

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Институт механики сплошных сред

В. Д. ЗИМИН П. Г. ФРИК

ТУРБУЛЕНТНАЯ КОНВЕКЦИЯ

Ответственный редактор
член-корреспондент АН СССР
А. А. ПОЗДЕЕВ



МОСКВА "НАУКА"
1988

Турбулентная конвекция. // В.Д. Зимин, П.Г. Фрик. — М.: Наука, 1988. — 173 с. — ISBN 5-02-006614-1.

В книге изложены результаты исследований развитой турбулентной конвекции и области перехода от ламинарной конвекции к турбулентной. Большое внимание уделено крупномасштабным когерентным структурам, прослеживаемым от порога возникновения стохастических колебаний до установления развитой турбулентности. Отдельно рассмотрены применяемые в исследованиях конвекции оптические методы. Подробно изложен развиваемый авторами подход к исследованию турбулентности, основанный на применении функционального базиса, описывающего иерархию вихрей и термиков прогрессивно уменьшающегося размера.

Для специалистов по гидродинамике и теплофизике.

Ил. 91. Табл. 14. Библиогр. 283 назв.

Рецензенты:

В.И. Полежаев, М.И. Шлиомис

ПРЕДИСЛОВИЕ

Конвекцией называют пространственный перенос каких-либо свойств сплошной среды при ее движении. Типичными примерами переноса свойств, описываемых скалярными полями, являются конвекция тепла и конвективный перенос примесей. При движении электропроводных сред можно говорить о конвективном переносе векторной величины — индукции магнитного поля. Если изменения, вызванные конвективным переносом, не оказывают обратного влияния на поле скорости, то такой процесс называют вынужденной конвекцией. При турбулентном движении чаще говорят о конвекции пассивной примеси независимо от природы скалярной или векторной величины, переносимой потоком. Существуют и прямо противоположные ситуации, когда пространственная неоднородность свойств среды является единственной причиной движения. В этих случаях само движение называют конвективным, подчеркивая взаимосвязь между причиной движения и его результатом.

Конвективное движение, возникающее при наличии пространственной неоднородности плотности жидкости или газа, находящихся в поле сил тяжести, называют свободной конвекцией. Если изменения плотности происходят только за счет изменения температуры, то конвекцию называют термogrавитационной.

В электропроводных жидкостях с неравномерным распределением плотности электрического тока могут возникать вихревые силы, генерирующие движение жидкости. Конвективный перенос приводит к перераспределению токов. В результате поле скорости и магнитное поле токов оказываются взаимно обусловленными. Как и при свободной конвекции, неоднородность свойств является здесь единственной причиной движения.

Процессы конвективного переноса, представляющие практический интерес, происходят, как правило, в условиях турбулентного движения среды. Существующие в настоящее время модели и методы расчета турбулентных течений создавались обычно на основе экспериментальных данных о потоках, в которых турбулентность генерируется за счет пространственной неоднородности самого поля скорости. При турбулентной конвекции появляются новые механизмы генерации турбулентности, учет которых требует существенной модификации ее моделей.

Наиболее эффективным методом исследования турбулентной конвекции остается физическое моделирование. Лабораторная модель выполняет роль аналоговой вычислительной машины, по своим возможностям значительно превосходящей современные ЭВМ. Если удастся корректно смоделировать изучаемое явление на установке лабораторного масштаба, то главной трудностью становится вывод информации о реализуемых в модели гидродинамических полях. Большое число локальных датчиков, загромождающая по-

ток, искажает его. Известные методы визуализации полей скорости трудно поддаются автоматизации. В этом направлении большими потенциальными возможностями обладают оптические методы измерения гидродинамических полей.

Внушительных успехов достигли численные методы исследования гидродинамических явлений. В настоящее время им становится доступно моделирование развитой двумерной турбулентности. Создаются методы решения трехмерных задач. Однако достижения численных методов, как и значительный прогресс в создании полуэмпирических моделей, не снижают роли экспериментальных данных, служащих к тому же пробным камнем для всех теоретических моделей. Получение комплекса данных для специально выбранных тестовых задач является одной из основных целей экспериментальных исследований турбулентной конвекции на лабораторных моделях.

Эксперименты по турбулентной конвекции дают ценный материал для понимания физических процессов в атмосферах планет и в конвективных оболочках звезд. Громадные различия в масштабах этих явлений и невозможность их корректного моделирования по важнейшим безразмерным параметрам вызывают вполне оправданную осторожность при сопоставлении результатов наблюдений и количественного анализа крупномасштабных природных процессов с результатами, полученными на установках лабораторного масштаба. Несмотря на это, в ряде случаев удается показать асимптотический характер обнаруженных в лабораторных экспериментах закономерностей, что позволяет путем экстраполяции прогнозировать свойства крупномасштабных турбулентных потоков.

В теоретических исследованиях свободной конвекции различают внутренние и внешние задачи [127]. В первом случае граничные условия для температуры и скорости ставятся на поверхности области, занятой жидкостью, во втором — на бесконечности. Хотя в эксперименте жидкость или газ всегда занимает ограниченный объем, такое разделение задач сохраняет смысл, так как в некоторых случаях состояние среды вдали от границ теплообмена можно считать заданным. В большинстве же случаев локальные условия конвективного теплообмена и общая структура потока, определяемая граничными условиями, взаимосвязаны.

Разделение задач на внутренние и внешние позволяет систематизировать экспериментальные данные, существенно сузив круг первоочередных задач исследования. Например, при турбулентной конвекции в замкнутых полостях разной геометрии и с различными условиями теплообмена на границах структуру пограничных слоев у поверхностей теплообмена можно изучать локально, используя в качестве определяющих параметров угол наклона поверхности к вертикали, перепад температуры на границах слоя, среднюю скорость потока на внешней границе и другие локальные характеристики. Специфика же задачи в целом будет определяться структурой крупномасштабных пульсаций, существенно зависящих от формы полости и условий теплообмена. Основываясь на общих положениях теории турбулентного движения, следует ожидать, что мелкомасштабная структура турбулентной конвекции вдали от поверхностей теплообмена будет подчиняться универсальным закономерностям. Все это определяет стратегию экспериментального исследования турбулентной конвекции, не сводящуюся к простому перебору форм полостей и условий теплообмена на границах.

Несмотря на особую роль, которую играют крупномасштабные пульсации температуры и скорости, исследования их пространственно-временной структуры проводятся только частично. В лучшем случае измеряются распределения интенсивности пульсации в объеме и пространственные или пространственно-временные корреляционные функции для некоторых выделенных пар точек. По-видимому, это связано с общепринятым мнением, что единственный рациональный путь для получения пространственных, а тем более пространственно-временных спектров турбулентности состоит в применении преобразования Фурье к пространственным или соответственно к пространственно-временным корреляционным функциям. Экспериментальное же определение двухточечных корреляций на пространственно-временной сетке, достаточно подробной для вычисления преобразования Фурье, практически невозможно.

В предлагаемой монографии описаны интегральные оптические методы, позволяющие выполнять пространственно-временной анализ крупномасштабных структур. Приведены примеры их использования в конвективном эксперименте. Основное внимание уделено пространственно-временной структуре крупномасштабных пульсаций. Эволюция пространственно-временных спектров прослежена вплоть до установления режима развитой турбулентности, характеризующегося появлением инерционного интервала в пространственных спектрах.

Мелкомасштабная структура турбулентной конвекции исследуется с помощью иерархической модели турбулентности, построенной на основе смешанного спектрально-координатного представления гидродинамических полей. Модель не содержит эмпирических констант. В отличие от описанных ранее феноменологических уравнений каскадных процессов передачи энергии по спектру уравнения иерархической модели содержат дополнительные члены, описывающие нелокальные взаимодействия в пространстве волновых векторов.

Материал книги базируется в основном на экспериментальных и теоретических исследованиях турбулентной конвекции, выполненных с участием авторов в Институте механики сплошных сред УНЦ АН СССР и в Пермском университете.

Глава 1

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ

1.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

В задачу экспериментального исследования конвективного движения жидкости входят в первую очередь измерения полей температуры и скорости. Эти измерения можно разделить на три основных класса: локальные, полевые и интегральные. В первом случае температура и скорость определяются в течение малого промежутка времени Δt для малого объема жидкости $\Delta\Omega$. Как правило, фиксируется некоторая точка пространства $\mathbf{r}_0 \in \Delta\Omega$ и регистрируется зависимость скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)$ и температуры $T(\mathbf{r}_0, t)$ от времени. Локальные измерения выполняются с помощью датчиков, преобразующих измеряемые величины в электрические или оптические сигналы. Для определения полей $\mathbf{v}$ и T с помощью локальных датчиков необходимо сканирование исследуемого объема. Если поля стационарны, то сканирование может выполняться в течение длительного времени и потому не вызывает технических затруднений. Сканирование нестационарных, и в том числе турбулентных, полей в лучшем случае удастся выполнить только вдоль некоторых линий.

В полевых методах измерения выполняются одновременно для всех точек некоторого объема жидкости. Ясно, что полевые измерения могут быть только бесконтактными. Действительно, число датчиков, необходимых для обеспечения даже минимального пространственного разрешения исследуемых полей, оказывается очень большим. Датчики и отводящие провода, загромождая поток, вносят в него существенные возмущения [226].

Типичным примером полевых методов являются теневые и интерферометрические измерения распределений плотности в двумерных потоках жидкости или газа [1, 2, 21, 43, 94, 97, 126, 144, 173]. Мгновенное распределение плотности регистрируется в этом случае на одном снимке. Распространенным полевым методом измерения скорости является фотографирование светорассеивающих частиц.

Этот метод позволяет регистрировать поле скоростей в плоскости, высвечиваемой "световым ножом".

В интегральных методах измеряются величины, которые являются функционалами от $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и $T(\mathbf{r}, t)$. К типичным примерам таких величин можно отнести полный тепловой поток через некоторую поверхность, результирующую силу, действующую на обтекаемое потоком тело, среднюю температуру объема жидкости.

С увеличением числа измеряемых в опыте интегральных величин конвективное движение описывается ими с возрастающей подробностью. Если эти величины образуют непрерывное множество, зависящее от того же чис-

ла переменных, что и исследуемое поле, то можно поставить задачу о восстановлении поля по его интегральным характеристикам.

Такая постановка задачи возникает в интегральных оптических методах, к которым относятся теневые [21, 144, 175], интерференционные [163, 173], голографические [7, 43, 126] и поляризационно-оптические методы [1, 2], основанные на сквозном просвечивании исследуемой области зондирующими световыми волнами. Они применимы для исследования полей температуры и концентрации примеси в жидкостях [62, 63, 72], полей плотности при движении газа [162, 163], когда проявляется его сжимаемость, полей градиента скорости в специальных суспензиях, мало влияющих на реологические свойства жидкостей [20].

В интегральных оптических методах исследуемая область просвечивается обычно плоскими световыми волнами. На выходе измеряются искажения волновых фронтов и изменения состояний поляризации. При исследовании объектов лабораторного масштаба, как правило, справедливо параксиальное приближение геометрической оптики, когда траектории лучей можно считать прямыми линиями, а фазу волны — пропорциональной интегралам от показателя преломления вдоль пути лучей. Для восстановления пространственного распределения показателя преломления по результатам просвечивания необходимо решить соответствующую задачу интегральной геометрии [27]. Постановка обратных задач геометрической оптики неоднородных сред определяется условиями эксперимента.

Перейдем к более подробной характеристике каждого класса экспериментальных методов исследований турбулентной конвекции. Локальные измерения температуры при естественной конвекции выполняются с помощью миниатюрных термопар и термометров сопротивления. Основными характеристиками локальных датчиков являются пространственно-временное разрешение и чувствительность. Термометры сопротивления могут обеспечить пространственное разрешение порядка 10^{-2} см, временное разрешение 10^{-4} с. Чувствительность достигает 10^{-2} °С.

Для определения локальных значений скорости при естественной конвекции используются термоанемометры, лазерные доплеровские измерители скорости, а также измерения длины треков на фотографиях движения светорассеивающих частиц. Термоанемометры применяются в основном для измерения скоростей движения газа. Высокая теплопроводность жидкостей является существенным препятствием для использования термоанемометров при исследовании конвекции, так как теплоотдача датчика определяется главным образом разностью температур, а не скоростью движения среды. Тем не менее их применение в жидкостях возможно.

Лазерные доплеровские измерители скорости (ЛДИС) весьма перспективны для экспериментальной гидродинамики. Их основные достоинства заключаются в бесконтактности, значительном пространственно-временном разрешении и высокой чувствительности. Широкое распространение ЛДИС сдерживается отсутствием универсальных промышленных приборов, построенных на этом принципе.

Внедрение в гидродинамический эксперимент вычислительной техники дало возможность регистрировать длительные реализации сигналов локальных датчиков с записью их на магнитные носители (диски, ленты), что позволяет избежать многократного воспроизведения опыта. Имея длинную

реализацию сигнала датчика, записанную с возможно большим временным разрешением, можно применять различные алгоритмы обработки данных, возвращаясь к ним необходимое число раз. Данные, полученные с одного локального датчика, позволяют вычислить плотность вероятности значений измеряемой величины, ее статистические моменты и временной энергетический спектр [115, 116].

После доказательства принципиальной возможности построения конечномерного фазового пространства системы по одной измеряемой величине $x(t)$ путем введения фазовых координат $y_i = x(t + \tau_i)$, где τ_i — некоторые постоянные сдвиги по времени [262], был следан ряд попыток восстановления размерности аттракторов гидродинамических систем по данным одного датчика [10, 105, 203, 252, 262, 263]. Однако имеющиеся на сегодняшний день данные заставляют думать, что процедура остается корректной только для систем с небольшим числом возбужденных степеней свободы (т.е. с небольшой размерностью фазового пространства, $d < 7$) [105].

Используя два локальных датчика, можно определить двухточечную плотность вероятности измеряемой величины, ее статистические моменты, а также пространственный и пространственно-временной энергетические спектры. При измерении пространственно-временных корреляционных функций стационарного процесса один из датчиков в случае однородной турбулентности и оба в случае неоднородной турбулентности последовательно перемещаются в различные точки пространства и в каждой позиции определяется статистический момент $\langle f(r_1, t) f(r_2, t + \tau) \rangle$ как функция τ . Для получения надежной оценки среднего значения необходимо время, в несколько раз превышающее характерное время процесса. В связи с этим для измерений может требоваться такое значительное время, что они становятся практически невыполнимыми, особенно в случае неоднородной турбулентности.

Единственный рациональный путь получения пространственных и пространственно-временных спектров по результатам локальных измерений состоит в вычислении фурье-образов корреляционных функций [18]. Поэтому трудности, возникающие при измерении корреляционных функций, автоматически переносятся и даже возрастают при попытке определения спектров.

В газодинамике при исследовании вынужденного конвективного теплообмена пространственные спектры находят, используя гипотезу Тейлора [116]. Таким путем удается получить только одномерные пространственные спектры. В естественной конвекции нет выделенного направления движения и преобладающей компоненты скорости, поэтому единственный способ получения пространственного спектра с помощью локального датчика состоит в применении быстрого сканирования [280]. При этом держатель зонда вносит существенные возмущения в исследуемое течение.

На этом пути можно существенно продвинуться, используя бесконтактные методы, подобные ЛДИС, но примеры такого рода исследований авторам неизвестны. Полевые методы, подобные фотографированию светорассеивающих частиц, также имеют весьма ограниченные возможности при измерении многоточечных корреляций и фурье-спектров. Следует отметить, что при исследовании турбулентных течений теневые и интерферометри-

ческие методы частично утрачивают признак полевых методов, сохраняя его только при измерении двумерных осредненных полей [65, 71]. Мгновенные поля температуры и скорости при турбулентной конвекции существенно трехмерны.

В настоящее время в исследованиях турбулентности делаются первые шаги в изучении динамики конкретных реализаций процесса. Большинство измерений включают процедуру пространственно-временного осреднения либо аппаратными методами, либо на стадии числовой обработки данных и, по существу, являются интегральными. В связи с этим многопараметрические интегральные методы, и в частности оптические, естественным образом вписываются в современные задачи исследования турбулентности.

Оптические методы возникли вначале как полевые методы исследования двумерных оптических неоднородностей. Затем были созданы методы расчета осесимметричных течений. В последующие десятилетия основной прогресс в развитии теневых и интерференционных методов состоял в совершенствовании аппаратуры, создании дифракционной теории теневых приборов [21] и теории распространения света в случайно-неоднородной среде [103, 155].

Первые попытки восстановления трехмерных фазовых объектов по результатам интегральных оптических измерений были предприняты в работе [4]. Позже был разработан метод восстановления трехмерных полей для специального случая обтекания осесимметричных тел под углом атаки [8].

Новый этап в развитии этого направления наступил после установления связи между проблемой восстановления пространственных распределений показателя преломления и задачами интегральной геометрии [27].

Такая связь была установлена сначала для рентгенографических и фотоэмиссионных методов, но эти работы долгое время были неизвестны специалистам по теневым и интерференционным измерениям. Доказательством этому является серия работ [201, 236, 253, 272, 273], в которых для случая двух измерений было вновь найдено решение проблемы Радона [27], известное математикам уже в начале нашего века.

Для восстановления трехмерных распределений показателя преломления по ракурсным теневым картинам авторами было использовано решение задачи о нахождении функции по ее интегралам вдоль всевозможных прямых, пересекающих область ее определения [77]. На тождественность задачи восстановления показателя преломления по ракурсным интерферограммам с двумерной проблемой Радона указывалось в [164].

После установления упомянутых фактов внимание исследователей привлекли вопросы корректности решения обратной задачи геометрической оптики неоднородных сред для конкретных условий экспериментов, влияния дискретности направлений просвечивания, уменьшения угловой апертуры зондирующих пучков и ряда других практических ограничений [87, 135, 136]. Для теневого метода эти вопросы рассмотрены в [79]. В целом данное направление было классифицировано как специальный раздел более общих методов, получивших название томографических. Впечатляющие результаты были получены в приложениях томографии к медицине [23].

Параллельно с развитием методов восстановления трехмерных полей показателя преломления развивались идеи использования интегральных оптических методов для определения пространственных спектров стохастических оптических неоднородностей, исключая процедуру восстановления исследуемого поля [86, 142, 146, 147, 150]. Впервые эти идеи были высказаны в работах [176, 275]. Были предприняты попытки интерпретации сигнала, пропорционального полному световому потоку за плоскостью визуализирующей диафрагмы теневого прибора [95, 146]. Измерение такого сигнала легко реализовать. На этом принципе был построен ряд приборов, которые использовались для измерения пульсаций показателя преломления морской воды [147]. Как показал более подробный теоретический анализ подобных схем, выполненный в серии работ [3, 95, 96], однозначная связь между пульсациями полного светового потока за плоскостью ножа Фуко или другой визуализирующей диафрагмы теневого прибора и пространственным спектром оптической неоднородности отсутствует. Авторы работы [96] пришли к выводу о целесообразности двойной пространственной фильтрации зондирующей волны, что, по сути дела, эквивалентно классическому принципу работы теневого прибора, который может рассматриваться как система фильтрации пространственных частот [65]. Поэтому предложенный в работе [96] метод сводится к измерению локальных значений пульсации интенсивности света в плоскости изображения теневого прибора.

Работоспособный метод измерения пространственных спектров слабых газовых неоднородностей был разработан и реализован в работах [150, 151]. Он основан на существовании однозначной связи между трехмерным фурье-образом фазы $\psi(x, y)$ и комплексной амплитудой зондирующей волны $u(x, y)$ на выходе из исследуемой области. Метод применим только в тех случаях, когда приращение фазы волны ψ после прохождения оптической неоднородности много меньше $\pi/4$. При малых ψ экспонента $e^{i\psi}$ в выражении для $u(x, y)$ "примерно" равна $1 + i\psi$. Преобразование Фурье комплексной амплитуды волны осуществляется с помощью длиннофокусной линзы, роль которой выполняет приемная часть теневого прибора.

Теневой метод измерения пространственных энергетических спектров стохастических неоднородностей при произвольных значениях ψ был предложен в работе [65]. Этот метод хорошо приспособлен для исследования спектров турбулентной конвекции в капельных жидкостях, так как приращение фазы ψ в жидкостях при размерах модели, обеспечивающих турбулентный режим, значительно больше π даже при неоднородности температуры в доли градуса. Позже оказалось, что этот метод легко модифицируется для измерения пространственно-временных энергетических спектров турбулентных пульсаций температуры [5, 16].

