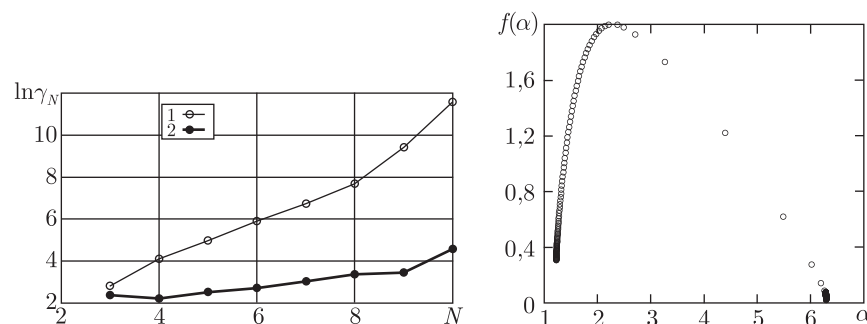


Рис. 7.12

первых, графики свидетельствуют о сильной временной перемежаемости — в отдельные моменты времени эксцесс растет до значений, равных нескольким сотням. Во-вторых, можно видеть, что коэффициент эксцесса восьмого яруса систематически превышает коэффициент шестого яруса. Этот факт подтверждает и рис. 7.12, на котором показаны средние по времени значения логарифма коэффициентов (7.43) для всех ярусов (точки 1). Виден монотонный рост эксцесса с ростом номера яруса. Это означает, что, чем меньше масштаб, тем большие выбросы возникают в функциях распределения вероятности (на гистограммах эти выбросы практически не видны, так как сливаются с осью абсцисс). На этом же рисунке для сравнения приведены коэффициенты эксцесса, полученные в каскадной модели двумерной турбулентности. Об этих моделях речь пойдет в последней главе, и там мы вернемся к обсуждению этого графика.

Последний рис. 7.13 показывает результаты непосредственного вычисления фрактального спектра  $f(\alpha)$  по алгоритму, описанному в параграфе 4.5.3. График подтверждает выводы, сформулированные при обсуждении мультифрактальных моделей, а именно тот факт, что, являясь, по сути, моделью с бесконечным числом параметров, такая модель описывает любой спектр. Вид функции  $f(\alpha)$  всегда одинаков. Интерес в ней представляют лишь несколько точек, например вершина, абсцисса которой соответствует среднему наклону спектра.

Сравнение результатов, получаемых при решении иерархических уравнений, с результатами прямого численного моделирования двумерной турбулентности показывает, что модель не воспроизводит характерных для двумерной турбулентности когерентных вихрей и связанного с ними крутого участка спектра. Причиной тому служит отсутствие в модели взаимодействий между вихрями-соседями (нет горизонтальных связей в иерархи-

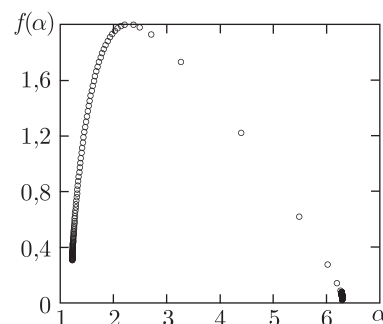


Рис. 7.13

ческом дереве рис. 7.7). Модель теряет, таким образом, черты турбулентности, связанные с процессами самоорганизации в физическом пространстве. В то же время она наглядно иллюстрирует тот факт, что неоднородность каскадного процесса (перемежаемость) возникает и благодаря самим нелинейным взаимодействиям обмена энергии в иерархической структуре.

### 7.3. Вейвлеты

В самых разных областях науки возникают задачи, связанные с анализом пространственных полей со сложной, многомасштабной структурой либо временных сигналов с меняющимся со временем спектральным составом. Эти задачи заставляли исследователей делать попытки построения специальных функциональных разложений, близких по своей идеологии описанному выше иерархическому базису. Центральной идеей всех этих подходов было использование базиса, каждая функция которого характеризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и место ее локализации в физическом пространстве (во времени).

Слово «вейвлет» (английское слово «wavelet» означает маленькую волну или рябь) было введено А. Гроссманном и Ж. Морле в 1984 году в работе [70], выполненной в связи с проблемой анализа сейсмических сигналов, в которых требуется выделить и время (положение) всплеска в сигнале, и его спектральный состав (масштаб). В этой статье были сформулированы основные определения и доказаны основополагающие теоремы. Работа вызвала огромный интерес, и уже к началу 90-х годов вейвлет-анализ превратился в развитую область математической физики, нашедшей широкое применение в задачах анализа временных сигналов, распознавания образов и синтеза изображений, шифровки и дешифровки информации и многих других.

Как уже отмечалось, вейвлеты используются как при анализе временных сигналов, так и при исследовании структуры пространственных полей. Временные ряды представляют собой одномерный сигнал, и все основные идеи проще продемонстрировать на задачах анализа временных последовательностей. По этой причине мы забудем на некоторое время о пространственных полях и переключимся на сигналы вида  $f(t)$ .

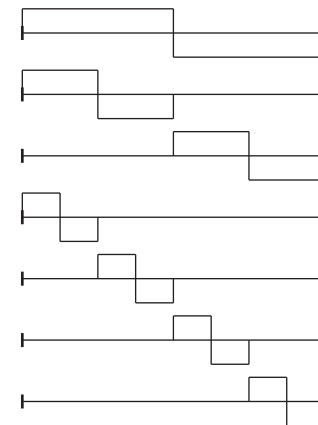


Рис. 7.14

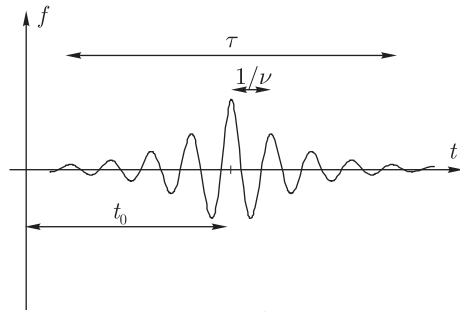


Рис. 7.15

Первая попытка построить функциональный базис, состоящий из функций, каждая из которых характеризует пульсации определенной продолжительности в определенный момент времени, принадлежит А. Хаару (1909 г.). Первые семь функций Хаара, построенные на единичном отрезке, показаны на рис. 7.14. Каждая функция представляет собой пару следующих друг за другом прямоугольных импульсов с разными знаками и одинаковой длительностью. Среднее значение любой функции равно нулю, а совокупность функций образует полный ортонормированный базис. Каждая функция строго локализована в физическом пространстве (во времени), но характеризуется медленно спадающим спектром частот (как  $1/\nu$ ).

Следующим шагом стали функции Литлвуда–Пелли (1937 г.). Именно это семейство функций получается при построении одномерного иерархического базиса. Функции строятся путем вырезания полосы частот в пространстве Фурье. Это дает строгую локализацию в пространстве частот, но медленное затухание функции в физическом пространстве (во времени): функции описывают осцилляции, амплитуда которых падает как  $1/t$ .

Важным этапом в развитии идеи локального анализа спектральных (частотных) свойств стало преобразование Габора (1946 г.), называемое также фурье-преобразованием в окнах. Функции Габора представляют собой гармонический сигнал, модулированный функцией Гаусса. Они хорошо локализованы и во времени, и в частотах, но каждая функция Габора характеризуется тремя параметрами: положением центра окна  $t_0$ , шириной окна  $\tau$  и частотой осцилляций  $\nu$  (рис. 7.15). При этом функции различного масштаба не являются подобными (имеют различное число осцилляций).

Вейвлеты объединили в себе два важных свойства — подобие и выжатую локализованность в физическом и фурье-пространствах. Сформулируем требования, которым должно удовлетворять семейство функций, чтобы быть вейвлетами.

*Допустимость.* Функция  $\psi(t)$ , которую будем называть *анализирующим вейвлетом* (употребляют также термин *материнский вейвлет*), должна иметь нулевое среднее значение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (7.44)$$

Это условие может быть сформулировано и более строго. Говорят, что  $\psi(t)$  есть вейвлет порядка  $M$ , если для всех  $m \leq M$  выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0, \quad (7.45)$$

требующее равенства нулю  $M$  первых моментов вейвлета.

*Подобие.* Все функции семейства получаются из анализирующего вейвлета путем масштабного преобразования и сдвига,

$$\psi_{a,b}(t) = \psi((t-b)/a). \quad (7.46)$$

Таким образом, вейвлеты образуют двухпараметрическое семейство функций, в котором параметр  $a$  отвечает за масштаб (растяжение) функции, а параметр  $b$  — за ее положение (сдвиг).

*Обратимость.* Вейвлет-преобразование должно быть обратимо, то есть должно существовать обратное преобразование, однозначно восстанавливающее исходную функцию по ее вейвлет-представлению.

*Регулярность.* Функция  $\psi(t)$  должна быть хорошо локализована и в физическом пространстве, и в пространстве Фурье.

Согласно последнему требованию и функции Хаара, и функции Литлвуда–Пелли не попадают под определение вейвлетов. По сути, они являются собой два предельных случая (в одном случае резкие границы в физическом пространстве приводят к бесконечным, в принципе, хвостам в пространстве частот, и, наоборот, обрыв в пространстве частот дает длинные хвосты в физическом пространстве в другом).

В отличие от преобразования Фурье, вейвлет-преобразование допускает широкий выбор анализирующей функции. Согласно первому требованию вейвлет всегда является знакопеременной функцией, включающей обычно небольшое количество осцилляций. Выбор конкретного вида вейвлета зависит от целей проводимого анализа.

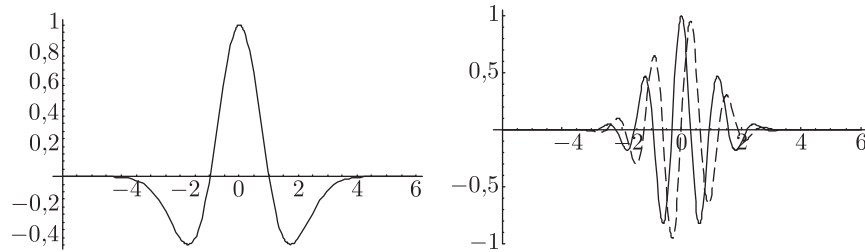


Рис. 7.16

Приведем несколько примеров широко используемых вейвлетов. Простым вещественным вейвлетом, широко используемым в задачах, требующих хорошего пространственного разрешения и не требовательных к спектральному разрешению, является вейвлет, получивший название «мексиканская шляпа» (рис. 7.16),

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}. \quad (7.47)$$

В задачах, требующих лучшего спектрального разрешения, часто используется вейвлет Морле — комплексная функция вида

$$\psi(t) = e^{-t^2/2}e^{i\omega_0 t}. \quad (7.48)$$

На рис. 7.17 сплошной линией показана его вещественная часть, а пунктирной — мнимая. Сама функция (7.48) совпадает с видом функций, используемых в преобразовании Габора, но семейство вейвлетов отличается от функций Габора тем, что, один раз выбрав частоту  $\omega_0$  для анализирующего вейвлета и задав тем самым число осцилляций, мы в дальнейшем сжимаем или растягиваем функцию как целое, не нарушая подобия отдельных функций семейства.

Вопрос о выборе конкретного вида анализирующего вейвлета отложим до заключительной главы книги, где приведены базовые сведения по вейвлет-анализу временных сигналов и пространственных полей, а также даны примеры его применения для задач, связанных с исследованием нелинейных гидродинамических систем.

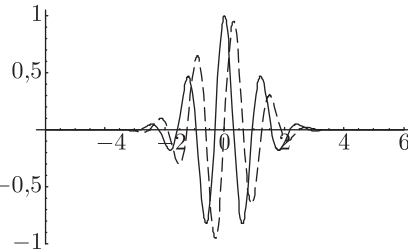


Рис. 7.17

## ГЛАВА 8

# Каскадные модели турбулентности

## 8.1. Каскадные модели

В главе 2 мы видели, насколько полезными оказались маломодовые динамические системы для понимания путей перехода от детерминированных движений к хаосу. В этой главе мы познакомимся с простейшими моделями развитой турбулентности, по сути, также представляющими собой динамические системы, но относительно высокой размерности (несколько десятков обыкновенных дифференциальных уравнений).

Отметим, что при построении простых динамических моделей течений (типа модели Лоренца для конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости) все моды описывают структуры близкого масштаба. Основным признаком развитой турбулентности является наличие широкого диапазона возбужденных масштабов и соответствующего ему большого числа степеней свободы. Спрашивается, можно ли построить маломодовую модель развитой турбулентности, которая не ограничивается рассмотрением крупномасштабного потока (как полуэмпирические модели), а описывает каскадные процессы переноса энергии по спектру от интегрального масштаба до диссипативного.

Идея моделей этого типа, получивших название «каскадных моделей» (в последнее время стало употребляться и пришедшее с запада название «оболочечные модели» — перевод английского термина «shell models»), состоит в рассмотрении цепочки переменных, каждая из которых описывает пульсации поля скорости определенного масштаба.

Для реализации этой цели ось волновых чисел разбивается на прогрессивно расширяющиеся зоны

$$k_n < |\mathbf{k}| < k_{n+1}, \quad k_n = q^n k_0 \quad (8.1)$$

(этот шаг повторяет идеологию построения иерархических моделей). Далее, для каждой зоны вводится одна (действительная или комплексная) переменная  $U_n$ , квадрат которой равен энергии всех пульсаций, заключен-

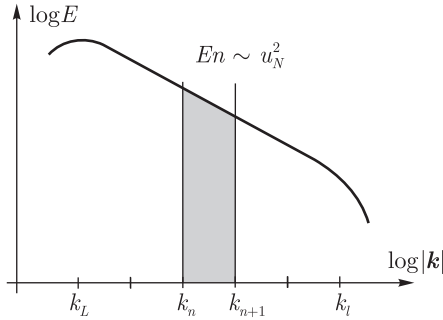


Рис. 8.1

ных в соответствующей области волнового пространства (рис. 8.1). Величину  $U_n$  называют иногда *коллективной* переменной для всех пульсаций, лежащих в выделенном диапазоне волновых чисел.

Для переменных  $U_n$  требуется написать уравнения, которые будут моделировать «базовые свойства» уравнений движения жидкости (как правило, речь идет об уравнениях Навье–Стокса для несжимаемой жидкости). Под «базовыми» свойствами понимается, как минимум, выполнение законов сохранения и квадратичная нелинейность уравнений. Общий вид каскадных уравнений можно записать в виде

$$d_t U_n = \sum_{ml} T_{nml} U_m U_l - K_n U_n + f_n. \quad (8.2)$$

Конкретные модели отличаются, в основном, видом матрицы нелинейных взаимодействий  $T_{nml}$ . Параметр  $q$ , определяющий ширину отдельной зоны, как правило, выбирают равным двум, что соответствует разбиению пространства волновых векторов на октавы. Диссипативное слагаемое записывается в виде  $K_n U_n \sim k_n^2 U_n$ , повторяющем вид диссипативного члена уравнения Навье–Стокса в пространстве Фурье, а переменная  $f_n$  описывает действие внешних сил в заданной октаве волновых чисел.

## 8.2. Модель Новикова–Деснянского

Каскадные модели являются спектральными моделями турбулентности, так как описывают процессы переноса энергии по спектру. Покажем, как получить простую каскадную модель с помощью фурье-представления

уравнений Навье–Стокса. Для этого запишем уравнение движения для компонент поля скорости

$$\partial_t v_j = -(v_k \partial_k) v_j - \rho^{-1} \partial_j P + \nu \partial_{kk}^2 v_j, \quad (8.3)$$

а скорость представим в виде ряда Фурье

$$v_j(r) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{v}_j(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}r}. \quad (8.4)$$

Подставим (8.4) в (8.3):

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{\mathbf{p}} \hat{v}_j(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}r} = & - \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}} \hat{v}_k(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}r} (i q_k) \hat{v}_j(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}r} - \\ & - \rho^{-1} \sum_{\mathbf{p}} (i p_j) \hat{P}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}r} - \nu \sum_{\mathbf{p}} p^2 \hat{v}_j(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

(здесь  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  — волновые векторы), и после умножения уравнения на  $e^{-i\mathbf{k}r}$  проинтегрируем его по  $dr$ . В результате получаем

$$\partial_t \hat{v}_j(\mathbf{k}) = -i \sum_{\mathbf{q}} \hat{v}_k(\mathbf{k} - \mathbf{q}) q_k \hat{v}_j(\mathbf{q}) - i \rho^{-1} k_j \hat{P}(\mathbf{k}) - \nu k^2 \hat{v}_j(\mathbf{k}).$$

Пользуясь уравнением неразрывности, которое в пространстве Фурье имеет вид

$$k_i v_i = 0, \quad (8.5)$$

исключим из уравнения давление. Для этого умножим уравнение на  $k_j$  и после простых преобразований получим

$$\rho^{-1} \hat{P}(\mathbf{k}) = - \sum_{\mathbf{q}} \frac{q_k k_l}{k^2} \hat{v}_k(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \hat{v}_l(\mathbf{q}).$$

После подстановки получаем

$$\partial_t \hat{v}_j(\mathbf{k}) = -i \sum_{\mathbf{q}} (\delta_{lj} - k_l k_j / k^2) \hat{v}_k(\mathbf{k} - \mathbf{q}) q_k \hat{v}_l(\mathbf{q}) - \nu k^2 \hat{v}_j(\mathbf{k}). \quad (8.6)$$

Структура нелинейного слагаемого в (8.6) такова, что во взаимодействиях всегда участвуют три моды Фурье  $\hat{v}(\mathbf{k})$ ,  $\hat{v}(\mathbf{q})$  и  $\hat{v}(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ , — это значит, что взаимодействуют три волны, волновые векторы которых образуют треугольник.

Рассмотрим выборку волновых чисел таких, что  $|\mathbf{k}_n| = k_0 2^n$ , и выберем из суммы (8.6) только слагаемые, описывающие взаимодействия соответствующих мод. Набор возможных комбинаций на таком наборе векторов

ограничен, так как из них можно построить только равнобедренные треугольники, в которых основание меньше или равно боковым сторонам (возможен, конечно, и равносторонний треугольник, но он соответствует взаимодействиям внутри данной октавы волновых чисел, которые в рамках данных моделей не рассматриваются), и предельный случай, когда две боковые стороны вдвое меньше основания и треугольник вырождается в прямую. Это значит, что если мы примем за каскадные переменные соответствующие гармоники Фурье ( $U_n = \hat{v}(k_n)$ ), то в матрице  $T_{nml}$  уравнения (8.2) останутся только диагональные члены  $T_{nmm}$  и  $T_{mnm}$  ( $m = n-1, n+1, n+2, \dots$ ).

В простейшем случае можно ограничиться рассмотрением лишь локальных взаимодействий, то есть взаимодействиями ближайших соседей в цепочке. Одна из возможных форм модельных уравнений есть

$$\dot{U}_n = k_n(U_{n-1}^2 - bU_nU_{n+1}) - \nu k_n^2 U_n. \quad (8.7)$$

Цепочка уравнений (8.7) и представляет собой каскадную модель Новикова–Деснянского [7] — первую каскадную модель турбулентности. Уравнения содержат одну константу  $b$ , которая выбирается, исходя из закона сохранения. Кинетическая энергия всей системы есть

$$E = \sum E_n = \sum U_n^2/2. \quad (8.8)$$

Если потребовать, чтобы при отсутствии диссипативного слагаемого система уравнений (8.7) сохраняла энергию, то из этого условия легко находится значение константы  $b = 2$ . Аналогом энтропии в каскадной модели является величина

$$\Omega = \sum k_n^2 U_n^2/2. \quad (8.9)$$

Требование сохранения энтропии (8.9) приводит к значению  $b = 8$ .

Важно отметить, что модель (8.7) может одновременно удовлетворять только одному закону сохранения. Уравнения (8.7) имеют стационарные решения, соответствующие наличию инерционного интервала. Эти решения могут реализоваться при малой вязкости (большом числе Рейнольдса) и должны иметь степенной вид

$$U_n = U_0 k_n^\alpha. \quad (8.10)$$

Нетрудно увидеть, что для  $k_n = k_0 2^n$  стационарное решение вида (8.10) возникает при

$$\alpha = -(\log_2 b)/3. \quad (8.11)$$

При  $b = 2$  (сохраняемой величиной является энергия) это дает решение  $U_n = U_0 2^{-n/3}$ , а при  $b = 8$  (сохраняется энтропия) решение есть  $U_n = U_0 2^{-n}$ . Первое решение соответствует колмогоровскому спектру для инерционного интервала переноса энергии  $E(k) \sim k^{-5/3}$ , а второе — спектру Крейчана  $E(k) \sim k^{-3}$  для инерционного интервала переноса энтропии, реализующемуся в двумерной турбулентности. Отметим, что если спектр энергии подчиняется степенному закону  $E(k) \sim k^\lambda$ , то энергия октавы  $n$

$$E_n = \int_{k_n}^{k_{n+1}} E(k) dk \sim k_n^{\lambda+1}, \quad (8.12)$$

и из сравнения (8.12) с (8.10) следует, что

$$\alpha = (\lambda + 1)/2. \quad (8.13)$$

Простейшее обобщение модели (8.7) состоит в добавлении еще одной пары членов

$$\dot{U}_n = k_n [U_{n-1}^2 - 2U_nU_{n+1} + C(U_{n-1}U_n - 2U_{n+1}^2)] - \nu k_n^2 U_n. \quad (8.14)$$

В уравнениях появляется еще один параметр  $C$ , который, однако, не позволяет поставить второе условие сохранения, так как две пары нелинейных слагаемых подобны.

### 8.3. Модель GOY

К моделям вида (8.2) можно прийти различными путями. Более формализованный путь основан на введенном А. М. Обуховым понятии системы гидродинамического типа (СГТ) [3].

Системой гидродинамического типа называется динамическая система, удовлетворяющая четырем условиям:

1. в бездиссипативном пределе система сохраняет фазовый объем;
2. система имеет не менее одного квадратичного интеграла движения;
3. уравнения содержат квадратичную нелинейность;
4. при рассмотрении длинных цепочек уравнений последние ограничиваются локальными взаимодействиями, то есть взаимодействуют только ближайшие соседи.

Простейшая СГТ представляет собой триплет. Собирая цепочку из отдельных триплетов, можно прийти к системам вида (8.2).

Удается построить системы гидродинамического типа, обладающие несколькими интегралами движения. СГТ с двумя интегралами движения была построена в работе [2], а на ее основе позже была построена каскадная модель двумерной турбулентности вида [4]

$$\dot{U}_n = k_n(aU_{n-2}U_{n-1} + bU_{n-1}U_{n+1} + cU_{n+1}U_{n+2}) - \nu k_n^2 U_n. \quad (8.15)$$

В модели типа (8.15) в каждом взаимодействии участвуют три соседних члена цепочки переменных  $U_n$ . Это означает, что матрица  $T_{nml}$  не содержит диагональных элементов, — это не случайно, так как диагональные члены не могут одновременно обеспечить сохранение двух квадратичных величин.

Условие сохранения энергии дает уравнение

$$\begin{aligned} d_t \sum_n E_n = \sum_n U_n \dot{U}_n = \dots + \\ + k_{n-1}(aU_{n-3}U_{n-2}U_{n-1} + bU_{n-2}U_{n-1}U_n + cU_{n-1}U_nU_{n+1}) + \\ + k_n(aU_{n-2}U_{n-1}U_n + bU_{n-1}U_nU_{n+1} + cU_nU_{n+1}U_{n+2}) + \\ + k_{n+1}(aU_{n-1}U_nU_{n+1} + bU_nU_{n+1}U_{n+2} + cU_{n+1}U_{n+2}U_{n+3}) + \\ + \dots = 0, \end{aligned} \quad (8.16)$$

которое выполняется, если равна нулю сумма коэффициентов при одинаковых комбинациях переменных (в уравнении соответствующая тройка членов выделена подчеркиванием). Тогда условие сохранения энергии есть

$$k_{n-1}c + k_nb + k_{n+1}a = 0, \quad (8.17)$$

а условие сохранения энтропии аналогичным образом дает

$$k_{n-1}^3c + k_n^3b + k_{n+1}^3a = 0. \quad (8.18)$$

Один из коэффициентов остается неопределенным. Полагая, например,  $c = 1$ , получаем

$$a = 1/16, \quad b = -5/8. \quad (8.19)$$

Уравнение (8.15) имеет два стационарных решения вида (8.10). Подставляя (8.10) в (8.15) и обозначая  $2^{3\alpha} = x$ , получаем квадратное уравнение, корни которого ( $x_1 = 1/2$ ,  $x_2 = 1/8$ ) дают  $\alpha_1 = -1/3$ ,  $\alpha_2 = -1$ . Эти решения соответствуют двум спектральным законам, предсказываемым для двумерной турбулентности соображениями размерности.

Упомянем и третий путь получения каскадных моделей, который основан на редукции иерархической модели. Идея этого подхода состоит во введении одной амплитудной характеристики для всех функций выделенного яруса (масштаба) и вычисления элементов матрицы нелинейных взаимодействий на основе оценки среднего результата взаимодействия трех вихрей соответствующих масштабов при их различном взаимном положении. Преимущество такого подхода состоит в том, что не требуется искусственно ограничиваться рассмотрением только локальных взаимодействий. Каскадная модель такого типа была впервые построена в работе [27] для двумерной турбулентности (двумерная турбулентность привлекательна наличием второго положительно-определенного интеграла движения, который позволяет избежать неопределенности при выводе уравнений). Уравнения модели имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_n = \sum_{j=1}^J (T_{n,n-j-1,n-1}U_{n-j-1}U_{n-1} + T_{n,n-j,n+1}U_{n-j}U_{n+1} + \\ + T_{n,n+j,n+j+1}U_{n+j}U_{n+j+1}) - \nu k_n^2 U_n \end{aligned} \quad (8.20)$$

и при  $J = 1$  совпадают с уравнениями (8.15). Наличие двух законов сохранения позволяет переписать (8.20) в виде

$$\begin{aligned} \dot{U}_n = k_n \sum_{j=1}^J T_j \left( \frac{2^{2j} - 1}{2^{2j+3} - 2} U_{n-j-1}U_{n-1} + U_{n-j}U_{n+1} + \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 2^j}{4 - 2^{-2j}} U_{n+j}U_{n+j+1} \right) - \nu k_n^2 U_n, \end{aligned} \quad (8.21)$$

содержащем только величины  $T_j = T_{0,-j,1}$ .

Первые же попытки численных решений каскадных уравнений показали, что стационарные решения неустойчивы. В качестве примера на рис. 8.2 показаны результаты численного решения системы уравнений (8.21) с заданными начальными условиями и нулевой вязкостью. На графике показаны значения переменных  $U_n$  для различных моментов времени. В начальный момент распределение энергии имеет максимум на промежуточных масштабах. Вторая кривая соответствует моменту времени, когда в мелкомасштабной части спектра заканчивается установление распределения  $U_n \sim 2^{-n}$ , отвечающего спектру  $E(k) \sim k^{-3}$ . Третья кривая фиксирует начало развития неустойчивости, начинающейся на малых масштабах. Последняя кривая показывает, что к моменту, когда на больших масштабах

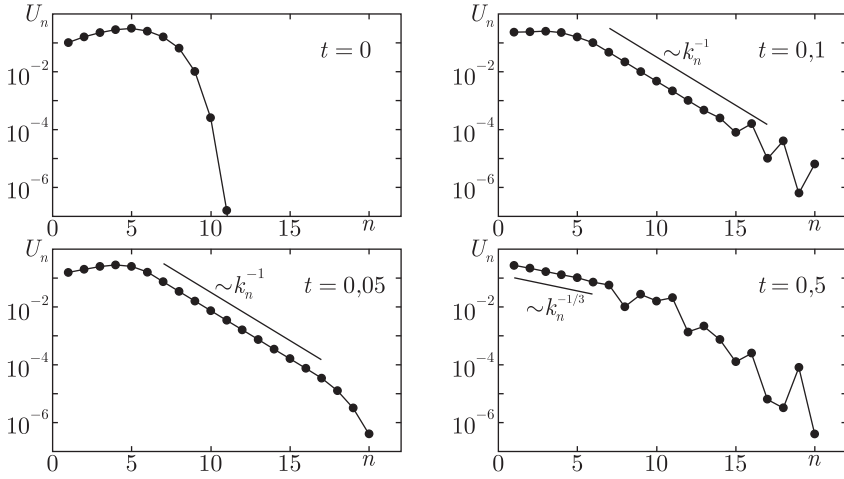


Рис. 8.2

устанавливается распределение вида  $U_n \sim 2^{-n/3}$  ( $E(k) \sim k^{-5/3}$ ), неустойчивость достигает границы двух интервалов.

Включение в модельные уравнения вязкости несколько меняет характер развития неустойчивости. Вязкость стабилизирует правый край инерционного интервала, и возмущения начинают развиваться, хотя и медленнее, на его левом краю. Численные решения каскадных уравнений на больших интервалах времени показывают, что каскадные переменные совершают стохастические колебания, а степенные законы реализуются в среднем.

Именно уравнения вида (8.15) получили наибольшее распространение в моделировании каскадных процессов развитой турбулентности. Интерес к ним был вызван работой [109], в которой впервые в рамках таких моделей исследовалось поведение структурных функций высших порядков. В цитируемой работе рассматривались комплексные переменные  $U_n$ , а уравнения (8.15) были записаны в виде

$$\dot{U}_n = ik_n \left( U_{n+1}^* U_{n+2}^* - \frac{\varepsilon}{2} U_{n-1}^* U_{n+1}^* + \frac{\varepsilon-1}{4} U_{n-2}^* U_{n-1}^* \right) - \nu k_n^2 U_n. \quad (8.22)$$

В таком виде система содержит свободный параметр  $\varepsilon$ , причем независимо от его значения система обеспечивает сохранение энергии. Интересуясь обычной трехмерной турбулентностью, авторы выбрали для этого параметра значение  $\varepsilon = 1/2$ . При  $\varepsilon = 5/4$  уравнения (8.22) совпадают с моделью Гледзера (8.15). Эта модель известна под именем GOY (Gledzer –

Ohkitani – Yamada) и является одной из самых популярных каскадных моделей турбулентности.

Свойства этой модели обсудим более подробно. Рассмотрим квадратичную величину

$$W = \sum_n z^n |U_n|^2$$

и запишем условие ее сохранения

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \sum_n z^n \left( U_n^* \dot{U}_n + \text{к. с.} \right) = \\ &= \dots + i \left( k_{n-1} z^{n-1} - \frac{\varepsilon}{2} k_n z^n + \frac{\varepsilon-1}{4} k_{n+1} z^{n+1} \right) U_{n-1}^* U_n^* U_{n+1}^* + \dots = 0. \end{aligned}$$

При выбранном разбиении ( $k_n = 2^n$ ) условие выполняется, если справедливо уравнение

$$1 - \varepsilon z + (\varepsilon - 1) z^2 = 0,$$

имеющее два корня

$$\begin{aligned} z_1 &= 1, \\ z_2 &= (\varepsilon - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Первый корень не зависит от параметра  $\varepsilon$  и соответствует сохранению энергии ( $W_1 = E = \sum |U_n|^2$ ). Второй корень соответствует квадратичной величине  $W_2 = \sum (\varepsilon - 1)^{-n} |U_n|^2$ , которая имеет различный смысл при  $\varepsilon > 1$  и  $\varepsilon < 1$ . В первом случае квадратичная величина является положительно определенной и может быть переписана в виде

$$W_2 = \Omega = \sum k_n^\lambda |U_n|^2, \quad (8.23)$$

где

$$\lambda = -\log_2 |\varepsilon - 1|. \quad (8.24)$$

Величина (8.23) может рассматриваться как обобщенная энтропия (она совпадает с обычной энтропией при  $\varepsilon = 5/4$ ). Во втором случае, когда  $\varepsilon < 1$ , сохраняется величина

$$W_2 = H = \sum (-1)^n k_n^\lambda |U_n|^2 \quad (8.25)$$

с показателем степени, также определяемым по формуле (8.24). Важно отметить, что сохраняется в этом случае знакопеременная величина. Ее называют обобщенной спиральностью, так как сохраняемыми знакопеременными квадратичными формами в гидродинамике являются именно спиральности. При  $\varepsilon = 1/2$  размерность этой величины совпадает с размерностью

гидродинамической спиральности. Любопытно отметить, что сам факт наличия этого интеграла в системе уравнений (8.22) был обнаружен значительно позже работы Охитани и Ямады, в которой именно это значение параметра было выбрано, по-видимому, случайно. Ниже мы увидим, что только при этом значении параметра  $\varepsilon$  и достигается то замечательное совпадение статистических свойств модели и реальной турбулентности, которое привлекло широкий интерес к каскадным моделям.