При больших ψ теневые приборы имеют преимущества перед интерференционными, так как при подходящей настройке они обеспечивают линейную связь между градиентами фазы зондирующей волны и интенсивностью света. В интерферометрических методах интенсивность света в изображении является периодической функцией фазы, процедуру же определения номера интерференционной полосы в сложной картине турбулентного потока трудно автоматизировать.

Оригинальные оптические методы измерения пространственных спек-

тров созданы применительно к задачам физики атмосферы [103, 155]. Возможность их использования в лабораторных экспериментах проблематична, так как в теории методов заложены предположения, что турбулентность однородна и изотропна, а максимальный размер неоднородностей много меньше длины трассы.

Поляризационно-оптические методы визуализации и измерения полей скорости основаны на двойном лучепреломлении суспензий в потоках со сдвигом. Первые эксперименты относились к ламинарным потокам. Применительно к турбулентным потокам поляризационно-оптические методы были развиты в работе [20] для специального случая, когда в направлении просвечивания поток ограничен плоскими поверхностями, причем толщина зазора между этими поверхностями много меньше размеров области в поперечном направлении. В этих условиях градиент скорости имеет значительную величину, что обеспечивает достаточную чувствительность метода. Интегральный характер метода в этом случае не проявляется.

Для трехмерной задачи в работе [84] была получена инвариантная форма уравнений геометрической оптики неоднородной и анизотропной среды, поставлена и проанализирована задача о восстановлении трехмерного поля тензора диэлектрической проницаемости среды по результатам просвечивания. Предложено использование априорной информации в виде линейных дифференциальных уравнений, описывающих поведение среды, и выполнена экспериментальная проверка метода на примере, для которого известно точное решение прямой задачи. К сожалению, применить разработанный метод к задачам конвекции не удалось из-за недостаточной для этой цели чувствительности существующих в настоящее время двулучепреломляющих эмульсий и нежелательной в данном случае зависимости двулучепреломления от температуры.

Все описанные выше разновидности интегральных оптических методов базировались на предположении о прямолинейности распространения лучей внутри оптической неоднородности. В случае больших градиентов показателя преломления, встречающихся при исследовании пограничных слоев и всевозможных струйных течений, кривизна лучей может быть существенной. В работах [36, 61, 257] были выполнены оценки погрешностей, связанных с рефракцией лучей, а в [75, 76] предложены различные варианты методов, позволяющих в полной мере учесть влияние рефракции.

Общее решение обратной задачи оптики неоднородных сред для случая сильной рефракции лучей, подобное формуле обращения для преобразования Радона, неизвестно. Но трехмерные неоднородности с большими значениями градиента температуры, меняющегося от точки к точке, встречаются крайне редко. Некоторые практически важные частные случаи рассмотрены в следующей главе.

1.2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТЫХ ОБЪЕМАХ

Полная конкретизация задачи о конвекции несжимаемой жидкости в замкнутой полости достигается указанием свойств жидкости, формы полости и условий теплообмена на границе. Для каждого конкретного случая стационарного теплообмена удастся выбрать характерную разность темпе-

ратур Θ , определяющую интенсивность конвекции. При этом задача характеризуется двумя основными безразмерными параметрами: числом Релея $R = (g\beta/\nu\chi) H^3\Theta$ и числом Прандтля $P = \nu/\chi$. Здесь β — коэффициент термического расширения жидкости, ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность, g — ускорение силы тяжести, H — характерный размер полости.

Естественно, что основные закономерности конвекции изучаются на примерах полостей простейших геометрических форм при нескольких типичных вариантах теплообмена.

Для каждой полости можно указать такие условия теплообмена на границе, при которых конвекция отсутствует [32]. В этом случае температура в жидкости и на ее границе линейно зависит от высоты. Если градиент температуры направлен вертикально вверх, то состояние механического равновесия устойчиво. В противоположном случае существует критическое значение градиента температуры, начиная с которого случайные возмущения нарастают. При этом в жидкости возникает самоподдерживающаяся горизонтальная разность температур. Наиболее интенсивная конвекция наблюдается при задании горизонтальной разности температур на границах полости.

Допустим, что температура на поверхности полости изменяется монотонно в направлении произвольно выбранной оси s и сохраняет постоянное значение в сечениях, перпендикулярных s . Изменив угол между s и g и выбрав α в качестве параметра, характеризующего температурное поле на поверхности, можно при разных α реализовать все описанные выше случаи подогрева. Это технически легко осуществить для шаровой полости и горизонтального цилиндра путем вращения модели вместе с теплообменниками [63, 13, 181]. Но значительно большую ценность представляют данные, получаемые для прямоугольных полостей. Во-первых, прямоугольные полости наиболее удобны для постановки тестовых задач, необходимых для проверки теоретических методов расчета конвективных течений. Во-вторых, наличие двух геометрических параметров (отношений высоты полости H к ее размерам в плане D и L) позволяет осуществить плавный переход от полости, имеющей одинаковые размеры по всем трем направлениям, к различным предельным случаям: плоскому горизонтальному слою, вертикальной щели, горизонтальному цилиндру прямоугольного сечения и т.д.

В сочетании с описанными выше вариантами теплообмена задачи о конвекции в прямоугольных полостях характеризуются пятью безразмерными параметрами и образуют весьма представительный класс задач, который охватывает основные типы конвективных течений в замкнутых полостях. И действительно, подавляющее большинство экспериментов по конвекции в замкнутых объемах выполнено с прямоугольными полостями. В пространстве безразмерных параметров исследования концентрировались в двух областях; либо подогрев полости снизу ($\alpha = 0$) при $H/D \ll 1$, либо подогрев сбоку ($\alpha = \pi/2$) при $H/D \gg 1$, $H/L \gg 1$, $H/L \ll H/D$. Причину этого можно объяснить следующим. Задача о подогреве полости сбоку возникла в связи с вопросами теплоизоляции [195], для которых типичны приведенные соотношения сторон, а задача о подогреве плоского слоя

снизу была первым и очень удачным, как показали дальнейшие исследования, примером конвективной неустойчивости. Ламинарные режимы конвекции в промежуточной области геометрических параметров были исследованы в работах [62, 73, 74].

Вполне естественно, что и при переходе к исследованиям турбулентных режимов конвекции сохранилась тенденция выбирать либо первую, либо вторую комбинацию параметров. При подогреве строго сбоку или строго снизу удобно задавать однородные распределения температур на паре противоположных граней, а остальные грани теплоизолировать. Чаще всего в исследованиях встречаются именно такие условия.

Важные геофизические и астрофизические приложения имеют лабораторные исследования конвекции во вращающихся системах [19, 26, 30, 89, 233]. Конвекция в подогреваемом снизу плоском слое, вращающемся вокруг вертикальной оси, имеет прямое отношение к явлениям в конвективной оболочке Солнца [89], а тот же слой, но с горизонтальным градиентом температуры, направленным по радиусу, моделирует общую циркуляцию атмосферы [26].

Если в случае неподвижной прямоугольной полости фиксировать значения параметров $\alpha, P, H/D, H/L$, то переход от ламинарной конвекции к турбулентной происходит при увеличении числа Релея. Область перехода начинается с возникновения стохастических колебаний конвективного течения, обладающего сравнительно простой пространственной структурой, и заканчивается формированием инерционных интервалов в пространственных спектрах скорости и температуры. Уточним, что при такой классификации стационарные вторичные течения и периодические колебания относятся к ламинарной области.

Ламинарные режимы конвекции в замкнутых полостях изучены в настоящее время достаточно подробно. Исследована устойчивость механического равновесия и стационарных конвективных движений в шаровой полости, в горизонтальных цилиндрах круглого и прямоугольного сечений, в кубической полости, плоском слое, вертикальной и наклонной щели [32, 33]. Исследованы также развитые погранслойные режимы конвекции в горизонтальных цилиндрах круглого [63] и прямоугольного [62, 73, 74] сечений. В этих случаях конвективное движение вдали от торцов цилиндра близко к двумерному. Развиты эффективные численные методы решения двумерных уравнений конвекции [128, 153], которые позволяют частично исследовать и область перехода [54]. Создаются численные методы исследования трехмерных задач [277]. С завершением этого этапа задачи ламинарной конвекции будут относиться к области инженерных расчетов.

В настоящее время единственный рациональный путь изучения сложных трехмерных задач ламинарной конвекции состоит в экспериментальном исследовании, и на нем продолжают встречаться новые, иногда весьма неожиданные эффекты.

Исследованию области перехода долгое время не уделялось большого внимания. Если для ламинарной области исчерпывающую информацию дают измерения полей температуры и скорости, а в турбулентной области измеряется довольно определенный набор их статистических характеристик, то в области перехода понадобились комбинированные методы, включаю-

щие как элементы статистического подхода, так и различные способы слежения за конкретными реализациями процесса.

Цель многих экспериментальных исследований конвекции в замкнутых объемах состояла в установлении зависимости теплопередачи от определяющих задачу параметров. Эти зависимости устанавливались отдельно для ламинарной и турбулентной областей, и в этом отношении область перехода самостоятельного значения не имела.

Интерес к исследованию области перехода от ламинарной конвекции к турбулентной резко возрос после того, как в работе [250] была описана конечномерная модель конвекции, имеющая непериодические ограниченные решения. Стало ясно, что на этом пути могут быть получены новые результаты, поясняющие природу турбулентности. Возникающие здесь проблемы рассмотрены в работах [35, 38, 113, 139, 140, 148].

Первые наблюдения перехода от ламинарной конвекции к турбулентной без обсуждения его характерных черт были описаны в [255]. В [67, 68] возникновение стохастических колебаний наблюдалось при подогреве снизу кубической полости. Стохастические колебания при увеличении R возникали кризисным образом, сменяя режим регулярных колебаний. Однако экспериментальные исследования области перехода, изобилующего калейдоскопическим разнообразием форм движения, сменяющих друг друга при ничтожном изменении определяющих параметров, теряли свою направленность и не давали ощутимых результатов. Интерес к исследованиям области перехода усилился после выхода работ [9, 98, 107, 228, 230], инициированных открытием странных аттракторов [143, 250].

Большую роль в исследованиях перехода играют экспериментальные методы определения энергетических спектров турбулентных пульсаций. О переходе к стохастическому режиму судят по кризисному росту ширины спектральных линий или гидродинамического шума в интервалах между пиками спектра. Исследования продемонстрировали несколько типов перехода [199, 216, 227, 229], отбор которых определяется большим числом факторов, в том числе процессом установления стационарных условий теплообмена на границе. В этих работах измерялись только одноточные характеристики, не позволяющие определять пространственно-временные спектры, а исследуемый диапазон чисел Релея находится у нижней границы области перехода, поэтому классификация основана на признаках, характерных для начала перехода.

Применение интегральных оптических методов и пространственно-временного анализа сигналов с сетки термопар позволило установить некоторые закономерности в спектрах стохастических колебаний вдали от порога их возникновения [5, 14]. Сохранение этих закономерностей в режиме развитой турбулентной конвекции [5] показало важность пространственно-временного анализа гидродинамических полей развитой турбулентности. Такие измерения в настоящее время сравнительно легко выполнимы только с помощью интегральных оптических методов, хотя в ближайшем будущем можно ожидать появления методов быстрого сканирования потока с помощью ЛДИС.

Отметим важную особенность области перехода, состоящую в близости диссипативных интервалов масштабов пульсаций температуры и скорости к размерам полости. Это обстоятельство дает возможность исследовать

интервал диссипации, оставаясь в области малых размерных значений пространственной частоты. Возможность управления поведением крупномасштабных мод позволяет исследовать такие важные для теории мелкомасштабной турбулентности явления, как выравнивание анизотропии пульсаций с ростом пространственной частоты, перемежаемость турбулентности в интервале диссипации.

Область перехода в подогреваемом снизу плоском слое исследовалась экспериментально в [206] и численно в [211]. В [206] измерялся тепловой поток через слой жидкости и осредненное температурное поле. Обнаружены изломы на графике зависимости $Nu(R)$, свидетельствующие о перестройке конвективного движения. Наблюдалось 8 таких переходов. В [206] дан обзор работ по переходной конвекции в плоском горизонтальном слое. Численные расчеты в [211] также дали изломы на графике зависимости $Nu(R)$. Высказаны предположения о природе этих перестроек.

Режимы развитой турбулентной конвекции при стационарных внешних условиях на границе полости исследовались в работах [12, 101, 219]. В [217] установлены ориентировочные границы турбулентных режимов в подогреваемых сбоку прямоугольных полостях, вытянутых по вертикали ($\alpha = \pi/2$, $P = 7$, $H/D = 10-30$, $R \sim 10^{11}$). Фотографировалось движение светорассеивающих частиц. Измерялись профили осредненной температуры в горизонтальных и вертикальных сечениях и профили пульсаций температуры в горизонтальных сечениях. Переход к турбулентному режиму начинался с обрушения гребней волн, распространяющихся вдоль пограничных слоев у боковых стенок, и заканчивался выравниванием градиентов температуры в ядре течения.

Интерпретация результатов [217], как относящихся к случаю строго бокового подогрева, подверглась критике в работе [101]. Основанием для нее послужило наличие в [217] свободной поверхности жидкости, охлаждающейся за счет испарения. В результате поля осредненной температуры оказались несимметричными относительно среднего горизонтального сечения полости. В верхней части полости наблюдался участок изотермического в среднем ядра течения, а в нижней существовал осредненный градиент температуры, направленный вертикально вверх.

В работе [101] были устранены эти недостатки и значительно усовершенствована техника измерений. Полученный в [101] комплекс данных использован в качестве тестового материала для проверки конечно-разностной схемы прямого численного моделирования турбулентной конвекции в рамках двумерной задачи [54]. По многим характеристикам результаты численного расчета удовлетворительно совпали с экспериментальными результатами работы [101].

Существенное изменение, которое произошло в результате теплоизоляции горизонтальных границ полости, состояло в появлении осредненного градиента температуры по всей высоте ядра. Его значение при турбулентном режиме, так же, как и в ламинарной конвекции, слабо зависело от ширины полости. При переходе от ламинарного режима к турбулентному безразмерный градиент изменялся от 0,6 до 0,36.

В [101] тщательно исследовались пограничный слой на боковых стенках полости и результаты сравнивались с исследованиями пограничного слоя на нагретой пластине [100]. Сделан вывод, что замкнутость потока и

наличие вертикального градиента температуры в ядре не оказывают существенного влияния на локальные характеристики пограничного слоя.

Режимы развитой турбулентной конвекции в подогреваемых снизу прямоугольных полостях при $H/D < 1$ исследовались в работах [206, 219, 213]. В этих условиях конвективное движение имеет характер беспорядочно всплывающих и опускающихся "горячих" и "холодных" термиков [206]. Вблизи горизонтальных границ имеются тонкие пограничные слои, перепад температуры в которых равен $\Theta/2$. В ядре течения наблюдается слабый инверсный градиент осредненной температуры [12, 206]. Исходя из модели всплывающих термиков, в [249] получен согласующийся с экспериментальными данными закон теплопередачи. Обсуждение и уточнение этой модели приведены в [212].

В работе [280] исследовалась турбулентная конвекция в прямоугольном контейнере. Измерены одномерные пространственные спектры температурных пульсаций при $R \sim 10^{11}$. Авторы выделяют три интервала: инерционный интервал с наклоном $-5/3$, вязкоконвективный с наклоном -1 и диссипативный. Такое разделение согласуется с известными теоретическими результатами [116], но очень плохо подтверждается приведенными в [280] спектрами. Не объясняются и причины уплощения графика в диссипативном интервале, хотя именно этот интервал с малым разбросом экспериментальных точек и хорошо выраженным линейным участком обращает на себя внимание в первую очередь. Обсуждение этого вопроса будет продолжено в гл. 4.

Временные спектры развитой турбулентной конвекции в замкнутых полостях измерялись в работе [53]. В вертикальных пограничных слоях, где имеется осредненное течение, временной спектр отражает в большей мере пространственную структуру турбулентности. В области однородной турбулентной конвекции обнаружен интервал $E_T \sim \omega^{-2}$, теоретически предсказанный в [48].

Качественное отличие результатов для бокового подогрева вытянутых по вертикали полостей [101, 217] и плоских слоев жидкости, подогреваемых снизу [12, 214, 213], показывает необходимость исследования промежуточных ситуаций. Большое разнообразие форм полостей и условий теплообмена, а также необходимость исследования разных диапазонов чисел Релея на геометрически подобных моделях различного размера практически исключают стратегию простого перебора определяющих параметров.

В связи с этим возникает вопрос о выборе тестовых задач, для которых можно было бы накапливать все более глубокие и обширные результаты. В работе [81] была предложена задача о конвекции в кубической полости при комбинированном подогреве сбоку и снизу. Эта задача характеризуется только тремя безразмерными параметрами: числом Релея, числом Прандтля и отношением вертикальной разности температур к горизонтальной. Фиксация параметров $H/D = 1$ и $H/L = 1$ практически не сказывается на общности задачи.

Действительно, второстепенность этих параметров в режиме развитой турбулентной конвекции была экспериментально показана в [101] для случая бокового подогрева и в [81] для подогрева снизу. Сильная же зависимость от направления градиента температуры на границе, приводящая к качественно различным течениям в случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$, может быть

исследована при варьировании ϑ/Θ . Таким образом, предложенная в [81] задача охватывает ранее исследованные случаи и, кроме того, дает возможность исследовать промежуточные ситуации. Кубическая форма полости выбрана как наиболее удобная для постановки тестовых задач, необходимых для разработки численных методов, а также как наиболее приемлемая при использовании оптических методов. Уже сейчас имеются примеры численных исследований ламинарной конвекции в кубических полостях [277] и можно ожидать, что первые численные исследования трехмерной турбулентной конвекции также будут выполнены для кубических полостей.

Концентрация внимания на некоторой избранной форме полости, не обязательно кубической, дает возможность более глубокого изучения явления. Важным вопросом в турбулентной конвекции является поведение крупномасштабных пространственных мод. Крупномасштабные конвективные движения и их эволюция с ростом числа Релея, начиная от порога возникновения конвекции и кончая установлением режима развитой турбулентной конвекции, исследовались на примере кубической полости в работах [5, 67–71, 80, 81, 154]. При этом использовалась серия геометрически подобных моделей с ребром куба от 1 до 50 см. Широкое применение интегральных оптических методов позволило достаточно подробно исследовать крупномасштабные конвективные движения и их эволюцию с увеличением числа Релея.

1.3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

Уравнения термогравитационной конвекции включают уравнение Навье—Стокса, записанное с учетом архимедовой силы, уравнения неразрывности и теплопереноса [104]. Таким образом, вся изотермическая гидродинамика и вынужденная конвекция тепла могут рассматриваться как частные случаи явлений, описываемых уравнениями термогравитационной конвекции. Из этого следует, что любая модель турбулентной конвекции может рассматриваться как обобщение некоторой модели изотермической турбулентности. Если оставить в стороне очень специальные модели, предназначенные для описания узкого класса явлений, например модель всплывающих термиков [249], то трудности обобщения модели изотермической турбулентности на случай термогравитационной конвекции носят технический характер и несравнимы со сложностью решения общих для того и другого случая проблем, связанных с нелинейностью уравнений, учетом неоднородности и анизотропии турбулентности, и ряда других.

Один из подходов к проблеме турбулентности, который в последнее время все чаще начинает применяться для исследования переходной области, состоит в прямом численном моделировании уравнений гидродинамики и теплообмена на основе конечно-разностных и галеркинских схем. Применительно к задачам термогравитационной конвекции достижения метода освещены в [128]. Возможности этого подхода сильно ограничиваются быстродействием и объемом памяти ЭВМ. Даже в том случае, когда возможности ЭВМ допускают прямое численное моделирование, этот путь не представляется рациональным для исследования развитой турбулент-

2. Зак. 205

ности, так как в малых пространственных масштабах турбулентность носит универсальный характер и нет смысла многократно воспроизводить процесс с единственной целью получить эффект обратного влияния мелкомасштабной турбулентности на энергосодержащие вихри.

К существенному сокращению числа переменных и количества операций приводят методы, в которых прямое численное моделирование применяется только к крупномасштабным полям, а мелкомасштабная турбулентность моделируется аналитически [194]. С появлением таких моделей открывается новая область применения спектральных теорий мелкомасштабной турбулентности. Если используемая пространственная сетка обрезает частоты, не лежащие в области локально-изотропной турбулентности, то наличие анизотропии должна учитывать соответствующая аналитическая модель мелкомасштабной турбулентности.

На пути сопряжения аналитических моделей мелкомасштабной турбулентности с сеточными имеются принципиальные трудности, связанные с нелокальностью спектральных моделей.