Система (8.22) имеет два стационарных решения вида  $U_n = U_0 k_n^\alpha$ , зависящих от параметра  $\varepsilon$ . Подставляя (8.10) в (8.22) и обозначая  $2^{3\alpha} = x$ , легко получаем искомые решения

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1/3, \\ \alpha_2 &= (1/3) \log_2 |(\varepsilon - 1)/2|.\end{aligned}\quad (8.26)$$

Первое решение соответствует колмогоровскому спектру  $k^{-5/3}$  и присутствует в системе при любом значении параметра. Численные исследования системы уравнений (8.22) показали, что при  $\varepsilon < \varepsilon_1 = 0,384$  колмогоровское решение является устойчивым фокусом системы. При  $\varepsilon = \varepsilon_1$  имеет место бифуркация Хопфа, а при  $\varepsilon = \varepsilon_2 = 0,395$  происходит новая бифуркация, после которой в системе возникает хаос.

Еще раз отметим, что точка  $\varepsilon = 1$  является особой точкой на оси значений параметра. В этой точке меняется тип интеграла движения, а при приближении к ней интегралом движения становится величина (8.23) или (8.25) с показателем  $\lambda \rightarrow \infty$ . Это значит, что ни о каком каскаде в системе не может быть и речи. Заметим также, что в точке  $\varepsilon = 2$  оба решения (8.26) совпадают, а единственным интегралом движения является энергия.

#### 8.4. Скейлинг и перемежаемость в каскадных моделях турбулентности

В главе 4 была описана модель развитой турбулентности Ше–Левека–Дюбрюль (ШЛД), претендующая на то, что имеющиеся в ней параметры позволяют описать широкий класс турбулентных течений (напомним, что предшествовавшая ей модель Ше–Левека была строго ориентирована на описание чисто гидродинамической трехмерной турбулентности). Первое тестирование модели ШЛД на универсальность было выполнено с помощью каскадной модели (8.22) в работе [59]. Каскадная модель типа GOY дает прекрасную возможность для такого теста, так как позволяет получить целый класс систем с различными законами сохранения.

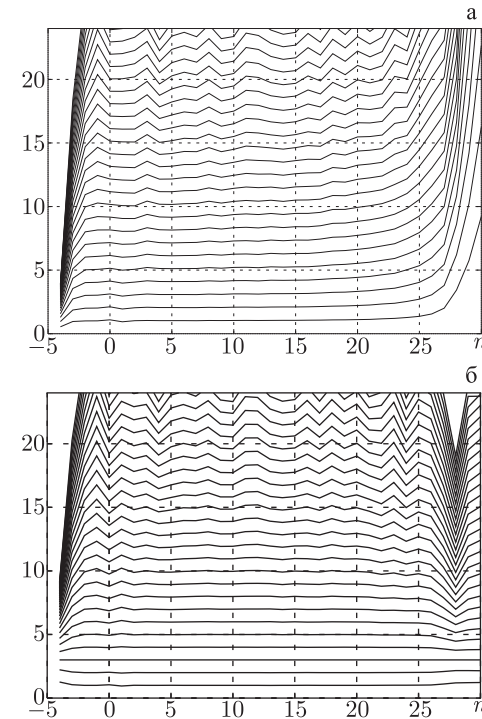


Рис. 8.3

Во всех моделях развитой турбулентности (и/или перемежаемости) рассматриваются структурные функции поля скорости. В каскадной модели структурной функцией порядка  $q$  является величина

$$S_q = \langle U_n^q \rangle, \quad (8.27)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени. Напомним, что для структурных функций предполагается наличие степенных законов вида  $S_q \sim l^{\zeta_q}$ , а использовавшаяся в модели ШЛД расширенная автомодельность устанавливает связь между любой парой структурных функций в виде

$$S_q \sim S_p^{\zeta_q/\zeta_p}. \quad (8.28)$$

Мы видели, что расширенная автомодельность позволяет повысить точность определения скейлинговых показателей  $\zeta_q$ . Рис. 8.3 показывает,

что расширенная автомодельность проявляет себя в полной мере и в каскадных моделях. Для случая  $\varepsilon = 5/4$  на рис. 8.3 а показана зависимость величин  $\varsigma_q$  от номера яруса  $n$  (то есть от масштаба) для широкого интервала  $q$  (вплоть до 25). Заметим, что ни эксперимент, ни прямое численное моделирование не могут обеспечить ни такого диапазона масштабов, ни такого высокого порядка  $q$ . Можно видеть, что даже для низких порядков значение скейлинговых показателей монотонно возрастает, начиная с самого начала инерционного интервала. На рис. 8.3 б показаны относительные показатели  $\tilde{\varsigma}_q = \varsigma_q/\varsigma_3$ . Ясно видно, что в этом случае появляется широкий интервал масштабов, в котором показатели сохраняют постоянное значение (горизонтальные линии на графиках).

Центральной величиной во всех моделях развитой турбулентности, начиная с теории Колмогорова, является скорость диссипации энергии, которая определяет поток энергии, пронизывающий весь инерционный интервал, и, как следствие, определяет динамику последнего. В главе 5 мы уже останавливались на вопросе о том, что реальной величиной, определяющей динамику инерционного интервала, является не скорость диссипации, а сам поток энергии, который к тому же не всегда постоянен вдоль инерционного интервала. В каскадной модели поток энергии, проходящей через масштаб  $n$  (точнее, энергия, передаваемая от всех ярусов с номером  $m < n$  ярусам с  $m \geq n$ ), есть

$$\Pi_n = \sum_{m \geq n} E_m = \left\langle \operatorname{Im} \left\{ k_n \left( \frac{\varepsilon - 1}{4} U_{n-2} U_{n-1} U_n - \frac{1}{2} U_{n-1} U_n U_{n+1} \right) \right\} \right\rangle. \quad (8.29)$$

Если комплексные переменные записать в виде  $U_n = \rho_n e^{i\phi_n}$ , то выражение (8.28) можно привести к виду

$$\Pi_n = k_n \left( \frac{\varepsilon - 1}{4} \Theta_{n-1} - \frac{1}{2} \Theta_n \right), \quad (8.30)$$

где  $\Theta_n = \langle \rho_{n-1} \rho_n \rho_{n+1} \sin(\phi_{n-1} + \phi_n + \phi_{n+1}) \rangle$ .

Теперь сформулируем основные гипотезы модели ШЛБ в терминах каскадных переменных. Первая гипотеза — гипотеза подобия (4.90), декларирующая наличие одинаковых статистических свойств, принимает форму

$$\frac{\rho_n^3}{\langle \rho_n^3 \rangle} =_{stat} \frac{|\Pi_n|}{\langle |\Pi_n| \rangle} =_{stat} \frac{|\Theta_n|}{\langle |\Theta_n| \rangle}. \quad (8.31)$$

Вторая гипотеза — гипотеза об иерархии моментов безразмерного потока энергии (4.91) сохраняет свой вид

$$\frac{\langle \pi_n^{p+1} \rangle}{\langle \pi_n^p \rangle} = A_p \left( \frac{\langle \pi_n^p \rangle}{\langle \pi_n^{p-1} \rangle} \right)^\beta, \quad (8.32)$$

но в качестве безразмерной характеристики потока энергии по спектру (4.89) в каскадной модели выступает величина

$$\pi_n = \frac{|\Pi_n|}{\Pi^{(\infty)}}, \quad \Pi_n^{(\infty)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\langle |\Pi_n|^{p+1} \rangle}{\langle |\Pi_n|^p \rangle}. \quad (8.33)$$

Третья гипотеза, гипотеза о перемежаемости, записывается как

$$\langle \pi_n \rangle \sim \langle \rho_n^3 \rangle^\Delta. \quad (8.34)$$

Напомним, что результатом применения трех гипотез является формула для скейлинговых экспонент

$$\varsigma_q = \frac{q}{3} (1 - \Delta) + \Delta \frac{1 - \beta^{q/3}}{1 - \beta}. \quad (8.35)$$

Проверка первой гипотезы требует сопоставления функций распределения плотности вероятности для всех трех величин. В первом приближении можно ограничиться сравнением низших моментов, или коэффициентов асимметрии и эксцесса. Зависимость асимметрии и эксцесса всех величин от масштаба (номера яруса) приведена на рис. 8.4 для случая  $\varepsilon = 0,5$ . Точки, принадлежащие различным величинам, хорошо совпадают. Следует отметить, что модель демонстрирует существенный рост неравномерности распределения вероятности с ростом волнового числа — коэффициент эксцесса возрастает в 1000 раз.

Рис. 8.5 показывает результаты проверки второй гипотезы. В двойном логарифмическом масштабе показана зависимость величин  $\langle \pi_n^{p+1} \rangle / \langle \pi_n^p \rangle$  от соответствующих значений  $\langle \pi_n^p \rangle / \langle \pi_n^{p-1} \rangle$ . Верхний график соответствует случаю  $\varepsilon = 0,42$  (параметр незначительно превосходит значение, при котором наступает стохастизация решений) и показывает, что в этом случае гипотеза не выполняется — группы точек, относящиеся к моментам различного порядка, образуют отрезки с разными углами наклона. Такая ситуация сохраняется для  $\varepsilon < 0,45$ . При больших значениях параметра (показаны случаи: б)  $\varepsilon = 0,7$ ; в)  $\varepsilon = 1,25$ ; д)  $\varepsilon = 3,0$ ) соотношение (8.32) хорошо

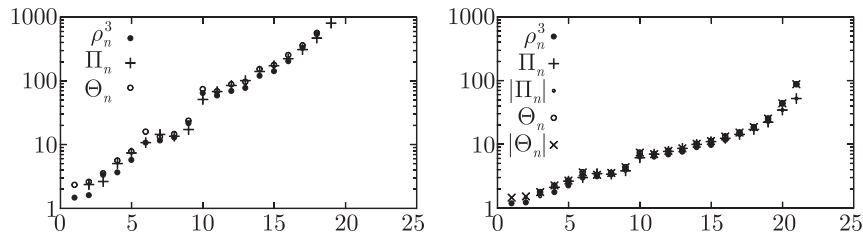


Рис. 8.4

выполняется — все точки ложатся на общую прямую, наклон которой позволяет однозначно определить соответствующее значение параметра  $\beta$ .

Рис. 8.6 касается проверки третьей гипотезы. Он дает зависимость безразмерного потока энергии от структурной функции третьего порядка для трех различных значений параметра  $\varepsilon$ . Во всех случаях можно выделить прямой участок, соответствующий степенному закону (8.34), и определить значение коэффициента  $\Delta$ . Верхняя группа точек соответствует случаю  $\varepsilon = 5/4$  (при этом моделируется инерционный интервал переноса энтропии в двумерной турбулентности). Точки лежат почти горизонтально ( $\Delta = 0,013$ ), что говорит об очень низком уровне перемежаемости. Этот результат хорошо согласуется с результатами, полученными при обработке данных прямого численного моделирования интервала переноса энтропии в двумерной турбулентности (глава 5).

Результаты определения параметров  $\Delta$  и  $\beta$  суммирует рис. 8.7, на котором приведена зависимость этих величин от параметра модели  $\varepsilon$  (напомним, что он связан с законами сохранения). На рисунке разделены результаты для  $\varepsilon < 1$  и  $\varepsilon > 1$ , так как свойства системы в этих двух областях отличаются принципиально, о чем свидетельствует и рис. 8.7.

Рис. 8.8 показывает результаты непосредственного вычисления функции распределения вероятности для потока энергии  $P(\pi_n)$  при двух значениях  $\varepsilon$ : а)  $\varepsilon = 0,42$ , б)  $\varepsilon = 3,0$ . На обоих графиках пунктиром проведена линия, соответствующая логпуассоновскому распределению. В первом случае полученная функция распределения далека от этой кривой (что согласуется с рис. 8.5 а), в то время как на втором — совпадение достаточно хорошее. Видно, что функция распределения несимметрична (напомним, что логнормальное распределение в таком представлении должно было бы дать симметричную параболу).

В заключение отметим, что полученные значения параметров  $\beta$  и  $\Delta$  при подстановке в формулу (8.34) дали значения  $\zeta_q$ , совпадающие с точно-

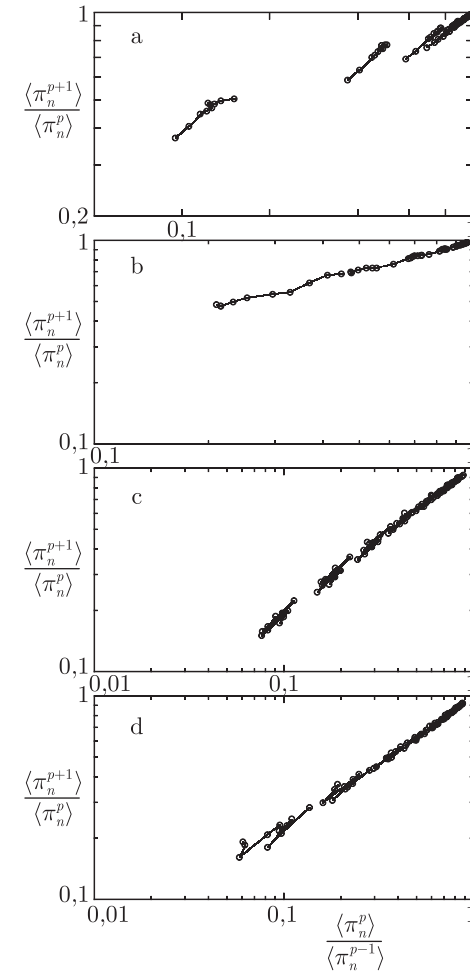


Рис. 8.5

стью не ниже 10% со значениями, полученными непосредственно по расчетам наклона графиков структурных функций. Подтверждение формулы (8.34) является интегральной проверкой работоспособности модели турбулентности Ше–Левека–Дюбрюль.

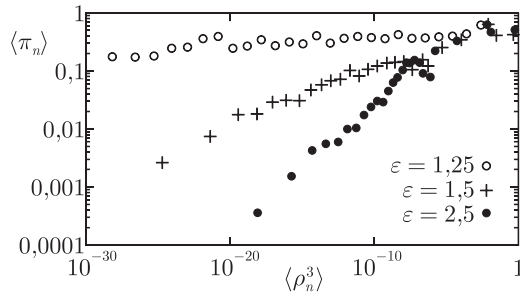


Рис. 8.6

## 8.5. Каскадная модель спиральной турбулентности

Модели типа GOY (к ним же можно отнести получившую распространение модель SABRA [79], отличающуюся от модели GOY комбинацией сопряженных и несопряженных переменных в нелинейных слагаемых) замечательно описывают процессы каскадного переноса энергии и воспроизводят статистические характеристики мелкомасштабных пульсаций скорости. Однако, модели вида (8.22) имеют принципиальный недостаток, связанный с тем, что спиральность, определяемая выражением (8.25), строго пропорциональна энергии оболочки, а ее знак определяется четностью номера оболочки. Таким образом, получается нефизическая ситуация, когда наличие энергии пульсаций в некотором диапазоне длин волн обязательно подразумевает наличие спиральности предписанного знака. Появление заметной средней спиральности приводит к тому, что спектр энергии принимает характерный «пилообразный» вид, и рост спиральности приводит к блокировке механизма каскадного переноса. Модель GOY использовалась для моделирования спиральной турбулентности (например, в работе [54]), но в отличие от прямого численного счета [48], дала значительно более однородный спектральный поток спиральности, чем энергии. Попытка построить модель для описания каскадных процессов в спиральной турбулентности была предпринята в работе [41]. Авторы пошли на удвоение числа переменных, по сути, клонируя модель GOY и вводя вторую переменную для каждой оболочки, описывающую энергию пульсаций с противоположной по знаку спиральностью. Как следствие, это привело к неоднозначности построенной модели, которая, в конечном счете, не позволила получить убедительный результат.

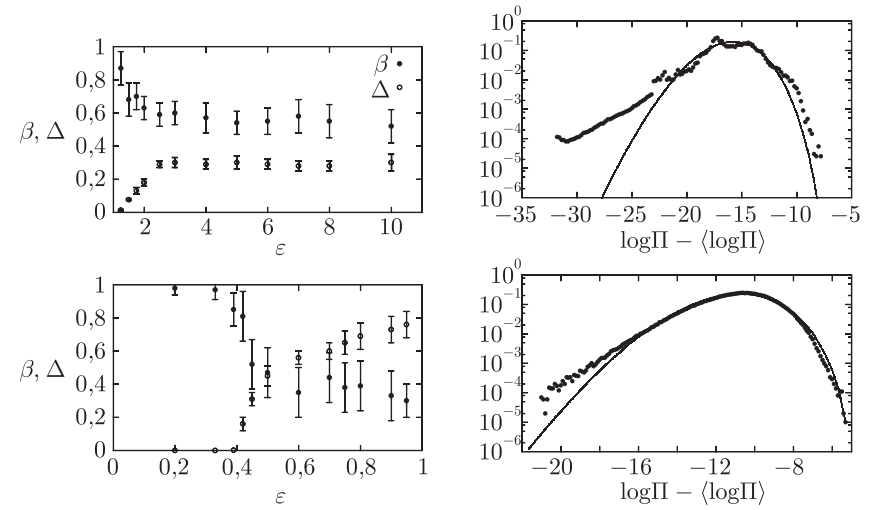


Рис. 8.7

Рис. 8.8

Альтернативный путь для описания динамики спиральности состоит в отличном от (8.25) определении спиральности для каскадной модели. Необходимо ввести квадратичную, знакопеременную величину, определенную через переменные данного яруса и имеющую размерность спиральности. Следует отметить, что все спиральные интегралы движения являются характеристиками степени корреляции тех или иных векторных полей: гидродинамическая спиральность характеризует коррелированность поля завихренности и поля скорости, перекрестная спиральность — коррелированность магнитного поля и поля скорости, магнитная спиральность — коррелированность векторного потенциала и вектора магнитной индукции. Это дает повод предложить в качестве аналога спиральности для комплексных переменных  $U_n = a_n + ib_n = \rho_n e^{i\phi_n}$  величину

$$H = i \sum k_n ((U_n^*)^2 - U_n^2) / 4 = \sum k_n a_n b_n, \quad (8.36)$$

характеризующую уровень корреляции действительных и мнимых частей. В работе [111] было показано, что интеграл вида (8.36) появляется в простейшей каскадной модели типа модели Новикова–Деснянского (8.7), если ее записать для комплексных переменных. Такая модель использовалась в работе [82] для анализа статистических характеристик свободно выходящей турбулентности. Важно отметить, что эта модель допускает ре-

шения, соответствующие строго неспиральным движениям ( $H \equiv 0$ ), что в принципе невозможно в моделях типа GOY.

Следуя работе [25], запишем общую форму уравнений, построенных на взаимодействиях только двух соседних ярусов и обеспечивающих сохранение величины (8.36) в пределе  $R \rightarrow \infty$ . Уравнения для комплексных переменных  $U_n$ , определенных для оболочек произвольной ширины  $q$  ( $q = k_{n+1}/k_n$ ), имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_n = & ik_n \gamma_1 [U_{n-1}^2 + (U_{n-1}^*)^2 + q(U_n^* U_{n+1} - U_n^* U_{n+1}^*) - q^2(U_n U_{n+1} + U_n U_{n+1}^*)] + \\ & + ik_n \gamma_2 [U_{n-1} U_n + U_{n-1}^* U_n^* + q(U_{n-1}^* U_n^* - U_{n-1} U_n^*) - q^2(U_{n+1}^2 + (U_{n+1}^*)^2)] - \\ & - R^{-1} k^2 U_n. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Первая часть нелинейного члена представляет собой обобщение уравнения (8.7) на случай комплексных переменных и описывает взаимодействия данного яруса с предыдущим. К ней добавлена вторая часть, симметричным образом описывающая взаимодействия данного яруса с последующим. Коэффициенты  $\gamma_1, \gamma_2$  определяют вес этих частей. В работе [111] их значения были выбраны исходя из оценок числа взаимодействующих вихрей различных размеров:  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -q^{-5/2}$ .

Каскад спиральности в модели (8.37) был исследован в работе [25], некоторые результаты которой мы воспроизведем. В уравнения (8.37) была добавлена сила  $F_n = f_n e^{i\theta_n}$ , обеспечивающая контролируемый приток в систему энергии и спиральности ( $\varepsilon$  и  $\chi$ , соответственно). Сила действует в старших ярусах ( $n = 0, 1$ ). Амплитуды сил равны

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\varepsilon k_1 \sin(\theta_1 + \phi_1) + \chi \cos(\theta_1 - \phi_1)}{u_0 g}, \\ f_1 &= \frac{\varepsilon k_0 \sin(\theta_0 + \phi_0) + \chi \cos(\theta_0 - \phi_0)}{u_1 g}, \end{aligned} \quad (8.38)$$

$$g = k_0 \cos(\theta_1 - \phi_1) \sin(\theta_0 + \phi_0) - k_1 \cos(\theta_0 - \phi_0) \sin(\theta_1 + \phi_1),$$

а фазы принимают случайные значения, которые изменяются через заданный интервал времени, имеющий смысл корреляционного времени для внешней случайной силы.

Важнейшей характеристикой инерционного интервала являются спектральные потоки энергии и спиральности на соответствующем масштабе,

которые в терминах модели (8.37) определяются формулами

$$\Pi_n = \text{Im} \{ k_n [q \gamma_1 (U_n^2 + (U_n^*)^2)(U_{n+1} - U_{n+1}^*)] \quad (8.39)$$

$$\begin{aligned} & + [q^2 \gamma_2 (U_{n+1}^2 + (U_{n+1}^*)^2)(U_n - U_n^*)] \}, \\ \Xi_n &= \text{Im} \{ k_n^2 [q^2 \gamma_1 (U_n^2 + (U_n^*)^2)(U_{n+1} + U_{n+1}^*)] \quad (8.40) \\ & + [q^2 \gamma_2 (U_{n+1}^2 + (U_{n+1}^*)^2)(U_n + U_n^*)] \}. \end{aligned}$$

Рассматривалась вынужденная турбулентность, поддерживаемая силой вида (8.39) с фиксированной мощностью ( $\varepsilon = 1$ ) и различным уровнем вносимой в поток спиральности  $\chi$ . Расчеты проводились для значений числа Рейнольдса в интервале  $10^3 \leq R \leq 10^6$ . Относительно низкие для каскадных моделей числа Рейнольдса были обусловлены желанием исследовать ситуацию, доступную прямому численному моделированию. Наиболее детально прямому численному моделированию спиральной турбулентности, представленному в работе [48], в рассматриваемой модели соответствует значение  $R = 3000$ . За критерий соответствия принималась длина инерционного интервала, определяемого по постоянству спектрального потока энергии. Ширина оболочки во всех вычислениях принималась  $q = 1,618$  (это так называемое «золотое сечение», получаемое из условия  $k_{n+2} = k_{n+1} + k_n$ ).

Основные споры вокруг спиральной турбулентности вызывает вопрос о протяженности и структуре инерционного интервала переноса спиральности (см. п. 5.5). В работе [54] была высказана гипотеза о том, что диссипация спиральности происходит на масштабе  $\lambda_H$ , отличном от колмогоровского масштаба диссипации энергии  $\lambda \approx (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ . Последний, напомним, можно получить из предположения о том, что скорость диссипации энергии на любом масштабе  $l$  оценивается как  $\nu \delta v_l^2/l^2$ , и при  $l = \lambda$  она становится равной подводимой мощности  $\varepsilon$ . Авторы работы [54] предположили, что для скорости диссипации спиральности по аналогии можно принять

$$\frac{dH_l}{dt} \approx \nu \frac{\delta v_l \delta \omega_l}{l^2} \approx \nu \frac{\delta v_l^2}{l^3}, \quad (8.41)$$

где  $\delta \omega_l$  есть характерная завихренность на данном масштабе, и что должен существовать масштаб  $\lambda_H$ , на котором эта величина станет равной подводимой спиральности  $\chi$

$$\nu \frac{\delta v_\lambda^3}{\lambda_H^3} \approx \chi. \quad (8.42)$$

После подстановки колмогоровской оценки  $\delta v_l \sim (\varepsilon l)^{1/3}$ , формула (8.42) дает оценку этого масштаба

$$\lambda_H \approx \nu^{3/7} \chi^{-3/7} \varepsilon^{2/7}, \quad (8.43)$$

которая приводит к выводу, что отношение двух диссипативных масштабов растет с ростом числа Рейнольдса (падением вязкости) как

$$\frac{\lambda}{\lambda_H} \sim \nu^{9/28}, \quad (8.44)$$

то есть интервал переноса спиральности при больших числах Рейнольдса становится существенно короче, чем инерционный интервал переноса энергии.

Альтернативная точка зрения, состоящая в том, что диссипация энергии и спиральности происходит на одних и тех же масштабах, отстаивалась в работе [48]. Положение о совпадении диссипативных масштабов  $\lambda_H = \lambda$  принималось как постулат и предполагалось, что во всем инерционном интервале должны устанавливаться спектральные распределения энергии и спиральности, близкие (с точностью до поправок, обусловленных перемежаемостью) к закону « $-5/3$ »

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad H(k) \sim \chi \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}. \quad (8.45)$$

Этот вывод был подкреплён результатами прямого численного моделирования для относительно небольших значений числа Рейнольдса.

Вывод о том, что диссипация спиральности в развитой турбулентности происходит на значительно больших масштабах, чем масштабы диссипации энергии (8.44) неверен, но заслуживает обсуждения в методических целях. Этот вывод держится на неверной оценке (8.41), которая не учитывает тот факт, что спиральность нельзя оценивать по произведению характерной скорости и завихренности. Спиральность обеспечивают только скоррелированные поля скорости и завихренности, а оценка (8.41) дает конечную скорость диссипации спиральности и в неспиральной турбулентности. Вместо (8.41) следует записать

$$\frac{dH_l}{dt} \approx \nu \frac{\langle \delta v_l \delta \omega_l \rangle}{l^2} \approx \nu \frac{C_l \delta v_l^2}{l^3}, \quad (8.46)$$

где  $C_l = \langle \delta v_l \delta \omega_l \rangle / (\langle \delta v_l^2 \rangle \langle \delta \omega_l^2 \rangle)^{1/2}$  есть коэффициент корреляции пульсаций скорости и завихренности на соответствующем масштабе. Использование

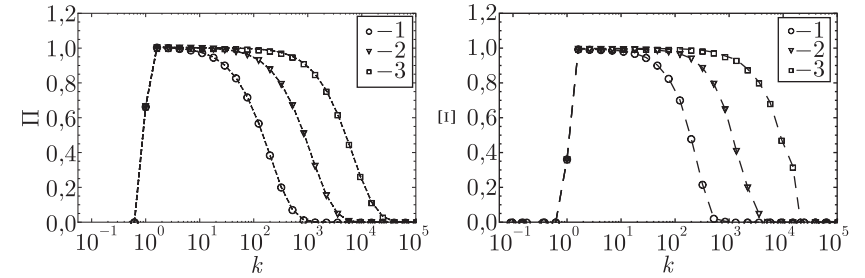


Рис. 8.9

вместо (8.41) оценки (8.46) приводит к выводу, что диссипативный масштаб спиральности зависит от коэффициента корреляции, который сам зависит от масштаба

$$\lambda_H \sim \left( C_\lambda \frac{\nu}{\chi} \right) \varepsilon^{2/7}. \quad (8.47)$$

Следует отметить, что сосуществование спектров (8.45) подразумевает линейную зависимость коэффициента корреляции от масштаба

$$C_l \approx \frac{l H_l}{E_l} \sim \frac{\chi}{\varepsilon} l, \quad (8.48)$$

которая на масштабе диссипации  $\lambda_H \approx \lambda$  дает выражение

$$C_\lambda \approx \frac{\chi}{\varepsilon^{5/4}} \nu^{3/4}. \quad (8.49)$$

Формула (8.49) согласуется с оценкой среднего угла между векторами скорости и завихренности на диссипативном масштабе, полученной из асимптотической модели в работе [26].

Выполненные в рамках каскадной модели (8.37) расчеты показали, что для всех рассмотренных чисел Рейнольдса масштабы, до которых доходят потоки энергии и спиральности, действительно близки, то есть  $\lambda_H \approx \lambda$ . На фиг. 8.9 показана эволюция осредненных спектральных потоков энергии и спиральности с ростом числа Рейнольдса для случая  $\varepsilon = \chi = 1$ . Инерционный интервал, определяемый по постоянству потока энергии, начинает формироваться при  $R = 1000$  и распространяется приблизительно на три декады при  $R = 10^6$ . На фиг. 8.9 слева показаны потоки энергии, а справа — потоки спиральности, вычисленные для трех значений числа Рейнольдса:

$1 - R = 3 \cdot 10^3$ ,  $2 - R = 3 \cdot 10^4$ ,  $3 - R = 3 \cdot 10^5$ . Кривые для потока спиральности качественно повторяют вид кривых для потока энергии, но получение гладкой кривой для потока спиральности требует осреднения по значительно большим интервалам времени. Если гладкий поток энергии получается при осреднении решений на интервалах времени в несколько десятков единиц безразмерного времени, то потоки спиральности, показанные на рисунке, потребовали интегрирования на интервале  $100 < t < 1000$  для  $R = 3000$  и  $1000 < t < 10\,000$  для  $R = 3 \cdot 10^5$ .

Осредненные по времени распределения энергии и спиральности, полученные при численном интегрировании каскадных уравнений для различных значений числа Рейнольдса, показаны на фиг. 8.10. Левый график получен для случая  $R = 3000$ . Как отмечалось выше, этот случай наиболее близко соответствует расчетам работы [48] и действительно дает пропорциональные распределения энергии и спиральности в интервале  $2 < k < 10$ . Наклон спектра при этом несколько превышает обычные для развитой турбулентности значения ( $-1,77$  вместо принятого  $-1,71$ ), что можно отнести на счет недостаточно высокого числа Рейнольдса. Штриховой линией на рисунке показан колмогоровский спектр « $-5/3$ ». В расчетах рассматривалась и «инфракрасная» часть спектра, то есть присутствовали масштабы, большие масштаба действия внешних сил ( $k < 1$ ). В этих масштабах наблюдается равномерное распределение энергии оболочек ( $E_n \sim \text{const}$ , то есть  $E(k) \sim k^{-1}$ ), но спиральность в большие масштабы передается значительно менее эффективно, давая распределение  $H_n \sim k_n^2$  (то есть  $H(k) \sim k$ , этот наклон показан на рисунке пунктиром).