В работе [66] предлагается использовать вместо преобразования Фурье специальный базис, у которого локальность и разрешение спектра регулируются соотношением неопределенностей для волновых пакетов. Другие подходы развиваются в работах [37, 40, 55, 197, 222, 274, 281].

Развитие моделей мелкомасштабной турбулентности проходило в условиях двух трудносовместимых тенденций: стремления минимизировать число переменных, описывающих основные свойства турбулентного движения, и попыток более точного описания локальной структуры потока.

До последнего времени доминировала первая тенденция. Была получена большая и наиболее результативная при решении конкретных задач группа полуэмпирических моделей турбулентности. Исторически они были первыми моделями, пригодными для расчета конкретных течений. Полуэмпирические модели постоянно находятся в центре внимания и хорошо освещены в регулярно обновляющейся монографической литературе и обзорах [109, 115, 120, 158].

Применительно к задачам естественной конвекции полуэмпирические модели рассматривались в работах [160, 161, 211, 220]. В [22] предложены обобщения модели [161], которая, в свою очередь, происходит от k - ϵ модели Джонса и Лаундера [235]. Применение модели для расчета статистически одномерных конвективных течений и сравнение полученных результатов с экспериментами показали хорошее соответствие данных по величине потока тепла и некоторые существенные качественные отличия в поведении осредненных профилей температуры и турбулентной энергии. Наличие обширного экспериментального материала является обязательным для развития полуэмпирических моделей в плане определения констант и степени их универсальности.

Дать краткую характеристику моделям мелкомасштабной турбулентности сложно, так как в них используются разнообразные и трудносопоставимые допущения. Отметим некоторые общепризнанные требования к моделям [116]: инвариантность уравнений относительно произвольных преобразований Галилея, сохранение нелинейными членами интегралов движения, подчинение энергетического спектра пульсаций скорости "закону пяти третей".

Введенное А.М. Обуховым понятие системы гидродинамического типа (СГТ) позволило построить простые малопараметрические системы, описывающие процессы переноса энергии по спектру [38]. Другой путь к построению подобных малопараметрических моделей для описания каскадных процессов состоит в введении коллективных переменных, характеризующих амплитуды возмущений поля скорости в некотором интервале волновых чисел [55]. Именно каскадные модели предельно сократили размерность систем, описывающих турбулентное течение в широком интервале волновых чисел.

Большинство авторов обзоров по турбулентности признают основным достижением последних лет в теории турбулентности осознание двух важных фактов — возможности появления стохастических свойств в динамических системах небольшой размерности [113, 139, 148] и наличия в турбулентности упорядоченных структур [140, 234]. Исходное представление о турбулентности как о полном хаосе сменилось пониманием того факта, что в бесконечномерной диссипативной системе даже в развитом турбулентном режиме число возбужденных степеней свободы ограничено, т.е. размерность аттрактора движения существенно меньше размерности фазового пространства.

Все это усилило внимание к локальной структуре потока и к способам ее описания. Разложение поля по гармоническим функциям не удовлетворительно в силу полной нелокальности тригонометрического базиса. Применение полиномов Чебышева позволило продвинуться в описании турбулентных потоков в пограничных слоях [109]. Известны попытки описания двумерных турбулентных течений набором точечных вихрей (так, в [270] число вихрей превысило 16 000) и обобщения этого подхода на трехмерный случай [190].

Очевидно, что лучшим для описания любого процесса является собственный базис задачи, но каков он — собственный базис турбулентности? Попытка дать рецепт поиска такого базиса содержится в подходе, описанном в [44—46, 149] и названном структурным осреднением турбулентного поля. Авторы метода приводят наглядную аналогию своему способу выделения из потока характерных структур — метод получения типичного портрета представителя этнической группы путем экспонирования на один позитив большого числа портретов, совмещенных по межзрачковому расстоянию.

В описанном в данной книге подходе к моделированию турбулентных течений также содержится попытка приблизиться к реальной структуре турбулентного потока и сохранить в то же время возможность построения малопараметрических моделей явлений. Предлагается специальный базис, описывающий совокупность вихрей различного масштаба. Отличительной чертой базисных функций является локализация как в физическом пространстве, так и в пространстве волновых чисел.

Глава 2

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

2.1. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ И ТЕНЕВЫЕ МЕТОДЫ

По способу визуализации неоднородностей оптические методы принято делить на два больших класса — теневые и интерферометрические. В теневых методах измеряются угловые отклонения лучей в неоднородности, т.е. направление нормалей к искаженному волновому фронту, а в интерферометрических — оптические разности хода. Соответственно наиболее распространенными приборами первого и второго типа для визуализации и регистрации искажений волнового фронта являются теневой прибор Теллера и интерферометр Маха—Цендера. В последнее время наряду с этими классическими приборами для регистрации волнового фронта все шире применяется различная голографическая аппаратура. Голографические методы при рассмотрении их применений к измерениям деформаций волнового фронта естественно отнести к числу интерферометрических, хотя ясно, что принципы голографии могут использоваться при исследовании оптических неоднородностей и в других целях.

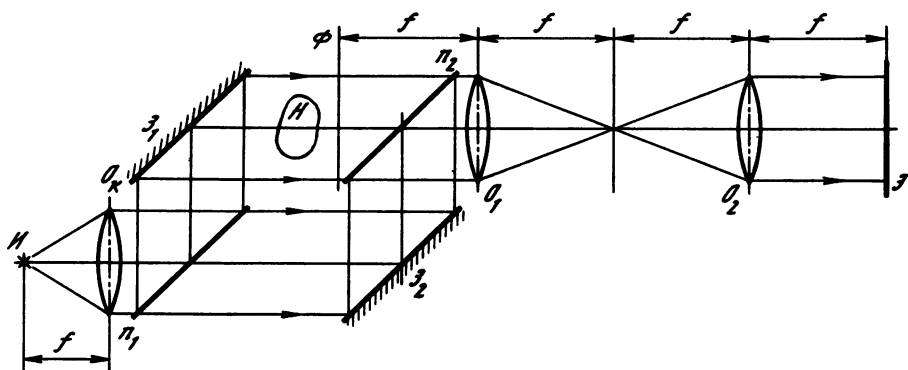
Существует обширная литература по оптическим методам с обстоятельным изложением основных принципов работы теневых и интерференционных приборов и описанием соответствующей аппаратуры и техники эксперимента [7, 21, 43, 126, 144, 175]. Отсылая за подробностями к этим изданиям, напомним лишь основные принципы, необходимые для понимания рассмотренных далее методов исследования температурных полей в жидкостях.

Рассмотрим идеализированную схему интерферометра Маха—Цендера (рис. 2.1). Оптическая неоднородность просвечивается параллельным пучком света, который формируется коллиматорным объективом O_K . В фокусе коллиматора расположен точечный монохроматический источник света I . Плоская волна, частично отразившись от полупрозрачной пластины P_1 , поворачивается зеркалом Z_1 и пронизывает неоднородность N . Оптическая система приемной части, состоящая из объективов O_1 и O_2 с фокусными расстояниями f , осуществляет тождественное отображение плоскости Φ на экран $\mathcal{E}$, благодаря чему форма волнового фронта вблизи экрана такая же, как и при выходе из неоднородности.

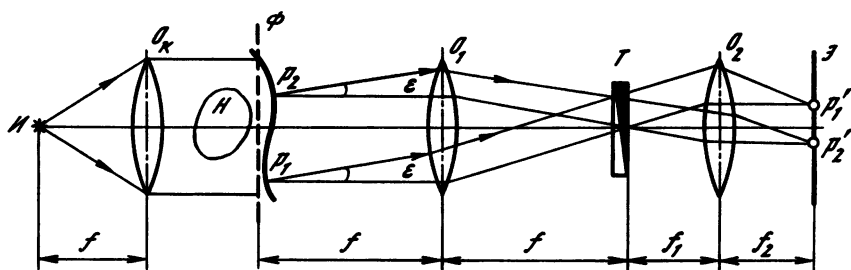
Вторая волна, которую будем называть опорной, распространяется в однородной среде и, отразившись от зеркала Z_2 и полупрозрачной пластины P_2 , попадает на экран неискаженной. В результате наложения обеих волн в плоскости экрана наблюдается интерференционная картина, вид которой определяется формой волнового фронта искаженной волны. Условие интерференции волн дает оптическую разность хода соответственно для центров темных и светлых полос:

$$l(x, y) = (m + 1/2)\lambda, \quad l(x, y) = m\lambda,$$

где m — номер полосы. Длина волны λ для видимого света имеет порядок $5 \cdot 10^{-5}$ см, поэтому интерференционный метод позволяет регистрировать очень малые искажения волнового фронта.



Р и с. 2.1. Оптическая схема интерферометра Маха—Цендера



Р и с. 2.2. Оптическая схема теневого прибора

С помощью интерферометра Маха—Цендера можно исследовать форму волнового фронта на различных расстояниях от неоднородности. Для этого достаточно сфокусировать приемную часть на выбранную плоскость. Если фокусировка производится на некоторую плоскость внутри неоднородности, то интерференционная картина уже не будет соответствовать волновому фронту в этой плоскости, так как между сопряженными плоскостями в этом случае находится оптически неоднородная среда. Таким образом, при сквозном просвечивании неоднородности форма волны может быть измерена только за пределами оптической неоднородности.

Развитие интерферометров получило мощный толчок с внедрением в физический эксперимент лазеров. Применение лазерных источников света в традиционных интерферометрах упростило их оптические схемы и юстировку. С другой стороны, был сделан и качественный шаг в развитии оптических методов исследования фазовых объектов, связанный с голографическими методами регистрации и восстановления волнового фронта [145]. Это направление получило название голографической интерферометрии.

Голографические методы позволили получить интерферограммы волновых фронтов, прошедших через неоднородность в различные моменты времени (метод двух экспозиций). Это дает возможность исключить из интерферограммы стационарные помехи, обусловленные стеклами кювет, деталями оптической установки и т.д., а также следить за эволюцией объек-

та, сравнивая волновые фронты, прошедшие через неоднородность с определенным интервалом времени. Приборы и методы голографической интерферометрии подробно изложены в ряде книг, например в [7].

Отметим в заключение, что в определенных ситуациях удастся использовать свойства исследуемого течения для реализации крайне простых интерферометрических схем. Примером таких схем могут служить описанные в разд. 2.3 способы интерферометрии пограничных слоев плоскопараллельным пучком света. Свет, вошедший в пограничный слой, отклоняется им и формирует предметный пучок, а прошедший мимо слоя дает опорный пучок.

Принцип работы теневого прибора рассмотрим на примере оптической схемы, приведенной на рис. 2.2. Коллиматорный объектив O_K , в фокусе которого расположен точечный источник света И, формирует плоскую волну, пронизывающую оптическую неоднородность Н. Приемная часть прибора, состоящая из объективов O_1 и O_2 с фокусными расстояниями f_1 и f_2 , дает изображение плоскости Ф на экране Э. В фокальной плоскости объектива O_1 располагается визуализирующая диафрагма Т.

В общем случае визуализирующий элемент изменяет как интенсивность, так и фазу проходящей сквозь него световой волны. Коэффициент пропускания и оптическая толщина визуализирующего элемента, который в дальнейшем будем называть фильтром, изменяется от точки к точке. В практических измерениях используются самые разнообразные фильтры, однако для пояснения принципа работы теневого прибора рассмотрим фильтр, который во многих отношениях оказывается простейшим.

Пусть оптическая толщина фильтра постоянна, а его коэффициент пропускания зависит линейно от вертикальной координаты. Если в точках P_1 и P_2 плоскости фокусировки Ф лучи имеют одинаковый угол наклона ϵ к оптической оси, то плоскость фильтра они пересекут в одной точке на расстоянии $f \tan \epsilon$ от оптической оси. Плоскость экрана лучи пересекают в точках P'_1 и P'_2 , сопряженных с точками P_1 и P_2 . Поскольку коэффициент пропускания фильтра пропорционален координате, то и освещенность теневой картины на экране оказывается пропорциональной угловому отклонению лучей в сопряженной точке плоскости фокусировки.

Таким образом, основной принцип работы теневого прибора состоит в том, что все лучи, вышедшие из неоднородности под одним углом, пересекают фокальную плоскость объектива O_1 в одной точке. Здесь их можно определенным образом пометить, выделив тем самым в изображении все точки плоскости фокусировки, в которых угловые отклонения имеют данное значение.

В отличие от интерферометра теневой прибор позволяет найти только направление нормалей к волновому фильтру. Для определения его формы требуется проинтегрировать экспериментальные данные. Однако во многих случаях неизвестное распределение показателя преломления в неоднородности можно связать непосредственно с угловыми отклонениями лучей, поэтому данное свойство теневого прибора нельзя отнести к его недостаткам.

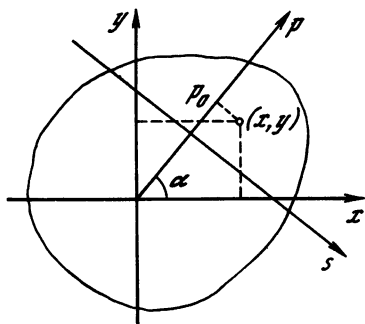
Для детального исследования свойств теневого прибора простого геометрического описания его работы недостаточно. Вопрос о точности метода тесно связан с дифракционными явлениями на деталях теневого прибора и

на самой исследуемой неоднородности. Для определения возможностей теневого прибора при исследованиях сложных фазовых неоднородностей обращаются к методам, применяемым в когерентной оптике для анализа систем оптической обработки информации, и рассматривают теневой прибор как систему фильтрации пространственных частот [65].

2.2. ОПТИЧЕСКАЯ ТОМОГРАФИЯ

Серийные теневые приборы, предназначенные для исследования прозрачных неоднородностей, обладают незначительной угловой апертурой и в связи с этим допускают одновременное просвечивание объекта практически только в одном направлении. Восстановление поля показателя преломления по результатам одного просвечивания возможно только при

Р и с. 2.3. Координаты луча в плоскости $z = \text{const}$



наличии достаточно обширной априорной информации о структуре неоднородности, например о ее симметрии. Основной сферой применения однокурсного метода являются плоские и осесимметричные неоднородности.

Проблема восстановления пространственных полей стала объектом исследования возникшей в последнее десятилетие науки — томографии, с достижениями которой в различных областях физики можно познакомиться, например, по обзорам [132, 135].

Рассмотрим метод обработки ракурсных фотографий трехмерных фазовых неоднородностей, полученных теневым прибором, и восстановления по ним поля показателя преломления с использованием формулы обращения преобразования Радона [77].

Пусть имеется область, в которой показатель преломления $n = n(x, y, z)$, а за ее пределами $n = \bar{n} = \text{const}$. Для восстановления трехмерного поля показателя преломления недостаточно результатов одного просвечивания даже при расчете в параксиальном приближении, не учитывающем искривления траектории лучей. Считаем, что неоднородность просвечивается системой плоских волн, волновые векторы которых лежат в одной плоскости. Искомой величиной является функция $f = n - \bar{n}$. Экспериментально измеряемые величины, относящиеся к сечению $z = \text{const}$, выражаются через значения f в этом же сечении:

$$l(\alpha, p, z) = \int f(x, y, z) ds, \quad (2.1)$$

где s — направление просвечивания (рис. 2.3). Расчет поля показателя преломления проводится по отдельным сечениям $z = \text{const}$.

Задача восстановления неизвестной функции по значениям интегралов по всевозможным гиперплоскостям известна в математике как проблема Радона. Ее решение для двумерного случая дается формулой [27]

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} l(\alpha, p) \frac{dp}{(p - p_0)^2}, \quad (2.2)$$

где $p_0 = x \cos \alpha + y \sin \alpha$.

Решение задачи не локально, оно выражается не только через интегралы вдоль лучей, прошедших через рассматриваемую точку. Для расчета функции f в любой точке используются все интегралы $l(\alpha, p)$, полученные при просвечивании неоднородности лучами, лежащими в исследуемой плоскости $z = \text{const}$.

Значение оптической длины пути луча дают интерференционные методы. Теневой прибор позволяет измерять значения угловых отклонений лучей ϵ , которые связаны с функцией l следующим образом:

$$\epsilon(\alpha, p) = \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial l}{\partial p}. \quad (2.3)$$

Выполняя интегрирование по частям во внутреннем интеграле формулы (2.2) и учитывая, что $l(p) = 0$, при $p \rightarrow \pm \infty$ получим

$$f(x, y) = -\frac{\bar{n}}{2\pi^2} \int_0^\pi J(\alpha, p_0) d\alpha. \quad (2.4)$$

Здесь

$$J(\alpha, p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(\alpha, p)}{p - p_0} dp. \quad (2.5)$$

Интеграл (2.5) содержит функцию $1/(p - p_0)$, имеющую неинтегрируемую особенность в точке $p = p_0$. Согласно теории обобщенных функций, регуляризация этого интеграла имеет следующий вид [28, 29]:

$$J(\alpha, p_0) = \int_{p_0}^{\infty} \frac{\epsilon(\alpha, p) - \epsilon(\alpha, 2p_0 - p)}{p - p_0} dp. \quad (2.6)$$

Формулы (2.4)–(2.6) дают полное решение обратной задачи для трехмерных неоднородностей в параксиальном приближении.

Отметим, что возможны два варианта расчета. В первом из них интегралы (2.6) вычисляются для каждой точки x, y отдельно. Во втором варианте предварительно определяется зависимость $J_k(p_0)$ (индекс k соответствует номеру направления просвечивания), которая запоминается в виде таблицы. Затем выбирается сетка по x, y и вычисляется $f(x, y)$, при этом нужные значения $J(\alpha, p_0)$ находятся интерполированием вычисленных ранее значений. Второй вариант работает на порядок быстрее первого, причем если в первом случае время счета пропорционально числу точек, в которых отыскивается f , то во втором оно почти не зависит от него, так как основная часть времени уходит на вычисление интегралов (2.6).

Поставленная задача сводится к решению интегральных уравнений первого рода, которые относятся, как известно, к некорректным задачам математической физики [157, 159]. Напомним, что задача считается корректно поставленной (по Адамару), если она удовлетворяет следующим условиям: 1) решение задачи существует, 2) решение единственно, 3) задача устойчива. Задачи, не удовлетворяющие этим требованиям, называются некорректно поставленными.

В соответствии с этим трудность решения задач восстановления оптических неоднородностей могут быть связаны с одной из следующих причин.

1. В результатах измерений отсутствует необходимая информация об объекте, т.е. решения задачи по имеющимся данным не существует. Например, непрозрачные детали установки не позволяют полностью просветить объект.

2. Имеющиеся данные не обеспечивают однозначного результата (нарушено условие единственности). Для пространственных неоднородностей такая ситуация возможна при недостаточном числе направлений просвечивания.

3. Неизбежные экспериментальные ошибки и погрешности вычислений оказывают сильное влияние на результаты расчетов (неустойчивость решения). В полной мере неустойчивость проявляется, например, при дифференцировании функций, известных приближенно (дифференцирование экспериментальных данных).

Проанализируем с этой точки зрения предложенный алгоритм расчета поля показателя преломления.

Сначала остановимся на вопросе об устойчивости формул (2.2) и (2.4) к экспериментальным ошибкам, неизбежно присутствующим в измеряемых величинах. Реально регистрируются величины $\tilde{l} = l + \xi$ и $\tilde{\epsilon} = \epsilon + \xi$, где ξ — случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией δ^2 .

Интересно отметить, что теневые методы имеют существенное преимущество перед интерференционными, основанное на том, что измерение производных dl/dr снижает порядок оператора в операции свертки. В (2.2) входит свертка $l(\alpha, p)$ с p^{-2} , а в (2.5) — $\epsilon(\alpha, p)$ с p^{-1} . Устойчивость формул (2.2)–(2.4) к ошибкам во входных данных можно проверить непосредственно, вычислив коэффициенты усиления ошибок.

В силу линейности формул относительно ϵ и l при подстановке в них $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{l}$ в правой части выделяется точное решение f и остается член, определяющий ошибку в результате через величину ξ . Вычисляя дисперсию результата σ^2 и относя ее к дисперсии ошибки во входных данных, получим значения коэффициента усиления ошибки, который для интерференционных методов имеет вид $(\sigma/\delta)^2 = \frac{3}{\pi h^2} \sum_{k=1}^M k^{-4}$, для теневых — $(\sigma/\delta)^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^M k^{-2}$, где h — шаг по координате p , с которым ведется регистрация

экспериментальных данных, M — число точек, регистрируемых на одном направлении просвечивания.

Таким образом, для теневых методов коэффициент усиления ошибок не зависит от шага и при реальном числе направлений просвечивания сред-

неквадратичное отклонение в результатах вычислений только в несколько раз превосходит среднеквадратичное отклонение во входных данных. Для интерференционных методов коэффициент усиления ошибок зависит от шага измерения (и вычисления) по оси p и быстро возрастает с его уменьшением. При восстановлении сложных полей шаг, естественно, приходится выбирать небольшим, поэтому опасность появления неустойчивости решения становится вполне реальной.

Остановимся подробнее на двух первых условиях корректности. Формулу (2.4) можно представить в виде

$$f(x, y, z) = - \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(x, y, \alpha) d\alpha, \quad (2.7)$$

где

$$g(x, y, \alpha) = \int \frac{\epsilon(x', y', \alpha) dx'}{x' - x \cos \alpha + z \sin \alpha}; \quad (2.8)$$

x, y, z — система координат, связанная с неоднородностью; x', y', z' — то же, с зондирующей волной; α — угол между волновым вектором и осью z .

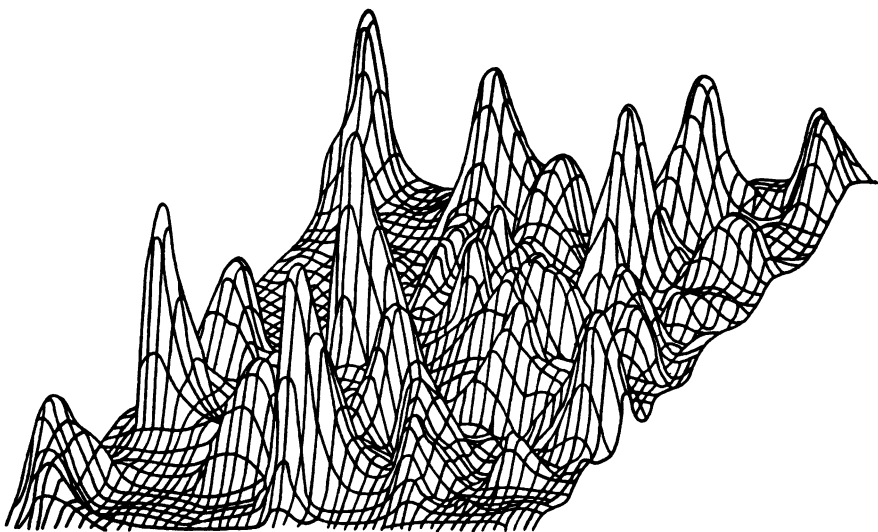
Если неоднородность стационарна, а условия эксперимента допускают всестороннее просвечивание, то данные, необходимые для применения формулы обращения (2.7), могут быть получены путем ступенчатого вращения либо объекта, либо самого прибора вокруг оси, проходящей через неоднородность.

Еще до появления общих методов расчета трехмерных неоднородностей были предложены различные схемы стереоскопического наблюдения [21]. Их можно разбить на три группы: 1) схемы с вращением прибора или неоднородности, 2) стереоскопические схемы с двумя направлениями просвечивания, 3) теневые приборы с многощелевыми источниками света.

Во всех вариантах стереоскопических схем существенным является ограничение исходной информации в связи с трудностями реализации большого числа просвечиваний при достаточной апертуре зондирующих пучков. Даже в схемах с вращением прибора или объекта число направлений просвечивания желательно уменьшить до минимально возможного в целях сокращения числа измерений.

Рассмотрим возможности стереоскопических схем теневых приборов с учетом ограничений числа просвечиваний и угловой апертуры. Подобные вопросы исследовались в работах [129—131, 205] применительно к много-ракурсным интерферометрическим схемам. Однако ввиду различий формул обращения и способов кодирования информации теневые методы требуют отдельного рассмотрения.

Ракурсные теневые картины дают зависимости $\epsilon(\alpha, x, y)$ для дискретных значений $\alpha = \alpha_n$. Для этих значений можно с необходимой точностью вычислить свертку g с функцией x^{-1} (2.8). Основные погрешности и связанные с ними искажения восстанавливаемого поля f возникают при оценке интеграла (2.7) по дискретным значениям свертки. Величина шага по α , необходимая для достижения заданной точности при численном интегрировании, определяется, в свою очередь, поведением углового фурье-спектра свертки g .



Р и с. 2.4. Поле температуры в сечении над монтажной платой с 25 тепловыделяющими элементами

В работе [79] авторами показано, что для восстановления объекта с максимальным размером D , пространственный спектр которого ограничен частотой γ_0 , требуемое число направлений просвечивания N имеет вид:

$$N = \pi D \gamma_0. \quad (2.9)$$

Из этой оценки следует, что даже для восстановления простейшей неоднородности типа двумерной функции Гаусса требуется 6 направлений просвечивания. Точность расчета составляет при этом несколько процентов.

Приведем результат эксперимента по восстановлению неоднородности, обладающей довольно сложной структурой [79]. Объектом служит тепловая неоднородность в жидкости, возникающая за счет естественной конвекции над фрагментом радиоэлектронной схемы. На монтажной плате размером 60×60 мм напаяно 25 тепловыделяющих элементов, расположенных приблизительно в узлах сетки с шагом 10 мм. Конвективные факелы от сосредоточенных в узлах сетки источников тепла притягиваются друг к другу, а на больших расстояниях от поверхности сливаются в один факел. Число температурных максимумов вблизи платы равно числу элементов. Максимальный радиус неоднородности составляет 3,6 см, пространственная частота, необходимая для разрешения всех максимумов температуры, равна 1 см^{-1} . Шаг отсчетов в разложении Котельникова для данной пространственной частоты в 2 раза меньше, чем шаг сетки.

Из формулы (2.9) следует, что минимальное число просвечиваний $N = 22$. В эксперименте полное разрешение всех максимумов температуры было достигнуто при $N = 18$. На рис. 2.4 приведено температурное поле в горизонтальном сечении неоднородности, расположенном на высоте 1 см от источника тепла. Оно восстановлено по 18 ракурсным теневым картинам. О точности метода можно судить по результатам сопостав-

ления максимальных температур факелов с мощностями соответствующих источников тепла. Температура по оси факелов рассчитывалась на основании формул для автомодельных течений от изолированных источников тепла [59]. Общее число и локализация температурных максимумов на рис. 2.4 полностью соответствуют расположению источников тепла. Максимальная погрешность определения температуры составила 15% средней температуры в сечении.

Обращаясь к стереоскопическим схемам с двумя направлениями просвечивания, отметим, что без привлечения априорной информации восстановить функцию с достаточно широким пространственным спектром по результатам просвечивания в двух направлениях невозможно. Априорная информация учитывается в большинстве случаев путем задания семейства функций $f(x, y, a_n)$, зависящего от конечного числа параметров a_n , которые должны однозначно определиться по результатам просвечивания.

Теневые приборы с многощелевыми источниками света [21] применяются для достижения острой фокусировки на некоторую плоскость внутри неоднородности. Каждая щель работает в паре с соответствующей кромкой ножа. В плоскости изображения теневые картины со всех ракурсов суммируются по интенсивности. Идеальный прибор, построенный по данной схеме и обладающий угловой апертурой π , осуществляет острую фокусировку на заданную плоскость. Интенсивность света в плоскости изображения зависит в этом случае только от распределения показателя преломления в плоскости фокусировки и при $N \rightarrow \infty$ пропорциональна его гильберт-образу. При этом объем вычислений, необходимых для расчета показателя преломления, не зависит от N , так как обратное преобразование Гильберта достаточно применить один раз к суммарной теневой картине. В реальном приборе апертура зондирующих пучков существенно меньше необходимой для применения точной формулы образования.

Для анализа работы теневого прибора с многощелевым источником света, сфокусированного на плоскость $z = 0$, формулу (2.7) удобно представить в виде

$$f(x, y, 0) = - \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle \epsilon \rangle dx'}{x' - x}, \quad (2.10)$$

где

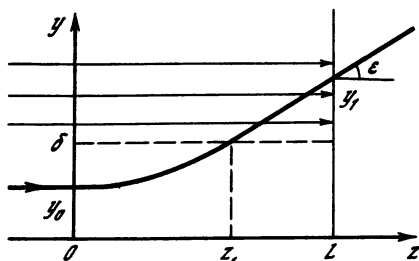
$$\langle \epsilon \rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \epsilon(\alpha, x', y) d\alpha. \quad (2.11)$$

Формула (2.10) получается из (2.7), (2.8), если положить $z = 0$ и выполнить замену переменных, а затем изменить порядок интегрирования. В этом случае требуется интерполировать зависимость $\epsilon(\alpha)$. Возможность интерполяции ϵ и точность нахождения $\langle \epsilon \rangle$ при ограниченной апертуре и дискретных α исследовались на модельных функциях. Расчеты показали, что для простейших функций минимальная апертура, необходимая для получения устойчивых решений, составляет $\pi/3$. Таким образом, для полного восстановления даже простейших трехмерных распределений показателя преломления реально достижимая апертура теневого прибора с многощелевым источником света оказывается недостаточной.

2.3. ИЗМЕРЕНИЯ В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ И СТРУЯХ

Рассмотрим задачу о восстановлении неоднородности в условиях сильной рефракции лучей [76]. Чаще всего существенная рефракция появляется в пограничных слоях и неизотермических струях, т.е. когда в небольшом слое жидкости имеет место значительный перепад температур. Сначала рассмотрим пограничный слой, однородный вдоль оси z . Поверхность, к которой прилегает пограничный слой, может быть изогнута в направлении, перпендикулярном оси z . Ось y направим перпендикулярно поверх-

Р и с. 2.5. Траектория луча в пограничном слое



ности, а ось x — по касательной. Учитывая характерное для пограничных слоев соотношение

$$\frac{\partial n}{\partial x} \ll \frac{\partial n}{\partial y}, \quad (2.12)$$

можно вести расчет по плоскостям $x = \text{const}$, принимая во внимание только отклонения лучей в плоскости z, y . Лучи входят в пограничный слой параллельно оси z . Траектория луча в неоднородности изображена на рис. 2.5. Толщина пограничного слоя равна δ . Луч входит в неоднородность в точке y_0 , отклоняется в направлении оси y (стенка считается горячей, т.е. $\partial n / \partial y > 0$) и при достаточной протяженности слоя выходит за его пределы в точке $z = z_1$, пересекая плоскость регистрации угловых отклонений $z = L$ в точке $y = y_1$ под углом ϵ .

Уравнение луча в этом случае имеет вид [21]

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial y} \ln n. \quad (2.13)$$

Умножив обе части уравнения (2.12) на dy/dz и разделив на $[1 + (dy/dz)^2]$, можно получить уравнение в полных дифференциалах. С учетом начальных условий

$$y = y_0, \quad dy/dz = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad (2.14)$$

первый интеграл уравнения запишется в виде

$$\frac{dy}{dz} = \sqrt{\left(\frac{n(y)}{n(y_0)} \right)^2 - 1}. \quad (2.15)$$

Показатель преломления n за пределами пограничного слоя постоянен и равен $\bar{n}$. Следовательно, в точке $y = y_1$ справедливы соотношения $n(y) = \bar{n}$, $dy/dz = \text{tg } \epsilon$ и из формулы (2.15) можно выразить n в точке входа

луча в пограничный слой:

$$n(y_0) = \frac{\bar{n}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \epsilon}}. \quad (2.16)$$

Из (2.16) следует, что, зная связь между координатами входа и выхода лучей и величину угла выхода, можно рассчитать распределение показателя преломления в пограничном слое. Однако непосредственное измерение координат входа и выхода (метод измерительного луча) затруднительно из-за дифракции и дает неудовлетворительную точность. Связать координаты входа и выхода можно с помощью измерений распределения интенсивности света в плоскости $z = L$ [64].

Решение уравнения (2.15) получается путем сведения его к уравнению типа Абеля. Считая n монотонно возрастающей функцией y и интегрируя уравнение (2.15) по z в пределах от 0 до z_1 , получаем интегральное уравнение, связывающее координаты входа луча в пограничный слой ($y = y_0$, $z = 0$) с координатами выхода из него ($y = \delta$, $z = z_1$):

$$z_1 = \int_{y_0}^{\delta} [(n(y)/n(y_0))^2 - 1]^{-1/2} dy. \quad (2.17)$$

Точку z_1 можно вычислить по известному распределению угловых отклонений лучей $\epsilon = \epsilon(y_1)$ в плоскости $z = L$. Из рис. 2.5 видно, что

$$z_1 = L - \frac{y_1 - \delta}{\operatorname{tg} \epsilon}. \quad (2.18)$$

Заменой переменных

$$v(y) = \bar{n}^2 - n^2(y), \quad u(y_0) = \bar{n}^2 - n^2(y_0) \quad (2.19)$$

уравнение (2.17) сводится к уравнению типа Абеля

$$\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \frac{f(v) dv}{\sqrt{u-v}}, \quad (2.20)$$

где ψ и f — безразмерные функции:

$$f = \frac{\sqrt{\pi}}{L} \frac{dy}{dv}, \quad \psi = \frac{z_1}{Ln(y_0)}. \quad (2.21)$$

Решение уравнения Абеля выражается формулой [29]

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dv} \int_0^v \frac{\psi(u) du}{\sqrt{v-u}}. \quad (2.22)$$

Подставляя (2.21) в уравнение (2.22) и интегрируя последнее по v , находим

$$\frac{y - \delta}{L} = -\frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\psi(u) du}{\sqrt{y-u}}. \quad (2.23)$$

Константа интегрирования определена из условия $u = v$ при $y = \delta$. Формула (2.23) дает окончательное решение поставленной задачи, устанавливая зависимость показателя преломления n от координаты y . Нахождение $n(y)$ связано с довольно громоздкими вычислениями, так как интеграл в правой части (2.23) зависит от y как от параметра и для каждой точки интегриро-

вание нужно проводить отдельно. Используя формулы (2.16), (2.18), (2.19), выпишем связь величин, входящих в (2.23), с измеряемыми в опыте параметрами:

$$u = \bar{n} \operatorname{tg}^2 \epsilon, \quad (2.24)$$

$$\psi = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \epsilon}}{\bar{n}} \left(1 - \frac{y_1 - \delta}{L \operatorname{tg} \epsilon} \right), \quad (2.25)$$

$$n(y) = \sqrt{\bar{n}^2 - v}. \quad (2.26)$$

В эксперименте измеряется ряд значений угловых отклонений в плоскости выхода. В ЭВМ вводятся значения $\epsilon_i(y_1)$, по которым, согласно формуле (2.24), вычисляется массив u_i . Величина v принимает последовательно все значения u_i , для каждого из которых вычисляется интеграл в (2.23), что позволяет получить координату входа y_{0i} . Формула (2.26) дает значение показателя преломления в этой точке.

Для проверки алгоритма решения и отладки программы используется тестовая задача. Рассматривается пограничный слой, действующий как собирающая цилиндрическая линза, т.е. слой, в котором все лучи, вошедшие в него параллельно оси z , собираются в одной точке z_1 , расположенной на его внешней границе. В этом случае интеграл в формуле (2.23) вычисляется аналитически. Так как z_1 — величина постоянная, то

$$\psi(u) = \frac{z_1}{L \sqrt{\bar{n}^2 - u}} \quad (2.27)$$

и формула (2.23) дает после интегрирования

$$\frac{y - \delta}{L} = -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{1 - \frac{n^2(y)}{\bar{n}^2}}, \quad (2.28)$$

а распределение показателя преломления в слое имеет вид

$$n(y) = \bar{n} \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{\pi(y - \delta)}{2z_1} \right)}. \quad (2.29)$$

Для такого пограничного слоя несложно вычислить зависимость $\epsilon(y_1)$:

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{y_1 - \delta}{L - z_1}. \quad (2.30)$$

При использовании значения ϵ для 35 равноотстоящих точек отклонения вычисленных значений от заданных не превышают 0,3% от разности показателя преломления на внешней и внутренней границах пограничного слоя.

Угловые отклонения в пограничных слоях достигают значительных величин. При температуре на стенке, превышающей температуру в жидкости на 10° , угловые отклонения достигают величины 0,05 рад, что на порядок превосходит диапазон измерений стандартных теневых приборов типа ИАБ-451, предназначенных для точных измерений. Для регистрации таких угловых отклонений приходится строить короткофокусные теневые системы, что не всегда возможно из-за недостатка короткофокусных объективов с большим полем зрения.

Для исследования подобных задач представляют интерес методы безлин-

термопарных измерений отличаются не более чем на 4% от максимального значения разности температур. Следует учесть, что результаты сравнения нельзя считать определением погрешности оптического метода, так как термопарные измерения не дают большей точности (из-за погрешностей, связанных с определением положения зонда, конечных размеров спая, возмущений, вносимых самой термопарой).

Осесимметричные неоднородности представляют собой второй после плоских объектов класс задач, широко исследуемых в случае отсутствия рефракции. В отличие от плоских для их расчета даже без учета рефракции приходится привлекать более сложный математический аппарат. Наибольшее распространение получили методы расчета осесимметричных неоднородностей, основанные на использовании обращения уравнения Абеля [87]. Однако все описанные методы исходят из предположения о прямолинейной траектории луча в неоднородности. Ниже рассматривается метод расчета неоднородностей с аксиальной симметрией, позволяющий восстанавливать поле показателя преломления при сильной рефракции лучей [75].

Пусть имеется неоднородность, в которой

$$n = \begin{cases} n(r, x) & \text{при } r < R, \\ \bar{n} & \text{при } r > R, \end{cases} \quad (2.32)$$

причем $\partial n / \partial x \ll \partial n / \partial r$, что позволит пренебречь искривлением лучей вдоль оси x и вести расчет отдельно для различных сечений $x = \text{const}$, считая $n = n(r)$. Траектория луча в такой неоднородности изображена на рис. 2.7. Дифференциальное уравнение лучей

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dr}{ds} \right) = \nabla n \quad (2.33)$$

для такой неоднородности может быть записано в виде [17]

$$d\Theta = \frac{a \, dr}{r \sqrt{(mr)^2 - a^2}}. \quad (2.34)$$

Запишем первый интеграл уравнения (2.33)

$$nr \sin \varphi = a, \quad (2.35)$$

где φ — угол между радиус-вектором и единичным вектором в направлении луча, a — постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий

$$a = \bar{n} R \sin \varphi_0 = \bar{n} y_0. \quad (2.36)$$

Отметим, что из (2.35) следует $\sin \varphi_0 = \sin \varphi_1$. Индексом 0 помечены параметры луча на входе в неоднородность, а индексом 1 — на выходе.

Траектория луча в неоднородности имеет плоскость симметрии при $\varphi = \pi/2$, обозначенную на рис. 2.7 пунктирной линией. Проинтегрируем уравнение (2.34) от $\Theta = \Theta_0$ до Θ , при котором $\varphi = \pi/2$, т.е. до плоскости симметрии, в которой (в силу симметрии) $\Theta = (\Theta_0 + \Theta_1)/2$. При этом

$$\frac{\Theta_1 - \Theta_0}{2} = \frac{\bar{n} y_0}{R} \int \frac{\bar{n} y_0 \, dr}{r \sqrt{(mr)^2 - (ny_0)^2}}. \quad (2.37)$$

Уравнение (2.37) сводится к уравнению типа Абеля заменой переменных:

$$v = 1 - \left(\frac{nr}{\bar{n}R} \right)^2, \quad u = 1 - \left(\frac{y_0}{R} \right)^2, \quad (2.38)$$

где u есть параметр луча, а v для каждого луча изменяется от 0 при $r = R$ до u при $r = \bar{n} y_0/n$. Подставляя в уравнение (2.37) формулы (2.38), получаем приводившееся выше уравнение Абеля (2.20). Безразмерные функции ψ и f имеют следующий вид:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Theta_0 - \Theta_1}{\bar{n} y_0}, \quad f = \frac{\bar{n} R}{(nr)^2 \left(1 + \frac{d}{dr} \ln n \right)}. \quad (2.39)$$

В решение уравнения Абеля (2.22) подставляются значения f и ψ (2.39), после чего проводится интегрирование по v и получается

$$\ln \frac{r}{R} = - \frac{R}{2\pi} \int_0^v \frac{(\Theta_0 - \Theta_1) du}{y_0 \sqrt{v-u}}. \quad (2.40)$$

Из подынтегрального выражения в формуле (2.40) можно выделить часть, поддающуюся точному интегрированию, и получить окончательное решение поставленной задачи:

$$\ln \left(\frac{n}{\bar{n}} \right) = - \frac{1}{2\pi} \int_0^v \frac{\epsilon du}{\sqrt{(1-u)(v-u)}}. \quad (2.41)$$

Следует отметить, что это решение справедливо и для слабых неоднородностей, при которых луч практически не отклоняется от прямой. В этом случае формулу (2.41) можно разложить и, отбросив малые члены, получить уравнение

$$\frac{n - \bar{n}}{\bar{n}} = \frac{1}{\pi} \int_r^R \frac{\epsilon dy}{\sqrt{y_0^2 - r^2}}, \quad (2.42)$$

которое известно как решение задачи в предположении о прямолинейном распределении света в неоднородности [21]. Расчеты (2.41) и (2.42) по сложности практически не отличаются, поэтому на практике, очевидно, имеет смысл использовать (2.41), гарантируя себя от рефракционных ошибок.