При увеличении числа Рейнольдса спектральное распределение энергии демонстрирует все более выраженный инерционный интервал с законом  $E(k) \sim k^{-1.71}$  (на фиг. 8.10 справа показаны распределения энергии и спиральности по масштабам для  $R = 3 \cdot 10^5$ ). Важно отметить, что в ин-

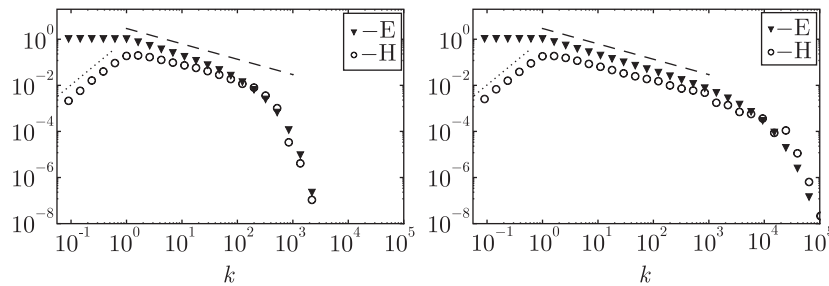


Рис. 8.10

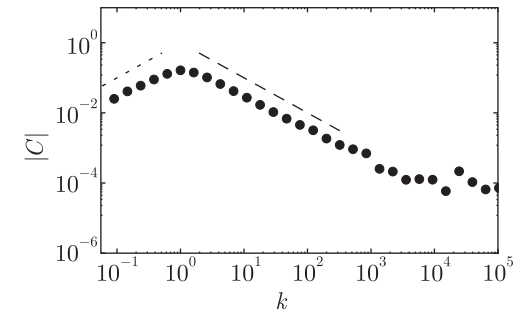


Рис. 8.11

нерционном интервале спиральность достаточно точно следует закону « $-5/3$ » при всех трех числах Рейнольдса, в то время как наклон спектра энергии меняется. Это подтверждает, что спиральность ведет себя как пассивная примесь. На меньших масштабах (больших  $k$ ) распределение средней спиральности становится все более «шумным», и дает гладкие зависимости только при очень больших временах осреднения (распределение спиральности на фиг. 8.10б получено путем усреднения по 50 реализациям, каждая длиной 10 000 безразмерных единиц времени).

Фиг. 8.11 иллюстрирует вывод (8.48) о том, что сосуществование законов « $5/3$ » в спектрах энергии и спиральности подразумевает линейную зависимость корреляции завихренности и скорости от масштаба. Рисунок показывает результаты вычисления коэффициента корреляции  $C_l$  для каждого яруса. Можно видеть, что во всем инерционном интервале коэффициент корреляции действительно падает по закону, близкому к  $C_n \sim k_n^{-1}$ , показанному на рисунке штриховой линией. На инфракрасном участке спектра зависимость обратная ( $C_n \sim k_n$ ).

Таким образом, при постоянном внесении спиральности на масштабе возбуждения турбулентности, спиральность переносится по всему инерционному интервалу как пассивная примесь, а ее диссипация происходит на тех же масштабах, что и диссипация энергии. Коэффициент корреляции пульсаций скорости и спиральности падает при этом пропорционально масштабу пульсаций. Отметим, что каскадная модель турбулентности вида (8.37) одинаково эффективна как для спиральной, так и для неспиральной турбулентности. Проведенные с ее помощью расчеты показали, что при больших числах Рейнольдса в спиральной турбулентности формируется инерционный интервал с обычным для развитой турбулентности спектральным распределением энергии, отличающимся от закона « $5/3$ » за счет

переменяемости. При этом во всем инерционном интервале наблюдается стационарный поток спиральности, причем спектральная плотность спиральности хорошо подчиняется закону «5/3».

### Рекомендуемая литература к восьмой главе

- [8.1] Гледзер Е. Б., Должанский Ф., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
- [8.2] Зимин В. Д., Фрик П. Г. Турбулентная конвекция. М.: Наука, 1988. 178 с.
- [8.3] Bohr T., Jensen M., Paladin G., Vulpiani A. Dynamical Systems Approach to Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

## ГЛАВА 9

# Примеры моделей сложных турбулентных систем

### 9.1. Модель двумерной турбулентной конвекции

Рассмотрим турбулентные течения, описываемые в рамках приближения Буссинеска для термогравитационной конвекции несжимаемой жидкости. Уравнения движения запишем в безразмерной форме:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \text{Gr}^{-1/2} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{e} T, \quad (9.1)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \sigma^{-1} \text{Gr}^{-1/2} \Delta T, \quad (9.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (9.3)$$

где  $\mathbf{u}$  — скорость,  $P$  — давление,  $T$  — температура,  $\mathbf{e}$  — единичный вектор вдоль вертикальной оси,  $\text{Gr} = g\beta L^3 T^* \nu^{-2}$  — число Грассгофа,  $\sigma = \nu/\chi$  — число Прандтля,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\chi$  — температуропроводность. В качестве единицы длины выбран макромасштаб  $L$ , единицы температуры — характерная для этого масштаба разность температуры  $T^*$ , единицы скорости —  $(g\beta L T^*)^{1/2}$  и единицы времени —  $L/V$ . При выбранной единице скорости число Грассгофа просто связано с числом Рейнольдса:  $\text{Gr} = V^2 L^2 \nu^{-2} = \text{Re}^2$ .

Мы построим каскадную модель, позволяющую рассмотреть специфику каскадных процессов вблизи масштаба Болджано в двумерной турбулентности (см. параграф 6.2), а также каскадных процессов при очень низких и очень высоких значениях числа Прандтля. Эти задачи выбраны потому, что являются примером случая, когда рассмотрение нелокальных взаимодействий становится принципиальным и модель типа GOY может привести к неправильным результатам.

Каскадная модель для двумерной турбулентной конвекции, включающая нелокальные взаимодействия, была построена в работе [28] и имеет

Таблица 9.1.  $T_{0,m,l}$ 

| $l \backslash m$ | -4      | -3      | -2      | -1     | 0 | 1     | 2     | 3     |
|------------------|---------|---------|---------|--------|---|-------|-------|-------|
| 4                |         |         |         |        |   |       |       | 0,155 |
| 3                |         |         |         |        |   |       | 0,242 |       |
| 2                |         |         |         |        |   | 0,431 |       |       |
| 1                | -0,0088 | -0,0257 | -0,0796 | -0,269 |   |       |       |       |
| 0                |         |         |         |        |   |       |       |       |
| 1                | 0,0032  | 0,0096  | 0,0269  |        |   |       |       |       |
| 2                |         |         |         |        |   |       |       |       |

Таблица 9.2.  $H_{0,m,l}$ 

| $l \backslash m$ | -4      | -3      | -2      | -1      | 0       | 1       | 2      | 3      |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|
| 4                |         |         |         |         |         |         |        | -0,054 |
| 3                |         |         |         |         |         |         | -0,094 | -1,493 |
| 2                |         |         |         |         |         | -0,125  | -0,720 | -0,153 |
| 1                | -0,0058 | -0,0145 | -0,0374 | -0,0996 | -0,221  | -0,365  | -0,145 |        |
| 0                |         |         |         |         |         |         |        |        |
| -1               | 0,0018  | 0,00468 | 0,0125  | 0,0277  | 0,0457  | 0,0181  |        |        |
| -2               |         |         |         | 0,00196 | 0,0113  | 0,00239 |        |        |
| -3               |         |         |         | 0,00018 | 0,00291 | 0,00030 |        |        |
| -4               |         |         |         | 0,00001 | 0,00073 | 0,00004 |        |        |

вид

$$d_t U_n = \sum_{m,l} T_{n,m,l} U_m U_l - R^{-1} k_n^2 U_n + F_n \Theta_n, \quad (9.4)$$

$$d_t \Theta_n = \sum_{m,l} H_{n,m,l} U_m \Theta_l - k_n^2 (\sigma R)^{-1} \Theta_n, \quad (9.5)$$

где  $F_n = F_0 2^n$ ,  $T_{n,m,l} = 2^N T_{0,m-n,l-n}$ ,  $H_{n,m,l} = 2^N H_{0,m-n,l-n}$ , а значения элементов для центральных частей матриц  $T_{0,m,l}$  и  $H_{0,m,l}$  приведены в таблицах. Структура матриц следует из разбиения пространства волновых векторов на октавы и из требования сохранения кинетической энергии  $E_V = \sum_n |U_n|^2/2$ , энтропии  $\Omega = \sum_n |k_n U_n|^2/2$  и энергии пульсаций температуры  $E_T = \sum_n |\Theta_n|^2/2$ .

Эта модель была модифицирована в работе [19]. Во-первых, в рассмотрение были введены комплексные переменные, использование которых существенно снижает время интегрирования, необходимое для получения устойчивых статистических характеристик. Во-вторых, в матрице  $H_{n,m,l}$

были оставлены только члены, описывающие генерацию неоднородностей температуры крупномасштабным полем скорости (строки  $l = \pm 1$ ,  $m < 0$ ), и диагонали  $m = n$  и  $l = m$ , которые, очевидно, доминируют над соответствующими боковыми столбцами. Тогда, с учетом связей между элементами матрицы, следующих из законов сохранения, можно записать

$$d_t U_n = i 2^n \sum_{j=1}^J T_{0,-j,-1} [a_j U_{n+j}^* U_{n+j+1}^* - U_{n-j}^* U_{n+1}^* + c_j U_{n-j-1}^* U_{n-1}^*] - k_n^2 R^{-1} U_n + F_n \Theta_n, \quad (9.6)$$

$$d_t \Theta_n = i 2^n \sum_{j=1}^J [H_{0,-j,-1} (U_{n-j}^* \Theta_{n-1}^* - 8 U_{n-j+1}^* \Theta_{n+1}^*) + H_{0,0,-j} (U_n^* \Theta_{n-j}^* - 2^{3j} U_{n+j}^* \Theta_{n+1}^*)] - k_n^2 (\sigma R)^{-1} \Theta_n, \quad (9.7)$$

где  $a_j = 3 \cdot 2^j / (4 - 2^{-2j})$ ,  $c_j = (2^{2j} - 1) / (2^{2j+3} - 2)$ . Параметр  $J$  фиксирует наиболее далекие взаимодействия (при  $J = 1$  система возвращается к стандартному виду каскадных уравнений, описывающих только локальные взаимодействия).

Приведем в качестве примера результаты моделирования двумерной турбулентной конвекции с помощью уравнений (9.6)–(9.7).

**Умеренные числа Прандтля ( $\sigma \sim 1$ ).** Рассмотрим эволюцию спектров двумерной турбулентной конвекции при очень больших числах Грасгофа, когда большой интервал значений волновых чисел позволяет проследить за формированием спектров по обе стороны от масштаба Болджано. Система уравнений (9.6)–(9.7) для случая, когда число Прандтля равно единице, а число Грасгофа  $Gr = 10^{14}$  (что соответствует  $R = 10^7$ ), интегрировалась методом Рунге–Кутты четвертого порядка с постоянным шагом по времени для  $0 \leq n \leq 30$ . Равномерный нагрев на макромасштабе моделировался путем поддержания стационарного значения модуля переменной  $|\Theta_0| = 1$ .

В отличие от трехмерного случая, в двумерной гидродинамической турбулентности существование инерционного интервала с прямым каскадом энергии невозможно. Это обстоятельство препятствует установлению стационарного распределения энергии по спектру. Процесс передачи энергии к мелкомасштабному движению блокируется на масштабе Болджано  $L_B$ , вправо от которого формируется инерционный интервал переноса энтропии. Влево от  $L_B$  развивается интервал обратного переноса энергии к крупным масштабам со спектральным законом « $-5/3$ », причем граница этого интервала продвигается влево по мере накопления системой энергии.

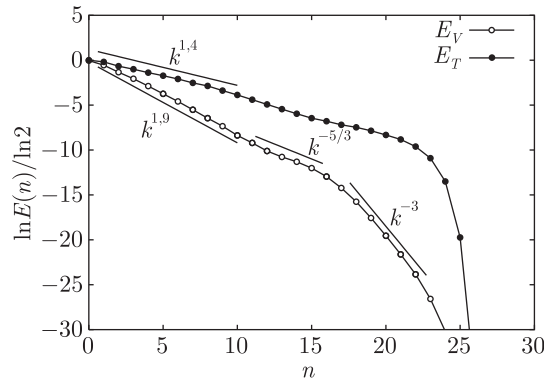


Рис. 9.1

Стационарной ситуации удастся добиться путем введения дополнительной диссипации кинетической энергии на больших масштабах (в уравнение для  $U_n$  дописывается член вида  $-\gamma U_n$ , так называемое линейное трение, обычно используемое и при прямых численных экспериментах с двумерной турбулентностью). На рис. 9.1 показаны осредненные по времени значения энергии пульсаций скорости и температуры в отдельных октавах  $E_{Vn}$  (кружки) и  $E_{Tn}$  (черные точки). Проведены линии, соответствующие степенным законам для спектров  $E_V(k)$  и  $E_T(k)$ . Этот рисунок нужно сравнить с рис. 5.21, где качественно были изображены ожидаемые спектральные распределения для двумерной турбулентной конвекции. Масштаб Болджиано приходится в модели приблизительно на масштаб  $n \approx 16$ . Наклон спектра пульсаций температуры в крупномасштабной части точно воспроизводит Обуховский интервал « $-7/5$ », хотя наклон спектра пульсаций скорости заметно отличается от ожидаемого наклона « $-11/5$ ». Границы различных интервалов более четко выражены в спектре пульсаций скорости. В спектре пульсаций температуры переходы размыты и степенные участки не столь ярко выражены.

**Малые числа Прандтля** ( $\sigma \ll 1$ ) приводят к появлению инерционно-диффузионного интервала в спектре пульсаций температуры. Он возникает в масштабах, на которых сохраняется обычный инерционный интервал в поле скорости, но существенна тепловая диффузия. В двумерной турбулентности анализ размерностей приводит к закону  $E_T(k) \sim k^{-7}$  (6.7). При столь быстром затухании энергии пульсаций трудно рассчитывать на формирование протяженного интервала. Это подтверждают результаты числен-

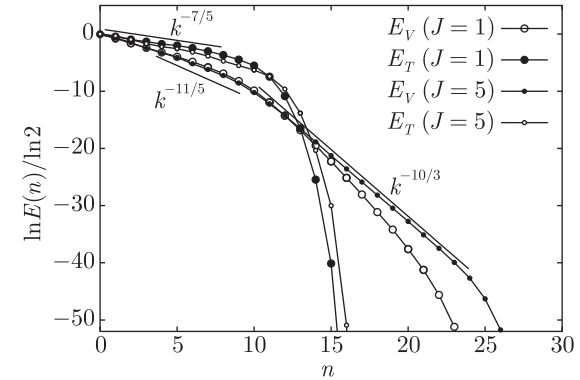


Рис. 9.2

ного счета для случая  $\sigma = 10^{-8}$ , приведенные на рис. 9.2, где не удается выделить интервала с постоянным степенным законом.

На рисунке даны результаты счета с различными значениями параметра  $J$ . В конвективном интервале отличие невелико, так как здесь доминируют локальные взаимодействия полей скорости и температуры. Различия хорошо видны в мелкомасштабной части спектра, где формируется инерционный интервал переноса энтропии. Известно, что каскадные модели испытывают проблемы с описанием каскада энтропии, выражающиеся в том, что поток энтропии в них слаб в сравнении с пульсациями энтропии в отдельном масштабе и падает с ростом  $n$ , а спектры энергии не следуют единому степенному закону. Увеличение  $J$  усиливает поток энтропии и приводит к появлению протяженного интервала, в котором спектр кинетической энергии следует степенному закону с наклоном  $E(k) \sim k^{-10/3}$ . Интересно отметить, что именно такой наклон спектра был получен при исследовании двумерной турбулентности с помощью иерархической модели, в которой число переменных растет как  $2^{2n}$  по мере роста волнового числа  $k_n = 2^n$ , что позволяет, в отличие от каскадных моделей, учитывать и пространственную неоднородность турбулентного течения.

**Большие числа Прандтля** ( $\sigma \gg 1$ ) способствуют формированию вязкоконвективного интервала, в котором соответствующие масштабы поля скорости подавлены вязкостью, но остается спектральный поток пульсаций температуры, поддерживаемый лишь крупномасштабным полем скорости. Поскольку диффузия тепла происходит на существенно меньших масштабах, то поток энергии пульсаций температуры по спектру остается посто-

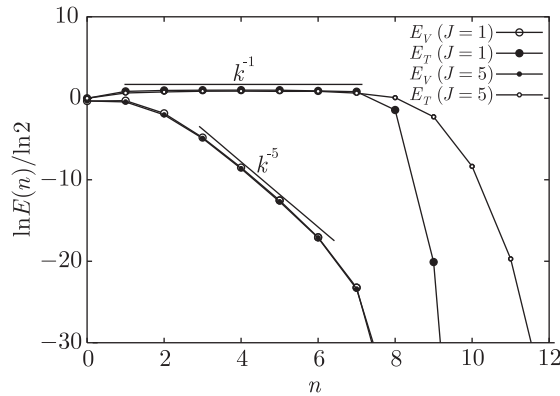


Рис. 9.3

янным, но характерное время переноса определяется крупномасштабными пульсациями скорости и может считаться для этого интервала постоянным. Эти рассуждения приводят к спектру Бэтчелора  $E_T(k) \sim k^{-1}$  (6.8).

Между конвективным (обуховским) и вязкоконвективным интервалами можно ожидать появления интервала (6.21), в котором вязкий член становится весомее нелинейного, но остается существенной сила плавучести. Тогда баланс архимедовых и вязких сил вместе с (6.8) приводит к спектру  $E_V(k) \sim k^{-5}$ . Результаты вычислений для случая  $\sigma = 10^6$ ,  $R = 10$  представлены на рис. 9.3 и показывают, что интервал, в котором устанавливаются законы (6.8)–(6.21), может быть достаточно протяженным. Можно видеть, что увеличение  $J$  приводит к растяжению интервала (6.8), но практически не влияет на распределение энергии пульсаций скорости.

## 9.2. Модель мелкомасштабного МГД-динамо

Рассмотрим развитую турбулентность в несжимаемой проводящей жидкости, описываемую уравнениями (6.22). Специфика движений жидкости с электрической проводимостью состоит в том, что жидкость не только подвержена действию дополнительного силового поля (в магнитном поле возникает сила Лоренца), но и сама оказывает воздействие на магнитное поле. При этом важно, что воздействие не сводится к запутыванию силовых линий и размельчению структуры поля (как это происходит при перемеши-

вании пассивной примеси или тепла), а может, в определенных условиях, и генерировать магнитные поля.

В контексте изложения свойств и возможностей каскадных моделей МГД-турбулентность интересна как пример сложного турбулентного течения, характеризуемого особым набором интегралов движения.

Как можно было видеть выше (глава 6), уравнения магнитной гидродинамики (6.22) в бездиссипативном пределе сохраняют три квадратичные величины. В случае трехмерного движения это общая энергия  $E$  (6.23), перекрестная спиральность  $H_C$  (6.24) и магнитная спиральность  $H_B$  (6.25), а в двумерном течении последний интеграл заменяется квадратом векторного потенциала  $a$  (6.32).

Наличие у каскадных моделей типа GOY знакопеременных интегралов позволяет построить модель, удовлетворяющую всем известным в МГД законам сохранения [65]. Уравнения модели можно записать в виде

$$(d_t - R^{-1}k_n^2) U_n = ik_n \left\{ (U_{n+1}^* U_{n+2}^* - B_{n+1}^* B_{n+2}^*) - \frac{\varepsilon}{2} (U_{n-1}^* U_{n+1}^* - B_{n-1}^* B_{n+1}^*) + \frac{\varepsilon - 1}{4} (U_{n-2}^* U_{n-1}^* - B_{n-2}^* B_{n-1}^*) \right\} + f_n, \quad (9.8)$$

$$(d_t - Rm^{-1}k_n^2) B_n = \frac{ik_n}{(2 - \varepsilon)} \left\{ (1 - \varepsilon)^2 (U_{n+1}^* B_{n+2}^* - B_{n+1}^* U_{n+2}^*) + \frac{1 - \varepsilon}{2} (U_{n-1}^* B_{n+1}^* - B_{n-1}^* U_{n+1}^*) + \frac{1}{4} (U_{n-2}^* B_{n-1}^* - B_{n-2}^* U_{n-1}^*) \right\} + g_n. \quad (9.9)$$

При  $B_n \equiv 0$  система (9.8)–(9.9) совпадает с моделью GOY (8.22). Отметим, что энергия и перекрестная спиральность, выражаемые в модели в виде

$$E = \sum_n (|U_n|^2 + |B_n|^2), \quad (9.10)$$

$$H_C = \sum_n (U_n B_n^* + U_n^* B_n), \quad (9.11)$$

сохраняются системой при любом значении параметра  $\varepsilon$ . Требование сохранения величины

$$H_B = \sum_n (-1)^n k_n^{-1} |B_n|^2, \quad (9.12)$$

служашей аналогом магнитной спиральности (6.25), приводит к значению  $\varepsilon = 1/2$ , которое совпадает при этом со значением, получаемым в модели трехмерной турбулентности из требования сохранения гидродинамической спиральности. Это означает, что в приближении слабых магнитных полей система (9.8)–(9.9) вновь сохраняет гидродинамическую спиральность.

Для моделирования двумерной МГД-турбулентности нужно потребовать сохранения величины

$$a = \sum_n k_n^{-2} |B_n|^2 \quad (9.13)$$

(квадрата векторного потенциала), что приводит к уже знакомому для двумерной турбулентности значению  $\varepsilon = 5/4$ .

Приведем некоторые результаты работы [65], касающиеся моделирования поведения свободно вырождающейся МГД-турбулентности. Свободное вырождение подразумевает равенство нулю сил  $f_n$  и  $g_n$  в уравнениях (9.8)–(9.9) и решение задачи с заданными начальными условиями. В качестве начальных условий рассматривается распределение энергии по спектру, соответствующее спектральным законам вида  $E_V \sim E_B \sim k^{-2}$  (для всех  $n \geq 0$ ), но уровень магнитной энергии существенно ниже соответствующего уровня кинетической энергии ( $E_V \approx 1$ ,  $E_B \approx 0,0001$ ). Число Рейнольдса  $R = 10^7$ , магнитное число Прандтля  $Pr_m = \nu/\nu_m = 10^{-3}$ . На рис. 9.4 показан характер эволюции кинетической (пунктирная линия) и магнитной (тонкая сплошная линия) энергии в трехмерной МГД-турбулентности (уравнения решаются для случая  $\varepsilon = 1/2$ ). Видно, что за короткое время (безразмерное время, определенное по характерному времени оборота макроскопического вихря  $L/U$ , порядка единицы) магнитная энергия достигает уровня порядка  $1/10$  от уровня кинетической энергии. Затем наступает относительно долгий промежуточный этап (порядка двадцати безразмерных единиц времени), в течение которого магнитная энергия остается на том же уровне. После этого происходит новый рост магнитного поля и его энергия становится сравнимой с кинетической энергией, оставаясь все же меньше ее. Одновременно происходит медленное снижение общего уровня энергии, обусловленное вязкими и омическими потерями.

На том же рис. 9.4 толстой сплошной линией показана эволюция магнитной энергии в так называемом кинематическом приближении. Кинематическое приближение предполагает рассмотрение уравнения индукции магнитного поля для заданного распределения поля скорости, то есть пренебрежение обратным действием магнитного поля на поле скорости. В нашем случае это приближение соответствует отбрасыванию членов с пере-

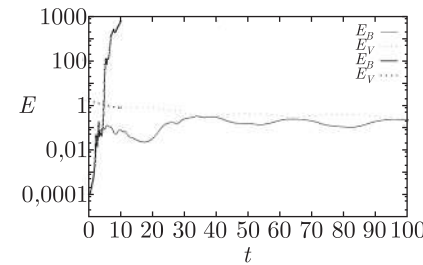


Рис. 9.4

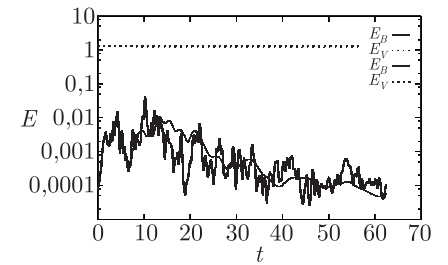


Рис. 9.5

менными  $B_n$  из уравнения (9.8). Соответствующая кривая эволюции магнитной энергии дает неограниченный рост (система уравнений не удовлетворяет более законам сохранения), хотя нарастание энергии и не происходит монотонным образом, а включает и отдельные интервалы, в течение которых энергия поля падает.

Такое поведение соответствует качественным представлениям о поведении магнитного поля в турбулентной проводящей среде. В то же время, известные попытки прямого численного моделирования МГД-турбулентности, вопреки ожиданиям, дают рост магнитного поля только до уровня, в несколько раз меньшего уровня кинетической энергии потока. Приведенный результат решения каскадных уравнений дает возможную интерпретацию этого факта. Дело в том, что самые продолжительные численные решения полных уравнений не выходят за временной интервал ( $t \approx 10$ ). В свете полученных результатов это означает, что система не успевает выйти за рамки промежуточного этапа эволюции.

На рис. 9.5 показаны результаты моделирования поведения вырождающейся двумерной турбулентности. Пунктир по-прежнему показывает уровень кинетической энергии, которая в двумерном потоке убывает крайне медленно. Тонкая сплошная линия описывает поведение магнитной энергии в полной нелинейной системе, а толстая линия — в кинематической постановке. Замечательно, что в этом случае и решения полной нелинейной системы, и решения в кинематической постановке дают затухание энергии магнитного поля со временем (выполняется теорема запрета Зельдовича, исключающая возможность устойчивого динамо в двумерном потоке). Характерное время затухания в обоих случаях одинаково, хотя эволюция в нелинейном случае имеет значительно более гладкий характер.

В то же время, характер свободной эволюции двумерной МГД-турбулентности существенно отличается и от характера эволюции двумерной гидродинамической турбулентности. Напомним, что в двумерной турбу-

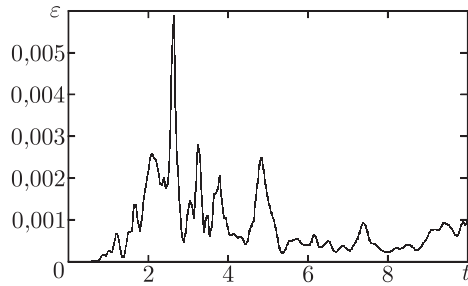


Рис. 9.6

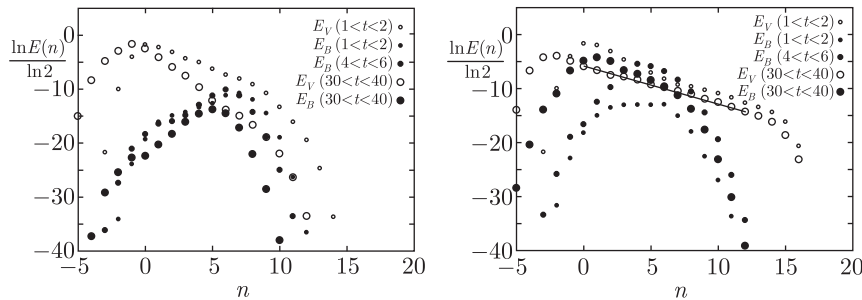


Рис. 9.7

Рис. 9.8

лентности энтрофия, а вместе с ней и скорость диссипации энергии со временем могут только убывать. Присутствие магнитного поля нарушает закон сохранения энтрофии. В процессе свободного вырождения энтрофия возрастает, а это приводит к росту скорости диссипации энергии. Принципиальное отличие в поведении скорости диссипации энергии в вырождающейся двумерной гидродинамической и магнитогидродинамической турбулентности иллюстрирует рис. 9.6 (сравните с рис. 5.2, где показана эволюция скорости диссипации энергии в двумерной турбулентности).

Помимо эволюции интегральных характеристик, каскадные модели позволяют проследить и за изменением спектральных распределений энергии. На рис. 9.7 показаны распределения кинетической (светлые точки) и магнитной (темные точки) энергии двумерной МГД-турбулентности по спектру (точнее, по октавам), полученные осреднением по различным интервалам времени. Следует отметить, что, несмотря на значительное превышение общего уровня кинетической энергии над магнитной, существует

диапазон масштабов, в котором магнитная энергия имеет тот же порядок, что и кинетическая. Это относительно мелкие масштабы, непосредственно прилегающие к диссипативному интервалу ( $5 \leq n \leq 8$ ).

Эволюция спектров энергии в трехмерной МГД-турбулентности показана на рис. 9.8. В этом случае существует протяженный интервал масштабов, в котором магнитная и кинетическая энергии близки по величине. Магнитная энергия затухает на более крупных масштабах, чем кинетическая — это естественный результат, так как магнитное число Прандтля мало ( $10^{-3}$ ). Спектр кинетической энергии с хорошей точностью следует закону « $-5/3$ » (на рисунке этому закону соответствует прямая линия). Спектр магнитной энергии более крут (ближе к « $-2$ »).

Заметим, что принципиальные отличия в поведении двумерных и трехмерных МГД-потоков принято объяснять топологическими аргументами и тот факт, что простые каскадные модели, которые теряют всякую информацию о пространственной структуре течений, воспроизводят эти различия, свидетельствует, с одной стороны, о чрезвычайно важной роли законов сохранения (только через них и сохраняется в модели память о размерности пространства) и, с другой стороны, о том, что возможности динамических систем в моделировании сложных нелинейных систем далеко не исчерпаны.

Помимо свободного вырождения в [65] рассматривались статистические свойства МГД-турбулентности, поддерживаемой стационарными силами. В уравнениях (9.8)–(9.9) были включены силы  $f_n$  и  $g_n$ , которые действовали только на масштабах  $n = 0$  и  $n = 1$ . Силы были выбраны таким образом, чтобы они обеспечивали контролируемый подвод в систему всех сохраняемых ею величин (энергии, перекрестной спиральности и магнитной спиральности). Было показано, что если внешние силы возбуждают некоррелированные поля (то есть  $H_C \approx 0$ ), то в системе устанавливаются колмогоровские спектры « $-5/3$ », не зависимо от уровня магнитной спиральности. На рис. 9.9 показаны соответствующее распределение энергии пульсаций по спектру и спектральный поток энергии (сплошная линия на нижнем графике).

Отметим еще один результат, касающийся поведения структурных функций различного порядка в МГД-турбулентности. В таблице 9.3 показаны значения скейлинговых показателей  $\zeta_q$ , вычисленных для структурных функций различного порядка  $q$  в режиме, соответствующем рис. 9.9. В этой же таблице приведены для сравнения значения показателей для чисто гидродинамического случая (даны результаты экспериментальных измерений и результаты счета с помощью каскадной модели) и значения оценок согласно размерностным оценкам (K41). Подчеркнем, что расчет

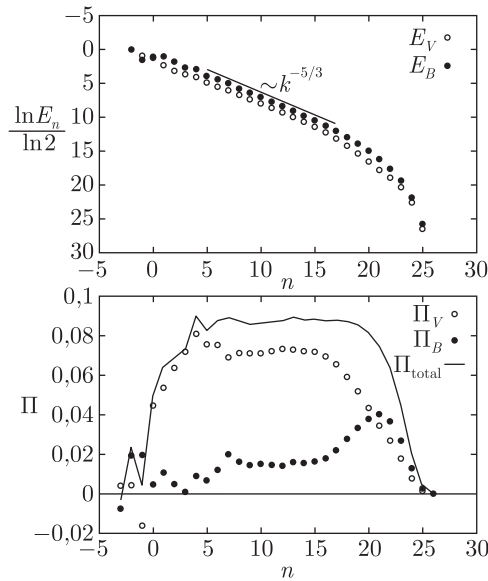


Рис. 9.9

гидродинамической каскадной модели хорошо воспроизводит экспериментальные данные. Важный вывод, следующий из таблицы, состоит в том, что несмотря на «чисто колмогоровский» спектр ( $\zeta_2$  в пределах погрешности дает значение  $2/3$ ), МГД-турбулентность ведет себя качественно иначе, чем чисто гидродинамическая. Прежде всего, это следует из того факта, что нарушается основной (точный!) результат теории Колмогорова для гидродинамической турбулентности — структурная функция третьего порядка не следует закону « $4/5$ », то есть  $\zeta_3 \neq 1$ . Кроме того, уровень перемежаемости в МГД-турбулентности существенно выше (больше отклонение от оценок K41), причем для магнитного поля эти отклонения больше, чем для поля скорости.