В [75] приведен пример восстановления температуры в осесимметричном пограничном слое. Точность восстановления составила около 1%. Попытка расчета без учета рефракции дала ошибку более 15%.

Значение рассмотренных методов расчета объектов с сильной рефракцией не ограничивается гидродинамическими исследованиями. Особенно нужно отметить возможность их применения при контроле качества оптических волокон и элементов градиентной оптики.

2.4. ОСРЕДНЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОЛЕЙ

В исследованиях турбулентных течений прозрачных жидкостей традиционные оптические методы используются слабо. Интерференционные методы практически неприменимы к неоднородностям со статистическими свойствами, так как получающиеся "мгновенные" интерферограммы не поддаются расшифровке, а при больших экспозициях изображение размывается с потерей информации. Теневые изображения могут дать некоторое представление о характере течения (размеры термиков, порядок величины угловых отклонений), но в основном носят иллюстративный характер. При исследовании турбулентных течений интерес в первую очередь представляют две возможности оптических методов — измерение спектральных характеристик турбулентности и восстановление осредненных полей. В данном параграфе рассмотрена вторая задача [71, 78, 165, 172].

Наиболее простой случай — это, естественно, плоская задача без рефракции. Турбулентные течения всегда трехмерны — показатель преломления изменяется во всех направлениях $n = n(x, y, z)$, поэтому речь может идти только о статистически плоской задаче, т.е. о неоднородности, для которой среднее по большому числу реализаций значение показателя преломления зависит только от двух координат:

$$\langle n(x, y, z) - \bar{n} \rangle = f(x, y). \quad (2.43)$$

Просвечивание неоднородности ведется в направлении оси z . Поскольку рассматривается случай слабых неоднородностей, то лучи распространяются в пределах неоднородности практически по прямым и полные угловые отклонения лучей в направлении оси x связаны с распределением показателя преломления следующим образом:

$$\epsilon(x, y, t) = \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} n(x, y, z, t) dz. \quad (2.44)$$

Среднее значение показателя преломления $\langle n \rangle$ зависит только от координат x и y , и, воспользовавшись эргодической теоремой [115], можно заменить осреднение по реализациям интегрированием функции $n(x, y, z, t)$ вдоль направления просвечивания. При достаточной протяженности потока на выходе из него угловые отклонения лучей не должны зависеть от времени. На практике размеры неоднородности, как правило, значительно меньше, поэтому для определения среднего значения приходится проводить осреднение и по реализациям, т.е. увеличивать временной интервал измерений, что равноценно увеличению размеров неоднородности вдоль направления просвечивания:

$$\langle \epsilon(x, y) \rangle = \frac{1}{\bar{n} T} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L \int_0^T n dz dt = \frac{L}{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial x} \langle n \rangle, \quad (2.45)$$

где L — размер неоднородности вдоль оси z , T — время интегрирования. Замена осреднения по реализациям осреднением по временному интервалу справедлива для стационарных процессов.

Для регистрации средних значений угловых отклонений применимы только такие разновидности теневых методов, в которых интенсивность света в плоскости изображения пропорциональна величине угловых откло-

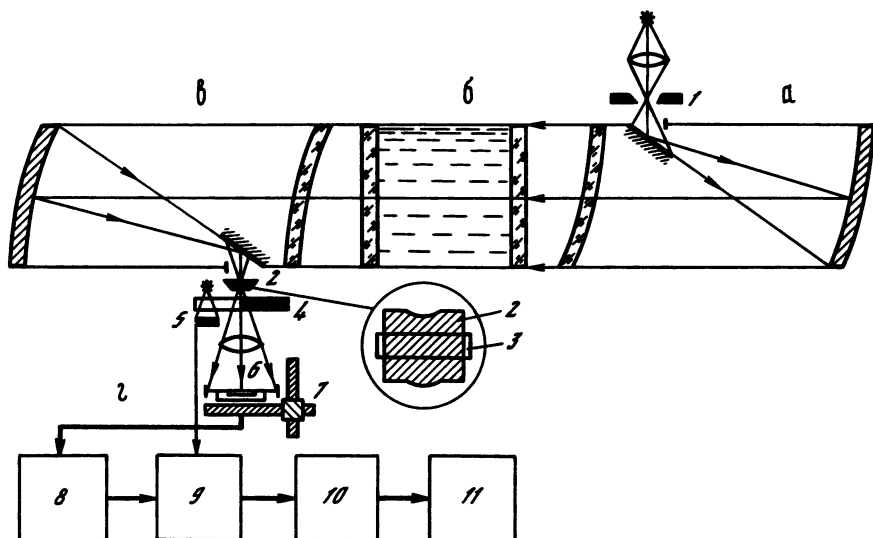
нений. Методы с применением в качестве визуализирующей диафрагмы различных решеток непригодны по той же причине, что и интерференционные методы. Метод щели и ножа в фокусе позволяет выделить на фотографии при длительной экспозиции только одну изоклину (после фотометрирования и нахождения точек со значением коэффициента пропускания, равного половине максимального), и восстановление всего поля температур станет крайне трудоемкой работой.

Получение линейной зависимости интенсивности света от угловых отклонений ϵ возможно двумя способами: с применением в качестве визуализирующей диафрагмы линейных фильтров поглощения $K(\eta) = 1/2 + a\eta$, где η — координата в фокальной плоскости шпирен-объектива, либо методом широкой щели и ножа в фокусе, когда осветительная щель вытянута вдоль направления, в котором измеряются угловые отклонения, а ее изображение в фокальной плоскости шпирен-объектива наполовину закрыто ножом. В зависимости от искажений волнового фронта изображение щели либо заходит за нож, либо выдвигается из-за него, изменяя тем самым освещенность в плоскости изображения.

Для получения среднего значения сигнала можно использовать интегрирующее свойство фотослоя или с помощью фотодиода перевести сигнал в электрический и проводить интегрирование с помощью аналоговой схемы. В первом случае регистрируется одновременно все поле градиентов, и он предпочтительнее при ограниченном времени эксперимента. Второй способ позволяет вести восстановление только последовательно по точкам, но в большей степени допускает автоматизацию процесса измерений и при отсутствии ограничений на продолжительность опыта предпочтительнее, как менее трудоемкий.

Опишем схему измерений осредненных температурных полей [172], использовавшуюся в опытах по турбулентной конвекции в прямоугольной полости при условиях подогрева, описанных в разд. 3.3.

Установка для измерений осредненных температурных полей собрана на базе теневого прибора ИАБ-541 (рис. 2.8). Осветительная щель 1 размером 8×1 мм равномерно освещается лампой накаливания через матовое стекло. Неравномерность освещения щели не превышает 5 %. Для проверки освещенности изображение щели проецируется с большим увеличением на экран и сканируется фотодиодом. В фокальной плоскости приемного объектива устанавливается двусторонний нож 2, закрывающий изображение щели 3 таким образом, что с обеих сторон выступают равные узкие полоски света. За ножом устанавливается обтюратор 4, который с частотой 400 Гц закрывает поочередно то правую, то левую половину выходного отверстия прибора. Одновременно открывается и закрывается лампочка, установленная перед фотодиодом 5 синхронного детектора 9. Плоскость изображения теневой картины сканируется фотодиодом 6. Интенсивность света пропорциональна модулю величины углового отклонения с точностью до константы. Синхронный детектор позволяет избавиться от постоянной составляющей и выделить знак. Сигнал на выходе синхронного детектора, пропорциональный угловым отклонениям луча, усиливается и подается на интегратор, к которому подключены цифровой вольтметр и цифропечатающее устройство. Вся система градуируется непосредственно в единицах градиента температуры (град/см).



Р и с. 2.8. Схема регистрации осредненных угловых отклонений фотометрическим методом

а — коллиматор, *б* — кювета, *в* — приемная часть ИАБ-451, *г* — измерительная часть. 1 — щель, 2 — нож, 3 — изображение щели в плоскости ножа, 4 — обтюратор, 5 — фотодиод синхронного детектора, 6 — основной фотодиод, 7 — сканирующая система, 8 — усилитель, 9 — синхронный детектор, 10 — вольтметр, 11 — ЭВМ

Остановимся теперь на возможности использования интегрирующих свойств фотослоя. Как отмечалось, этот метод является предпочтительным при необходимости одновременной регистрации всего течения и ограниченном времени эксперимента. При изучении неизотермических струй и факелов в жидкости нежелательно растягивать время опыта, так как реальный объем используемой жидкости ограничен и по мере накопления нагретой жидкости в полости устанавливается устойчивая стратификация, изменяющая характер течения струи. Кроме того, если в случае плоских течений можно было уменьшить время усреднения за счет увеличения протяженности потока вдоль направления просвечивания, то при исследовании струйных течений такая возможность отсутствует.

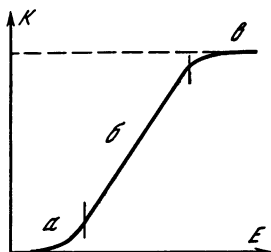
Коэффициент пропускания фотослоя после проявления зависит от экспозиции

$$E(x, y) = \int_0^T I(x, y, t) dt, \quad (2.46)$$

где T — время экспозиции, I — интенсивность падающего света.

На рис. 2.9 приведена типичная зависимость коэффициента пропускания K от экспозиции E [21]. На характеристической кривой выделяются три области: *а* — область недодержек, *б* — область, в которой коэффициент пропускания практически линейно зависит от экспозиции, и *в* — область передержек.

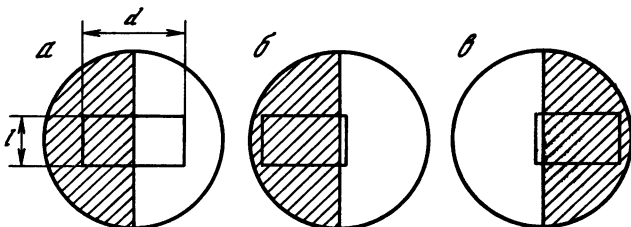
Чтобы получить из негатива интересующую нас информацию, необходимо добиться линейной зависимости интенсивности света от угловых



Р и с. 2.9. Характеристическая кривая фотослоя

Р и с. 2.10. Изображение щели в плоскости ножа

a — обычное положение для метода широкой щели, *б* — положение щели при регистрации $\langle \epsilon_+ \rangle$, *в* — то же, при регистрации $\langle \epsilon_- \rangle$



отклонений. Колебания экспозиции не должны выходить за динамический диапазон фотоматериала, т.е. по возможности должны оставаться в области *б* характеристической кривой фотоэмульсии.

Так как интенсивность света есть величина существенно положительная, а угловые отклонения меняют знак, то отсчет приходится вести от постоянной составляющей. Интенсивность света связана с угловыми отклонениями следующим соотношением:

$$I(x, y) = I_0(1 + \kappa \epsilon(x, y)), \quad (2.47)$$

где κ — коэффициент пропорциональности. Такая зависимость достигается в теновом приборе при использовании широкой осветительной щели и ножа Фуко. На рис. 2.10 видно изображение щели в плоскости ножа в отсутствие неоднородности в рабочем пространстве прибора. Щель наполовину закрыта ножом. Открытая часть щели дает интенсивность света в плоскости изображения I_0 . С появлением угловых отклонений изображение щели смещается, изменяя тем самым освещенность теневой картины. Размер d выбирается так, чтобы $d/F < \epsilon_{\max}$ (F — фокусное расстояние шпирен-объектива), а размер l вместе с яркостью источника позволяет выбирать нужную среднюю интенсивность света I_0 .

В турбулентном потоке амплитуда угловых отклонений может на один-два порядка превышать среднее значение этой величины. Прибор же необходимо настроить таким образом, чтобы максимальные отклонения не обрезались. Это приводит к тому, что прибор, настроенный таким образом, обеспечивает очень низкий контраст изображения, так как средние значения угловых отклонений дают лишь незначительную прибавку к фону I_0 . Негативы, полученные при работе по такой схеме, расшифровке не поддаются.

Выход из этого затруднения заключается в раздельном измерении отрицательных и положительных угловых отклонений лучей. Опыт распадается

на два измерения. В первом из них щель ставится в положение, соответствующее рис. 2.10,б. Тогда интенсивность света будет принимать следующие значения:

$$I_1 = \begin{cases} I_0 \kappa \epsilon & \text{при } \epsilon > 0, \\ 0 & \text{при } \epsilon \leq 0, \end{cases} \quad (2.48)$$

а среднее значение $\langle I_1 \rangle = I_0 \kappa \langle \epsilon_+ \rangle$. Во время второй экспозиции измеряются отрицательные угловые отклонения и щель находится в положении рис. 2.10,в. В этом случае

$$I_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } \epsilon \geq 0, \\ -I_0 \kappa \epsilon & \text{при } \epsilon < 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

и $\langle I_2 \rangle = -I_0 \kappa \langle \epsilon_- \rangle$.

Среднее значение угловых отклонений получается при вычитании измеренных в двух опытах интенсивностей:

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_+ \rangle + \langle \epsilon_- \rangle = \frac{1}{I_0 \kappa} (\langle I_1 \rangle - \langle I_2 \rangle). \quad (2.50)$$

Таким образом, можно достичь обычной для фотометрических методов точности измерений. Для осесимметричных неоднородностей задача упрощается. В силу симметрии

$$\langle \epsilon_+(y) \rangle = -\langle \epsilon_-(-y) \rangle.$$

Следовательно, нет необходимости экспонировать неоднородность дважды. Достаточно измерить положительные угловые отклонения. Отрицательные значения получаются поворотом полученного графика на 180° .

На практике щель не полностью закрывается ножом, как это показано на рис. 2.10, б,в. Край ее выступает из-за ножа на величину, обеспечивающую в измерениях выход за пределы области a на характеристической кривой фотоматериала (см. рис. 2.9).

Полученные негативы фотометрируются. Для построения по измеренным зависимостям коэффициента пропускания пленки зависимости средней интенсивности нужна эталонная неоднородность, в качестве которой может служить длиннофокусная линза. Так как характеристическая кривая зависит от партии фотоматериала, режима проявления, то лучше всего помещать эталонную линзу в поле зрения прибора и экспонировать ее каждый раз вместе с объектом. Угловые отклонения в линзе пропорциональны координате. Коэффициент пропорциональности можно вычислить, зная фокусное расстояние линзы, или измерить его, фотографируя линзу с двумя известными положениями ножа. На рис. 2.11 приведены теневые фотографии турбулентного факела над точечным источником тепла [78].

Переход к восстановлению осредненных полей в трехмерных турбулентных потоках не связан с появлением принципиальных трудностей. В отсутствие рефракции методы расчета ламинарных трехмерных потоков переносятся на турбулентные практически без изменений. Формулы (2.4)–(2.6)

2.5. ФУРЬЕ-АНАЛИЗ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрим температурное поле в жидкости, заполняющей прямоугольную полость. Представим его в виде ряда Фурье

$$f(x, y, z, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_{nml}(t) e^{2\pi i \left(\frac{n}{a} x + \frac{m}{b} y + \frac{l}{c} z \right)}, \quad (2.52)$$

$$F_{nml}(t) = \int_0^a \int_0^b \int_0^c f(x, y, z, t) e^{-2\pi i \left(\frac{n}{a} x + \frac{m}{b} y + \frac{l}{c} z \right)} dx dy dz. \quad (2.53)$$

Здесь f — температура, (a, b, c) — размеры полости в направлении координат x, y, z , F_{nml} — коэффициенты Фурье.

Просветим полость в направлении оси z плоской монохроматической волной света. Электрическое поле световой волны изменяется в каждой точке пространства по гармоническому закону

$$E(x, y, z, t) = u(x, y, z) e^{-i\omega t}. \quad (2.54)$$

Комплексную амплитуду волны u запишем в виде

$$u(x, y, z) = A(x, y, z) \exp \{ ik\varphi(x, y, z) \}, \quad (2.55)$$

где A — амплитуда волны, $k = 2\pi/\lambda$ — модуль волнового вектора, λ — длина волны, φ — оптический путь. В невозмущенной волне, т.е. при $z < 0$, амплитуда не зависит от координат, а $\varphi = n_0 z$ (n_0 — показатель преломления вне полости).

Используя параксиальное приближение геометрической оптики неоднородных сред [17], найдем комплексную амплитуду световой волны на выходе из полости. В этом приближении амплитуда волны A остается неизменной, а оптический путь находится интегрированием показателя преломления вдоль нормалей к невозмущенному волновому фронту:

$$\varphi(x, y, c, t) = \int_0^c n(x, y, z, t) dz. \quad (2.56)$$

В умеренных температурных интервалах показатель преломления жидкости можно считать линейной функцией температуры:

$$n(x, y, z, t) = \bar{n} + \frac{\partial n}{\partial f} f(x, y, z, t), \quad (2.57)$$

где $\bar{n}$ — показатель преломления при температуре, равной ее среднему значению на границах полости. При той же температуре, которую примем за начало отсчета f , определяется и величина $\partial n / \partial f$. Подставив (2.57) в (2.56), найдем

$$\int_0^c f(x, y, z, t) dz = \left(\frac{\partial n}{\partial f} \right)^{-1} [\varphi(x, y, c, t) - \bar{n}c]. \quad (2.58)$$

Положив в (2.53) $l = 0$, изменив порядок интегрирования и подставив

(2.58), получим

$$F_{nm0}(t) = \left(\frac{\partial n}{\partial f} \right)^{-1} \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y, c, t) e^{-2\pi i \left(\frac{n}{a} x + \frac{m}{b} y \right)} dx dy. \quad (2.59)$$

Постоянная составляющая оптического пути $\bar{n}c$ исчезает при интегрировании для всех n и m , не равных нулю.

Таким образом, по результатам просвечивания полости вдоль оси z можно вычислить коэффициенты Фурье, соответствующие пространственным гармоникам, не зависящим от z . Если конструкция модели допускает просвечивание вдоль осей x и y , то таким же образом можно найти коэффициенты F_{0mi} и F_{00i} . Для определения всех коэффициентов F_{nmi} необходимо вводить наклонные просвечивания, осуществить которые для замкнутой прямоугольной полости сложно.

Рассмотрим различные методы измерения оптического пути φ с точки зрения возможностей применения оптической обработки информации для нахождения коэффициентов Фурье. В интерферометрических методах информация о φ заключена в распределении интенсивности света в интерференционной картине. При настройке интерферометра на полосы бесконечной ширины интенсивность света

$$J(x, y) = A_0^2 + A^2 + 2A_0 A \cos k[\varphi(x, y) - \varphi_0], \quad (2.60)$$

где $A_0 e^{ik\varphi_0}$ — комплексная амплитуда опорной волны.

При выполнении условия $k(\varphi - \varphi_0) \ll \pi/2$ однозначную и практически линейную зависимость J от φ можно обеспечить, если положить $A = A_0$, $k\varphi_0 = -\pi/2$. Разложив правую часть (2.60) в ряд по степеням $k\varphi$ и ограничившись линейными членами, получим

$$J = 2A^2(1 - k\varphi). \quad (2.61)$$

Если же разности оптических путей составляют несколько длин волн, то интерференционная картина турбулентного потока практически не поддается расшифровке из-за неоднозначности связи J и φ .