### 9.3. МГД-турбулентность и перекрестная спиральности

Рассмотренная в предыдущем параграфе модель МГД-турбулентности является обобщением модели GOY на случай магнитной гидродинамики. Именно эта модель позволила удовлетворить все три закона сохранения

Таблица 9.3

| q | $\zeta_q$ |                         |                        |                     |                 |
|---|-----------|-------------------------|------------------------|---------------------|-----------------|
|   | K41       | HD experi-<br>ment [42] | HD shell<br>model [59] | MHD shell model[65] |                 |
|   |           |                         |                        | U                   | B               |
| 1 | 1/3       | —                       | 0,40                   | $0,34 \pm 0,01$     | $0,33 \pm 0,01$ |
| 2 | 2/3       | 0,71                    | 0,71                   | $0,66 \pm 0,02$     | $0,64 \pm 0,02$ |
| 3 | 1         | 1                       | 1,02                   | $0,94 \pm 0,03$     | $0,91 \pm 0,04$ |
| 4 | 4/3       | 1,28                    | 1,27                   | $1,20 \pm 0,04$     | $1,17 \pm 0,06$ |
| 5 | 5/3       | 1,53                    | 1,53                   | $1,45 \pm 0,07$     | $1,40 \pm 0,10$ |
| 6 | 2         | 1,78                    | 1,81                   | $1,65 \pm 0,10$     | $1,62 \pm 0,14$ |

магнитной гидродинамики и получить правдоподобную картину каскадных процессов для МГД-турбулентности. Однако, модель естественным образом унаследовала и основной недостаток модели GOY, связанный со способом описания спиральности. Гидродинамическая спиральность не является интегралом движения в МГД, хотя играет важную роль в динамо-процессах, а на смену ей приходят два других знакопеременных интеграла движения — перекрестная спиральность и магнитная спиральность. Это побуждает к поиску модели МГД-турбулентности, адекватно описывающей все спиральные величины.

Выше (п. 8.5) была описана модель спиральной турбулентности. Покажем, как обобщить эту модель на случай магнитной гидродинамики. Вновь рассмотрим комплексные переменные для пульсаций скорости  $U_n = a_n + ib_n$  и магнитного поля  $B_n = c_n + id_n$ , каждая из которых характеризует пульсации в интервале волновых чисел  $k_n < |\mathbf{k}| < k_{n+1}$ , где  $k_n = q^n$ , а  $q$  есть ширина интервала.

Гидродинамическая спиральность была определена в модели (8.37) как

$$H = i \sum k_n ((U_n^*)^2 - U_n^2) / 4 = \sum k_n a_n b_n. \quad (9.14)$$

По аналогии, магнитная спиральность может быть определена как

$$H_B = i \sum k_n^{-1} ((B_n^*)^2 - B_n^2) / 4 = \sum k_n^{-1} c_n d_n. \quad (9.15)$$

Перекрестная спиральность характеризует корреляцию магнитного поля и поля скорости и выглядит так же, как и в модели, описанной в предыдущем параграфе

$$H_C = i \sum (U_n B_n^* + U_n^* B_n) / 2 = \sum (a_n c_n + b_n d_n). \quad (9.16)$$

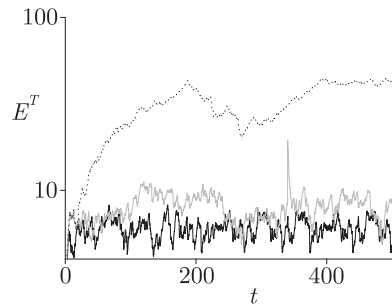


Рис. 9.10

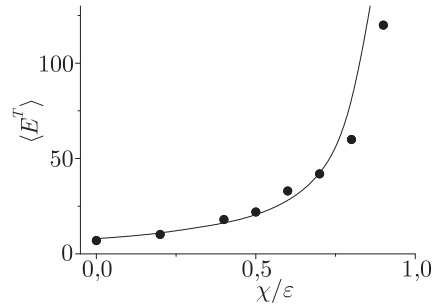


Рис. 9.11

Уравнения, сохраняющие в пределе  $R, Rm \rightarrow \infty$  наряду с общей энергией  $E = \sum(|U_n|^2 + |B_n|^2)/2$  величины (9.15)–(9.16), можно записать в виде

$$d_t U_n = ik_n [\Lambda_n(U, U) - \Lambda_n(B, B)] - \frac{k_n^2 U_n}{R} + f_n, \quad (9.17)$$

$$d_t B_n = ik_n [\Lambda_n(U, B) - \Lambda_n(B, U)] - \frac{k_n^2 B_n}{Rm}, \quad (9.18)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_n(X, Y) = & q^2(X_{n+1}Y_{n+1} + X_{n+1}^*Y_{n+1}^*) - X_{n-1}^rY_n - \\ & - X_nY_{n-1}^r + iq(2X_n^*Y_{n-1}^i + X_{n+1}^rY_{n+1}^i - X_{n+1}^iY_{n+1}^r) + \\ & + X_{n-1}Y_{n-1} + X_{n-1}^*Y_{n-1}^* - q^2(X_{n+1}^rY_n + X_nY_{n+1}^r) + \\ & + iq(2X_n^*Y_{n+1}^i + X_{n-1}^rY_{n-1}^i - X_{n-1}^iY_{n-1}^r), \end{aligned}$$

звезда означает сопряжение, а верхние индексы  $r, i$  — действительную и мнимую части соответствующей величины.

Приведем результаты численных расчетов, выполненных с помощью каскадной модели (9.17)–(9.18), в работе [20] для выяснения влияния перекрестной спиральности на каскадные процессы в МГД-турбулентности. Во всех расчетах число Рейнольдса и магнитное число Рейнольдса  $R = Rm = 10^6$ , а ширина спектральных оболочек  $q = 1,618$ . Время измеряется в безразмерных единицах, равных времени оборота вихря на максимальном масштабе. Сила  $f_n$  действует только в двух старших ярусах (наибольших масштабах), обеспечивая постоянную подкачку кинетической энергии ( $\epsilon = 1$ ) и заданную подкачку перекрестной спиральности  $\chi_C$ .

В параграфе 6.3 с помощью феноменологических аргументов было показано, что впрыск перекрестной спиральности должен препятствовать кас-

каду энергии к мелким масштабам и приводить тем самым к накоплению энергии в турбулентном потоке. На рис. 9.10 показана эволюция общей энергии турбулентного потока  $E = \sum(U_n^2 + B_n^2)/2$  при стационарной подкачке энергии ( $\epsilon = 1$ ) и различном уровне перекрестной спиральности. При некоррелированной подкачке энергии ( $\chi_C = 0$ , черная линия) система быстро (несколько единиц безразмерного времени) выходит на насыщение, при котором энергия колеблется вблизи значения  $E \approx 5$ . При  $\chi_C = 0,3$  (серая линия) время выхода на стационар заметно увеличивается, а среднее значение энергии возрастает приблизительно вдвое. При  $\chi_C = 0,6$  (тонкая линия) насыщение наступает только к моменту времени  $t \approx 200$ , а среднее значение энергии превосходит энергию некоррелированной турбулентности на порядок.

Результаты расчетов суммирует рис. 9.11, на котором точками показаны средние по времени значения полной энергии системы, полученные при различных значениях  $\chi_C/\epsilon$ . Сплошной линией на рисунке проведена кривая (6.45), которая дает теоретическую оценку средней энергии системы при различном уровне вносимой перекрестной спиральности

$$E \approx \frac{(\epsilon L)^{2/3}}{(1 - \chi_C/\epsilon)^{4/3}},$$

и демонстрирует ее хорошее соответствие результатам расчета с помощью каскадной модели.

Накопление энергии сопровождается и накоплением перекрестной спиральности. На рис. 9.12 показаны средние значения интегрального коэффициента корреляции  $C = \langle H \rangle / \langle E \rangle$ . Существенно, что турбулентность накапливает перекрестную спиральность заметно эффективнее, чем энергию. Особенно это проявляется при низком уровне вносимой перекрестной спиральности ( $\chi_C/\epsilon \ll 1$ ) — интегральный коэффициент корреляции  $C$  существенно превосходит отношение вносимой спиральности к вносимой энергии и приближается к единице уже при  $\chi_C/\epsilon \approx 0,5$ .

Рис. 9.13 показывает, как меняются спектры энергии с ростом уровня вносимой в поток перекрестной спиральности. Приведены значения энергии каждого масштаба, скомпенсированные на величину  $k_n^{2/3}$ . В таком представлении спектру  $k^{-5/3}$  соответствует горизонтальная линия. При  $\chi_C = 0$  (пустые кружки) в спектре такой участок есть, а с ростом  $\chi_C$  наблюдается рост энергии каждого масштаба, причем этот рост значительно сильнее в больших масштабах и наклон спектра также возрастает. Для  $\chi_C = 0,6$  (черные кружки) сплошной линией показан наклон, соответствующий закону  $E(k) \sim k^{-1,88}$ .

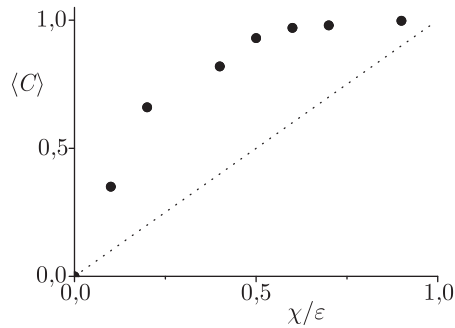


Рис. 9.12

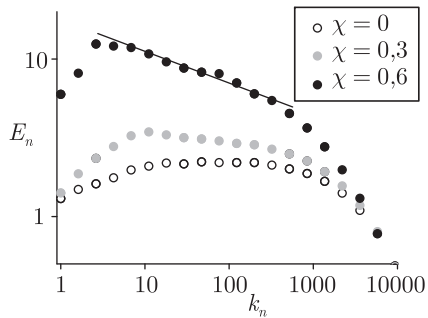


Рис. 9.13

Интересно проследить непосредственно за изменением времен обмена. На рис. 9.14 показано время оборота вихря и времена обмена энергией и спиральностью, вычисленные для каждой оболочки в турбулентности с высоким уровнем перекрестной спиральности ( $\chi_C/\varepsilon = 0.6$ ). Показательно, что на интегральном масштабе время обмена энергией  $t_E = \langle E_n \rangle / \varepsilon$  и время обмена спиральностью  $t_H = \langle H_n \rangle / \chi_C$  превышают время оборота вихря  $\tau = l_n / \langle |U_n| \rangle$  почти на два порядка. Эта разница убывает с ростом волнового числа и сходится к нулю в диссипативном интервале. В инерционном интервале поток энергии постоянен и время обмена однозначно определяется энергией пульсаций данного масштаба, т.е.  $t_n \sim \langle U_n^2 \rangle$ . Это означает, что степенной закон для  $t_n$  совпадает с наклоном для энергии пульсаций. В случае, представленном на рис. 9.14  $t_n \sim l_n^{0.89 \pm 0.02}$ , а распределение энергии в инерционном интервале следует закону  $\langle U_n^2 \rangle \sim l_n^{0.88 \pm 0.02}$

(прямая на рис. 9.13). Неожиданный результат состоит в том, что степенной закон для времени обмена сохраняется вплоть до диссипативного масштаба (рис. 9.14), демонстрируя своего рода расширенную автомодельность (см. п. 4.6.2). Время обмена спиральностью ведет себя подобно времени обмена энергией, но всегда несколько меньше.

Таким образом, перекрестная спиральность существенно снижает эффективность каскадного переноса энергии в МГД-турбулентности и приводит к ее накоплению в системе. Это накопление происходит до тех пор, пока интенсификация вихрей не компенсирует падающую эффективность нелинейных взаимодействий. Существенно, что при низком уровне вносимой перекрестной спиральности турбулентность накапливает ее — интегральный коэффициент корреляции существенно превосходит отношение вносимой спиральности к вносимой энергии. По мере роста уровня вносимой перекрестной спиральности наклон спектра возрастает от « $-5/3$ » до « $-2$ ».

## 9.4. Динамическая модель многомасштабного динамо

Описание процессов генерации магнитных полей в реальных космических объектах ведется обычно в рамках теории динамо средних полей. Конкретные модели отличаются при этом способом описания влияния мелкомасштабной турбулентности на крупномасштабные поля. Однако роль мелкомасштабной турбулентности не всегда ограничивается вкладом в эффективные коэффициенты переноса и эффектами генерации средних полей за счет механизмов типа альфа-эффекта (см. раздел 3.8). Выше было показано, что мелкомасштабные динамо-процессы, с одной стороны, зависят от крупномасштабных полей (так как именно они обеспечивают приток энергии и спиральностей в мелкие масштабы), а с другой стороны, меняют статистические характеристики мелкомасштабной турбулентности, которые ответственны за крупномасштабные динамо-процессы.

В работе [31] была предложена идея совместить описание крупномасштабных переменных на языке уравнений среднего поля с описанием мелкомасштабных переменных на языке каскадных моделей. Очевидно, что центральным моментом такого подхода является отработка способов сопряжения уравнений, ответственных за крупномасштабные и мелкомасштабные переменные. Идея получила развитие в работе [66], где сопряжение двух частей модели было выполнено на основе строгого соблюдения всех законов сохранения магнитной гидродинамики. Некоторые результаты этой работы мы воспроизведем для иллюстрации возможностей моделей этого типа.

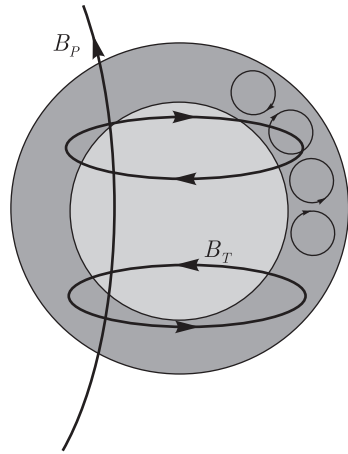


Рис. 9.15

В качестве крупномасштабной компоненты задачи рассмотрена простейшая задача теории динамо, так называемое  $\alpha^2$ -динамо. Считается, что крупномасштабное поле имеет полоидальную и тороидальную составляющие относительно простой пространственной структуры, такой, что каждую компоненту можно описать с помощью амплитуд  $B_P$  и  $B_T$ . Другими словами, описание поведения крупномасштабного поля можно свести к паре обыкновенных дифференциальных уравнений.

На рис. 9.15 схематично показаны полоидальное и тороидальное поля в сферическом теле. Затемнение соответствует области, в которой существуют турбулентные течения проводящей жидкости (конвективная оболочка звезды или жидкое ядро пла-

неты). Важно отметить, что размер наибольших турбулентных вихрей существенно меньше характерного размера среднего поля. Для устойчивой работы динамо нужны физические механизмы, преобразующие полоидальное поле в тороидальное и наоборот. Первая часть динамо цикла обычно обеспечивается в космических телах дифференциальным вращением — различные слои проводящей жидкости вращаются с различной скоростью и «наматывают» силовые линии полоидального поля вокруг оси вращения, тем самым производя тороидальное поле. Сложнее обстоит дело с преобразованием тороидального поля в полоидальное. Именно для объяснения этой части динамо цикла прибегают обычно к альфа-эффекту. Такая динамо-машина, в которой работают дифференциальное вращение и альфа-эффект носит название альфа-омега динамо.

В задаче  $\alpha^2$ -динамо тороидальная компонента крупномасштабного магнитного поля связана с полоидальной компонентой, как обычно, с помощью средней спиральности, но и обратная связь достигается с помощью той же спиральности, а не дифференциального вращения, которое обычно делает это более эффективно.  $\alpha^2$ -динамо не очень типично для астрофизики, хотя может встречаться в тесных двойных системах, в которых дифференциальное вращение подавлено приливными взаимодействиями. Однако позитивный опыт сопряжения систем для микро- и макропеременных может быть полезен и в более реалистичных (и сложных) ситуациях.

Итак, эволюция крупномасштабного магнитного поля определяется поведением его полоидальной  $B_P$  и тороидальной  $B_T$  составляющих, для которых справедливы уравнения

$$d_t B_P = i\alpha k_L B_T - \beta \alpha^2 B_P, \quad (9.19)$$

$$d_t B_T = -i\alpha k_L B_P - \beta \alpha^2 B_T, \quad (9.20)$$

где  $\alpha$  описывает способность мелкомасштабной отражательно-неинвариантной турбулентности генерировать среднее крупномасштабное магнитное поле, а  $\beta$  — эффективный коэффициент диффузии турбулентной среды (см. главу 3),  $k_L = L/L_B$  — относительное волновое число, показывающее во сколько раз принятый за единицу длины интегральный масштаб турбулентности (для задачи, схематично изображенной на рис. 9.15, это толщина турбулентного слоя) меньше масштаба генерируемого среднего поля  $L_B$ . Таким образом, полоидальное магнитное поле создается из тороидального спиральностью, как и тороидальное магнитное поле из полоидального, и оба эти поля подвержены действию турбулентной диффузии. Именно этот процесс и называется  $\alpha^2$ -динамо.

Линейный анализ устойчивости тривиального решения уравнений (9.19)–(9.20) дает, что при  $\alpha k_L > \beta$  в системе появляется экспоненциально растущее решение. Ограничить рост магнитного поля в рамках такой модели при фиксированных значениях  $\alpha$  и  $\beta$  невозможно. Ожидается, что растущее магнитное поле должно модифицировать мелкомасштабную турбулентность, меняя значения этих коэффициентов и приводя тем самым к стабилизации процесса генерации. Для получения работоспособной модели используют различные зависимости вида  $\alpha = f(|B|)$ , приводящие к стационарным решениям (это так называемые модели с алгебраическим подавлением).

Идея комбинированной модели состоит в том, чтобы объединить уравнения (9.19)–(9.20) с каскадными уравнениями (9.8)–(9.9), вычисляя коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  из текущих решений каскадных уравнений. При этом вся система в целом должна строго выполнять все законы сохранения (необходимо учесть обмен энергией и спиральностями между турбулентным потоком и генерируемым крупномасштабным магнитным полем).

Для коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  примем оценки (3.74) и (3.75) (см. вывод в п. 3.8.2) и выразим их через каскадные переменные

$$\alpha = -\frac{1}{3} H \tau_c = -\frac{1}{3} \sum_n H_n \tau_n = -\frac{1}{3} \sum_n (-1)^n |U_n|, \quad (9.21)$$

$$\beta = \frac{2}{3} E_u \tau_c = \frac{1}{3} \sum_n |U_n|^2 \tau_n = \frac{1}{3} \sum_n k_n^{-1} |U_n|. \quad (9.22)$$

При этом предположили, что  $\tau_n$  определяется временем оборота вихрей соответствующего масштаба.

Каскадные уравнения (9.8)–(9.9) перепишем для оболочек произвольной толщины  $q$

$$\begin{aligned} (dt + \frac{k_n^2}{R}) U_n &= i k_n \{ U_{n+1}^* U_{n+2}^* - B_{n+1}^* B_{n+2}^* + \\ &+ \frac{1-q}{q^2} (U_{n-1}^* U_{n+1}^* - B_{n-1}^* B_{n+1}^*) - \frac{1}{q^3} (U_{n-2}^* U_{n-1}^* - B_{n-2}^* B_{n-1}^*) \} + F_n, \end{aligned} \quad (9.23)$$

$$\begin{aligned} (dt + \frac{k_n^2}{Rm}) B_n &= \frac{i k_n}{q(1+q)} \{ (U_{n+1}^* B_{n+2}^* - B_{n+1}^* U_{n+2}^*) + \\ &+ (U_{n-1}^* B_{n+1}^* - B_{n-1}^* U_{n+1}^*) + (U_{n-2}^* B_{n-1}^* - B_{n-2}^* U_{n-1}^*) \} + G_n, \end{aligned} \quad (9.24)$$

и остановимся на структуре сил  $F_n$  и  $G_n$ , играющих в этой модели очень важную роль. Силы включают ряд слагаемых различной природы

$$F_n = f_n^I + f_n^C + f_n^B, \quad (9.25)$$

$$G_n = g_n^I + g_n^B. \quad (9.26)$$

Здесь  $f_n^I$  и  $g_n^I$  являются источниками внешней энергии. Поскольку рассматривается задача динамо, то в дальнейшем  $g_n^I \equiv 0$ . Сила  $f_n^I$  поддерживает турбулентность и действует только в двух старших оболочках ( $n = 0$  и  $n = 1$ ), являясь комплексной величиной с постоянным модулем и случайной фазой.

Слагаемое  $f_n^C$  является источником спиральности. Для космических тел считается, что источником спиральности является вращение, то есть в конечном итоге сила Кориолиса, которая работы не совершает. В модели нужна сила, не меняющая энергии системы, но обеспечивающая контролируемый впрыск спиральности. Она принимается в виде

$$f_n^C = C(-1)^n \frac{|u_n|^2 + |u_{n+1}|^2}{|u_n|^2} u_n, \quad (9.27)$$

обеспечивающем перераспределение энергии между четными и нечетными оболочками.  $C$  остается свободным параметром.

Вариации крупномасштабного поля, описываемые уравнениями (9.19)–(9.20) связаны с ростом энергии (альфа-эффект), либо с ее потерями (бета-эффект). В первом случае приращение энергии среднего поля  $E^B = |B_T|^2 + |B_P|^2$  происходит за счет работы мелкомасштабной турбулентности и каждая оболочка отдает при этом свою часть, равную

$$E_n^\alpha = 2ik_L \alpha_n (B_T B_P^* - B_P B_T^*),$$

Во втором случае, энергия, теряемая крупномасштабным полем, отдается мелкомасштабной турбулентности. Каждая оболочка получает

$$E_n^\beta = k_L^2 \beta_n E^B.$$

Слагаемые  $f_n^B$  и  $g_n^B$  призваны описать это перераспределение энергии с точным соблюдением остальных законов сохранения (речь идет только о магнитной спиральности, так как перекрестной спиральности на масштабах среднего поля нет). Они имеют следующий вид

$$f_n^B = -\frac{E_n^\alpha B_n}{U_n^* B_n - U_n B_n^*}, \quad (9.28)$$

$$g_n^B = -\frac{U_n Q_n}{B_n^* U_n - B_n U_n^*}, \quad (9.29)$$

$$Q_n = \begin{cases} -\frac{(E_n^\beta + E_{n+1}^\beta)}{q+1}, & n \text{ — четное,} \\ -\frac{(E_n^\beta + E_{n-1}^\beta)q}{q+1}, & n \text{ — нечетное.} \end{cases} \quad (9.30)$$

Уравнения (9.19)–(9.20) интегрировались численно совместно с системой уравнений (9.23)–(9.24) для 30 пар переменных  $U_n, B_n$  ( $0 \leq n \leq 29$ ),  $q = 1.618$ ,  $R = Rm = 10^6$ . На рис. 9.16 приведены результаты решения системы для девяти различных комбинаций параметров  $C$  и  $k_L$ . Для верхнего ряда  $C = 0$  (нет источника спиральности),  $C = 0,04$  для среднего ряда и  $C = 0,16$  для нижнего ряда. Столбцы соответствуют различным соотношениям масштабов поля и турбулентности:  $k_L = 1/2$  (левый столбец),  $k_L = 1/8$  (центральный столбец), и  $k_L = 1/32$  (правый столбец). Показана эволюция во времени значений кинетической энергии турбулентности (тонкие темные линии), энергии пульсаций магнитного поля (светлые линии) и энергии крупномасштабного магнитного поля (сумма энергий полоидальной и тороидальной компонент) — толстые черные линии.

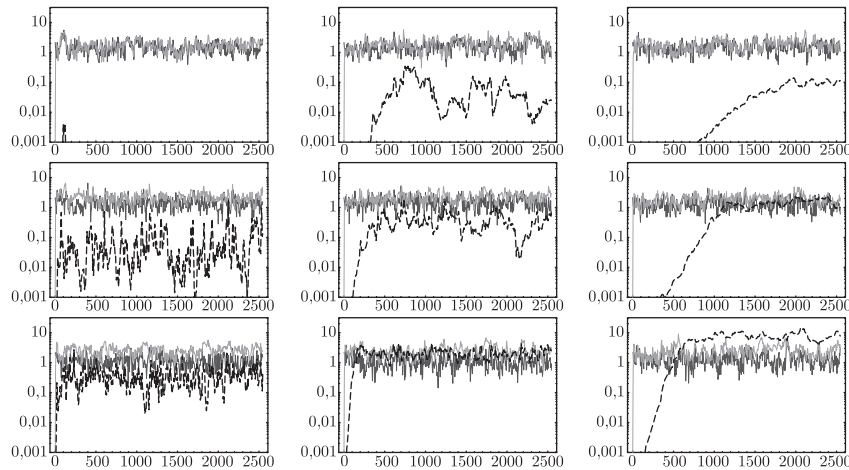


Рис. 9.16

Результаты расчетов показывают, что энергия мелкомасштабных пульсаций магнитного поля во всех случаях быстро (несколько времен оборота вихрей максимального масштаба) выходит на уровень кинетической энергии. Крупномасштабное поле развивается значительно медленнее и сильно зависит от уровня вносимой спиральности и соотношения масштабов  $k_L$ . При отсутствии источника спиральности и малом масштабе поля ( $k_L$ , верхний левый график) динамо не реализуется. При уменьшении  $k_L$  динамо возможно и без постоянного подвода спиральности, работая за счет флуктуаций спиральности. При  $k_L = 1/8$  процесс имеет нестабильный характер, а интенсивность генерируемого поля мала. В случае  $k_L = 1/32$  (правый верхний график) процесс генерации развивается монотонно, но очень медленно (растет масштаб среднего поля и соответственно увеличивается характерное время его роста). Подкачка спиральности эффективно стимулирует генерацию, приводя в случае  $C = 0,16$ ,  $k_L = 1/32$  к ситуации, когда энергия среднего поля значительно превосходит энергию поддерживающего ее турбулентного течения.

Любопытные результаты дал анализ связи значения коэффициента  $\alpha$  с интенсивностью генерируемого магнитного поля. Анализ предпринимался с целью получения зависимости  $\alpha = f(|B|)$  для обоснования модели с алгебраическим подавлением, но дал отсутствие корреляции между значениями  $\alpha$  и энергией среднего поля  $E^B$ . Тогда была вычислена кросс-

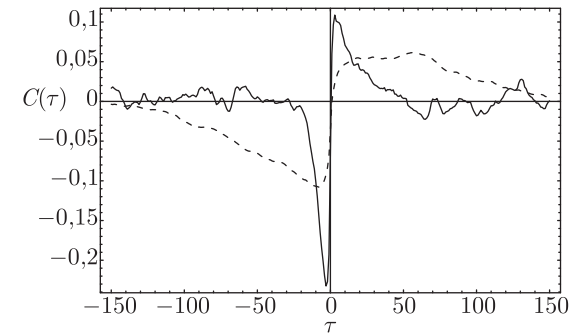


Рис. 9.17

корреляционная функция

$$C(\tau) = \frac{\int \tilde{E}^B(t) \tilde{\alpha}(t + \tau) dt}{\left( \int (\tilde{E}^B)^2(t) dt \int (\tilde{\alpha})^2(t) dt \right)^{1/2}}, \quad (9.31)$$

где тильда означает отклонение от среднего значения. Функция (9.31) для случая  $C = 0,08$ , и двух значений  $k_L$ , вычисленная по очень длинным временным реализациям (20 000 безразмерных единиц времени), приведена на рис. 9.17. Действительно, корреляция строго равна нулю при  $\tau = 0$ , но имеет область положительных значений при  $\tau > 0$ , и область отрицательных значений при  $\tau < 0$ . Ширина этих областей зависит от  $k_L$  (большие масштабы поля ведут опять же к росту временных масштабов). При больших  $\tau$  корреляция стремится к нулю. Структура кросс-корреляционной функции свидетельствует о том, что при отрицательных  $\tau$  (поле следует за спиральностью) отрицательная спиральность ведет к последующему росту энергии поля. Обратная реакция (положительные  $\tau$  — спиральность следует за полем) заметно медленнее и свидетельствует о генерации полем положительной спиральности, которая тормозит генерацию (напомним, что в определении  $\alpha$  содержится минус). Таким образом, процесс подавления генерации носит динамический характер и не может быть описан в рамках алгебраического приближения.

С общей точки зрения, предложенная модель динамо, включающая в себя описание как крупномасштабных, так и мелкомасштабных полей, подтверждает возможность использования каскадных моделей в теории динамо средних полей для описания поведения мелкомасштабных переменных. Описание крупномасштабных переменных можно усложнить так, чтобы, с одной стороны, включить в него более реалистичское  $\alpha\omega$ -динамо,

а с другой стороны, использовать более реалистическое, хотя по-прежнему не катастрофически большое число крупномасштабных переменных в рамках спектрального (как в нашем случае) или сеточного (см. следующий параграф) подхода.

Построенная модель самым непосредственным образом отвечает представлениям о том, как происходит рост крупномасштабного магнитного поля в теории динамо. В частности, в предложенной модели разрыв между масштабами  $k_L$  и  $k_0$  может быть, в принципе, сколь угодно большим и он не заполнен никакими вспомогательными переменными. Это значит, что в теории динамо среднего поля не обязательно пользоваться представлением об обратном каскаде, в котором магнитное поле масштаба  $k_L$  получается из поля непосредственно предшествующего масштаба.

## 9.5. Каскадно-сеточный метод

В рассмотренной выше модели  $\alpha^2$ -динамо каскадные уравнения были использованы для описания влияния мелкомасштабной турбулентности на выделенные крупномасштабные моды магнитного поля. Представляется чрезвычайно заманчивым использовать каскадные модели для описания мелкомасштабной турбулентности и при детальном рассмотрении крупномасштабных течений и полей, то есть применить эти модели для замыкания уравнений средних полей. Другими словами, возникает соблазн описать с помощью каскадных уравнений масштабы, не разрешаемые численной процедурой, используемой для решения уравнений движения (если используется метод сеток, то речь идет о подсеточных масштабах). Именно такой подход и лежит в основе *каскадно-сеточного* метода.

В наиболее полной версии метод сводится к следующему. Пусть, для примера, рассматривается турбулентное течение в кубической области с ребром  $L$  и наименьший масштаб, возбуждаемый в потоке, равен  $\lambda \approx 10^{-8}L$ . Для прямого численного моделирования требуется сетка с общим числом узлов  $N_m \approx 10^{24}$ . Предположим, что компьютер обеспечивает расчет на сетке  $100^3$ , то есть пространственное разрешение есть  $d = 10^{-2}L$ , а число узлов сетки  $N_g = 10^6$ . Недостающий диапазон масштабов  $\lambda \leq l \leq d$  описывается с помощью каскадных уравнений. Если каждая каскадная переменная описывает пульсации в пределах октавы волновых чисел, то в нашем примере достаточно цепочка длиной  $N_s \approx 20$ . Пристраивая по цепочке к каждому узлу сетки, мы получим общее число переменных  $N_{total} \approx N_g N_s \approx 2 \cdot 10^7$ , причем с ростом числа Рейнольдса количество переменных растет только как  $\log_2 R$ .

На практике можно избежать построения каскадной цепочки для каждого узла сетки, сократив тем самым объем счета. Простейший вариант метода получается в предположении об однородности подсеточной турбулентности. Именно такая модель, включающая единственную каскадную цепочку, была реализована в работе [64], где рассматривалась задача о конвекции во вращающемся сферическом слое жидкости (в приложении к гидродинамике жидкого ядра Земли).

Самым сложным является вопрос о сопряжении сеточной и каскадной частей расчетного алгоритма. Сеточные данные определяют состояние старших ярусов каскадной модели (наиболее крупных масштабов, входящих в каскадную схему). Каскадная модель должна дать значение скорости диссипации энергии (спектрального потока энергии), и соответствующая энергия должна быть корректным образом изъята из крупномасштабного поля скорости.

Наибольшие масштабы, описываемые каскадными уравнениями  $U_{n_{\min}}$  и  $U_{n_{\min}+1}$ , определяются по характерным пульсациям крупномасштабного поля скорости на масштабах порядка шага сетки. Поскольку энергия яруса в каскадной модели  $E_n = U_n^2$  соответствует энергии целой октавы волновых чисел в пространстве Фурье, а используемая в сферическом слое сетка дает неравномерный шаг, то значения переменных  $U_{n_{\min}}$  и  $U_{n_{\min}+1}$  для каждого момента времени определялись как среднеквадратичные значения разности компонент скорости для всех пар точек, расстояния между которыми попадали в соответствующую октаву масштабов.

Обратное влияние подсеточных масштабов на крупномасштабное поле скорости учитывалось через эффективную турбулентную вязкость  $\nu_t$ . Согласно оценке Колмогорова диссипативный масштаб  $\lambda$  определяется скоростью диссипации энергии и молекулярной вязкостью  $\lambda \approx (\nu^3 \varepsilon^{-1})^{1/4}$ . Требуется задать эффективную турбулентную вязкость такую, чтобы она обеспечила ту же скорость диссипации энергии на масштабе сетке, то есть  $\nu_t = 0,1(\delta^4 \varepsilon)^{1/3}$ . Численный коэффициент в формуле получен из оценки Смагоринского [103], а скорость диссипации вычисляется как потеря полной энергии в каскадной модели за единицу времени  $\varepsilon = \sum_{n=n_{\min}+2}^{n_{\max}} (k_n U_n)^2$ . В численных расчетах использовались сетка порядка  $20^3$  и каскадная модель для переменных  $U_n$  с  $n_{\min} = 4$  и  $n_{\max} = 20$ . Минимальное значение  $n$  определяется шагом сетки, а максимальное — рассматриваемым числом Рейнольдса. Выбранные значения обеспечивали расчет для  $R = 10^9$ , что соответствует имеющимся оценкам числа Рейнольдса для жидкого ядра Земли.

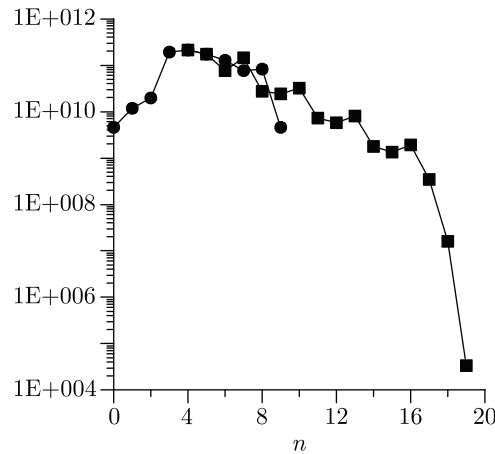


Рис. 9.18

Нужно заметить, что шаг интегрирования сеточных уравнений по времени  $\tau_g$  существенно отличается от шага интегрирования для каскадных уравнений  $\tau_s$ . Очевидно, что  $\tau_s \ll \tau_g$  (в рассматриваемом примере  $\tau_g \approx 1000\tau_s$ ). На практике каскадные уравнения дают осциллирующие решения и скорость диссипации определяется по ее среднему значению на отрезке времени, равном  $\tau_g$ .

Рис. 9.18 иллюстрирует спектральные свойства течения во всем диапазоне масштабов (сеточных и подсеточных). Показаны значения структурной функции второго порядка, вычисленной по значениям поля скорости на сетке (кружки) и по значениям каскадных переменных (квадраты). Прямая линия соответствует колмогоровскому интервалу, в котором  $S_2 \sim k^{-2/3}$ . Можно видеть область сопряжения двух моделей. Последняя точка сеточной части дает заниженное значение — она соответствует масштабам, которые вычисляются только в приполярных областях (из-за неравномерности сетки) и не могут характеризовать поле скорости в целом. Поэтому эта точка не использовалась для передачи значений каскадным переменным. Важно подчеркнуть, что такой комбинированный метод обеспечивает гладкое сопряжение спектральной плотности энергии.

## ГЛАВА 10

### Фурье- и вейвлет-анализ случайных полей

В ходе знакомства с методами описания и моделирования турбулентных течений можно было видеть, как часто логика рассуждений заставляет обращаться к спектральным представлениям рассматриваемых полей. В главе 7 было показано, что возникшее в последнее десятилетие двадцатого века обобщение анализа Фурье — вейвлет-анализ — идейно близко качественным представлениям о структуре турбулентных полей. Вейвлеты стали мощным инструментом анализа поведения нелинейных систем, имеющих многомасштабную временную и/или пространственную структуру. Кажется целесообразным дать представление о возможностях вейвлет-анализа, предварив его описание кратким изложением основных свойств непрерывного и дискретного преобразования Фурье.

#### 10.1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье

Напомним, что Фурье предложил разложение функций в ряд по гармоническим функциям как метод решения уравнения теплопроводности, которое в одномерном случае имеет вид

$$\partial_t T = \eta \partial_{xx}^2 T. \quad (10.1)$$

Если задача решается на отрезке  $(0, L)$  и имеет, например, нулевые граничные условия, то температура представляется рядом

$$T(x, t) = \sum_n b_n(t) \sin(2\pi n x / L). \quad (10.2)$$

Подстановка (10.2) в (10.1) дает уравнение

$$\sum_n \dot{b}_n(t) \sin(2\pi n x / L) = -\eta \sum_n b_n(t) (2\pi n / L)^2 \sin(2\pi n x / L), \quad (10.3)$$

которое распадается на отдельные уравнения для каждой гармоники (для этого достаточно умножить уравнение на  $\sin(2\pi m/L)$  и проинтегрировать по рассматриваемому отрезку):

$$\dot{b}_m(t) = -(2\pi m/L)^2 \eta b_m(t). \quad (10.4)$$

Решение поставленной задачи становится в результате тривиальным: после разложения в ряд для каждой гармоники имеется решение (10.4), имея которые можно восстановить по (10.2) распределение температуры в любой момент времени.

В общем случае *периодическую* функцию  $f(t)$  с периодом  $T$ , для которой существует интеграл  $\int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)| dt$ , можно разложить в ряд

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad (10.5)$$

где  $\omega_0 = 2\pi/T$ , а коэффициенты Фурье определяются выражениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad (10.6)$$

$$c_n = c_{-n}^* = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \quad (10.7)$$

где звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

Функцию  $f(t)$  можно представить интегралом Фурье, если для нее существует интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ . Тогда

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu, \quad (10.8)$$

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt. \quad (10.9)$$

Здесь  $\hat{f}(\nu)$  есть фурье-образ функции  $f(t)$ ,  $\nu$  — частота (будем также пользоваться круговой частотой  $\omega = 2\pi\nu$ ). Отметим, что когда речь идет о преобразовании Фурье от функции координат  $f(x)$ , то в преобразовании вместо частот появляются волновые числа  $k$  и  $\gamma$  ( $k = 2\pi\gamma$ , в полной аналогии с частотами).

### 10.1.1. Основные свойства преобразования Фурье

Приведем формулировки основных теорем, касающихся свойств *непрерывного* преобразования Фурье, помня при этом, что все они имеют прямой аналог в терминах дискретного преобразования.

Итак, пусть  $f(t)$  — функция, для которой существует интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ .

Тогда

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \hat{f}(\omega) = \int f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (10.10)$$

или, с учетом связи  $\omega = 2\pi\nu$ ,

$$f(t) = \int \hat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu, \quad \hat{f}(\nu) = \int f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt.$$

Используя для преобразования Фурье обозначение

$$\hat{f}(\omega) = \tilde{F}[f(t)],$$

сформулируем его основные свойства.

1. Единственность: преобразование (10.10) однозначно.
2. Линейность:

$$\tilde{F}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 \hat{f}_1(\omega) + \alpha_2 \hat{f}_2(\omega). \quad (10.11)$$

3. Теорема о масштабах:

$$\tilde{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \quad (10.12)$$

4. Теорема о сдвиге:

$$\tilde{F}[f(t+a)] = e^{i\omega a} \hat{f}(\omega). \quad (10.13)$$

5. Теорема о свертке<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\tilde{F}[f_1 * f_2] &= \hat{f}_1(\omega) \cdot \hat{f}_2(\omega), \\ \tilde{F}[f_1 \cdot f_2] &= \hat{f}_1(\omega) * \hat{f}_2(\omega).\end{aligned}\quad (10.14)$$

## 6. Теорема о дифференцировании:

$$\tilde{F}\left(f^{(n)}(t)\right) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega). \quad (10.15)$$

## 7. Теорема Парсеваля:

$$\int f_1(t) f_2^*(t) dt = (2\pi)^{-1} \int \hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2^*(\omega) d\omega. \quad (10.16)$$

Иными словами, скалярное произведение двух функций инвариантно относительно преобразования Фурье. Важным следствием теоремы Парсеваля является сохранение энергии:

$$\int |f(t)|^2 dt = (2\pi)^{-1} \int |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

## 8. Теорема о комплексном сопряжении:

$$\tilde{F}(f^*) = \hat{f}^*(-\omega). \quad (10.17)$$

Если  $f$  — вещественна, то  $\tilde{F}(f^*) = \tilde{F}(f) = \hat{f}^*(-\omega)$ , т.е.  $\hat{f}(\omega) = \hat{f}^*(-\omega)$ .

## 10.2. Зачем нужны вейвлеты?

Фурье анализ дает исчерпывающую информацию о спектральном составе *строго периодического* сигнала, либо случайного сигнала со *стационарным* спектральным составом. На практике часто возникает необходимость анализировать сигналы, спектральный состав которых меняется

<sup>1</sup>Напомним, что сверткой называется интегральная операция

$$f_1(x) * f_2(x) = \int f_1(x - x') f_2(x') dx'.$$

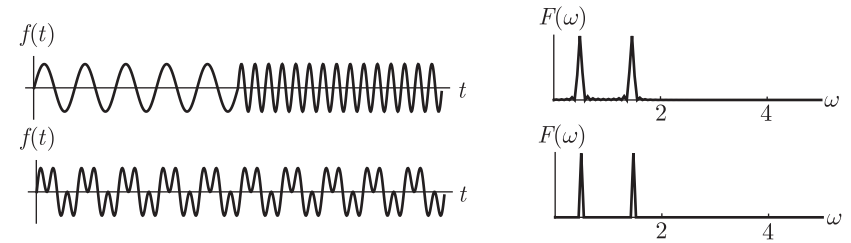


Рис. 10.1

со временем. В этом случае прямое использование преобразования Фурье не дает представление о структуре сигнала. Простейший пример такой ситуации приведен на рис. 10.1, где показаны два простых сигнала (слева) и их спектры мощности (справа). Первый сигнал представляет собой простую гармонику, частота которой в некоторый момент времени утраивается. Второй сигнал представляет собой суперпозицию этих же двух частот. Можно видеть, что спектры Фурье обоих сигналов практически совпадают, то есть методами традиционного анализа Фурье различить эти два сигнала нельзя.

Приведенный пример показывает, что для анализа сигналов, спектральный состав которых меняется со временем, требуется разложение, сохраняющее информацию о частотном составе сигнала в различные периоды времени. Иначе говоря, необходимо некое *частотно – временное* представление исходного сигнала. Именно такое представление и дает вейвлет-разложение.

Перед тем как перейти к изложению основ вейвлет-анализа, приведем некоторые типичные задачи, для решения которых используют вейвлеты. На рис. 10.2 показаны три сигнала. Первый представляет собой уже рассмотренный пример сигнала с изменяющейся со временем частотой. Задача анализа — проследить за эволюцией частоты со временем. Естественно, что сигнал может быть значительно сложнее и представлять собой совокупность многих гармоник, меняющихся во времени — задачу такого рода решают музыканты, записывая мелодию с помощью нот. Второй пример на рис. 10.2 касается простого гармонического сигнала, в котором произошел сбой фазы. В спектре Фурье этой сбой приведет к появлению слабого шума. Требуется же указать точный момент времени, в который произошел сбой фазы. На нижнем графике показан сигнал, в котором периодическая структура отсутствует вовсе. Сигнал состоит из отдельных всплесков различной длительности (амплитуды для простоты взяты одинаковыми), которые возникают в различные моменты времени и могут накладываться друг

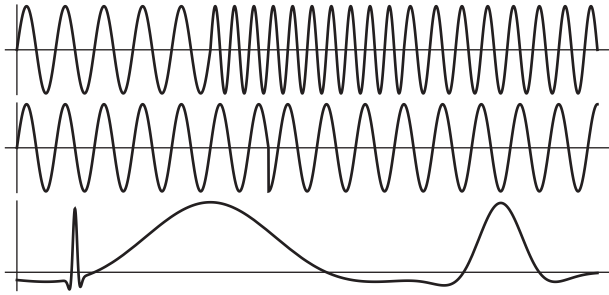


Рис. 10.2

на друга. Необходимо для каждого всплеска указать момент его возникновения и его длительность.

### 10.3. Непрерывное вейвлет-преобразование

Непрерывное вейвлет-преобразование одномерной функции  $f(t)$  есть

$$w(a, b) = a^\kappa \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (10.18)$$

где  $\psi(t)$  — вещественная или комплексная функция, называемая анализирующим вейвлетом. Вейвлет представляет собой осциллирующую функцию, среднее значение которой равно нулю, локализованную как в физическом пространстве, так и в пространстве Фурье.

Для преобразования (10.18) существует формула обращения, позволяющая восстановить функцию  $f$  по ее вейвлет-образу

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) w(a, b) \frac{da db}{a^{3+\kappa}}. \quad (10.19)$$

Обращение (10.19) существует и единственно, если выполняется условия

$$C_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (10.20)$$

где  $\hat{\psi}(\omega) = \int \psi(t) e^{-i\omega t} dt$  есть фурье-образ анализирующего вейвлета  $\psi(t)$ . Условие (10.20) эквивалентно условию (7.44) о равенстве нулю среднего

значения вейвлет-функции  $\langle \psi(t) \rangle = 0$ , так как интеграл (10.20) расходится при наличии в спектре вейвлета нулевых частот, что равносильно отличному от нуля среднему значению.

Важно отметить, что формула обращения (10.19) обычно записывается для вещественных сигналов. В этом случае параметр  $a$  положительно определен и обратное преобразование (10.19) записывается в виде

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) w(a, b) \frac{da db}{a^{3+\kappa}}, \quad (10.21)$$

т. е. интегрирование ведется в пределах  $0 < a < \infty$ . Именно эта формула будет использоваться в дальнейшем. В случае комплексно определенной функции  $f$  область определения параметра  $a$  может также быть ограничена положительной полуосью  $a > 0$ , если использовать *вещественный* анализирующий вейвлет  $\psi(t)$ . В общем случае комплексной функции и комплексного вейвлета область определения параметра масштаба  $a$  должна быть продолжена в область отрицательных значений (подобно волновым числам в пространстве Фурье).

В определении (10.18) присутствует параметр  $\kappa$  — показатель степени масштабного множителя. Конкретный выбор этого параметра зависит от целей анализа. Широко используется нормировка  $\kappa = -1$ , при которой равные значения вейвлет-коэффициентов  $w(a, b)$  соответствуют равным амплитудам пульсаций сигнала, независимо от масштаба пульсаций.

Вейвлет-образ  $w(a, b)$  функции  $f(t)$  можно выразить и через ее фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$ . Действительно,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \hat{\psi}(a\omega) w(a, b) e^{-i\omega b} \frac{da db}{a^{2+\kappa}}, \quad (10.22)$$

а

$$w(a, b) = \frac{a^{\kappa+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{\psi}^*(a\omega) \hat{f}(\omega) e^{ib\omega} d\omega. \quad (10.23)$$

Пользуясь соотношениями (10.22)–(10.23) и теоремой Парсеваля (10.16), не сложно получить аналог этой теоремы для вейвлет-преобразования

$$\int_{-\infty}^\infty f_1(t) f_2^*(t) dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w_1(a, b) w_2^*(a, b) \frac{da db}{a^{3+2\kappa}}, \quad (10.24)$$

из которого, в частности, следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |w(a, b)|^2 \frac{da db}{a^{3+2\kappa}}. \quad (10.25)$$

Напомним, что в фурье-анализе спектральной плотностью энергии является величина  $E(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$  (называемая также спектром энергии) и введем величину

$$M(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |w(a, b)|^2 db, \quad (10.26)$$

которая характеризует интенсивность *всех* пульсаций заданного масштаба. Если в определении вейвлет-преобразования положить  $\kappa = -1/2$ , то формулу (10.25) можно переписать в виде

$$E = \int_0^{\infty} E(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} M(a) \frac{da}{a^2}. \quad (10.27)$$

В этом случае  $M(a)$  описывает распределение энергии пульсаций по масштабам и называется интегральным вейвлет-спектром. Из сказанного следует, что нормировка  $\kappa = -1/2$  должна использоваться, если результаты вейвлет-анализа предполагается сопоставлять с фурье-представлением сигнала. Действительно, если фурье-спектр следует степенному закону  $E(\omega) \sim \omega^\alpha$ , то при этой нормировке интегральный вейвлет-спектр будет иметь тот же степенной закон  $M(a) \sim a^{-\alpha} \sim \omega^\alpha$  (это следует из формулы (10.27) с учетом того, что  $\omega \sim 1/a$ , а  $d\omega \sim -da/a^2$ ).

Вейвлет-преобразование отображает пространство функций одной переменной (время) в пространство функций двух переменных (время и частота, или время и масштаб) и является избыточным. Избыточность непрерывного вейвлет-преобразования выражается в коррелированности вейвлет-коэффициентов, которая тем больше, чем больше рассматриваемый масштаб  $a$ . Иначе говоря, чем больше масштаб, тем меньше независимых точек в вейвлет-разложении. Этот недостаток устраняется в дискретном вейвлет-представлении (пример тому — рассмотренный выше иерархический базис, в котором число функций геометрически уменьшается с ростом пространственного масштаба).

Преимущество вейвлет-преобразования перед преобразованием Фурье состоит в том, что оно позволяет проследить за изменением спектраль-

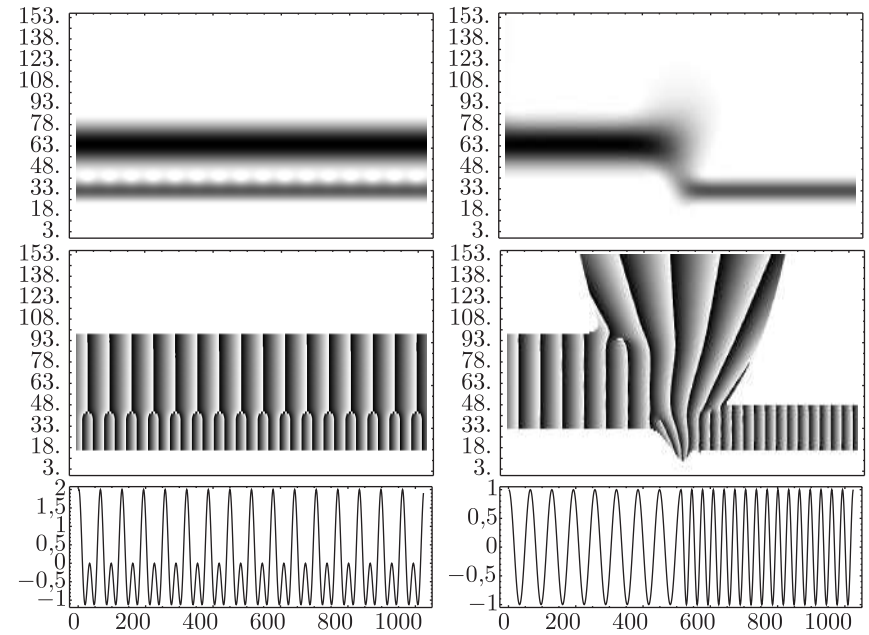


Рис. 10.3

ных свойств сигнала со временем, указать, какие частоты (масштабы) доминируют в сигнале в каждый конкретный момент времени. На рис. 10.3 показаны два примера вейвлет-разложения простых временных сигналов с помощью вейвлета Морле  $\psi(t) = \exp(2\pi i t - t^2/2)$ . В верхней части рисунка показан модуль вейвлет-разложения на плоскости  $(a, b)$ , в средней части — фаза, а в нижней — сам сигнал. В первом примере (слева) сигнал представляет собой суперпозицию двух гармоник, а во втором сигнале (справа) эти же две частоты появляются последовательно друг за другом. Фурье-преобразования этих двух сигналов практически не отличаются друг от друга, так как спектр Фурье теряет всякую информацию о том, когда какая гармоника присутствовала в сигнале. Вейвлет-анализ позволяет восстановить полную эволюцию спектрального состава сигнала во времени. Общее представление о спектрально-временной структуре сигнала можно получить по распределению модуля вейвлет-преобразования. Ширина полосы, получаемой при разложении гармонического сигнала, характеризует спектральное разрешение используемого анализирующего вейвлета. Распределение фазы вейвлет-преобразования менее информативно, особен-

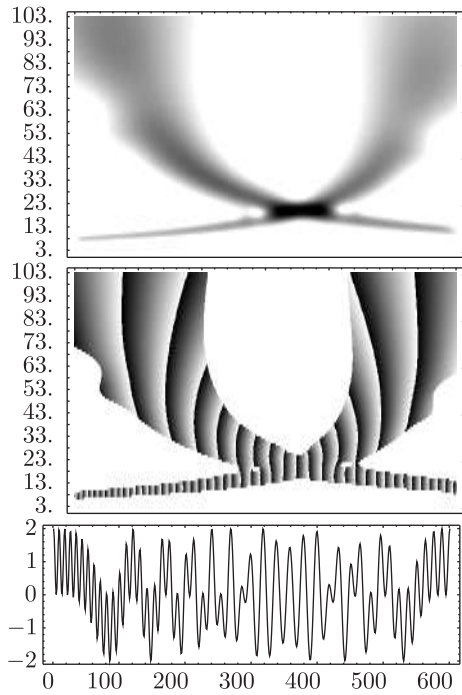


Рис. 10.4

но для сложных сигналов. В то же самое время, именно фаза дает наиболее точную информацию об особенностях (сингулярностях) в сигнале. Так, на рис. 10.3 можно видеть, что именно по распределению фазы можно с большой точностью идентифицировать момент смены частоты во втором примере.

На рис. 10.4 показан результат вейвлет-разложения сигнала, представляющего собой суперпозицию двух гармонических составляющих с непрерывно меняющимися частотами (снова использован вейвлет Морле). Сам сигнал показан в нижней части рисунка, модуль вейвлет-разложения — в верхней части. Вейвлет-представление позволяет получить точный вид эволюции частоты каждого из двух сигналов.

На рис. 10.5 дан пример использования действительного вейвлета типа (7.47) — мексиканская шляпа  $\psi(t) = (1 - t^2) \exp(-t^2/2)$ . В качестве сигнала использован тот же временной ряд, что и во втором примере на рис. 10.3 (удвоение частоты гармонических колебаний). В этом случае

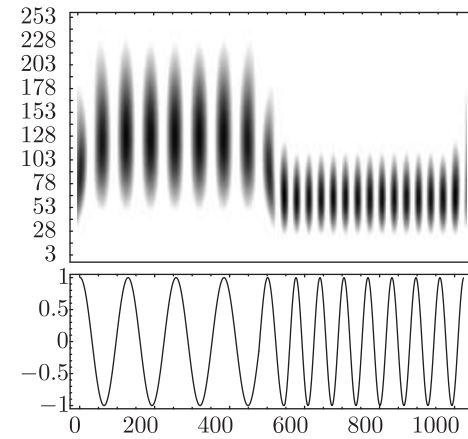


Рис. 10.5

результатом преобразования является действительная величина, модуль которой показан на рисунке. Белые полосы на вейвлет-плоскости, неизбежно появляющиеся при работе с вещественными функциями, соответствуют смене знака вейвлет-коэффициентов и содержат, по сути, информацию, которую в комплексном представлении несет фаза.

В заключение отметим важное свойство вейвлет-представления функций, состоящее в том, что на этапе разложения сигнала по вейвлетам (анализа) и этапе восстановления исходного сигнала по его вейвлет-образу (синтеза) можно использовать различные семейства вейвлетов. Пусть для анализа используется вейвлет  $\psi(t)$ , а для синтеза — вейвлет  $\varphi(t)$ . Тогда прямое преобразование по-прежнему описывается выражением (10.18), а формула восстановления сигнала (10.21) примет вид

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi\varphi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) w(a, b) \frac{da db}{a^{3+\kappa}}. \quad (10.28)$$

Восстановление (10.28) возможно, если выполнено условие

$$C_{\psi\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\hat{\psi}(\omega) \hat{\varphi}^*(\omega)}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Это условие мягче, чем условие (10.20), так как теперь один из двух вейвлетов может и не удовлетворять требованию (10.20) при условии, что

его «недостатки» компенсирует вейвлет, используемый на втором этапе. Преимущество восстановления по формуле (10.28) состоит в том, что она позволяет использовать на одном из этапов преобразования сингулярную функцию (например,  $\delta$ -функцию), которая сама по себе не попадает под определение вейвлета.

#### 10.4. Дискретное вейвлет-преобразование

Наряду с непрерывным вейвлет-преобразованием можно рассмотреть разложение по конечному набору вейвлет-функций, заданных на некоторой сетке и получаемых определенным масштабным преобразованием. Если ограничиться логарифмическим масштабированием и равномерной для заданного масштаба пространственной сеткой, то одномерную базисную функцию можно записать в виде

$$\psi_{Mm} = \psi\left(\frac{x - mba^M}{a^M}\right),$$

для которого доказана возможность получения полного ортогонального функционального базиса. Последнее возможно не при любом выборе значений величин  $a$  и  $b$ . Наиболее естественным представляется принятое и в иерархических моделях разбиение спектрального пространства на октавы, что соответствует случаю  $a = 2$ .

Для одномерной функции  $f(x)$  соответствующее разложение в ряд выглядит как

$$f(x) = \sum_{M=\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{Mm} \psi_M(x - m \cdot 2^M), \quad (10.29)$$

где

$$\psi_M(x) = 2^{-M/2} \psi(x/2^M).$$

Здесь и далее в данном параграфе принята нормировка  $\kappa = -1/2$ , и для удобства записи эта нормировка включена в определение вейвлета.

Задача о выборе функции  $\psi(x)$ , обеспечивающей ортогональность разложения (10.29), т. е. соблюдение условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_M(x - m \cdot 2^M) \psi_N(x - n \cdot 2^N) dx = \delta_{NM} \delta_{nm} \quad (10.30)$$

далеко не тривиальна. Условиям (10.28)–(10.30) соответствуют, правда, и давно известные функции Хаара, но их недостатком, как отмечалось выше, является плохая локализация в фурье-пространстве. Примером функций, широко используемых в приложениях дискретного вейвлет-анализа,

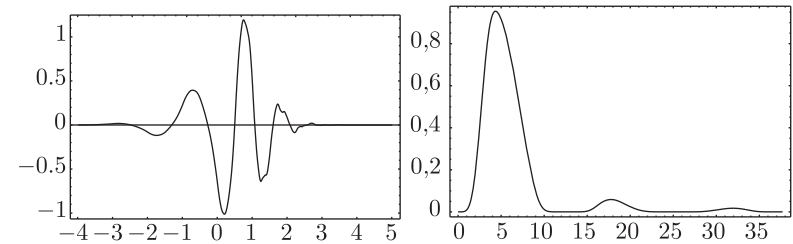


Рис. 10.6

являются функции Добеши [53]. Семейство функций Добеши замечательно тем, что функция порядка  $n$  определена на конечном интервале, за пределами которого она тождественно равна нулю, и, в то же время, функция  $n$  раз дифференцируема (функции Добеши нулевого порядка совпадают с функциями Хаара). Плата за это — несимметричность функций. На рис. 10.6 показаны функция Добеши пятого порядка и ее фурье-образ.

Дискретное преобразование вводится для функции  $f(x)$ , заданной на равномерной сетке  $x_i = i\Delta x$ , где  $\Delta x$  — шаг сетки. Обозначая  $f_i = f(x_i)$  и считая  $\Delta x = 1$ , запишем вместо (10.29)

$$f_i = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{Mm} \psi_M(i - m \cdot 2^M), \quad (10.31)$$

где коэффициенты  $w_{Mm}$  определяются как

$$w_{Mm} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i \psi_M(i - m \cdot 2^M),$$

а условие сохранения энергии принимает вид

$$\sum_{M=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{Mm}^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i^2.$$

Функция  $\psi_M(i)$ , являющаяся дискретным аналогом функции  $\psi(x)$ , должна, вместо (10.30), удовлетворять условию

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_M(i - m \cdot 2^M) \psi_N(i - n \cdot 2^N) = \delta_{NM} \delta_{nm}. \quad (10.32)$$

Переход от функции  $\psi_M(x)$  к ее дискретной версии  $\psi_M(i)$  требует дополнительных пояснений, связанных с тем, что выборка  $f_i$  производится не с помощью  $\delta$ -функций, а с помощью некоторой сглаживающей функции  $\phi(x)$ .

Процедуру построения дискретного вейвлет-преобразования рассмотрим более подробно на примере алгоритма Малла [80] с переменным разрешением (multiresolution wavelet algorithm), который последовательно вычисляет коэффициенты разложения, переходя от меньших масштабов к большим.

Пусть исходная функция  $f(x)$  принадлежит пространству интегрируемых в квадрате функций  $L^2(R)$ . Обозначим подпространство функций, аппроксимирующих  $L^2(R)$  с разрешением  $a_M = 2^M$  как  $V_M$ . При этом  $V_{M+1} \subset V_M$ . Построение начинается с разрешения  $a_0 = 1$  ( $M = 0$ ). Отметим, что, в отличие от иерархических моделей, здесь увеличению индекса  $M$  соответствует переход к большим масштабам (более грубому разрешению). Обозначаем за  $f^M$  соответствующую аппроксимацию функции  $f$ . На практике функция  $f^0$  с точностью до заданной погрешности совпадает с  $f$  и служит исходной для начала вычислений.

Предполагаем наличие базисных функций  $\phi^0(x - i)$ , которые только путем сдвига вдоль оси создают полный ортонормированный базис в пространстве  $V_0$

$$f^0(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i^0 \phi^0(x - i), \quad (10.33)$$

где  $s_i^0$  — коэффициенты разложения

$$s_i^0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^0(x) \phi^0(x - i) dx. \quad (10.34)$$

$\phi(x)$  — быстро убывающая функция, что позволяет интерпретировать коэффициенты  $s_i^0$  как дискретную выборку функции  $f^0$  с разрешением на сетке с шагом  $a = 1$ . Условие ортогональности есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^0(x - i) \phi^0(x - j) dx = \delta_{ij}. \quad (10.35)$$

При переходе к более грубому разрешению  $a_M = 2^M$  используется пространство  $V_M$ , описываемое базисом  $\phi_M$ , функции которого получаются

растяжением исходной функции  $\phi_0$

$$\phi^M(x) = 2^{-M/2} \phi^0(2^{-M}x). \quad (10.36)$$

Дискретная выборка функции  $f^0(x)$  с разрешением  $a_M = 2^M$  есть набор коэффициентов  $s_i^M$

$$s_i^M = \int_{-\infty}^{\infty} f^0(x) \phi^M(x - 2^M i) dx. \quad (10.37)$$

Поскольку  $V_{M+1} \subset V_M$ , то базисные функции масштаба  $M + 1$  можно выразить через базисные функции масштаба  $M$ :

$$\begin{aligned} \phi^{M+1}(x - 2^{M+1}i) &= \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{M+1}(x' - 2^{M+1}i) \phi^M(x' - 2^M j) dx' \right] \phi^M(x - 2^M j) \end{aligned}$$

или

$$\phi^{M+1}(x - 2^{M+1}i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j-2i} \phi^M(x - 2^M j), \quad (10.38)$$

где

$$h_k = 2^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^0(x'/2) \phi^0(x' - k) dx'. \quad (10.39)$$

Из (10.38) следует, что коэффициенты  $s^{M+1}$  можно определить, используя только коэффициенты  $s^M$ :

$$s_i^{M+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j-2i} s_j^M. \quad (10.40)$$

Переход от  $s^M$  к  $s^{M+1}$  соответствует очередному огрублению исходных данных путем их выборки из последовательности  $s^M$  с весовой функцией  $h$ . С увеличением числа точек количество операций растет только геометрически, и (10.39)–(10.40) может служить основой быстрого вейвлет-преобразования (БПВ, по аналогии с быстрым преобразованием Фурье — БПФ).