Подставив (2.61) в (2.59), с учетом условия $n \neq 0, m \neq 0$ найдем

$$F_{nm0}(t) = \frac{1}{2A^2 k} \left(\frac{\partial n}{\partial f} \right)^{-1} \left\{ \int_0^a \int_0^b J(x, y, t) \cos 2\pi \left(\frac{n}{a} x + \frac{m}{b} y \right) dx dy + \right. \\ \left. + i \int_0^a \int_0^b J(x, y, t) \sin 2\pi \left(\frac{n}{a} x + \frac{m}{b} y \right) dx dy \right\}. \quad (2.62)$$

Интегральные операции в (2.62) можно выполнить методами оптической обработки информации в некогерентном свете. Действительная и мнимая части F_{nm0} определяются в этом случае отдельно. В плоскости интерференционной картины устанавливают управляемый транспарант, представляющий собой плоский поглощающий элемент с коэффициентом пропускания $\tau(x, y)$. Для нахождения коэффициентов Фурье необходим транспарант

$$\tau(x, y) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos 2\pi \left(\frac{n}{a} x + \frac{m}{b} y + \delta \right) \right] \quad (2.63)$$

с регулируемыми параметрами n/a , m/b , δ . Постоянная составляющая в (2.63) неизбежна, так как величина τ может быть только положительной. После прохождения транспаранта интенсивность света равна $I\tau$. Сфокусировав весь пучок света с помощью собирающей линзы на фотодиод, получим электрический сигнал

$$E_{nm0,\delta}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b I dx dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b J \cos \left[2\pi \left(\frac{n}{a}x + \frac{m}{b}y + \delta \right) \right] dx dy. \quad (2.64)$$

Полезный сигнал описывается вторым членом в (2.64). Для его выделения применяется светоделитель, установленный перед транспарантом. Ответвленный пучок фокусируется на второй фотодиод, сигнал которого

$$E^{(2)} = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b I dx dy. \quad (2.65)$$

Сигналы фотодиодов подаются на вход дифференциального усилителя постоянного тока с регулируемыми входами. Усилитель настраивается так, чтобы в отсутствие оптической неоднородности сигнал на выходе был равен нулю. При появлении неоднородности сигнал пропорционален второму члену в (2.64):

$$E_{nm0\phi} = E_{nm0,\delta}^{(1)} - E^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b I \cos \left[2\pi \left(\frac{n}{a}x + \frac{m}{b}y + \delta \right) \right] dx dy. \quad (2.66)$$

Зарегистрировав длинные реализации сигналов $E_{nm0,\delta}$ при $\delta = 0$ и $\delta = \pi/2$, можно найти временные реализации коэффициентов Фурье

$$F_{nm0} = E_{nm0,0} + iE_{nm0,\frac{\pi}{2}}, \quad (2.67)$$

среднее значение квадратов их модулей

$$W_{nm0} = \langle F_{nm0} F_{nm0}^* \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F_{nm0} F_{nm0}^* dt, \quad (2.68)$$

временные корреляционные функции

$$B_{nm0}(\tau) = \langle F_{nm0}(t) F_{nm0}^*(t + \tau) \rangle \quad (2.69)$$

и временные спектры амплитуд F_{nm0}

$$W_{nm0}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{nm0}(\tau) e^{-2\pi i \nu \tau} d\tau. \quad (2.70)$$

Временные спектры можно найти, минуя вычисление корреляционной функции. Для этого вычисляется преобразование Фурье длинной временной реализации, находится квадрат модуля фурье-образа, который сглаживается путем вычисления скользящего среднего. Соответствующие алгоритмы подробно описаны в литературе, посвященной спектральному анализу временных рядов.

Если возможно всестороннее просвечивание полости, то метод позволяет определить полный пространственный $\langle F_{nml} F_{nml}^* \rangle$ и полный пространственно-временной $W_{nml}(\nu)$ спектры температурного поля. Такая

ситуация реальна, если турбулентное движение сосредоточено в некоторой области внутри большого объема покоящейся жидкости.

Представим поле температуры в виде интеграла Фурье

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) e^{2\pi i \gamma \mathbf{r}} d\gamma, \quad (2.71)$$

$$F(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-2\pi i \gamma \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (2.72)$$

где $d\mathbf{r}$ и $d\gamma$ — элементы объемов в $\mathbf{r}$ - и γ -пространстве. Интегрирование выполняется по всему объему жидкости.

Просветим турбулентную область плоской волной в направлении, перпендикулярном некоторому фиксированному направлению вектора γ . Исходную систему координат повернем так, чтобы ось z' новой системы координат была направлена вдоль падающей волны, а ось x' — вдоль вектора γ . Запишем приращения оптических путей φ и выражение для $F(\gamma)$ в новой системе координат:

$$\varphi(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty} [n(x', y', z') - n_0] dz' = \frac{\partial n}{\partial f} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y', z') dz', \quad (2.73)$$

$$F(\gamma, 0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \iint f(x', y', z') dy' dz' \right\} e^{-2\pi i \gamma x'} dx'. \quad (2.74)$$

Подставив (2.73) в (2.74), получим связь между приращениями оптических путей и фурье-образом температурного поля для заданного направления вектора γ :

$$F(\gamma, 0, 0) = \left(\frac{\partial n}{\partial f} \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi(x', y') dy' \right\} e^{-2\pi i \gamma x'} dx'. \quad (2.75)$$

Очевидно, что по результатам одного просвечивания можно определить F для различных значений вектора γ , перпендикулярных направлению просвечивания. Чтобы рассчитать F для всех γ , турбулентную область достаточно просветить системой плоских волн, волновые векторы которых лежат в одной плоскости. Просвечивание во всевозможных направлениях приводит к избыточной информации для определения F .

Трехмерная спектральная плотность определяется формулой

$$W(\gamma) = \langle F(\gamma) F^*(\gamma) \rangle. \quad (2.76)$$

Подставив (2.72) в (2.76) и изменив порядок интегрирования, найдем связь между корреляционной функцией температурного поля и спектральной плотностью

$$W(\gamma) = \int \left\{ \int \langle f(\mathbf{r}) f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \rangle d\mathbf{r} \right\} e^{2\pi i \gamma \mathbf{r}_0} d\mathbf{r}_0. \quad (2.77)$$

Внутри фигурных скобок стоит среднее значение автокорреляции поля f . Из (2.77) следует, что $W(\gamma)$ есть фурье-образ среднего значения автокорреляции. Определить корреляционную функцию $B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \langle f(\mathbf{r}) f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \rangle$ по измеренной спектральной плотности $W(\gamma)$ в случае неоднородной турбулентности невозможно.

Пусть для $|\mathbf{r}_0| \ll \Omega^{-1/3}$ корреляционная функция $B(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ не зависит от $\mathbf{r}$ во всем объеме Ω , исключая, разумеется, область толщиной $|\mathbf{r}_0|_{\max}$ вблизи границ Ω . Тогда интеграл, стоящий в фигурных скобках в (2.77), можно приближенно записать как $\Omega B(\mathbf{r}_0)$. Разделив обе части (2.77) на Ω и переходя к пределу $\Omega \rightarrow \infty$, получим формулу для нормированного на единицу объема спектра статистически однородного температурного поля

$$W_H(\gamma) = \int B(\mathbf{r}) e^{2\pi i \gamma \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (2.78)$$

Корреляционную функцию $B(\mathbf{r})$ однородного поля $f(\mathbf{r})$ можно найти по нормированной спектральной плотности $W_H(\gamma)$ путем обратного преобразования Фурье.

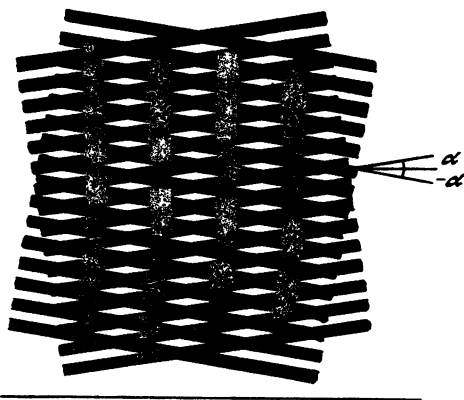


Рис. 2.12. Транспарант с перестраиваемой пространственной частотой, образованный скрещенными дифракционными решетками

Для измерения $F(\gamma)$ и $W(\gamma)$ необходим транспарант с плавно перестраиваемой пространственной частотой. Такую возможность дает анализатор пространственного спектра оптического изображения, описанный в [58]. В нем для получения синусоидального транспаранта используются две скрещенные дифракционные решетки с достаточно малым периодом d .

Полный световой поток E_0 , проходящий сквозь транспарант и регистрируемый фотодатчиком, выразим через фурье-образ $\tilde{I}(\eta, \xi)$ распределения света $I(x, y)$ в интерференционной картине и фурье-образ $\tilde{\tau}_0(\eta, \xi)$ коэффициента пропускания транспаранта $\tau_0(x, y)$. В силу инвариантности скалярного произведения относительно преобразования фурье

$$E_0(t) = \iint_{-\infty}^{\infty} I(x, y) \tau_0(x, y) dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}(\eta, \xi) \tilde{\tau}_0(\eta, \xi) d\eta d\xi. \quad (2.79)$$

Допустим, что $\tilde{I}(\eta, \xi)$ обращается в нуль при $\sqrt{\eta^2 + \xi^2} \gg d^{-1}$. Тогда вид функции $\tilde{\tau}(\eta, \xi)$ при $\sqrt{\eta^2 + \xi^2} \gg d^{-1}$ не влияет на сигнал E_0 . Таким образом, вместо τ_0 можно рассматривать некоторый эффективный транспарант $\tau(x, y)$, у которого фурье-образ равен нулю при $\sqrt{\eta^2 + \xi^2} \gg d^{-1}$.

Вычислим $\tilde{\tau}_0(\eta, \xi)$ для случая скрещенных решеток (рис. 2.12). Коэффициент пропускания решетки, состоящей из прозрачных и непрозрачных

штрихов равной ширины, представим в виде ряда Фурье

$$\tau_1(x, y) = \sum_n \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{\pi n} \exp \left\{ 2\pi i \frac{n}{d} (x \sin \alpha + y \cos \alpha - \delta) \right\}, \quad (2.80)$$

где α — угол наклона штрихов решетки к оси x , δ — смещение центра прозрачного штриха относительно начала координат. Штрихи второй решетки повернуты на угол $-\alpha$ и смещены на величину $-\delta$:

$$\tau_2(x, y) = \sum_m \frac{\sin \frac{\pi m}{2}}{\pi m} \exp \left\{ 2\pi i \frac{m}{d} (-x \sin \alpha + y \cos \alpha + \delta) \right\}. \quad (2.81)$$

Результирующий коэффициент пропускания равен произведению коэффициентов пропускания обеих решеток:

$$\begin{aligned} \tau_1 \tau_2 = & \sum_{nm} \frac{1}{\pi^2 nm} \sin \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi m}{2} \times \\ & \times \exp \left\{ 2\pi i \left[\frac{(n-m) \sin \alpha}{d} x + \frac{(n+m) \cos \alpha}{d} y + \frac{(n-m)}{d} \delta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Отбрасывая члены, заведомо содержащие пространственные частоты выше d^{-1} , после несложных преобразований получим

$$\tau_0(x, y) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 (2n-1)^2} \cos 2\pi (2n-1) \left(\eta x - \frac{2\delta}{d} \right), \quad (2.83)$$

где $\eta = 2 \sin \alpha / d$. Число членов ряда (2.83), у которых пространственная частота меньше d^{-1} , зависит от α .

Остается выделить из (2.79) член с $n = 1$ и пространственной частотой η . Выделение пространственной частоты η можно осуществить путем временной фильтрации сигнала E_0 , если придать решеткам поступательное движение в направлении, перпендикулярном их штрихам. Пусть смещение решеток δ линейно зависит от времени $\delta = \pm vt$. Введем временную частоту $\nu = 2v/d$. Из (2.83) следует, что при равномерном движении решеток члены ряда осциллируют с различными частотами. Каждой пространственной частоте $(2n-1)\eta$ соответствует временная частота $(2n-1)\nu$. Пропустив сигнал $E_0(t)$ через фильтр с полосой пропускания от $\nu - \Delta\nu$ до $\nu + \Delta\nu$, где $\Delta\nu \ll \nu$, получим сигнал

$$\begin{aligned} E(t) = & \cos(2\pi\nu t) \iint I(x, y) \cos(2\pi\eta x) dx dy + \\ & + \sin(2\pi\nu t) \iint I(x, y) \sin(2\pi\eta x) dx dy. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Формула получена подстановкой (2.83) в (2.79) с последующим выделением частоты ν .

Если $I(x, y)$ не зависит от времени, то (2.84) описывает синусоидальный сигнал, амплитуда которого пропорциональна модулю фурье-образа функции $I(x, y)$. В случае нестационарного распределения $I(x, y, t)$ необходимо выполнить условия $\nu_{\max}/\nu \ll 1$, $\nu_{\max} \ll \Delta\nu$, где $\nu_{\max}$ — граничная частота в $I(t)$. Тогда огибающая промодулированного сигнала описывает

зависимость модуля фурье-образа от времени. Введение временной модуляции позволило устранить нежелательный постоянный фон транспаранта. Чтобы зарегистрировать временную реализацию $F(\gamma, t)$ с помощью описанного выше транспаранта, необходимо сделать выборку значений $E(n/\nu) = \text{Re} \{F\}$ и $E(n/\nu + \pi/2) = \text{Im} \{F\}$. Пространственная частота эффективно-го транспаранта τ изменяется путем поворота решеток. При повороте решеток во взаимно противоположных направлениях изменяется модуль вектора пространственной частоты $\gamma = (\eta, \xi)$ при сохранении его направления. Совместный поворот решеток меняет направление γ при постоянном значении его модуля. Недостатком рассмотренного устройства является наличие движущихся деталей, которое требует принятия мер по борьбе с вибрациями.

Применение аналоговых методов обработки изображений оправдывается в основном только при исследовании быстротекущих процессов. Но именно в этих случаях трудно обеспечить значения несущей частоты $\nu \gg \nu_{\max}$. В связи с этим элементы оптической обработки изображений рационально применять, используя быстроменяемые транспаранты с фиксированным распределением $\tau(x, y)$. Фурье-анализ сравнительно медленных процессов, таких, как турбулентная конвекция в лабораторных масштабах, можно выполнить, используя устройства для построчного считывания изображений с последующей цифровой обработкой.

В когерентных методах оптической обработки информации носителем информации является не распределение интенсивности света в некоторых сечениях пучка, а распределение комплексной амплитуды световой волны. Комплексные амплитуды в фокальных плоскостях собирающей линзы связаны между собой преобразованием Фурье [65].

$$U(\eta, \xi) = \iint U(x, y) e^{2\pi i(\eta x_1 + \xi y_1)} dx_1 dy_1, \quad (2.85)$$

где $\eta = x_2/\lambda f$, $\xi = y_2/\lambda f$, а (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты в передней и задней фокальных плоскостях соответственно.

Имея в виду естественную поляризацию света, запишем комплексную амплитуду (2.55) в скалярном виде и, используя условие $k\varphi \ll \pi/2$, разложим экспоненту в ряд. Ограничиваясь линейными членами, подставим результат в (2.85):

$$U(\eta, \xi) = A [\delta(\eta, \xi) + ik \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{-2\pi i(\eta x + \xi y)} dx dy]. \quad (2.86)$$

Если зондирующая волна распространяется вдоль оси z , перпендикулярной вектору γ , то при произвольном расположении осей x и y можно записать (2.75) в виде

$$F(\eta, \xi, 0) = \left(\frac{\partial n}{\partial f} \right)^{-1} \iint \varphi(x, y) e^{-2\pi i(\eta x + \xi y)} dx dy, \quad (2.87)$$

а подставив в (2.86), получить

$$U(\eta, \xi) = A \left[\delta(\eta, \xi) + ik \frac{\partial n}{\partial f} F(\eta, \xi, 0) \right]. \quad (2.88)$$

Интенсивность света в задней фокальной плоскости линзы, исключая точ-

ку $\eta = 0$, $\xi = 0$, равна

$$I(\eta, \xi) = \langle UU^* \rangle = \left(Ak \frac{\partial n}{\partial f} \right)^2 \langle FF^* \rangle. \quad (2.89)$$

Таким образом, измерение распределения интенсивности света в задней фокальной плоскости линзы позволяет определить пространственный спектр температуры в просвечиваемой области для всех γ , перпендикулярных направлению просвечивания. Данный метод и примеры его применения описаны в [150–151].

Для реализации метода необходим коллиматор, формирующий плоскую волну, приемный объектив, выполняющий преобразование Фурье, и фотоприемник для измерения I . Если не ограничиваться измерением пространственного спектра, то для регистрации самого фурье-образа $F(\eta, \xi, 0)$ требуется вводить опорный пучок, чтобы в результате интерференции сохранить информацию о фазе волны. Такие модификации метода, по-видимому, не применялись.

Общим недостатком описанных выше методов является жесткое ограничение на приращение оптического пути в исследуемой области. При исследовании турбулентной конвекции в капельных жидкостях уже при разности температур в доли градуса изменения оптического пути на размерах, обеспечивающих турбулентный режим, оказываются много большими $\lambda/2$. В этих случаях теневые методы имеют преимущества перед интерференционными, так как при подходящей настройке теневого прибора можно обеспечить линейную связь между градиентом оптического пути зондирующей волны и интенсивностью света в теневой картине при произвольных разностях оптических путей.

Рассмотрим фурье-анализ теневых картин. Пусть теневой прибор настроен так, что интенсивность света в теневой картине пропорциональна угловым отклонениям лучей в направлении оси x ($\epsilon_x = \partial\varphi/\partial x$):

$$I(x, y, t) = I_0 \left[1 + \kappa \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right], \quad (2.90)$$

где I_0 — постоянный фон, необходимый для регистрации знака угловых отклонений лучей, κ — коэффициент чувствительности прибора.

Умножим (2.87) на величину $2\pi i \eta$ и выполним интегрирование по частям по переменной x :

$$2\pi i \eta F(\eta, \xi, 0) = \left(\frac{\partial n}{\partial f} \right)^{-1} \left\{ -\varphi e^{-2\pi i(\eta x + \xi y)} \right|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \iint \frac{\partial\varphi}{\partial x} e^{-2\pi i(\eta x + \xi y)} dx dy \right\}. \quad (2.91)$$

Первый член в (2.91) обращается в нуль, так как угловые отклонения лучей, прошедших за пределами турбулентной области, равны нулю. Подставив (2.90) в (2.91), получим связь между фурье-образом температур-

ного поля $F(\gamma)$ и интенсивностью света в теневой картине:

$$F(\xi, \eta, 0) = \frac{1}{2\pi i \eta \kappa} \left(\frac{\partial n}{\partial f} \right)^{-1} \iint (I - I_0) e^{-2\pi i(\eta x + \xi y)} dx dy. \quad (2.92)$$

На стадии оптической обработки информации нет принципиальных различий в методике обработки теневых картин для произвольных φ и интерферограмм для $\varphi \ll \pi/2$. Обработка электрических сигналов в том и другом случае отличается только множителем η^{-1} в правой части (2.92). Так, при измерении пространственного спектра пульсаций пассивной примеси в турбулентном потоке $\langle FF^* \rangle$ убывает пропорционально $\eta^{-11/3}$. Теневой метод дает величину $\eta^2 \langle FF^* \rangle$, убывающую пропорционально $\eta^{-5/3}$. Это существенно упрощает обработку электрических сигналов за счет снижения динамического диапазона АЦП, который необходимо обеспечить для регистрации сигналов во всем диапазоне η .

С этой точки зрения интересно рассмотреть возможности оптических методов, в которых регистрируются более высокие производные от оптического пути. К таким методам относится, например, простой теневой метод [21]. В нем визуализация деформаций волнового фронта происходит при распространении пучка в однородной среде за объектом. Нормали к выпуклым участкам волнового фронта расходятся, а нормали к вогнутым — сближаются. При достаточном расстоянии от неоднородности это приводит к существенному перераспределению интенсивности света.

Формулу для интенсивности света в картине можно получить следующим образом. Запишем уравнения лучей в виде

$$x = x_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} l, \quad y = y_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l, \quad (2.93)$$

где x_0, y_0 — координаты луча в плоскости $z = 0$, а x, y — в плоскости $z = l$. Трубка лучей, пронизывающих малую площадку плоскости $z = 0$, меняет свое сечение с увеличением z . Изменение площади сечения дает якобиан преобразования (2.93). В силу сохранения полного светового потока вдоль трубки лучей интенсивность света обратно пропорциональна площади сечения:

$$I(x, y) = I_0 \left[1 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) l + \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] l^2 \right]. \quad (2.94)$$

Если пространственный спектр функции φ убывающий, то наибольшие изменения оптического пути φ происходят на расстояниях, сопоставимых с диаметром исследуемой области D . При выполнении неравенства

$$\frac{\Delta \varphi l}{D^2} \ll 1 \quad (2.95)$$

третьим членом в (2.94) можно пренебречь. Тогда интенсивность света в плоскости наблюдения $z = l$ пропорциональна лапласиану оптического пути $\varphi(x_0, y_0)$ в плоскости $z = 0$. Аналогично тому, как была получена

формула (2.92), из (2.87) можно получить связь между I и F , т.е.

$$F(\eta, \xi, 0) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial n}{\partial f} \right)^{-1} \frac{1}{4\pi^2 \gamma^2} \iint I(x, y) e^{-2\pi i(\eta x + \xi y)} dx dy. \quad (2.96)$$

Возвращаясь к примеру с пространственным спектром пассивной примеси, легко видеть, что простой теневой метод даст величину $\gamma^4 W$, возрастающую с увеличением γ пропорционально $\gamma^{1/3}$.

2.6. ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ЗАДАЧАМ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

Применение интегральных оптических методов в экспериментальных исследованиях задач гидродинамики, газодинамики, теплопередачи, диффузии и ряда других основано на существовании в различных конкретных ситуациях однозначных зависимостей между локальными оптическими свойствами среды и величинами, характеризующими исследуемый процесс.

В лабораторных исследованиях термогравитационной конвекции показатели преломления чистых жидкостей и газов являются однозначными функциями температуры: $n = n(T)$. Применение некоторых из описанных в данной главе методов предусматривает линейную зависимость $n = n_0 + \partial n / \partial T (T - T_0)$, для других методов это условие является желательным. Требование линейности $n(T)$ накладывает ограничение на величину характерной разности температур Θ . Для моделирования конвективного теплообмена существенны два комплекса параметров среды: ν/χ — число Прандтля и $g\beta/\nu\chi$ — конвективный параметр, входящий в определение числа Релея $R = (g\beta/\nu\chi)\Theta H^3$. Таким образом, выбор рабочей среды и средней температуры T_0 , а в случае газа еще и статического давления p_0 определяет значения числа Прандтля и величины $(g\beta/\nu\chi)\Theta$. Для достижения необходимого значения R остается задать характерный размер полости H .

Интервал чисел Релея, доступный для исследования на модели с заданным H , определяется далее минимальным значением разности температур, которая еще обеспечивает необходимую чувствительность оптических измерений и в то же время может с заданной относительной точностью поддерживаться используемой системой термостатирования. Этот интервал возможно несколько расширить за счет изменения средней температуры T_0 , но и с учетом этой возможности отношение $R_{\max}/R_{\min}$ трудно сделать больше 10^2 . Эффективным методом изменения R на модели с фиксированным значением H является изменение статического давления газа в полости p_0 .

Дополнительные и весьма своеобразные ограничения параметров моделей связаны с оптическими свойствами среды. Во-первых, среда должна быть прозрачна для зондирующего излучения и иметь коэффициент поглощения теплового излучения либо близкий к нулю, либо, наоборот, очень большой. В первом случае теплообмен излучением происходит независимо от конвективного теплообмена. Во втором тепловое излучение полностью поглощается в тончайшем слое среды, прилегающем к поверхностям тепло-

обмена. Промежуточные ситуации приводят к смешанным задачам радиационно-конвективного теплообмена [173].

Чувствительность оптических методов зависит от величины изменения фазы зондирующей волны в направлении, перпендикулярном просвечиванию $k\Delta\varphi$. Эта величина также должна быть либо очень малой ($k\Delta\varphi \ll 1$), либо достаточно большой ($k\Delta\varphi \gg 1$). В первом случае оптическим сигналом считается комплексная амплитуда волны. При $k\Delta\varphi \ll 1$ комплексная амплитуда пропорциональна фазе, поэтому, используя источники света, обладающие высокой пространственной когерентностью, можно применять когерентные методы оптической обработки информации [125, 137]. Во втором случае имеются благоприятные возможности для применения теневых методов визуализации фазы и некогерентных методов оптической обработки информации, в которых оптическим сигналом является распределение интенсивности света.

При слишком больших градиентах фазы зондирующей волны существенную роль начинают играть рефракционные эффекты. Необходимость учета рефракции усложняет методы расчета оптических неоднородностей (см. разд. 2.3). Измерение же пространственных и пространственно-временных спектров по методике разд. 2.5 становится невозможным. Если исследуемое поле $n(x, y, z)$ представляет собой совокупность оптических неоднородностей масштабов l с максимальными значениями показателя преломления $n = n_0 + \Delta n$, то угловое отклонение луча на отдельной неоднородности имеет порядок Δn , рефракционное смещение на выходе из исследуемой области — ΔnL , а относительная погрешность в координате — $\Delta nL/l$.

При выполнении неравенства $\frac{\partial n}{\partial T} \Delta T \frac{L}{l} \ll 1$ рефракционные эффекты незначительны. Более детальные оценки области применения параксиального приближения геометрической оптики получаются из волновой теории распространения света в случайно-неоднородных средах [155].

Основной вариант рассмотренных в разд. 2.2 методов предусматривает возможность всестороннего просвечивания исследуемой области. Это условие сравнительно легко выполнить в задачах свободной турбулентности. В термогравитационной конвекции число малоисследованных задач такого типа довольно велико. Нет принципиальных препятствий на пути создания специализированных томографов для исследования свободной турбулентности интегральными оптическими методами, подобных эмиссионному томографу, разработанному для исследования нестационарной плазмы [135].

Для применения интегральных оптических методов к задачам турбулентной конвекции в замкнутых объемах необходимо, чтобы по крайней мере две противоположные поверхности полости были образованы плоскостями, параллельными стеклянными пластинами. В этом случае возможно измерение осредненных температурных полей, однородных в направлении просвечивания, а также пространственных и пространственно-временных спектров для направлений волнового вектора, перпендикулярных направлению просвечивания.

Необходимость установки смотровых стекол является препятствием для создания таких условий теплообмена на границах полости, которые

Таблица 2.1

Показатель преломления дистиллированной воды

$t, ^\circ\text{C}$	$\lambda, \text{мкм}$					
	0,7065	0,6563	0,5770	0,5016	0,4713	0,4358
0	1,33095	1,33209	1,33435	1,33734	1,33893	1,34121
5	1,33089	1,33203	1,33428	1,33727	1,33885	1,34114
10	1,33070	1,33184	1,33408	1,33707	1,33865	1,34093
15	1,33041	1,33155	1,33378	1,33676	1,33834	1,34062
20	1,33002	1,33115	1,33338	1,33635	1,33793	1,34021
25	1,32954	1,33067	1,33289	1,33586	1,33743	1,33971
30	1,32899	1,33016	1,33233	1,33529	1,33686	1,33913
35	1,32837	1,32949	1,33170	1,33465	1,33621	1,33848
40	1,32768	1,32880	1,33100	1,33394	1,33550	1,33776
45	1,32694	1,32805	1,33024	1,33317	1,33473	1,33699
50	1,32614	1,32724	1,32942	1,33235	1,33390	1,33615
55	1,32528	1,32638	1,32855	1,33147	1,33302	1,33526
60	1,32437	1,32547	1,32763	1,33054	1,33208	1,33432

Таблица 2.2

Зависимость показателя преломления воды
от температуры для D-линии натрия ($\lambda = 0,5893 \text{ мкм}$)

$t, ^\circ\text{C}$	n	$t, ^\circ\text{C}$	n	$t, ^\circ\text{C}$	n
0	1,33395	22	1,33280	44	1,33001
1	1,33395	23	1,33271	45	1,32985
2	1,33394	24	1,33261	46	1,32969
3	1,33393	25	1,33250	47	1,32953
4	1,33391	26	1,33240	48	1,32937
5	1,33388	27	1,33229	49	1,32920
6	1,33385	28	1,33217	50	1,32904
7	1,33382	29	1,33206	51	1,32887
8	1,33378	30	1,33194	52	1,32870
9	1,33374	31	1,33182	53	1,32852
10	1,33369	32	1,33170	54	1,32835
11	1,33364	33	1,33157	55	1,32817
12	1,33358	34	1,33144	56	1,32799
13	1,33352	35	1,33131	57	1,32781
14	1,33346	36	1,33117	58	1,32762
15	1,33339	37	1,33104	59	1,32744
16	1,33331	38	1,33090	60	1,32725
17	1,33324	39	1,33075	70	1,32524
18	1,33316	40	1,33061	80	1,32307
19	1,33307	41	1,33046	90	1,32074
20	1,33299	42	1,33031		
21	1,33290	43	1,33016		

Показатель преломления жидкостей и газов

Газы ($t = 20^{\circ}\text{C}$, $p = 760$ мм рт.ст.)	$\lambda = 0,5461$ мкм		$\lambda = 0,6328$ мкм	
	n	$\frac{\partial n}{\partial t} \cdot 10^6$	n	$\frac{\partial n}{\partial t} \cdot 10^6$
Воздух	1,0002724	0,929	1,0002716	0,927
Азот	1,0002793	0,953	1,0002781	0,949
Кислород	1,0002531	0,864	1,0002516	0,858
Углекислый	1,0004197	1,432	1,0004174	1,424
Аргон	1,0002630	0,897	1,0002618	0,894
Водяной пар	1,0002354	0,803	1,0002337	0,798

Жидкости ($t = 25^{\circ}\text{C}$)	$\lambda = 0,5461$ мкм		$\lambda = 0,6328$ мкм	
	n	$\frac{\partial n}{\partial t} \cdot 10^4$	n	$\frac{\partial n}{\partial t} \cdot 10^4$
Вода	1,3341	1,00	1,3314	0,985
Метилловый спирт	1,3280	4,05	1,3253	4,00
Этиловый спирт	1,3612	4,05	1,3583	4,00
Изопропиловый спирт	1,3757	4,15	1,3726	4,15
Бензол	1,5030	6,42	1,4950	6,40
Толуол	1,4986	5,55	1,4901	5,55
Нитробензол	1,5579	4,68	1,5458	4,68
Ацетон	1,3576	5,31	1,3542	5,31
Хлороформ	1,4477	5,98	1,4435	5,98
Четыреххлористый углерод	1,4613	5,99	1,4547	5,98
Сероуглерод	1,6347	7,96	1,6185	7,96

были бы близки к используемым в теоретических исследованиях идеализациям. Это обстоятельство особенно важно при исследовании устойчивости механического равновесия и ламинарных конвективных движений, а также при исследовании колебательных режимов конвекции в области перехода от ламинарного движения к турбулентному.

Высококачественные пластины оптического стекла имеют, как правило, значительную толщину. Если теплопроводность жидкости близка к теплопроводности стекла, то тепловые волны в стенках полости оказывают существенное влияние на характер конвективных движений. Главный эффект заключается в повышении устойчивости крупномасштабных структур.

Температурные напряжения в стеклах могут вносить добавочные сдвиги фазы зондирующей волны. Оценить этот эффект теоретически трудно. Искажения оптической картины за счет температурных напряжений стеклянных стенок полости можно оценить эмпирически, если быстро слить из полости часть жидкости. Время слива должно быть значительно меньше характерного времени распространения тепловой волны в стенке полости. В опытах авторов остаточная оптическая картина в свободной от

жидкости части полости наблюдалась только в модели с плексигласовыми стенками, имеющими тепловой контакт с медными теплообменниками. В моделях со стеклянными боковыми стенками остаточная картина после слива части жидкости не наблюдалась.

В заключение произведем несколько полезных таблиц, представленных в различных изданиях. При исследовании конвективных течений чаще всего восстанавливают поле температуры, для чего нужно знать точную зависимость показателя преломления от температуры. Большинство экспериментальных работ проводится с воздухом и водой. Для воздуха существуют аналитические зависимости показателя преломления от длины волны, температуры и давления [152]. Показатель преломления сухого воздуха при $p = 760$ мм рт.ст., $t = 15^\circ\text{C}$

$$n_0 = 1 + 10^{-6} \left[64,328 + \frac{29498,1}{146 - 10^6/\lambda_0^2} + \frac{256,46}{41 - 10^6/\lambda_0^2} \right], \quad (2.97)$$

где λ_0 — длина волны в вакууме (нм). Для других температур и давлений

$$n - 1 = (n_0 - 1) \frac{p [1 + (1,049 - 0,0157t) 10^{-6} p]}{720,883 [1 + 0,003661t]}. \quad (2.98)$$

Для воды приведем зависимость показателя преломления от длины волны и температуры с шагом 5°C в интервале $0-60^\circ\text{C}$ (табл. 2.1), а также более подробную зависимость от температуры для D -линии натрия $\lambda = 0,5893$ мкм (табл. 2.2) [85, 88]. В табл. 2.3 приведены значения показателя преломления и dn/dt для наиболее распространенных жидкостей и газов [85, 152].

Глава 3

ПЕРЕХОД ОТ ЛАМИНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ К ТУРБУЛЕНТНОЙ

Исследования перехода от ламинарной конвекции к турбулентной еще не находятся на той стадии, когда становится возможным систематическое изложение предмета, основанное на небольшом числе основополагающих принципов. Надежные и обширные сведения имеются только о первых стадиях перехода, включающих неустойчивость механического равновесия или стационарного конвективного движения, формирование надкритических движений и возникновение временной стохастичности при сохранении сравнительно простой структуры течения. Эти вопросы систематизированы и нашли отражение в монографической литературе.

Уже первые стадии перехода демонстрируют сложную последовательность многочисленных бифуркаций течения, очень чувствительную к изменениям геометрии области и граничных условий. В связи с этим эволюцию пространственно-временной структуры течения при формировании развитой турбулентной конвекции представляется рациональным исследовать на примерах, в которых надкритические движения, возникаю-

шие в результате потери устойчивости, не столь многочисленны. Результаты экспериментального исследования таких задач описаны в данной главе.

Во всех рассмотренных случаях использованы сходные экспериментальные методики, позволяющие в некоторой степени отфильтровать крупномасштабные конвективные движения и проследить их эволюцию с увеличением числа Релея. Идеи прямого анализа пространственно-временной структуры стохастической конвекции наиболее последовательно удается реализовать с помощью интегральных оптических методов, описанных в предыдущей главе.

3.1. ПЛОСКАЯ ЯЧЕЙКА

Полость, заполненная дистиллированной водой, имела форму короткого горизонтального цилиндра диаметром D , равным 30,9 мм, и длиной d , равной 4,7 мм. Цилиндр ограничивался с торцов двумя толстыми латунными пластинами, между которыми помещалась плексигласовая прокладка с круглым вырезом, определяющим размеры и форму полости.

На торцах цилиндра задавался однородный градиент температуры A , направленный под углом α к вертикали. Для изменения α вся модель поворачивалась вокруг горизонтальной оси цилиндра.

На диаметральной линии, которая проходила на равном расстоянии от торцов цилиндра и при $\alpha = 0$ располагалась горизонтально, с шагом 2,6 мм были расположены спай одиннадцати термопар. С помощью коммутирующего устройства термопары поочередно подключались к цифровому вольтметру, информация с которого передавалась в ЭВМ. Время опроса всех термопар было примерно в 10 раз меньше характерного периода высокочастотных температурных пульсаций в данной модели.

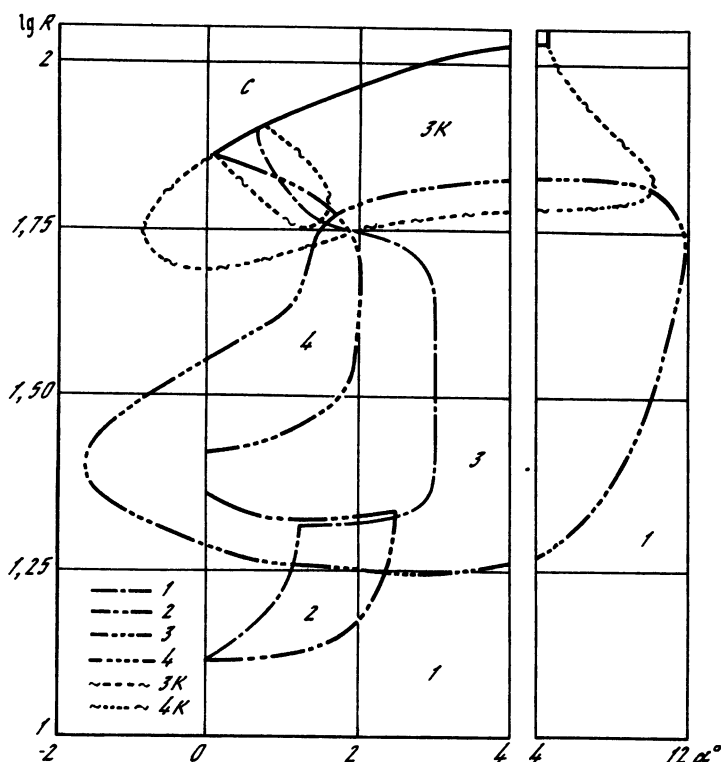
Для визуального наблюдения конвективного течения и фотографирования движения светорассеивающих частиц одна из торцевых пластин заменялась на прозрачную плексигласовую. О степени влияния изменившихся граничных условий можно было судить по результатам температурных измерений. Данные, полученные таким путем, носили вспомогательный характер.

Задача характеризуется тремя определяющими параметрами: числом Релея

$$R = \frac{g\beta}{\nu\chi} A \left(\frac{d}{2} \right)^4, \quad (3.1)$$

числом Прандтля и углом наклона градиента температуры к вертикали. Число Прандтля во всех опытах оставалось постоянным.

На рис. 3.1 приведена карта режимов конвекции для $R < 115$ и $\alpha < 12^\circ$. Цифрами 1—4 обозначены области существования стационарных конвективных движений. Они отличаются друг от друга числом конвективных ячеек, равным порядковому номеру области. Визуальные наблюдения показывают, что вертикальный размер ячеек совпадает с вертикальным размером полости в месте их расположения. Внутри каждой ячейки завихренность сохраняет один и тот же знак, изменяя его при переходе к соседним ячейкам.

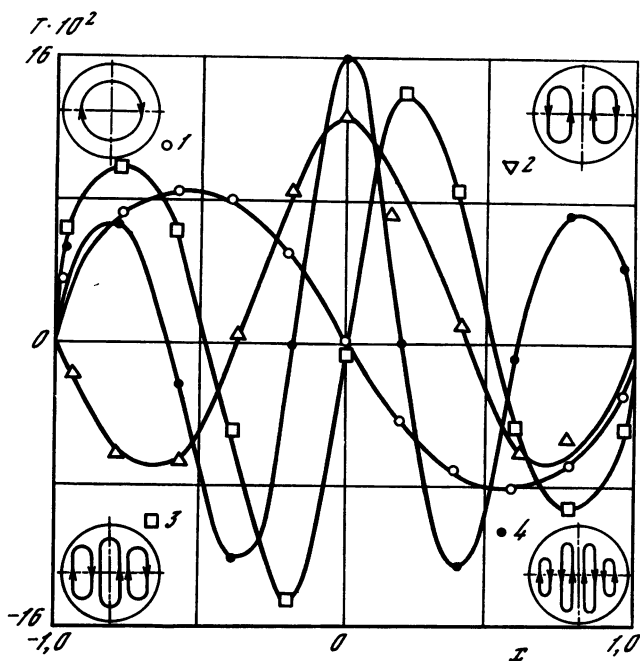


Р и с. 3.1. Карта режимов конвекции в ячейке Хеле-Шоу

Профиль температуры на линии расположения термпар однозначно определяет тип стационарного движения. На рис. 3.2, заимствованном из работы [13], приведены профили температуры и соответствующие им конфигурации течения для режимов 1—4. Можно показать, что для узкой щели с заданным градиентом температуры на стенках стационарные возмущения температуры и компоненты скорости вдоль градиента температуры связаны линейной зависимостью. Для нелинейных стационарных режимов 1—4 соответствие между профилями температуры и вертикальной скорости только качественное.

Обозначение nk на рис. 3.1 относится к колебательным режимам с доминированием n -ячеистой структуры. Точный признак, по которому определялись области существования режимов nk , будет введен ниже. Буквой C обозначена область существования стохастических колебаний. Число точек в обозначении границ областей равно числу конвективных ячеек. Прямые штрихи соответствуют стационарным режимам, а волнистые — колебательным. Границы областей определены с погрешностью 3%, за исключением границы области C , погрешность определения которой составляет 6%.

Режимы, приведенные на рис. 3.1, получены при медленном изменении параметров R и α , начиная с точки, принадлежащей квадранту $\alpha > 0$. Тип



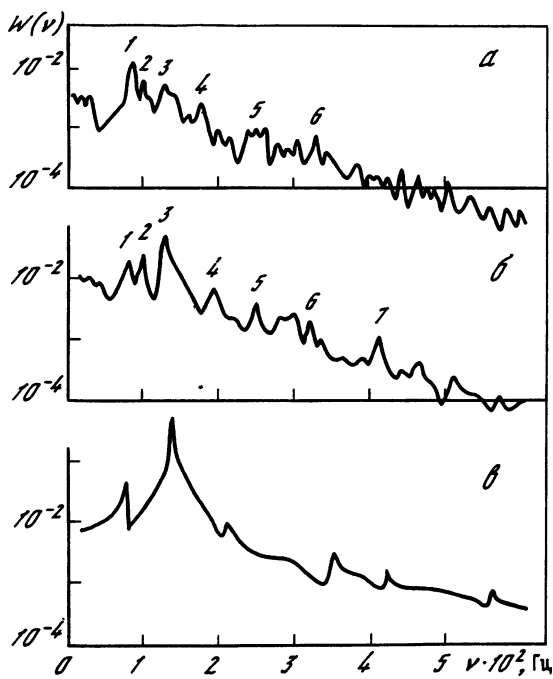
Р и с. 3.2. Профили температуры в диаметральном сечении

движения и направление циркуляции жидкости в ячейках могут сохраняться и после изменения знака α . Две такие области изображены на карте в квадранте $\alpha < 0$. Полная карта режимов получится в том случае, если все границы областей на рис. 3.1 зеркально отразить относительно линии $\alpha = 0$ и изобразить все полученные области на одном рисунке.