Очевидно, что функции  $\phi^{M+1}$  не могут быть ортогональными функциям  $\phi^M$ , так как образуемое ими пространство  $V_{M+1}$  содержится в пространстве  $V_M$ . Основная идея алгоритма БПВ состоит в построении вейвлет-базиса путем использования разности информации, содержащейся в различных масштабах. Соответствующее пространство обозначается как  $O_{M+1}$ .

$O_{M+1}$  ортогонально  $V_{M+1}$  ( $O_{M+1} \perp V_{M+1}$ ), а  $O_{M+1}$  и  $V_{M+1}$  составляют  $V_M$  ( $O_{M+1} \oplus V_{M+1} = V_M$ ). Вейвлет  $\psi^{M+1}(x - 2^{M+1}i)$  определяется как базисная функция для пространства  $O_{M+1}$ . При этом остается справедливым соотношение типа (10.36):

$$\psi^M(x) = 2^{-M/2} \psi^0(2^{-M}x), \quad (10.41)$$

предполагающее, что совокупность функций  $\psi^{M+1}$  образует ортонормальный базис в  $O_{M+1}$ . Тогда совокупность всех  $\psi^M$  ( $M = 0, 1, 2, \dots$ ) образует полный ортогональный базис для  $V_0$ .

Коэффициенты вейвлет-разложения есть

$$w_i^M = \int_{-\infty}^{\infty} f^0(x) \psi^M(x - 2^M m) dx, \quad (10.42)$$

а так как функции  $\psi^{M+1}$  относятся к пространству  $O_{M+1}$ , а  $O_{M+1} \subset V_M$ , то

$$\begin{aligned} \psi^{M+1}(x - 2^{M+1}i) &= \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{M+1}(x' - 2^{M+1}i) \phi^M(x' - 2^M j) dx' \right] \phi^M(x - 2^M j), \end{aligned}$$

что приводит к формуле

$$w_i^{M+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{j-2i} s_j^M, \quad (10.43)$$

где

$$g_k = 2^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^0(x'/2) \phi^0(x' - k) dx'. \quad (10.44)$$

Видно, что для определения коэффициентов вейвлет-представления данного масштаба требуются не исходные данные, а только результаты, полученные для предыдущего масштаба.

При восстановлении функции  $f$  процесс идет от крупных масштабов к мелким и на каждом шаге

$$s_i^M = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [h_{i-2j} s_j^{M+1} + g_{i-2j} w_j^{M+1}]. \quad (10.45)$$

Следует указать также связь между коэффициентами  $g_k$ ,  $h_k$  и дискретной формой вейвлет-функции  $\psi^M(k)$ . Так как

$$w_i^{M+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{j-2i} s_j^M = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{j-2i} h_{k-2j} s_k^{M-1} = \dots,$$

то, в конечном итоге,

$$w_i^{M+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi^M(j - 2^M i) s_j^0, \quad (10.46)$$

где

$$\psi^M(j - 2^M i) = \sum_{j^{(M-1)}} h_{j^{(M)} - 2^{j^{(M-1)}}} \sum_{j^{(M-2)}} \dots \sum_{j^{(1)}} h_{j^{(2)} - 2^{j^{(1)}}} g_{j^{(1)} - 2i}.$$

Остановимся теперь на вопросе о выборе конкретных функций  $\psi$  и  $\varphi$ . Выше для них были сформулированы следующие требования:

1. все вейвлет-функции ортонормальны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_M(x - m \cdot 2^M) \psi_N(x - n \cdot 2^N) dx = \delta_{NM} \delta_{nm}, \quad (10.47)$$

2. сглаживающие функции  $\phi^M(x - 2^M i)$  ортонормальны для заданного значения  $M$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^M(x - 2^M i) \phi^M(x - 2^M j) dx = \delta_{ij}, \quad (10.48)$$

3. вейвлет-функции ортогональны сглаживающим функциям того же масштаба:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^M(x - 2^M i) \psi^M(x - 2^M j) dx = 0. \quad (10.49)$$

Приведем примеры ортогональных вейвлетов и соответствующих им дискретных фильтров  $h_i$ ,  $g_i$ .

- а) Простейшей ортогональной системой является, как уже отмечалось, система функций Хаара. Для нее

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 0,5, \\ -1 & \text{при } 0,5 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{для прочих } x, \end{cases}$$

а сглаживающая функция  $\phi$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{для прочих } x. \end{cases}$$

Дискретные фильтры для БПВ получаются из (10.39) и (10.44) и, соответственно, равны

$$h_0 = h_1 = g_0 = 2^{-1/2}, \quad g_1 = -g_0. \quad (10.50)$$

- б) Другой предельный случай — одномерные иерархические функции (они же функции Литлвуда–Пелли), для которых доказывается полнота и ортогональность. Их же называют иногда полосовыми фильтрами и, в последнее время, фурыелетами. Так как они вырезают определенную полосу в пространстве Фурье, то удобнее и действия проводить в пространстве частот, а вместо  $h$  и  $g$  пользоваться их фурые-образами  $\hat{h}$  и  $\hat{g}$ .

$$\hat{h}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{-ijk}, \quad \hat{g}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j e^{-ijk}.$$

Для них

$$\begin{aligned} \hat{h}(k) &= \begin{cases} \sqrt{2} & \text{при } -\pi/2 \leq k \leq \pi/2, \\ 0 & \text{при прочих } k, \end{cases} \\ \hat{g}(k) &= \begin{cases} \sqrt{2}e^{ijk} & \text{при } \pi/2 \leq |k| \leq \pi, \\ 0 & \text{при прочих } k. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.51)$$

Нетрудно получить и соответствующие дискретные фильтры в физическом пространстве

$$\begin{aligned} h_j &= (\sqrt{2}/\pi j) \sin(\pi j/2), \\ g_j &= (2\sqrt{2}/\pi) \sin(\pi(j-1)/4) \cos(3\pi(j-1)/4). \end{aligned} \quad (10.52)$$

Существенная нелокальность базисных функций в физическом пространстве делает более практичной реализацию быстрого алгоритма для фурые-образа исходного сигнала.

- в) Вейвлет LMB. В фурые-пространстве

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(k) &= e^{ik/2} k^{-n} [\Gamma_{2n}(k/(2+\pi)) \Gamma_{2n}^{-1}(k) \Gamma_{2n}^{-1}(k/2)]^{1/2}, \\ \hat{\phi}(k) &= k^{-n} [\Gamma_{2n}(k)]^{-1/2}, \\ \hat{h}(k) &= [2^{1-2n} \Gamma_{2n}(k) \Gamma_{2n}^{-1}(2k)]^{1/2}, \\ \hat{g}(k) &= e^{-ik} \hat{h}(k+\pi)^*, \end{aligned} \quad (10.53)$$

где  $\Gamma_n(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (k+2\pi m)^{-n}$ .

- г) В качестве последнего примера приведем некоторые фильтры для семейства вейвлетов Добеши. Показаны таблицы значений для 4 и 8 точечных фильтров, соответствующих функциям Добеши первого и третьего порядка.

Четырехточечный фильтр Добеши:

$$\begin{aligned} h_0 &= (4 \cdot \sqrt{2})(1 + \sqrt{3}), & h_1 &= (4 \cdot \sqrt{2})^{-1}(3 + \sqrt{3}), \\ h_2 &= (4 \cdot \sqrt{2})(3 - \sqrt{3}), & h_3 &= (4 \cdot \sqrt{2})^{-1}(1 - \sqrt{3}), \\ g_0 &= h_3, & g_1 &= -h_2, & g_2 &= h_1, & g_3 &= -h_0. \end{aligned} \quad (10.54)$$

Восьмиточечный фильтр Добеши:

$$\begin{aligned} h_{-2} &= 0,230377813309, & g_{-2} &= h_5, \\ h_{-1} &= 0,714846570553, & g_{-1} &= -h_4, \\ h_0 &= 0,630880767930, & g_0 &= h_3, \\ h_1 &= -0,27983769417, & g_1 &= -h_2, \\ h_2 &= -0,187034811719, & g_2 &= h_1, \\ h_3 &= 0,30841381836, & g_3 &= -h_0, \\ h_4 &= -0,010597401785, & g_4 &= h_{-1}, \\ h_5 &= -0,010597401785, & g_5 &= -h_{-2}. \end{aligned} \quad (10.55)$$

## 10.5. Вейвлет-анализ временных колебаний гидродинамических систем

В главе 2 мы подробно рассматривали характер колебаний, возникающих в гидродинамических системах в надкритических режимах, то есть при относительно небольшом превышении характеристическим параметром (например, числом Рейли) критического значения. При этом по мере стохастизации течения спектры становятся сплошными, а признаком развитой турбулентности служит развитый инерционный интервал. Однако это не означает, что в развитых турбулентных течениях отсутствуют выделенные крупномасштабные пульсации. Экспериментальные исследования турбулентной конвекции в замкнутых объемах показывают, что течения на масштабах, сравнимых с размерами самой полости, характеризуются целыми сериями выделенных частот, причем периоды колебаний могут в тысячи раз превышать время оборота жидкости в полости [12]. Эти результаты подкрепляются и наблюдениями за природными системами. Так, Солнце, являющееся крупнейшей из доступных прямому наблюдению конвективных ячеек (именно конвекция является основной причиной движений на Солнце, и характеризуется она гигантским значением числа Рейли), демонстрирует целый набор циклов с периодами от нескольких дней до тысяч лет.

В качестве примера приложения вейвлет-анализа к исследованию временной изменчивости сложных гидродинамических систем мы рассмотрим результаты анализа солнечной активности по двум характеристикам: вариациям числа групп солнечных пятен и вариациям солнечного диаметра.

О том, что на Солнце есть пятна, знает каждый школьник. О том, что число этих пятен колеблется и достигает максимума примерно каждые 11 лет, знают почти все. Менее известен факт, что число пятен связано с интенсивностью магнитного поля Солнца. Эту связь поясняет рис. 10.7. Магнитное поле Солнца имеет полоидальную компоненту (силовые линии выходят на поверхность вблизи одного полюса и заходят вблизи другого) и более мощную азимутальную — ее силовые линии образуют замкнутые кольца внутри конвективной оболочки Солнца. Когда напряженность магнитного поля растет, то, вследствие неустойчивости, на этих магнитных линиях возникают гигантские петли, выходящие за пределы конвективной оболочки. В местах выхода магнитное поле направлено вертикально и подавляет конвективное течение, приносящее горячую плазму из недр Солнца. В результате температура оказывается ниже, чем на остальной поверхности, так что эта область видна как темное пятно. Чем сильнее магнитное поле, тем больше петель и тем больше пятен видно на поверхности Солнца.

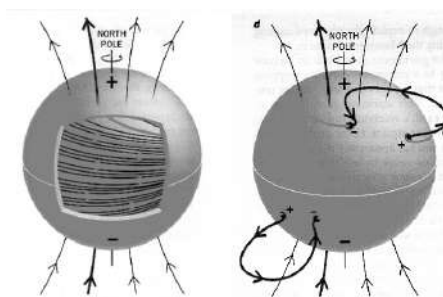


Рис. 10.7

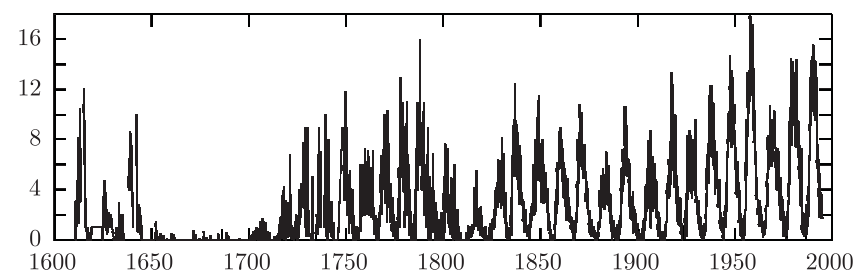


Рис. 10.8

Связь пятен с магнитными полями стала понятна не так давно, но само существование пятен на Солнце в свое время так взволновало человечество, что астрономы начали вести систематический подсчет этих пятен практически с того момента, как Галилей построил первый телескоп. Долговременная запись среднемесячных чисел солнечных пятен начинается с наблюдений Галилея в феврале 1610 года, а с октября 1611 года наблюдения становятся довольно регулярными. Имеющийся на сегодня ряд данных не имеет в астрономии аналогов по регулярности и продолжительности наблюдений.

График изменения числа солнечных пятен уже столетия привлекает внимание ученых, так как доказано, что многие процессы на Земле связаны с уровнем солнечной активности. Первое, что бросается в глаза при взгляде на график солнечной активности, — это череда пиков, каждый из которых охватывает приблизительно 11 лет (рис. 10.8). Это и есть знаменитый одиннадцатилетний солнечный цикл, характеризующий работу солнечного динамо — магнитогидродинамического генератора поля. Можно, однако, заметить, что амплитуда циклов непрерывно изменяется, а временами в ра-

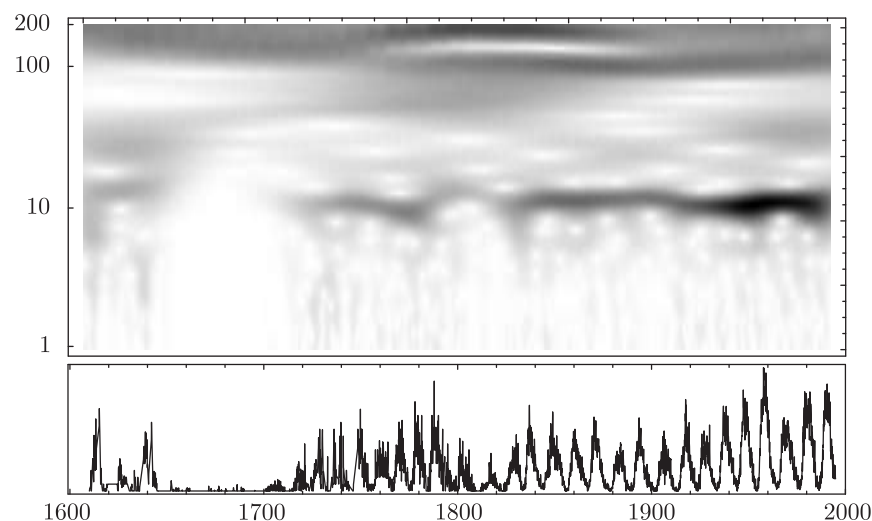


Рис. 10.9

боте динамо возникают сбои. Самый заметный сбой имел место в конце XVII — начале XVIII веков, когда в течение почти 50 лет пятен на Солнце практически не было. Этот период называют минимумом Маундера. Другое заметное ослабление солнечной активности имело место в начале XIX века и называется минимумом Дальтона.

Что нового могут дать вейвлеты в изучении записи числа солнечных пятен, если учесть, что сотни людей уже анализировали этот сигнал самыми разными методами? Для ответа на этот вопрос обратимся к результатам работ [89, 62].

Вейвлет-преобразование проектирует одномерный сигнал (который был функцией только времени) на плоскость время–частота и позволяет увидеть изменение во времени спектральных свойств сигнала. На рис. 10.9 показан модуль вейвлет-преобразования данных с рис. 10.8, полученного с помощью вейвлета Морле. На вейвлет-плоскости одиннадцатилетнему циклу соответствует темная горизонтальная полоса. При этом напомним, что идеально ровная горизонтальная полоса соответствовала бы устойчивому периодическому колебанию. Мы видим, что, кроме основного, одиннадцатилетнего колебания, в исследуемой записи присутствует еще одна — приблизительно 100-летняя периодичность. Особенно хорошо эти периодичности видны на интегральном вейвлет-спектре (кривая b на рис. 10.10).

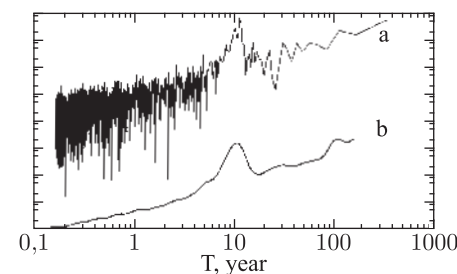


Рис. 10.10

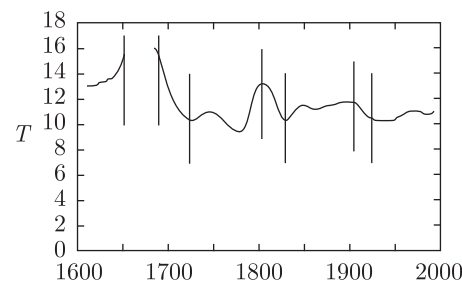


Рис. 10.11

На этом же рисунке для сравнения показан и спектр Фурье того же сигнала (кривая a), в котором одиннадцатилетний цикл выделяется на фоне сплошного частотного пика. По поводу значимости этих пиков велись споры долгие десятилетия. Сравнивая два спектра на рисунке, еще раз вспомним, что вейвлет-спектр является сглаженной версией спектра Фурье и что вейвлет-спектр не дает кратных гармоник при негармоническом характере колебаний.

Вейвлет-анализ позволяет проследить, как меняется длительность номинального 11-летнего цикла со временем, показывая, что 100-летний цикл фиксирует периодические попытки механизма генерации солнечного магнитного поля дать сбой и свернуть с обычных 11-летних колебаний в новый эпизод типа минимума Маундера. Удастся ли получить и неизвестную ранее количественную закономерность в формировании сбоев в работе солнечного динамо. На рис. 10.11 приведен график изменения длины солнечного цикла со временем. Этот график получен путем оцифровки максимума в темной полосе, соответствующей на вейвлет-плоскости 11-летнему циклу.

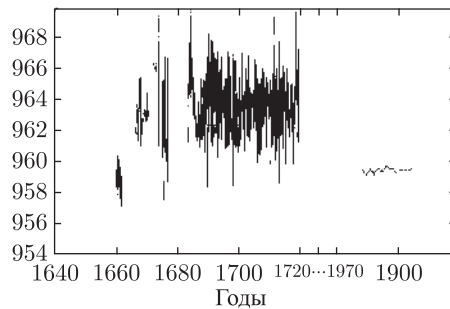


Рис. 10.12

На этом рисунке вертикальными линиями отмечены известные наблюдателям периоды снижения солнечной активности. Неожиданный результат состоит в том, что все эти периоды совпадают со спадающими участками на графике  $T(t)$ . Причем, чем выше было значение  $T$  перед началом очередного минимума, тем глубже был сам минимум. Это обстоятельство, совместно с имеющимися на сегодня значением периода солнечного цикла позволяет сделать вывод, что, хотя очередной сбой в солнечной активности и можно ожидать уже в начале нового столетия, нового минимума Маундера случиться не должно.

На примере анализа солнечной активности покажем эффективность вейвлет-анализа в фильтрации сигналов и совместной обработке сигналов. В эпоху знаменитого минимума Маундера постоянно измерялась еще одна характеристика Солнца — солнечный диаметр. Вариации видимого солнечного диаметра непрерывно регистрировались в парижской обсерватории с 1683 по 1718 годы (отдельные серии измерений проводились различными астрономами и ранее). Интерес к систематическим измерениям вариаций солнечного диаметра вновь появился только в наше время, и измерения были возобновлены, начиная с 1978 г.

Все результаты измерений собраны на рис. 10.12. Бросается в глаза существенное отличие современных данных от тех, что были выполнены четыре столетия назад. Напрашивается простое объяснение этому факту, состоящее в том, что качество измерений в то далекое время было существенно ниже, и это обусловило высокий уровень пульсаций сигнала (систематическое отличие в уровне сигнала объясняется тем, что видимый диаметр Солнца — величина субъективная и зависит от способа его определения).

Вейвлеты дают возможность изучить степень коррелированности двух сигналов отдельно на каждом временном масштабе. В сложной системе, каковой является Солнце, вполне возможно представить ситуацию, когда какие-либо два сигнала скоррелированы на одних масштабах и практически независимы на других. Определим корреляционную функцию двух сигналов в виде

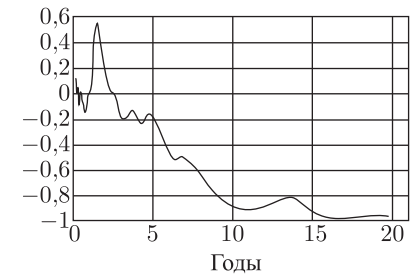


Рис. 10.13

$$C(a) = \frac{\int w_1(a, b) w_2^*(a, b) db}{\left( \int w_1^2(a, b) db \int w_2^2(a, b) db \right)^{1/2}}, \quad (10.56)$$

где  $w_1$  и  $w_2$  — вейвлет-образы рассматриваемых сигналов. На рис. 10.13 показана корреляционная функция (10.56), вычисленная для вариаций числа групп пятен и вариаций диаметра по перекрывающимся интервалам наблюдений. Видно, что на временах порядка 2 лет имеется узкий положительный пик, а на временных масштабах порядка 10 лет и более сигналы становятся строго антикоррелированными (больше пятен — меньше диаметр).

Наибольший интерес представляет частота основного (11-летнего) солнечного цикла. Выделяя из вейвлет-представления соответствующий временной масштаб, построим зависимости от времени значений коэффициентов  $w(a, b)$  для фиксированного  $a = 11$  лет. Графики отфильтрованных 11-летних вариаций диаметра и числа групп пятен для интервала времени 1666–1718 показаны на рис. 10.14. Бесспорной научной удачей можно считать тот факт, что наблюдения за изменениями солнечного диаметра начались во время минимума Маундера и продолжались во время выхода из минимума. Результаты вейвлет-фильтрации данных наблюдений, представленные на рисунке, дали совершенно неожиданный результат, состоящий в том, что 11-летние вариации солнечного диаметра имели наибольшую амплитуду как раз во время глубокого минимума солнечной активности. По мере выхода из минимума вариации числа пятен начинают нарастать, а вариации диаметра — спадать. Этот результат дает возможность объяснить разительное отличие современных данных от данных XVIII века: в сравнении с 1718 годом, когда были прекращены измерения диаметра, среднее количество групп пятен возросло примерно на порядок, а в свете полученной закономерности это должно привести к существенному снижению интенсивности вариаций диаметра — что и подтверждают современные наблюдения.

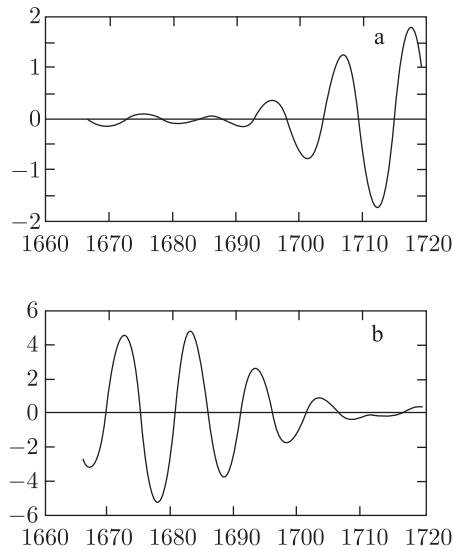


Рис. 10.14

Полученный результат заставляет пересмотреть сложившийся взгляд на природу солнечного цикла. 11-летний цикл объясняют, исходя из точки зрения, что он является свойством динамо-процессов. Следуя этой точке зрения, нужно признать, что во время остановки динамо должен исчезнуть и этот цикл. Приведенный результат заставляет думать, что природа 11-летнего цикла не связана собственно с динамо-процессом. Механизм его зарождения не ясен, но представляется, что он действует независимо от динамо, модулируя активность последнего. Когда динамо не работает, энергия этого процесса выливается в гидродинамическую моду, приводя к 11-летним вариациям формы поверхности звезды.

## 10.6. Некоторые полезные алгоритмы вейвлет-анализа

### 10.6.1. Дифференцирование экспериментальных данных

Задача о численном дифференцировании функции, известной приближенно, является классическим примером некорректно поставленной задачи, приводящей к неустойчивости решения [26]. Для обеспечения устойчивости по Тихонову точное решение заменяют приближенным, которое управ-

ляется неким параметром регуляризации и стремится к точному при отсутствии погрешности измерений. На практике регуляризация обычно сводится либо к сглаживанию исходных данных в физическом пространстве, либо к подавлению высоких частот в спектре измеренных данных. При этом оптимальная ширина сглаживающего окна или соответствующая ему полоса пропускания фильтра связывается с ожидаемым уровнем шума.

Задача регуляризации процедуры дифференцирования зашумленных данных естественным образом формулируется на языке вейвлет-представления сигналов, которое позволяет совместить преимущества работы в физическом пространстве и пространстве Фурье [24].

Пусть функция  $f(x)$  имеет первую производную  $g(x)$ , так что

$$f(x) = \int_0^x g(x) dx \quad (10.57)$$

и определена на наборе точек  $x_n$  с точностью до некоторой случайной ошибки  $\xi$  ( $\tilde{f}_n = f(x_n) + \xi$ ). Производная  $g(x)$  в простейшем случае вычисляется приближенно как

$$\tilde{g}_n = \frac{\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}}{\Delta x}, \quad (10.58)$$

где  $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ .

В условиях шума формула (10.58) может стать неустойчивой. Принимая для случайной ошибки оценку  $|\xi| \leq A$ , можно записать

$$|g_n| \leq \left| \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{\Delta x} \right| + \frac{2A}{\Delta x}. \quad (10.59)$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  первое слагаемое в правой части (10.59) стремится к  $g(x)$ , а второе может быть сколь угодно большим. Так, в частности, если функция задана на конечном интервале, то увеличение числа точек приводит к увеличению второго слагаемого в (10.59).

В физическом пространстве задачу дифференцирования можно сформулировать с использованием  $\delta$ -функции, которая задается неявно как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx' = f(x), \quad (10.60)$$

где  $f(x)$  — гладкая функция.

Известно, что  $\delta$ -функция дифференцируема. Ее первая производная, обозначаемая  $\dot{\delta}$ , обладает свойством

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \dot{\delta}(x - x') dx'. \quad (10.61)$$

Отметим, что функция  $\dot{\delta}$  нечетна и сосредоточена в бесконечно малой окрестности точки  $x = x'$ . Функцию  $\dot{\delta}$  называют иногда бесконечно малым диполем.

Для практического использования необходимо провести регуляризацию уравнения свертки (10.61). Обобщенная функция  $\dot{\delta}$  аппроксимируется регулярной нечетной функцией с нулевым средним значением, область локализации которой определяется ожидаемым уровнем шума. Простейшей аппроксимацией дублета на дискретном множестве является вычисление разности в соседних точках. Одним из практических методов оценки производной в физическом пространстве является свертка измеренного сигнала со сглаживающим окном, с последующим вычислением производной как конечной разности (10.58).

Дифференцирование в физическом пространстве сводится к умножению в *пространстве Фурье*. Фурье-образы функций  $g$  и  $f$  связаны соотношением  $\hat{g}(k) = ik\hat{f}(k)$ . Таким образом, находя Фурье-образ сигнала  $\hat{f}(k)$ , умножая его в частотном пространстве на  $ik$  и выполняя обратное преобразование Фурье, можно найти производную  $g(x)$ :

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ik \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right) e^{ikx} dk. \quad (10.62)$$

Отметим, что фильтр  $ik$  имеет импульсную характеристику  $\dot{\delta}$ , то есть

$$ik = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\delta}(x) e^{-ikx} dx. \quad (10.63)$$

Принципиальное отличие алгоритма (10.62) от прямого дифференцирования в физическом пространстве заключается в том, что при вычислении преобразования Фурье используется информация о сигнале во всех точках числовой оси, в то время как дифференцирование является по определению операцией локальной.

Алгоритм (10.62) в условиях шума является неустойчивым, так как умножение на  $ik$  приводит к неограниченному усилению высоких частот. Для обеспечения устойчивости используется фильтр низких частот (ФНЧ).

Форма фильтра может выбираться достаточно произвольно, исходя из специфики задачи.

*Вейвлет-дифференцирование*, с точки зрения локальности, занимает промежуточное положение между дифференцированием в физическом пространстве и в пространстве Фурье. Вейвлет-образ исходной функции  $f(x)$  есть

$$W_{a,b}\{f\} = \int \psi_{a,b}^* f(x) dx, \quad (10.64)$$

где, как обычно,  $\psi(x)$  — анализирующий вейвлет, а параметры  $a$  и  $b$  определяют масштаб и положение функции  $\psi_{a,b} = \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ . Записывая аналогичным образом вейвлет-образ функции  $g(x)$  и проводя дифференцирование по частям, легко получить

$$W_{a,b}\{g\} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}^*(x) g(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi_{a,b}^*(x)}{\partial x} f(x) dx. \quad (10.65)$$

Таким образом, проводя вейвлет-разложение функции  $f(x)$  по семейству  $\phi_{a,b}(x) = -\partial_x \psi_{a,b}(x)$ , и выполнив затем обратное вейвлет-преобразование с помощью вейвлет-семейства  $\psi_{a,b}(x)$ , можно получить искомую функцию  $g(x)$ :

$$g(x) = \frac{1}{C_{\phi\psi}} \int_{0+}^{\infty} a^{-3} da \int_{-\infty}^{\infty} db \psi_{a,b}(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_{a,b}^*(x) f(x) \right), \quad (10.66)$$

где  $\phi$  — анализирующий вейвлет,  $\psi$  — синтезирующий вейвлет, а

$$C_{\phi\psi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(k)| |\hat{\phi}(k)|}{|k|} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(k)|^2 dk < \infty. \quad (10.67)$$

Выбор пары функций  $\phi$  и  $\psi$  (для анализа и синтеза соответственно) из условия

$$\phi(x) = -\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \quad (10.68)$$

предполагает, что производная от  $\psi$  существует и является вейвлетом. Например, пара функций  $\phi = (1 - x^2) \exp(-x^2/2)$  и  $\psi = -x \exp(-x^2/2)$  удовлетворяет условию (10.68). В принципе, любой вейвлет, имеющий первую производную, можно использовать в качестве  $\psi$ . Выбор пары зависит от конкретной задачи.

Интегрирование по  $a$  на этапе синтеза на практике осуществляется не от нуля до бесконечности, а в конечных пределах от  $a_{\min}$  до  $a_{\max}$ . В случае высокочастотного шума выбор  $a_{\min}$  необходимо связать с ожидаемым

уровнем шума. В простейшем случае пределы интегрирования по  $a$  выбираются едиными для всего сигнала — это глобальная регуляризация, при которой  $a_{\min}$  выбирается на основании интегральных критериев и не учитывает поведение функции и особенности шума в различные моменты времени. Преимущество вычисления с помощью вейвлетов состоит в том, что легко реализовать локальную регуляризацию, адаптируя пределы интегрирования под локальные свойства вейвлет-спектра, т. е.  $a_{\min} = a_{\min}(x)$ .

Эффективность работы различных алгоритмов проиллюстрируем двумя примерами. Первый пример касается модулированного по частоте и амплитуде осциллирующего сигнала, искомая производная которого определяется формулой

$$g(x) = \sin(2\pi x(10x + 10))(1 - 0,5 \cos(6\pi x)). \quad (10.69)$$

Сигнал задан на интервале  $[0, 1]$  с шагом 0,001 и наложенным шумом 30% от среднеквадратичного значения сигнала.

В качестве второго примера взята кусочно-гладкая функция, производная которой определяется формулой

$$g(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad (10.70)$$

а случайный шум имеет амплитуду 10% от среднеквадратичного значения сигнала. На рис. 10.15–10.16 для обоих примеров показаны исходные выборки точек (наверху), и их вейвлет-образы (внизу). Отметим, что на вейвлет-плоскости второго сигнала (рис. 10.16) скачок производной не виден, а значительные погрешности на правом крае связаны с обрывом на границе (левый край чистый, так как функция на этой границе равна нулю).

По данным, представленным на верхних графиках рис. 10.15–10.16 с помощью различных алгоритмов вычислялись значения производной и сравнивались с аналитическими значениями. В качестве критерия использовалась среднеквадратичная ошибка

$$\sigma = \left( \sum_n (g_n - g(x_n))^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_n g(x_n)^2 \right)^{-1/2}, \quad (10.71)$$

где  $g(x_n)$  — значения тестового сигнала в точках  $x_n$ , а  $g_n$  — результат численного дифференцирования.

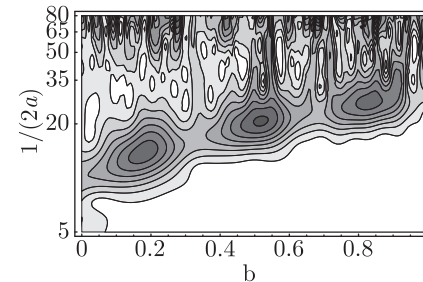
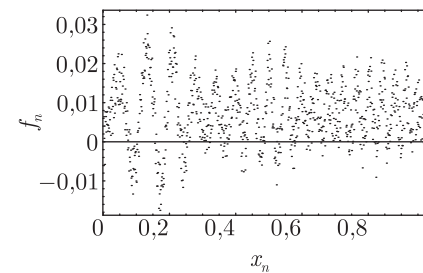


Рис. 10.15

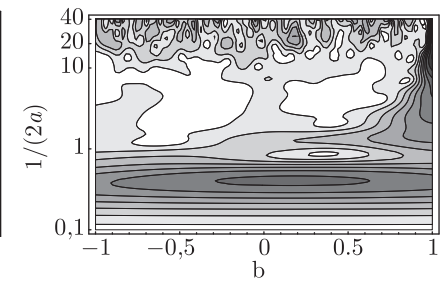
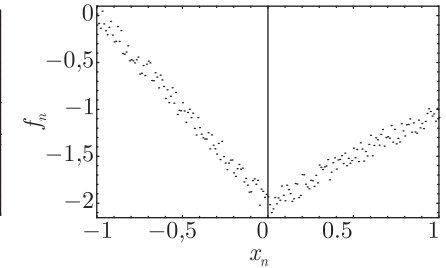


Рис. 10.16

| Метод                                  | Минимальное значение $\sigma$ |          |
|----------------------------------------|-------------------------------|----------|
|                                        | Пример 1                      | Пример 2 |
| Прямоугольное окно                     | 0,42                          | 0,31     |
| Гауссово окно                          | 0,31                          | 0,25     |
| Фурье (ФНЧ)                            | 0,16                          | 0,8      |
| Фурье гаусс                            | 0,16                          | 0,7      |
| Дифференцирующий фильтр                | 0,18                          | 0,27     |
| Диф. гаусс фильтр                      | 0,3                           | 0,32     |
| Вейвлет-регуляризация (Морле)          | 0,15                          | 0,2      |
| Вейвлет $a_{\min} = (20 * x + c)^{-1}$ | 0,12                          | —        |

Таблица 10.4

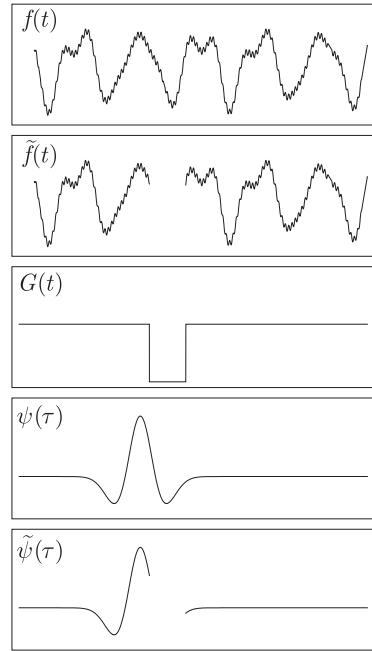


Рис. 10.17

Результаты расчетов представлены в таблице 10.4. В первой (верхней) части таблицы показаны результаты дифференцирования сглаженных данных при использовании двух типов фильтров (прямоугольного и функции Гаусса). Ниже приведены результаты четырех алгоритмов дифференцирования в Фурье пространстве с применением различных фильтров. Последние две строки представляют результаты вейвлет-дифференцирования: с фиксированной границей обрезания высоких частот и с переменной границей. Для каждого случая и каждого примера приведено минимальное значение  $\sigma$ , то есть значение, полученное при оптимальном для данного примера выборе параметров регуляризации (ширины окна, границы частот и т. д.). Можно видеть, что в обоих случаях вейвлет-регуляризация дала наименьшую ошибку.

Особый интерес вейвлет-регуляризация представляет при решении самых разных обратных задач в медицине, астро-

физике, геофизике (см. например, [93, 105]).

### 10.6.2. Анализ данных с разрывами

Рассмотрим проблемы, возникающие при спектральном анализе сигналов, известных с пробелами, когда и фурье-, и вейвлет-спектры искажаются разрывами в данных. Идея предлагаемого алгоритма возникла при исследовании данных по хромосферной активности звезд, которые по условиям наблюдения содержат неизбежные пропуски во временных рядах [60]. Математическое обоснование метода дано в [63].

Пусть имеется сигнал  $f(t)$ , который регистрируется только на некоторых интервалах времени. Иначе говоря, вместо функции  $f(t)$  нам известна функция

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot G(t), \quad (10.72)$$

где  $G(t)$  есть «функция дыр», которая равна единице, если сигнал регистрируется, и нулю во всех остальных точках (т. е. внутри пробелов и вне

сигнала). Функции  $f(t)$ ,  $\tilde{f}(t)$ ,  $G(t)$  для случая одного пробела в данных схематично показаны на рис. 10.17. В результате, при вычислении вейвлет-коэффициентов, вместо искоемых значений  $w(a, b)$  получаются коэффициенты

$$\tilde{w}(a, t) = a^\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left( \frac{t' - t}{a} \right) \tilde{f}(t') dt'. \quad (10.73)$$

Идея алгоритма, получившего название «gapped wavelets» (дырявые вейвлеты), состоит в перенесении проблемы пробелов с неизвестной функции  $f(t)$  на хорошо известную функцию  $\psi$ . Действительно, формулу (10.73) можно переписать в виде свертки исходной функции  $f(t)$  с «дырявым» вейвлетом (рис. 10.17 д)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left( \frac{t' - t}{a} \right) \tilde{f}(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^* \left( \frac{t' - t}{a} \right) f(t') dt'$$

где  $\tilde{\psi} \left( \frac{t' - t}{a} \right) = \psi \left( \frac{t' - t}{a} \right) \cdot G(t')$ .

Попадая на дыры, функция  $\tilde{\psi}$  (нижняя панель рис. 10.17) перестает удовлетворять требованиям, предъявляемым к вейвлетам, в частности, условию (7.44), т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi} \left( \frac{t' - t}{a} \right) dt' \neq 0. \quad (10.74)$$

Требуется заменить «испорченный» вейвлет  $\tilde{\psi}$  на «исправленный»  $\psi_g$ , который должен, по меньшей мере, удовлетворять условию  $\langle \psi_g \rangle = 0$  и стремиться к исходному вейвлету  $\psi$  при исчезновении пробелов. На языке фурье-представлений можно дать следующую интерпретацию предлагаемой идеи. Особенностью вейвлетов является то, что их фурье-образ локализован в ограниченной полосе частот. Нарушение условия  $\langle \psi \rangle = 0$  приводит к появлению в спектре  $|\hat{\psi}(\omega)|^2$  низких частот вплоть до  $\omega \rightarrow 0$ , а разрывы на краях дыр производят высокочастотный шум. Необходимо указать алгоритм, подавляющий как низкочастотный, так и высокочастотный шум, обусловленный дырами и краями (край можно рассматривать как полубесконечную дыру).

Для реализации этой идеи представим исходный вейвлет  $\psi$  в виде

$$\psi(t) = h(t) \cdot \Phi(t), \quad (10.75)$$

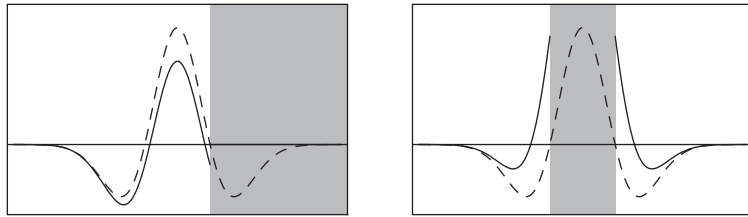


Рис. 10.18

где  $\Phi(t)$  есть положительно определенная масштабная функция («оболочка», в качестве которой обычно используется функция Гаусса  $\Phi(t) = \exp(-t^2/2)$ ), а  $h(t)$  — «заполняющая» функция (парабола для мексиканской шляпы, комплексная гармоническая функция для вейвлета Морле).

Искомый вейвлет  $\psi_g$  будем искать в виде

$$\psi_g(t) = (h(t) - C)\Phi(t)G(t). \quad (10.76)$$

Величина  $C$  определяется для каждого масштаба  $a$  и положения центра вейвлета  $t$ , исходя из условия  $\langle \psi_g \rangle = 0$  и равна

$$C(a, t) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{t' - t}{a}\right) G(t') dt' \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t' - t}{a}\right) \Phi\left(\frac{t' - t}{a}\right) G(t') dt'. \quad (10.77)$$

Характер изменения вейвлета на крае и одиночной дыре показан на рис. 10.18. В качестве анализирующего вейвлета  $\psi(t)$  взята мексиканская шляпа (показан пунктиром). Представлены случаи, когда отклонения среднего значения от нуля максимальны: в первом случае край полностью отсекает одно крыло, во втором — дыра точно закрывает весь центральный максимум (на рисунке эти области показаны серым). Можно видеть, что даже в этих ситуациях не происходит критических изменений в структуре функции. Новые функции  $\psi_g(t)$  (сплошная линия) имеют разрывы, но эти разрывы совпадают с границами дыр и не вносят при интегрировании дополнительного шума.

Пример вычисления вейвлет спектра модельного сигнала с пробелами показан на рис. 10.19. В верхней части показан анализируемый сигнал, а в нижней — его вейвлет спектр, вычисленный стандартным вейвлет-алгоритмом (тонкая линия) и с помощью «дырявых» вейвлетов (толстая линия). Спектр исходного сигнала должен содержать два пика, положение которых помечено стрелками. Можно видеть, что при применении стандартной методики появляется ложный пик, связанный с периодичностью пробелов,

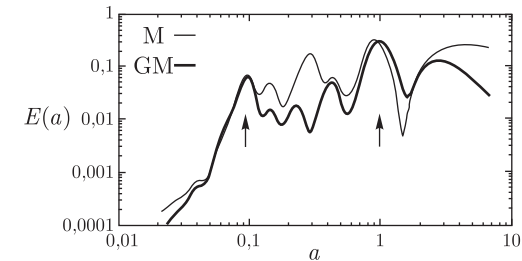
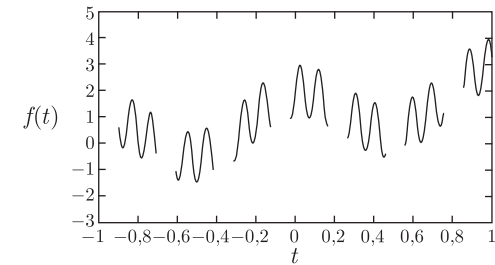


Рис. 10.19

а также значительный низкочастотный шум. В скорректированном спектре не только существенно подавлен ложный максимум, но и положения основных максимумов значительно точнее соответствуют исходным частотам в сигнале.

Нужно отметить, что алгоритм требует значительно больших вычислительных ресурсов, так как включает пересчет вейвлет-функции в каждой точке, но при анализе сигналов с многочисленными пробелами, либо коротких сигналов, для которых критическим может стать влияние краевых эффектов, эти затраты оправданы.

### 10.6.3. Двойной вейвлет-анализ

Вейвлет-анализ может быть полезен не только для изучения глобальных и локальных спектральных свойств, но и для выявления более тонких характеристик периодических или квазипериодических сигналов. Метод, описанный в этом параграфе, был предложен в контексте задач по анализу вариаций звездной активности [67, 37] и получил название двойного вейвлет-анализа (Double Wavelet Analysis, или сокращенно, DWA). На рис. 10.20 показаны для примера данные наблюдения хромосферной ак-

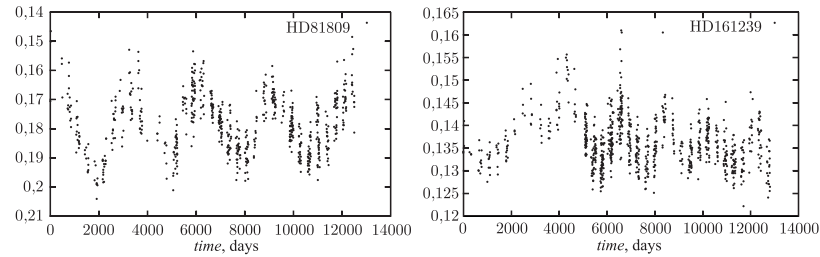


Рис. 10.20

тивности двух звезд солнечного типа с хорошо выраженной цикличностью. Они хорошо иллюстрируют проблемы наблюдательных данных такого типа — ряды относительно коротки (включают только несколько периодов основного цикла), изобилуют пробелами (наблюдения сезонные), характеризуются высоким уровнем шума (при этом не ясно, связан ли шум с характером излучения звезды, со свойствами межзвездной среды или условиями наблюдения).

Сначала рассмотрим семейство периодических функций

$$f_n = [\sin(2\pi\nu t)]^{2n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Все функции имеют одинаковый период, но по мере роста параметра  $n$  превращаются в серию все более узких всплесков. При этом у функции появляется два характерных масштаба, один из которых связан с основным периодом, а второй — с шириной пиков.

В качестве анализирующего вейвлета используем вейвлет Морле, заданный в виде

$$\psi(t) = e^{-t^2/2\sigma^2} e^{2\pi i t}, \quad (10.78)$$

с регулируемым параметром  $\sigma$ , который определяет спектральное (пространственное) разрешение. Малые значения величины  $\sigma$  дают хорошее разрешение по времени (малое число осцилляций), в то время как большие значения  $\sigma$  улучшают разрешение по частоте. Предел  $\sigma \rightarrow \infty$  соответствует преобразованию Фурье. При значениях  $\sigma < 1$  следует проявлять осторожность, так как перестает выполняться условие допустимости (равенство нулю среднего значения функции  $\psi$ ) для действительной части вейвлета (мнимая часть нечетна и автоматически удовлетворяет этому условию). Проблему можно решить, если использовать описанный в предыдущем параграфе алгоритм, позволяющий корректировать среднее значение вейвлета.

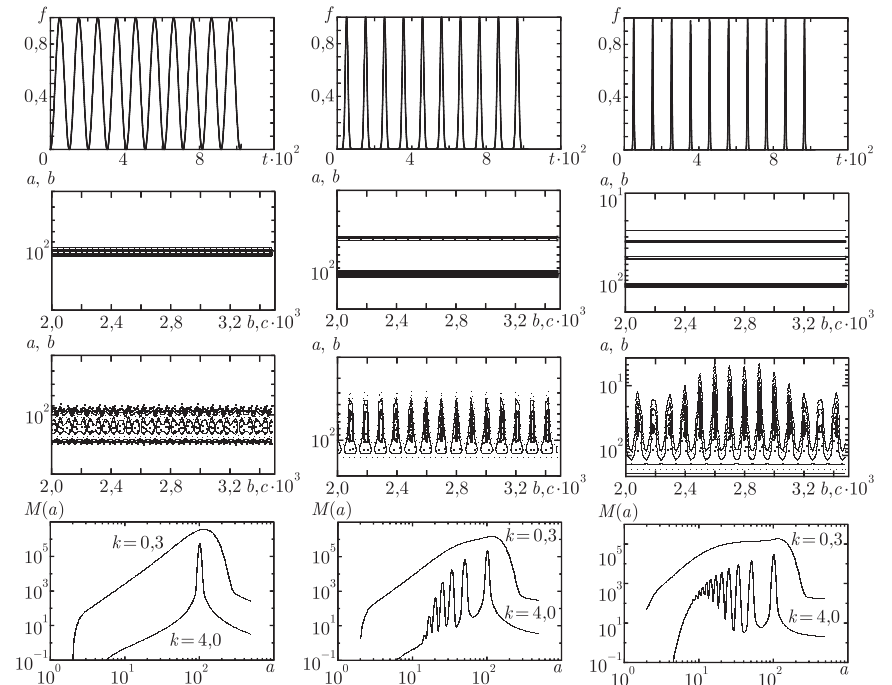


Рис. 10.21

На рис. 10.21 показаны функции  $f_n$  (верхняя строка) и их вейвлет-образы (модуль вейвлет-коэффициентов) для  $\sigma = 4$  (вторая строка) и  $\sigma = 0,3$  (третья строка). В четвертой строке показаны глобальные вейвлет-спектры  $M(a)$  для обоих значений  $\sigma$ . Показаны случаи для  $n = 1$  (левый столбец),  $n = 10$  (центр) и  $n = 100$  (правый столбец).

При большом значении параметра  $\sigma$  (высокое спектральное разрешение) хорошо видна основная частота и кратные гармоники, которых тем больше, чем больше  $n$ . При  $\sigma = 0,3$  вейвлет (10.78) имеет вид одиночного всплеска и разрешает каждое колебание, след от которого на вейвлет плоскости тянется к высоким частотам (малым масштабам), причем максимум энергии уходит с ростом  $n$  все дальше от основной частоты. Последнее обстоятельство позволяет ввести меру отклонения сигнала от гармонического, определяемую по степени удаления максимума от основной частоты.

Алгоритм состоит в следующем. Сначала проводится вейвлет преобразование анализируемой периодической (квазипериодической) функ-

ции  $f(t)$ , причем используется вейвлет Морле с хорошим спектральным разрешением ( $\sigma > 1$ ), чтобы с хорошей точностью найти период основного колебания  $P_c$  по максимуму в вейвлет-спектре  $M_0(a)$ .

Далее выполняется первый шаг двойного преобразования — вновь вычисляются вейвлет-коэффициенты, но с малым  $\sigma$ , обеспечивающим хорошее временное разрешение

$$w_1(a, b) = a^{-1/2} \int f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (10.79)$$

Второй шаг (повторное вейвлет преобразование) призван выявить на каком временном масштабе лучше всего проявляется основная частота. Для этого проводится вейвлет-анализ поля  $w_1(b)$  для каждого значения  $a$ , причем вычисления выполняются только для одного фиксированного масштаба  $P_c$ :

$$w_2(a, b) = a^{-1/2} \int |w_1(a, t)| \psi\left(\frac{t-b}{P_c}\right) dt. \quad (10.80)$$

На этом этапе вновь требуется хорошее спектральное разрешение и  $\sigma > 1$ . И, наконец, вычисляется DWA спектр:

$$M_2(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |w_2(a, b)|^2 db. \quad (10.81)$$

Чем уже отдельные всплески в сигнале, тем дальше пик в спектре  $M_2$  уходит от положения основного пика в исходном вейвлет-спектре  $M_0$ . В качестве параметра негармоничности вводят величину

$$A = P_c/a^*, \quad (10.82)$$

где  $P_c$  есть период основного цикла, вычисленный на первом шаге, а  $a^*$  — временной масштаб (период), на который приходится максимум энергии в спектре  $M_2$ . Для гармонического сигнала  $A = 1$ , чем параметр  $A$  больше, тем сильнее временной ряд напоминает пульсирующий сигнал. Для модельной функции  $f_n$  параметр  $A = 1,6$  при  $n = 10$  и  $A = 3,9$  при  $n = 200$ .

Для данных, представленных на рис. 10.20 вейвлет спектры  $M_0$  (тонкая линия) и  $M_2$  (толстая линия) показаны на рис. 10.22 (с произвольным сдвигом по вертикали). В обоих случаях в спектрах  $M_0$  хорошо виден максимум, соответствующий основному звездному циклу (2900 и 1900 дней,

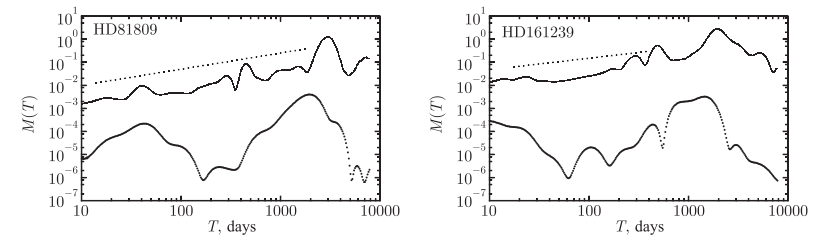


Рис. 10.22

соответственно). В средней части спектра виден всплеск вблизи 365 дней — это результат сезонности наблюдений. В высокочастотной части спектра у звезды HD81809 (левая панель) виден небольшой максимум на периоде 40 дней — это период обращения звезды (колебания интенсивности излучения обусловлены неравномерным распределением активных областей по поверхности звезды).

Подчеркнем две особенности спектров  $M_2$ . Во-первых, у обеих звезд наблюдается выраженный сдвиг главного максимума. Параметр негармоничности для них дает значения  $A = 1,5$  и  $A = 1,3$  (для различных звезд значения  $A$  составляют от 1,0 до 5 [37]). Во-вторых, обращает на себя внимание тот факт, что при повторном вейвлет-преобразовании в спектрах абсолютно доминируют два пика — основной (это ожидаемый результат) и тот, что соответствует периоду вращения звезды.

Таким образом, метод двойного вейвлет-анализа позволяет идентифицировать слабый высокочастотный периодический сигнал при условии наличия выраженной низкочастотной составляющей. Предложенный метод измерения периода вращения звезды можно сравнить с настройкой радиоприемника по качеству звука — вращая ручку настройки радиоприемника (соответствует перебору частот в спектре  $M_2$ ) мы ищем частоту, на которой громкость полезного сигнала низкой частоты (цикличность звездной активности) максимальна. Если мы нашли максимум, то считаем, что определили и частоту передающей радиостанции (период вращения звезды).

Заметим, что в некоторых случаях этот метод позволил выделить период вращения даже при отсутствии его следа в спектре исходного сигнала [67]. Для HD161239 (правая панель) двойной вейвлет анализ дал значение периода вращения 7 дней, в то время как в различных источниках период вращения этой звезды определялся либо 10, либо 23 дня (выраженного пика, связанного с периодом вращения, в спектре  $M_0$  нет).

## 10.7. Спектральный и корреляционный анализ двумерных полей

### 10.7.1. Двумерное вейвлет-преобразование

Вейвлет-образ двумерной функции определим как

$$W(a, \mathbf{x}) = \frac{1}{a^\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}') \psi^* \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{a} \right) d\mathbf{x}', \quad (10.83)$$

где  $\mathbf{x} = (x, y)$ , а  $f(\mathbf{x})$  есть двумерная функция, для которой существует преобразование Фурье

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (10.84)$$

$\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  есть двумерный волновой вектор. Вейвлет коэффициенты связаны с обратным преобразованием Фурье как

$$W(a, \mathbf{x}) = \frac{a^{2-\kappa}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{k}) \hat{\psi}^*(a\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (10.85)$$

Определение (10.83) справедливо для *изотропных* вейвлетов. Использование *анизотропных* функций приводит к появлению дополнительного параметра, отвечающего за ориентацию вейвлета. Анизотропное вейвлет-преобразование может быть полезным в задачах, связанных с выделением ориентированных структур различного масштаба. Мы ограничимся только рассмотрением изотропных (осесимметричных) функций  $\psi = \psi(\rho)$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Выбор анализирующего вейвлета зависит от целей анализа. Для локализации структур в пространстве требуются функции с хорошим пространственным разрешением  $\Delta x$ , а при построении спектральных характеристик предпочтительными становятся функции с выраженной локализацией в пространстве Фурье  $\Delta k$ . Напомним, что эти величины связаны соотношением неопределенности  $\Delta x \Delta k \geq 2\pi$ .

В рассматриваемых ниже примерах будут использованы два вида действительных функций. Это двумерный вариант мексиканской шляпы (МН — *Mexican Hat*)

$$\psi(\rho) = (2 - \rho^2) e^{-\rho^2/2} \quad (10.86)$$

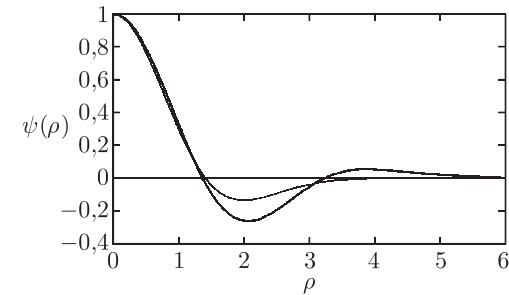


Рис. 10.23

(заметим, что в двумерном случае изменилась константа, определяющая значение функции в начале координат), и функция, введенная при построении иерархической модели двумерной турбулентности [34] (см. главу 7), которая определяется в пространстве Фурье,

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \log_2 \frac{k}{2\pi} \right), & \pi < |\mathbf{k}| < 4\pi, \\ 0, & |\mathbf{k}| < \pi, |\mathbf{k}| > 4\pi. \end{cases} \quad (10.87)$$

Эта функция является хорошим компромиссом, обеспечивая относительно хорошее разрешение по обе стороны от преобразования Фурье, и будет обозначаться как РН (от английского *Pet Hat* — любимая шляпа). Вид обеих функций в физическом пространстве показан на рис. 10.23.

Преобразование (10.83) единственно и обратимо, то есть функция  $f(x, y)$  может быть восстановлена по имеющемуся вейвлет-образу

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} W(a, \mathbf{x}') \psi \left( \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{a} \right) \frac{da}{a^{5-\kappa}} d\mathbf{x}', \quad (10.88)$$

где

$$C_\psi = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k}. \quad (10.89)$$

### 10.7.2. Спектры и структурные функции

Широко использовавшийся при обсуждении свойств турбулентных полей энергетический спектр (спектральная плотность энергии)  $E(k)$  включает энергию всех фурье-гармоник с заданным модулем волнового векто-

ра  $|\mathbf{k}| = k$  и связан в рассматриваемом плоском случае с *двумерным* спектром  $F(\mathbf{k}) = |\hat{f}(\mathbf{k})|^2$ ,

$$E(k) = \int_{|\mathbf{k}|=k} F(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (10.90)$$

Двумерный спектр связан с автокорреляционной функцией

$$C(l) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) f(\mathbf{l} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (10.91)$$

преобразованием Фурье (теорема Хинчина)

$$F(\mathbf{k}) = \hat{C}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(l) e^{-i\mathbf{k}l} dl. \quad (10.92)$$

Вектор  $\mathbf{l}$  определяет сдвиг изображения в свертке (10.91) и является характеристикой масштаба. Если анализируемое поле изотропно, то есть корреляционная функция зависит только от расстояния между точками  $C(l) = C(l)$ , а спектр — только от модуля волнового вектора  $F(\mathbf{k}) = F(k)$ , то соотношение (10.92) сводится к преобразованию Ганкеля

$$F(k) = 2\pi \int_0^{\infty} C(l) J_0(kl) l dl, \quad (10.93)$$

где  $J_0$  есть функция Бесселя. Тогда  $E(k) = 2\pi k F(k)$ .

Столь же часто для характеристики турбулентных полей используют структурные функции различного порядка

$$S_q(l) = \langle (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{l}))^q \rangle_{|\mathbf{l}|=l}, \quad (10.94)$$

где угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  подразумевают осреднение по пространству. При этом спектральной плотности соответствует структурная функция второго порядка  $S_2$ .

В вейвлет-представлении распределение энергии пульсаций по масштабам характеризуется интегральным *вейвлет-спектром*, определяемым как средняя энергия всех вейвлет-коэффициентов данного масштаба  $a$  на всей плоскости

$$M(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(a, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (10.95)$$

Вейвлет-спектр (10.95) можно легко выразить с помощью (10.85) через спектр Фурье

$$M(a) = \frac{a^{4-2\kappa}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 |\hat{\psi}(a\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}. \quad (10.96)$$

Это соотношение показывает, что вейвлет-спектр есть сглаженная версия спектра Фурье. В изотропном случае связь упрощается:

$$M(a) = \frac{a^{4-2\kappa}}{2\pi} \int_0^{\infty} E(k) |\hat{\psi}(ak)|^2 dk. \quad (10.97)$$

При обсуждении свойств мелкомасштабной турбулентности постоянно рассматривались инерционные интервалы, в которых структурные функции и спектры подчиняются степенным законам. Остановимся на связи между показателями степени у различных характеристик. Пусть структурная функция второго порядка следует закону

$$S_2(l) \sim l^\lambda. \quad (10.98)$$

Тогда  $F(k) \sim k^{-\lambda-2}$ , а спектральная плотность энергии

$$E(k) \sim k^{-(\lambda+1)}. \quad (10.99)$$

Поведение вейвлет-спектра зависит от параметра  $\kappa$  в определении (10.83). Используя  $\kappa = 2$ , получают для спектра  $M(a)$  тот же степенной закон, что и для структурной функции

$$M(a) \sim a^\lambda; \quad (10.100)$$

при выборе  $\kappa = 3/2$  получают  $M(a) \sim a^{\lambda+1}$ , что удобно, если вейвлет-спектр предполагается сравнивать со спектром Фурье  $E(k)$ . Заметим, что параметр масштаба  $a$  имеет тот же смысл (и размерность), что и расстояние  $l$  в корреляционной функции (10.91) и структурной функции (10.94).

Следует сделать важное замечание относительно использования вейвлетов для выделения степенных законов в спектрах. Любой вейвлет имеет собственный спектральный образ, хвосты которого сами по себе могут следовать степенной зависимости. Следовательно, скорость затухания этих хвостов и определяет предельную скорость убывания спектра, которая может быть обнаружена данным вейвлетом.

Другое важное замечание касается вычислений структурных функций. Вычисление  $S_2$ , в соответствии с формулой (10.94), можно интерпретировать как вычисление вейвлет-спектра (10.95) с помощью специфического (анизотропного) вейвлета, образованного разностью двух дельта-функций, отстоящих друг от друга на единичное расстояние

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \delta(\mathbf{x}) - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{e}), \quad (10.101)$$

где  $\mathbf{e}$  — единичный вектор. Это «очень плохой» вейвлет в том смысле, что, имея прекрасную локализацию в физическом пространстве, он неизбежно имеет очень плохое спектральное разрешение. Это означает, что структурные функции дают очень плохое разрешение по масштабам и могут использоваться только тогда, когда есть уверенность в гладком поведении спектральной плотности. Иначе говоря, если имеется поле, спектр которого представляет собой совокупность нескольких пиков, структурные функции могут превратить эти пики в гладко спадающую зависимость.

### 10.7.3. Вейвлет кросскорреляции

При анализе турбулентных процессов часто встает вопрос о степени корреляции различных полей (например, магнитного поля и поля скорости, давления и температуры и т. д.). Обсудим возможность анализа степени корреляции двумерных полей с помощью их вейвлет-представления.

Пусть имеется две двумерные функции,  $f_1(\mathbf{x}, y)$  и  $f_2(\mathbf{x}, y)$ , определяемые в одной области пространства. Простейшей характеристикой связанности этих двух полей служит коэффициент корреляции, определяемый как

$$r_p = \frac{\sum (f_{1i} - \langle f_1 \rangle) (f_{2i} - \langle f_2 \rangle)}{((f_{1i} - \langle f_1 \rangle)^2 (f_{2i} - \langle f_2 \rangle)^2)^{1/2}}. \quad (10.102)$$

Назовем эту характеристику *поточечной корреляцией*. Точность оценки (10.102) определяется количеством независимых точек  $n$ , использованных при вычислении, и уровнем корреляции [57]

$$\Delta r = \sqrt{(1 - r^2)/(n - 2)}. \quad (10.103)$$

Такая поточечная корреляция является интегральной характеристикой, содержащей в себе все масштабы, присутствующие в рассматриваемых полях. Можно привести множество примеров, когда рассматриваемые поля включают структуры различных масштабов и одни масштабы могут определяться общими механизмами и быть строго коррелированы, в то время как другие могут быть совершенно независимы.

Введем по аналогии с одномерным случаем (10.56) корреляционную функцию

$$r_w(a) = \frac{\iint W_1(a, \mathbf{x}) W_2^*(a, \mathbf{x}) d\mathbf{x}}{(M_1(a) M_2(a))^{1/2}}. \quad (10.104)$$

Для оценки погрешности  $\Delta r_w(a)$  будем использовать формулу (10.103), принимая  $n = (L/a)^2$ , где  $L$  есть размер рассматриваемой области.

Связь поточечного коэффициента корреляции  $r_p$  и вейвлет-корреляции  $r_w$  получается с использованием (10.85), (10.95), (10.104) и в случае  $\kappa = 2$  имеет вид

$$r_p = \frac{\int r_w(a) (M_1(a) M_2(a))^{1/2} a^{-1} da}{(\int M_1(a) a^{-1} da \int M_2(a) a^{-1} da)^{1/2}}. \quad (10.105)$$

Приведем также связь между введенной вейвлет-корреляцией и кросс-корреляционной функцией, определяемой как

$$h(\mathbf{l}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{l} - \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (10.106)$$

Формулы (10.85), (10.92), (10.96) и (10.104) дают следующее соотношение:

$$r_w(a) = \frac{\iint \hat{h}(\mathbf{k}) |\hat{\psi}(a\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}}{(\iint \hat{C}_1(\mathbf{k}) |\hat{\psi}(a\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \iint \hat{C}_2(\mathbf{k}) |\hat{\psi}(a\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k})^{1/2}}, \quad (10.107)$$

которое в пределе вейвлетов с хорошим спектральным разрешением для изотропного случая может быть приведено к виду

$$r_w(a) = \frac{\hat{h}(2\pi/a)}{(\hat{C}_1(2\pi/a) \hat{C}_2(2\pi/a))^{1/2}}. \quad (10.108)$$

В формулах (10.107)–(10.108)  $\hat{C}_i(k)$  есть фурье-образ соответствующей автокорреляционной функции (10.91).

Следует подчеркнуть, что все приведенные соотношения между вейвлет-коэффициентами, спектрами, корреляционными функциями являются точными, только если пределы интегрирования выходят за рамки масштабов, присутствующих в исследуемых полях. С практической точки зрения,

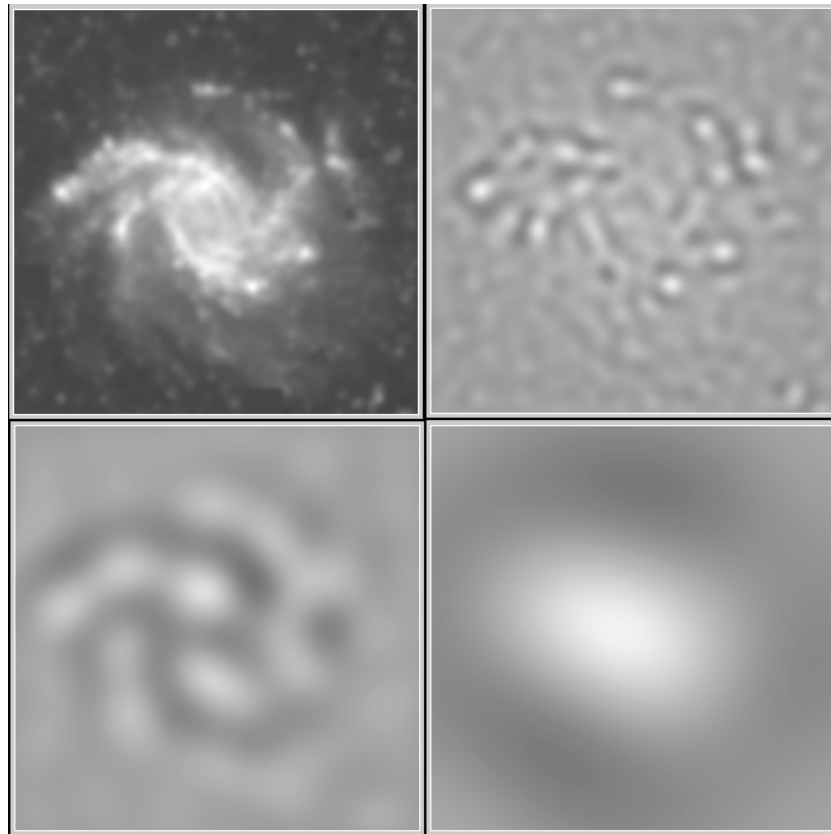


Рис. 10.24

вычисление с помощью вейвлетов имеет сильное преимущество, состоящее в том, что сначала происходит разделение масштабов, и дальнейшие вычисления можно производить только для масштабов, допускающих корректные расчеты. Корректное вычисление преобразования Фурье  $\hat{h}(2\pi/a)$ , напротив, подразумевает знание кросскорреляционной функции (10.106) во всем диапазоне масштабов (то же самое касается и вычислений автокорреляционной функции и определения через нее спектральной плотности).

Для иллюстрации свойств обсуждаемых методов анализа приведем два примера из работы [61], посвященной анализу мелкомасштабной структуры внешних галактик. Поводом для этой работы послужили попытки опреде-

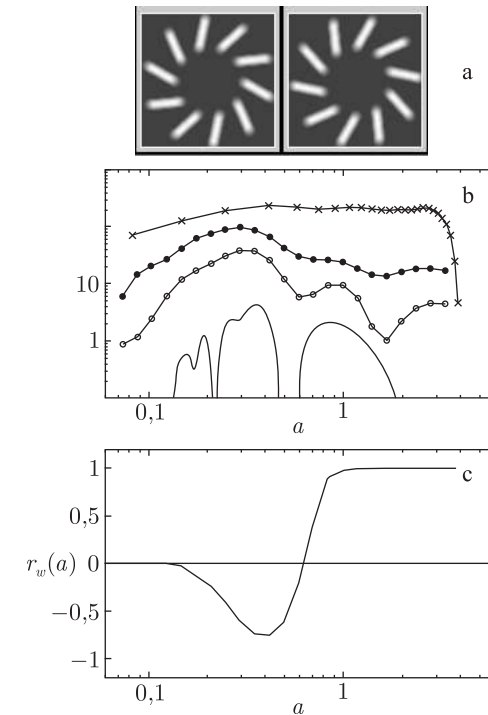


Рис. 10.25

ления скейлинговых характеристик галактических полей с помощью структурных функций, которые дали степенные зависимости на масштабах, сравнимых с размерами самой галактики. В [61] анализируются данные наблюдения галактики NGC 6946, изображение которой в оптическом диапазоне приведено на рис. 10.24. Размер всего изображения составляет  $11' \times 11'$  (в качестве единицы измерения используется угловая минута, линейный размер изображения равен приблизительно 30 килопарсек). Разрешение телескопа позволяет анализировать масштабы  $a \geq 0,1'$ . На этом же рисунке с целью демонстрации возможностей вейвлет-фильтрации изображения показаны и вычисленные с помощью вейвлета РН коэффициенты разложения  $W(a, x)$  для трех значений масштаба  $a$ :  $0,5'$ ,  $1,4'$  и  $4'$ .

Прежде чем обсуждать результаты анализа изображения галактики, покажем простой тестовый пример, приведенный на рис. 10.25. Рассматриваются два простых изображения, одно из которых получается из другого

путем поворота на угол  $\pi/10$  (лучи на втором рисунке находятся как раз посередине между лучами первого рисунка). Спектральные свойства этих двух изображений идентичны и показаны на рис. 10.25 b. Верхняя кривая (с крестиками) дает значения структурной функции  $S_2$  (10.94). Кривая практически горизонтальна в большом интервале масштабов и резко спадает только на масштабах, сравнимых с размерами всего изображения. Две следующие кривые показывают вейвлет-спектры, полученные с помощью функций МН (черные точки) и РН (кружки), а нижняя кривая воспроизводит фурье-спектр этого же изображения. Можно ясно видеть изменение спектрального разрешения. Если спектр Фурье состоит из трех отдельных частей (первая соответствует ширине отдельного луча, вторая — расстоянию между лучами, третья — длине лучей, то есть ширине кольца, образованного лучами), то вейвлет-спектры плавно огибают эти области (при этом разрешение РН остается существенно выше), а структурная функция теряет всю информацию о выделенных масштабах. Заметим, что кривые сдвинуты по вертикали для наглядности, а спектр Фурье приведен к масштабу  $a$  ( $a = 2\pi/k$ ).

Рис. 10.25 с показывает вейвлет-корреляцию этих двух изображений. Вычисление поточечной корреляции дает значение  $r_p = -0,01$ , что является прямым следствием того факта, что элементы двух рисунков не перекрывают друг друга. В то же время очевидно, что рисунки «в целом» прекрасно коррелированы, так как воспроизводят одинаковый объект, повернутый на разные углы. Ситуацию проясняет вейвлет-корреляция  $r_w(a)$ , которая равна нулю в области малых масштабов, дает существенные отрицательные значения на масштабах порядка расстояния между лучами ( $r_w \simeq -0,75$ ) и стремится к единице на больших масштабах. Это означает, что малые масштабы не перекрывают друг друга, средние находятся в противофазе, а на масштабах всего рисунка детальное положение лучей уже не важно, и рисунки идентичны.

На рис. 10.26 показаны спектральные характеристики изображения галактики NGC 6946 (структурная функция, два вейвлет-спектра и спектр Фурье). Можно видеть, что гладкая форма графика структурной функции (верхняя кривая) действительно теряет всякую информацию о доминирующих масштабах (в данном случае это масштабы порядка  $0,5-1'$ , соответствующие ширине рукавов). Оптимальным кажется вейвлет-спектр, полученный с помощью функции РН (вторая кривая снизу), который свободен от многочисленных деталей, присущих спектру Фурье, но четко идентифицирует максимум в спектре энергии.

В цитируемой работе [61] анализировались изображения галактики NGC 6946, полученные в девяти различных диапазонах радио- и оптически-

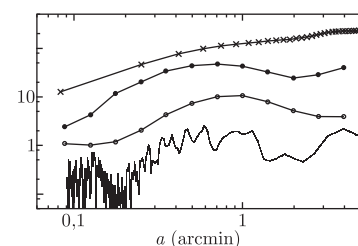


Рис. 10.26

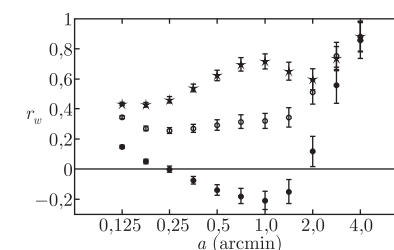


Рис. 10.27

го излучения. Большой интерес представляет связь между различными видами излучений. На рис. 10.27 показана вейвлет-корреляция, вычисленная для трех пар изображений: водород-поляризованное радиоизлучение (черные точки), водород-тепловое излучение (звездочки), водород-нетепловое излучение (кружки). Можно видеть, насколько отличаются эти три зависимости. Нижняя кривая дает существенные отрицательные значения на масштабах порядка ширины галактических рукавов, показывая, что поляризованное радиоизлучение, которое является индикатором наличия магнитных полей, сильнее вне газовых рукавов. На рисунке показаны и погрешности определения величины  $r_w$ . Увеличение погрешности на больших масштабах происходит в силу сокращения количества независимых точек, используемых при вычислении коэффициента корреляции.

### Рекомендуемая литература к десятой главе

- [10.1] Bracewell R. The Fourier transform and its applications. N. Y.: McGraw-Hill, 1965. 382 p.
- [10.2] Daubechies I. Ten lectures on wavelet. SIAM, Philadelphia, 1992. (Имеется перевод: Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.)
- [10.3] Chui Ch. An introduction to wavelets. Acad. Press, 1992. (Имеется перевод: Чуи К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001.)
- [10.4] Holschneider M. Wavelets: An Analysis Tool. Oxford University Press, 1995.
- [10.5] Блаттер К. Вейвлет-анализ: основы теории. М.: Техносфера, 2004. 280 с.

## Литература

- [1] Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 182 с.
- [2] Гледзер Е. Б. Система динамического типа, допускающая два квадратичных интеграла движения // Доклады АН СССР. 1973. Т. 209. № 5. С. 1046–1048.
- [3] Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 368 с.
- [4] Гледзер Е. Б., Макаров А. Л. О построении каскадной модели двумерной турбулентности // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 9. № 7. С. 899–906.
- [5] Голицин Г. С. Флуктуации магнитного поля и плотности тока в турбулентном потоке слабо проводящей жидкости // Доклады АН СССР. 1960. Т. 132. № 2. С. 315–318.
- [6] Денисов С. А., Носков В. И., Степанов Р. А., Фрик П. Г. Измерения эффективной проводимости турбулентной проводящей жидкости // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88. № 3. С. 198–202.
- [7] Деснянский В. Н., Новиков Е. А. Моделирование каскадных процессов в турбулентных течениях // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38. № 3. С. 507–513.
- [8] Зельдович Я. Б. Магнитное поле в проводящей турбулентности при двумерном движении // Доклады АН СССР. 1956. Т. 31. № 1. С. 154–155.
- [9] Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитные поля в астрофизике. М-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. 384 с.
- [10] Зимин В. Д. Иерархическая модель турбулентности // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17. № 12. С. 1265–1273.
- [11] Зимин В. Д., Кетов А. И. Надкритические конвективные движения в кубической полости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 5. С. 110–114.
- [12] Зимин В. Д., Фрик П. Г. Турбулентная конвекция. М.: Наука, 1988. 178 с.
- [13] Ирошников Р. С. О турбулентности проводящей жидкости в сильном магнитном поле // Астрономический журнал. 1963. Т. 40. С. 742–750.
- [14] Колесников Ю. Б., Цинобер А. Б. Экспериментальное исследование двумерной турбулентности за решеткой // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 4. С. 146–150.
- [15] Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады АН СССР. 1941. Т. 30. С. 9–13.
- [16] Колмогоров А. Н. К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости // Доклады АН СССР. 1941. Т. 31. С. 538–540.
- [17] Колмогоров А. Н. Рассеяние энергии при локально-изотропной турбулентности // Доклады АН СССР. 1941. Т. 32. С. 16–18.
- [18] Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир, 1984. 320 с.
- [19] Ложкин С. А., Фрик П. Г. Инерционный интервал Обухова–Болджано в каскадных моделях конвективной турбулентности // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 6. С. 37–46.
- [20] Мизева И., Степанов Р. А., Фрик П. Г. Влияние перекрестной спиральности на каскадные процессы в МГД турбулентности // Доклады АН. 2009. Т. 424. № 4. С. 479–483.
- [21] Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 340 с.
- [22] Новиков Е. А., Стьюарт Р. В. Перемежаемость турбулентности и спектр диссипации энергии // Известия АН СССР. Серия геофизическая. 1964. № 3. С. 408–413.
- [23] Обухов А. М. О влиянии архимедовых сил на структуру температурного поля в турбулентном потоке // Доклады АН СССР. 1959. Т. 125. № 6. С. 1246–1248.

- [24] Патрикеев И. А., Степанов Р. А., Фрик П. Г. Вейвлет-регуляризация операции дифференцирования сигнала с шумом // Вычислительные методы и программирование. 2005. Т. 6. № 1. С. 39–46.
- [25] Степанов Р. А., Фрик П. Г., Шестаков А. В. О спектральных свойствах спиральной турбулентности // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 5. С. 33–43.
- [26] Тихонов А., Арсенин В. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
- [27] Фрик П. Г. Иерархическая модель двумерной турбулентности // Магнитная гидродинамика. 1983. № 1. С. 60–66.
- [28] Фрик П. Г. Моделирование каскадных процессов в двумерной турбулентной конвекции // Журнал прикладной механики и технической физики. 1986. № 2. С. 71–79.
- [29] Фрик П. Г. Турбулентность: модели и подходы: курс лекций / Перм. гос. техн. ун-т. Ч. 1. Пермь, 1998. 108 с.
- [30] Фрик П. Г. Турбулентность: модели и подходы: курс лекций / Перм. гос. техн. ун-т. Ч. 2. Пермь, 1999. 136 с.
- [31] Соколов Д. Д., Фрик П. Г. Модель многомасштабного динамо // Астрономический журнал. 2003. Т. 80. № 6. С. 96–101.
- [32] Чхетиани О. Г. О третьих моментах в спиральной турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 63. № 10. С. 768–772.
- [33] Яглом А. М. Закономерности мелкомасштабной турбулентности в атмосфере и океане // Известия АН СССР. Физика Атмосферы и Океана. 1981. Т. 17. № 12. С. 1235–1257.
- [34] Aurell E., Frick P., Shaidurov V. Hierarshical tree-model of two-dimensional turbulence // Physica D. 1994. V. 72. P. 95–109.
- [35] Babiano A., Frick P., Dubrulle B. Scaling properties of numerical two-dimensional turbulence // Physical Review E. 1995. V. 52. N. 4. P. 3719–3729.
- [36] Babiano A., Basdevant C., Legras B., Sadourny R. Vorticity and passive-scalar dynamics in two-dimensional turbulence // J. Fluid Mechanics. 1987. V. 183. P. 379–397.

- [37] Baliunas S., Frick P., Moss D., Popova E., Sokoloff D., Soon W. Anharmonicity of stellar cycles: a wavelet quantification // Solar Physics. 2004. V. 224. N. 1/2. P. 179–185.
- [38] Batchelor G. K. On the spontaneous magnetic in a conducting liquid in turbulent motion // Proc. Roy. Soc. London A. 1950. V. 201. P. 405–416.
- [39] Batchelor G. K. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence // Phys. Fluids Suppl. II. 1969. V. 12. N. 12. P. 233–239.
- [40] Belcher J. W., Davis L. Large-amplitude Alfvén waves in the interplanetary medium // J. Geophys. Res. 1971. V. 76. P. 3534–3545.
- [41] Benzi R., Biferale L., Kerr R. M., Trovatore E. Helical shell models for three-dimensional turbulence // Physical Review E. 1996. V. 53. N. 4. P. 3541–3549.
- [42] Benzi R., Ciliberto S., Tripiccone R., Baudet C., Massaioli F., Succi S. Extended self-similarity in turbulent flows // Physical Review E. 1993. V. 48. P. R29–R32.
- [43] Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems // J. Phys. A. 1984. V. 17. P. 3521–3531.
- [44] Bolgiano R. Turbulent spectra in a stably stratified atmosphere // J. Geophys. Res. 1959. V. 46. N. 12. P. 2226–2229.
- [45] Bradshaw P., Dean R. B., McEligot D. M. Calculation of interacting turbulent shear layers-duct flow // J. Fluids Eng., Trans. ASME. 1973. V. 95. P. 214–220.
- [46] Brissaud A., Frisch U., Leorat J., Lesieur M., Mazure A. Helicity cascade in fully developed turbulence // Phys. Fluids. 1973. V. 16. P. 1366–1367.
- [47] Bullard E. C., The stability of a homopolar dynamo // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1955. V. 51. P. 744.
- [48] Chen Q., Chen S., Eyink G. The joint cascade of energy and helicity in three-dimensional turbulence // Physics of Fluids. 2003. V. 15. N. 2. P. 361–374.
- [49] Chilla F., Ciliberto S., Innocenti C., Pampaloni E. // Nuovo Cimento D. 1993. V. 15. P. 1229.

- [50] Cioni S., Ciliberto S., Sommeria J. Temperature structure function in turbulent convection at low Prandtl number // *Europhys. Letters*. 1995. V. 32. P. 413–418.
- [51] Couder Y. Two-dimensional grid turbulence in a thin liquid film // *J. Phys. Lett.* 1984. V. 45. N. 8. P. 353–360.
- [52] Cowling T.G. Magnetic fields of sunspots // *Mon. Notices Roy. Astron. Soc.* 1934. V. 94. P. 39–48.
- [53] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets // *Comm. Pure Appl. Math.* V. 41. N. 7. P. 909–996.
- [54] Ditlevsen P.D., Giuliani P. Cascades in helical turbulence // *Physical Review E*. 2001. V. 63. 036304.
- [55] Dobrowolny M., Mangeney A., Veltri P. Fully developed anisotropic hydromagnetic turbulence in interplanetary space // *Physical Review Letters*. 1980. V. 45. P. 144–147.
- [56] Dubrulle B. Intermittency in fully developed turbulence: log-Poisson statistics and generalized scale covariance // *Physical Review Letters*. 1994. V. 73. P. 959–962.
- [57] Edwards A. L. Multiple Regression and Analysis of Variance and Covariance. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1979.
- [58] Feigenbaum M. J. The universal properties of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1979. V. 21. P. 669.
- [59] Frick P., Babiano A., Dubrulle B. Scaling properties of a class of shell models // *Physical Review E*. 1995. V. 51. P. 5582–5593.
- [60] Frick P., Baliunas S., Galyagin D., Sokoloff D., Soon W. Wavelet analysis of stellar chromospheric activity variations // *Astrophysical Journal*. 1997. V. 483. P. 426–434.
- [61] Frick P., Beck R., Berkhuijsen E., Patrikeyev I. Scaling and correlation analysis of galactic images // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2001. V. 327. N. 4. P. 1145–1157.
- [62] Frick P., Galyagin D., et al. Wavelet analysis of solar activity recorded by sunspot groups // *Astronomy and Astrophysics*. 1997. V. 328. P. 670–681.
- [63] Frick P., Grossmann A., Tchamichian Ph. Wavelet analysis of signals with gaps // *Journal of Mathematical Physics*. 1998. V. 39. N. 8. P. 4091–4107.

- [64] Frick P., Reshetnyak M., Sokoloff D. Combined grid-shell approach for convection in a rotating spherical layer // *EuroPhys. Letters*. 2002. V. 59. N. 2. P. 212–217.
- [65] Frick P., Sokoloff D. Cascade and dynamo action in a shell model of turbulence // *Physical Review E*. 1998. V. 57. N. 4. P. 4155–4164.
- [66] Frick P., Sokoloff D., Stepanov R. Large-small scales interactions and quenching in  $\alpha^2$ -dynamo // *Physical Review E*. 2006. V. 74. 066310.
- [67] Frick P., Soon W., Popova E., Baliunas S. Time-spectra of chromospheric activity of old solar-type stars: detection of rotational signals from Double Wavelet Analysis // *New Astronomy*. 2004. V. 9. P. 599–609.
- [68] Frisch U., Sulem P.-L., Nelkin M. A simple dynamic model of intermittent fully developed turbulence // *J. Fluid Mechanics*. 1978. V. 87. P. 719–736.
- [69] Frisch U. Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 296 p.
- [70] Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // *SIAM J. Math. Analysis*. 1984. V. 15. N. 4. P. 723–736.
- [71] Jullien M.-C., Castiglione P., Tabeling P. Intermittency of a passive tracer in the inverse energy cascade // *Phys. Rev. E*. 2001. V. 64. 035301(R).
- [72] Karman T. von, Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence // *Proc. Royal Soc. London*. 1938. V. A164. P. 192–215.
- [73] Rogachevskii I., Kleeorin N. Electromotive force and large-scale magnetic dynamo in a turbulent flow with a mean shear // *Physical Review E*. 2003. V. 68. 036301.
- [74] Kolmogorov A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at High Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. P. 82–85.
- [75] Koschmieder E. L. // *Adv. Chem. Phys.* 1974. V. 26. P. 177–212.
- [76] Kraichnan R. Inertial range spectrum of hydromagnetic turbulence // *Phys. Fluids*. 1965. V. 8. P. 1385.
- [77] Kraichnan R. H. Inertial range transfer in two- and three-dimensional turbulence // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 47. N. 3. P. 525–535.

- [78] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130–141.
- [79] L'vov V., Podivilov E., Pomyalov A., Procaccia I., Vandembroucq D. Improved shell model of turbulence // Physical Review E. 1998. V. 58. N. 2. P. 1811–1822.
- [80] Mallat S. G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. Int. 1989. V. 11. P. 674–702.
- [81] Malraison B. et al. // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1983. C297. P. 209.
- [82] Melander M. Helicity caused chaos in a shell model of turbulence // Physical Review Letters. 1997. V. 78. N. 8. P. 1456–1459.
- [83] Meyer Y. Ondlettes et operateures. Paris: Hermann, 1990. 215 p.
- [84] Moffat H. K. The degree of knottedness of tangled vortex lines // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. P. 117–129.
- [85] Moreau J. J. Constantes d'un ilot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope // C. R. Acad. Sci. Paris. 1961. V. 252. P. 2810–2912.
- [86] Müller W.-C., Biskamp D. Scaling Properties of Three-Dimensional Magnetohydrodynamic Turbulence // Physical Review Letters. 2000. V. 84. N. 3. P. 475–478.
- [87] Müller W.-C., Grappin R. Spectral Energy Dynamics in Magnetohydrodynamic Turbulence // Physical Review Letters. 2005. V. 95. N. 11. P. 114502.
- [88] Nee V., Kovasznay L. Simple phenomenological theory of turbulent shear flow // Phys. Fluids. 1969. V. 12. P. 473–484.
- [89] Nemes-Ribes E., Frick P. et al. Wavelet analysis of Maunder minimum as recorded in Solar diameter data // Comptes Rendues Acad. Sciences Paris. Serie IIB. 1995. V. 321. P. 525–532.
- [90] Paret J., Jullien M.-C., Tabeling P. Vorticity statistics in the two-dimensional enstrophy cascade // Phys. Rev. Letters. 1999. V. 83. N. 17. P. 3418–3421.
- [91] Parisi G., Frisch U. On the singularity structure of fully developed turbulence // Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics

- eds. M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi, North-Holland, Amsterdam, 1985. P. 84–87.
- [92] Parker E. N. Hydromagnetic dynamo models // Astrophys. J. 1955. V. 122. P. 293–314.
- [93] Patrikeyev I., Frick, Lymphocyte nucleus reconstruction via wavelet tomography // J. Biomedical Optics. 1999. V. 4. N. 3. P. 376–380.
- [94] Rädler K.-H., Rheinhardt M. Mean-field electrodynamics: critical analysis of various analytical approaches to the mean electromotive force // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. 2007. V. 101. N. 2. P. 117–154.
- [95] Rädler K.-H., Stepanov R. Mean electromotive force due to turbulence of a conducting fluid in the presence of mean flow // Physical Review E. 2006. V. 73. 056311.
- [96] Reighard A. B., Brown M. R. Turbulent Conductivity Measurements in a Spherical Liquid Sodium Flow // Physical Review Letters. 2001. V. 86. P. 2794–2797.
- [97] Rikitake T. Oscillations of a sistem of disk dynamios // Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958. V. 54. P. 89–105.
- [98] Rüdiger G., Kichatinov L. Do mean-field dynamos in nonrotating turbulent shear-flows exist? // Astronomische Nachrichten, 2006. V. 327. P. 298–303.
- [99] Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Commun. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167–188.
- [100] Saltzman B. Finite amplitude free convection as an initial value problem // J. Atmos. Sci. 1962. V. 19. P. 329–341.
- [101] She Z. S., Leveque E. Universal scaling laws in fully developed turbulence // Physical Review Letters. 1994. V. 72. P. 336–339.
- [102] Sommeria J. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box // J. Fluid Mechanics. 1986. V. 170. P. 139–168.
- [103] Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations // Monthly Weather Review, 1963. V. 91. P. 99–164.
- [104] Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H. Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter,

- durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung // Z. Naturforsch. 1966. V. 21a. P. 369–376.
- [105] Stepanov R., Frick P., Shukurov A., Sokoloff D., Wavelet-tomography of the Galactic magnetic field I: the method // Astronomy and Astrophysics. 2002. V. 391. P. 361–368.
- [106] Stepanov R., Volk R., Noskov V., Denisov S., Frick P., Pinton J.-F. Induction, helicity and alpha effect in a toroidal screw flow of liquid gallium // Physical Review E. 2006. V. 73. 046310.
- [107] Takens F. Detecting strange attractions in turbulence // Lecture Notes in Math. 1981. V. 898. P. 366–381.
- [108] Wu X. Z., Kadanoff L., Libchaber A., Sano M. Frequency power spectrum of temperature fluctuation in free convection // Physical Review Letters. 1990. V. 64. P. 2140–2143.
- [109] Yamada M., Okhitani K. // J. Physical Society of Japan. 1987. V. 56. P. 4210–4219.
- [110] Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D. Magnetic fields and astrophysics. N. Y.: Gordon and Breach, 1983.
- [111] Zimin V., Hussain F. Wavelet base model for small scale turbulence // Physics of Fluids. 1995. V. 7. P. 2925–2927.

*Петр Готлобович Фрик*

## ТУРБУЛЕНТНОСТЬ: ПОДХОДЫ И МОДЕЛИ

*Дизайнер ? . ? . ?*

*Технический редактор ? . ? . ?*

*Компьютерный набор и верстка ? . ? . ?*

*Корректор В. А. Чукарева*

---

Подписано в печать 02.03.2010. Формат  $60 \times 84^{1/16}$ .

Печать офсетная. Усл. печ. л. ???, Уч. изд. л. ???.

Гарнитура Times. Бумага офсетная № 1.

Тираж ??? экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

http://shop.red.ru E-mail: mail@red.ru Тел./факс: (+73412) 500–295

---

*Уважаемые читатели!*

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать через наш Интернет-магазин <http://shop.rcd.ru> или по электронной почте [subscribe@rcd.ru](mailto:subscribe@rcd.ru)

**Книги можно приобрести в наших представительствах:**

**МОСКВА**

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН  
ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел.: (499) 135–54–37

**ИЖЕВСК**

Удмуртский государственный университет  
ул. Университетская, д. 1, корп. 4, 2 эт., к. 211, тел./факс: (3412) 500–295

**Также книги можно приобрести:**

**МОСКВА**

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
ГЗ (1 эт.), Физический ф-т (1 эт.), Гуманитарный ф-т (0 и 1 эт.),  
Биологический ф-т (1 эт.).

Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина  
ГЗ (3–4 эт.), книжные киоски фирмы «Аргумент».

**Магазины:**

**МОСКВА:**

«Дом научно-технической книги»  
Ленинский пр., 40, тел.: 137-06-33

«Московский дом книги»  
ул. Новый Арбат, 8, тел.: 290-45-07

**ДОЛГОПРУДНЫЙ:**

Книжный магазин «Физматкнига»  
новый корп. МФТИ, 1 эт., тел.: 409-93-28

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ:**

«Санкт-Петербургский дом книги»  
Невский проспект, 28

Издательство СПбГУ, Магазин №1  
Университетская набережная, 7/9