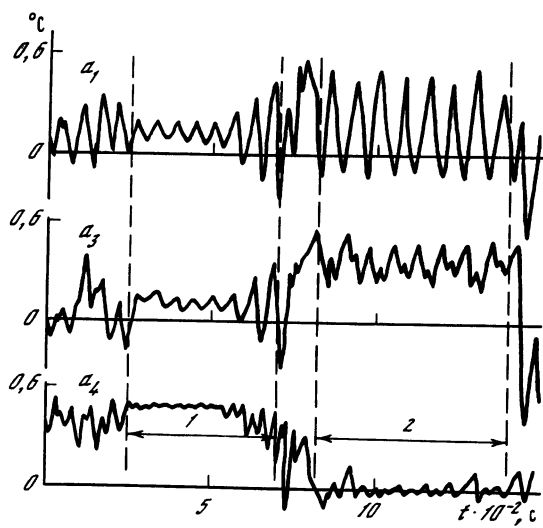
Если изменять определяющие параметры задачи достаточно малыми ступеньками вдоль некоторой траектории на плоскости R, α , то смена движения одного типа на другой происходит кризисным образом при пересечении границы области существования исходного движения. При обратном движении вдоль той же траектории новое движение меняется на исходное уже в другой точке траектории, а именно при пересечении границы области существования данного движения. Карта режимов отражает все гистерезисные явления, наблюдавшиеся при медленном изменении параметров задачи.

В тех случаях, когда после пересечения границы области существования исходного движения система попадает в зону наложения нескольких областей, из всех возможных режимов на смену исходному появляется тот, который наиболее близок к нему по числу конвективных ячеек. Таким образом, пользуясь картой, легко выбрать траекторию, которая обеспечит в данной области любой из возможных в ней режимов конвекции.

Возможности количественных измерений для стационарных режимов на данной модели сводились к определению профилей температуры. Для нестационарных режимов естественно было воспользоваться пространственно-временным фурье-анализом температурного распределения $T(x, t)$



Р и с. 3.3. Временные энергетические спектры первой пространственной мод



Р и с. 3.4. Временные реализации амплитуд пространственных мод

в среднем сечении полости. Мгновенные профили температуры разлагались в ряды Фурье:

$$T(x, t) = \sum_n a_n(t) S_n(x), \quad (3.2)$$

$$S_n = \sqrt{\frac{2}{D}} \sin \frac{\pi(n+1)x}{D}. \quad (3.3)$$

Регистрировались достаточно длинные реализации коэффициентов $a_n(t)$, а затем по стандартным методикам [174] вычислялись временные спектры $W_n(\nu)$.

Спектры колебательных режимов с доминирующей пространственной частотой имеют хорошо выраженные пики, соответствующие системе кратных частот. Номер доминирующей пространственной гармоники определялся по максимуму величины $\langle a_n^2 \rangle$. В данных экспериментах наблюдались колебания с доминированием трехъячейстой структуры — 3К и четырехъячейстой — 4К.

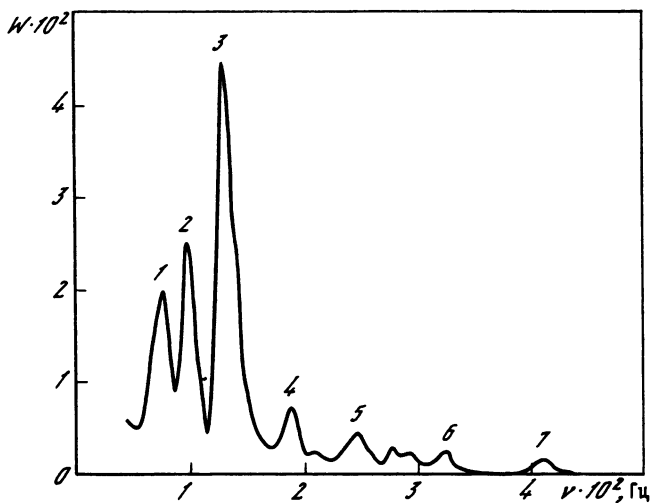
Режим конвекции в области С отличается перемежаемостью пространственных мод. Временные спектры в этом случае более сложные. На рис. 3.3 приведены временные энергетические спектры низшей пространственной гармоники для режима С (кривые а, б) и режима 3К (кривая в). Положение нескольких первых пиков в спектрах для режима С можно отождествить с частотой колебаний амплитуды $a_1(t)$ на отдельных отрезках временной зависимости коэффициентов $a_n(t)$. Фрагмент такой записи для трех амплитуд приведен на рис. 3.4. На отрезке 1 имеется большая постоянная составляющая величины a_4 , а частота колебаний амплитуды соответствует пику $N = 4$ в спектре $W_1(\nu)$. На отрезке 2 доминирует пространственная мода a_3 . Движение a_4 подавлено, а частота колебаний $a_1(t)$ соответствует пику $N = 3$.

Для удобства восприятия относительной величины пиков в спектре стохастических колебаний на рис. 3.5 приведен спектр $W_1(\nu)$ в натуральном масштабе. Номера 2, 3, 4, присвоенные пикам, совпадают с номерами доминирующих пространственных мод на тех отрезках зависимостей $a_n(t)$, где наблюдаются колебания моды a_1 с частотами, соответствующими данным пикам. В то же время нумерация пиков 1–5 соответствует порядку их следования в спектре. Небольшой двугорбый пик, лежащий ниже огибающей, проходящей по вершинам пиков 1–7, опущен. В этом случае зависимость частоты ν_n от номера пика n плавная (рис. 3.6). На том же рисунке представлена зависимость частоты от квадрата номера пика в серии. В этих координатах зависимость оказывается линейной.

Для каждого набора определяющих параметров R и α находилась корреляционная матрица $\mathcal{P}_{nm} = \langle a_n a_m \rangle$ коэффициентов a_n в разложении профилей температуры по синусоидальным функциям. Оказывается, что для всех режимов конвекции в исследованном диапазоне R и α матрица $\mathcal{P}_{nm}$ недиагональна, т.е. коэффициенты $a_n(t)$ скоррелированы.

Статистическое описание исследуемых процессов существенно упрощается, если перейти от базиса $S_n(x)$ к новому функциональному базису $f_n(x)$, для которого коэффициенты разложения

$$T(x, t) = \sum_n b_n(t) f_n(x) \quad (3.4)$$



Р и с. 3.5. Временной спектр первой моды

не коррелируют: $\langle b_n b_m \rangle = R_{nm} \sim \delta_{nm}$. Исходный базис $S_n(x)$ подвергается ортогональному преобразованию

$$f_n(x) = \sum_m Q_{nm} S_m(x). \quad (3.5)$$

При этом коэффициенты a_n и матрица $\mathcal{P}_{nm}$ преобразуются по формулам

$$b_n = \sum_m Q_{nm} a_m, \quad (3.6)$$

$$R_{nm} = \sum_k Q_{nl} \mathcal{P}_{lk} Q_{km}. \quad (3.7)$$

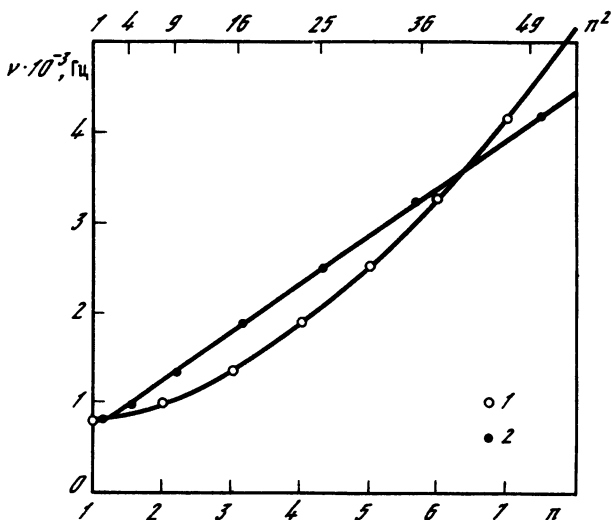
Матрица Q_{nm} находится в результате решения задачи на собственные значения

$$\sum_m \mathcal{P}_{nm} Q_{km} = \lambda_k Q_{kn}. \quad (3.8)$$

В этом случае матрица R_{nm} становится диагональной. Коэффициенты b_n являются амплитудами пространственных мод $f_n(x)$, которые далее будем называть собственными.

Применение описанной процедуры для стационарных движений приводит к матрице $\mathcal{P}_{nm} = a_n a_m$. Все собственные числа такой матрицы, за исключением одного $\lambda_k = \sum_m a_m^2 = b_k^2$, равны нулю. Индекс k определяет число ячеек, соответствующее данному типу стационарного движения. Этому собственному числу соответствует базисная функция $f_k = \frac{1}{b_k} \sum_m a_m S_m(x)$,

которая дает аппроксимацию стационарного профиля температуры конечным числом членов ряда (3.2). Базисная функция f_k зависит от R и α . Независимо от числа отсчетов на оси x , т.е. от числа рассматриваемых членов в разложении (3.2), фазовое пространство системы при переходе



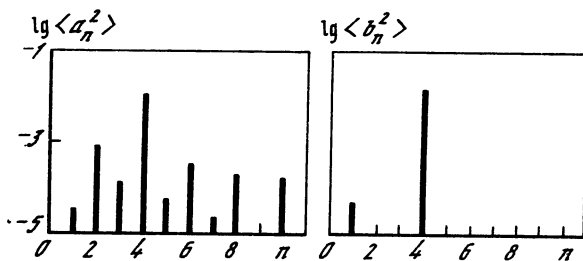
Р и с. 3.6. Зависимость частоты от номера пика (1) и от квадрата номера (2)

к базису f_n становится одномерным, а состояние системы изображается точкой на расстоянии b_k от начала координат.

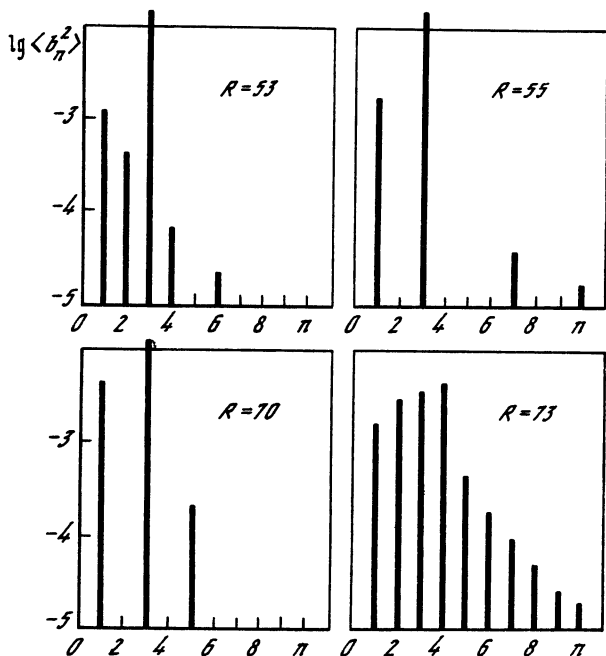
Рациональность использования базиса f_n для описания нестационарных режимов конвекции определяется тем, насколько сокращается размерность фазового пространства при переходе от S_n к f_n . На рис. 3.7 приведены спектры $\langle a_n^2 \rangle$ и $\langle b_n^2 \rangle$ для $R = 70$ и $\alpha = 30'$. За единицу измерения амплитуд $\langle a_n^2 \rangle$ и $\langle b_n^2 \rangle$ принята величина AD . Нижняя граница диаграммы выбрана на уровне 10^{-5} , соответствующем уровню шумов в отсутствие конвекции. Этот уровень определялся при $\alpha = 0$. Как видно из диаграммы, разложение (3.2) дает девять значимых коэффициентов, хотя собственных мод всего две. Доминирующей является четвертая мода.

Если о кризисных изменениях течения судят только по появлению новых независимых гармоник во временных спектрах, то кризисные изменения пространственной структуры могут остаться незамеченными, например при синхронизации колебаний всех мод доминирующей пространственной модой. Кризисные изменения пространственной структуры трудно обнаружить и по спектрам $\langle a_n^2 \rangle$. Наиболее чувствительны к перестройке течения спектры $\langle b_n^2 \rangle$.

На рис. 3.8 представлена эволюция пространственного спектра $\langle b_n^2 \rangle$ с увеличением числа Релея при $\alpha = 0$. Первые три спектра относятся к колебательному режиму конвекции с доминированием третьей моды. Второе место по величине среднеквадратичной амплитуды занимает первая мода. С ростом числа Релея среднеквадратичная амплитуда первой моды возрастает, достигая вблизи порога возникновения стохастического режима уровня, равного примерно 60% среднеквадратичной амплитуды третьей моды. Четвертый спектр, приведенный на рис. 3.8, соответствует стохастическому режиму при $R = 73$. В этом случае возбуждены все собственные пространственные моды, которые могли быть зарегистрированы в данном эксперименте. При дальнейшем увеличении числа Релея огибающая



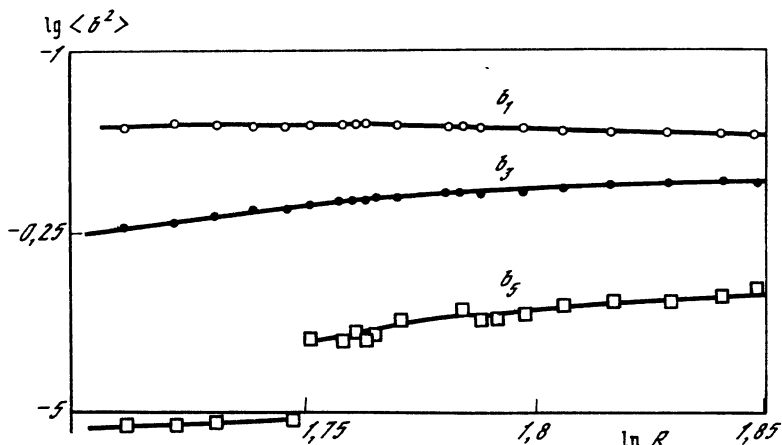
Р и с. 3.7. Изменение спектра при переходе к собственному базису



Р и с. 3.8. Пространственные спектры

дискретного спектра $\langle b_n^2 \rangle$ приобретает вид, характерный для диссипативного интервала пространственного спектра развитой турбулентности [116].

Порог возбуждения стохастического режима определяется параметрами R и α и не зависит от того, какова структура предшествующего ему движения. Например, как видно из рис. 3.1, режим C возникает при $\alpha = 40'$ как из стационарного движения 1, так и из колебательных режимов $3K$ и $4K$ при одном и том же числе Релея. При возрастании R режимы $3K$ и $4K$ исчезают в результате разрушения ячеистой структуры колебаниями крупномасштабной циркуляции жидкости, соответствующей первой моде. Об этом говорит тот факт, что вблизи границы области C среднеквадратичная амплитуда первой моды приближается к амплитуде доминирующей моды. Аналогичным образом происходит переход к режиму C от ста-



Р и с. 3.9. Кризисные изменения спектра внутри области

ционарного четырехъязычного движения. Визуальные наблюдения такого перехода показывают, что вблизи границы области C возникают колебания одноязычной циркуляции жидкости, которые разрушают четырехъязычное движение. Колебательный режим с доминированием первой моды не устанавливается из-за его неустойчивости к более мелкомасштабным возмущениям. В области C недалеко от ее границы наблюдается перемежаемость пространственных мод.

Внутри областей, изображенных на рис. 3.1, наблюдаются кризисные изменения пространственной структуры движения, не сопровождающиеся сменой доминирующей моды. На рис. 3.9 приведена зависимость амплитуд трех нечетных мод от числа Релея внутри области $3K$ при $\alpha = 0$. Амплитуды первой и третьей моды изменяются монотонно, а пятая мода возбуждается жестко, возникая с конечной амплитудой при $R = 56$. При $R < 56$ ее амплитуда остается ниже уровня шумов. С появлением пятой моды скорость роста $\langle b_1^2 \rangle$ становится меньше, а $\langle b_3^2 \rangle$ начинает уменьшаться с ростом R . Чем больше α , тем при больших R возбуждается пятая мода.

Если, оставаясь в области $3K$, уменьшать число Релея, то при подходе к границе области 4 в пространственном спектре начинают возрастать четные моды. Это видно из сопоставления спектров при $R = 51$ и $R = 53$ на рис. 3.8. При $R = 49$ устанавливается четырехъязычное стационарное движение.

Пространственные спектры в области $4K$ исследованы при $\alpha = 30'$. Если $R < 71$, то в спектрах присутствуют лишь четвертая и первая моды (см. рис. 3.7). При $R = 71$ мягко возбуждается седьмая мода. С увеличением числа Релея среднеквадратичная амплитуда доминирующей четвертой моды уменьшается, как и в случае режима $3K$, а $\langle b_1^2 \rangle$ и $\langle b_7^2 \rangle$ увеличиваются. Перед возникновением стохастического режима $\langle b_1^2 \rangle$ примерно в 3 раза меньше, чем $\langle b_4^2 \rangle$, тогда как внутри области $4K$ они отличаются более чем в 100 раз (см. рис. 3.7).

С помощью аналоговой схемы, позволяющей выделять собственные моды в реальном времени, были зарегистрированы временные реализа-

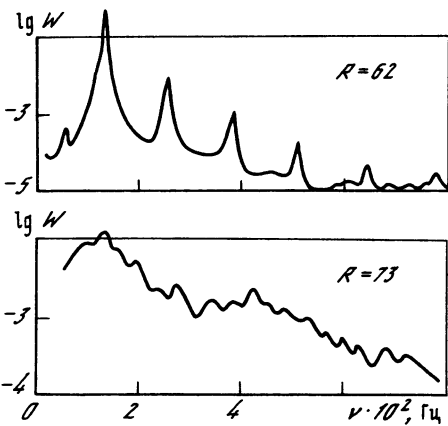


Рис. 3.10

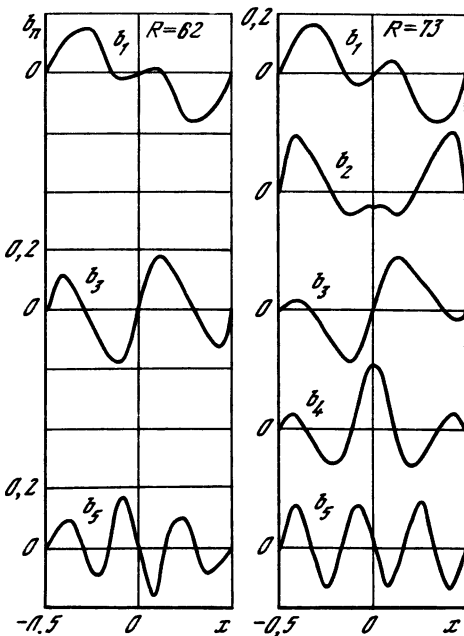


Рис. 3.11

Рис. 3.10. Временные спектры амплитуды первой собственной моды

Рис. 3.11. Собственные функции

ции пульсаций первой, третьей и пятой собственных мод в режиме 3K при $\alpha = 0$. Анализ этих реализаций показывает, что знак у амплитуды третьей доминирующей моды сохраняется во времени. Знаки у амплитуд первой и пятой мод изменяются, хотя обе эти моды имеют постоянные составляющие. Во временных спектрах амплитуд $b_1(t)$, $b_3(t)$ и $b_5(t)$ наблюдаются одинаковые частоты. Различие состоит лишь в соотношениях кратных гармоник и ширине пиков.

На рис. 3.10 приведены временные спектры первой моды при $\alpha = 0$ и двух значениях числа Рейля. При $R = 62$ спектр имеет пики на кратных частотах. Колебания не строго периодические, пики широкие, значительный уровень имеет фоновая составляющая. Во временном спектре первой моды при $R = 73$, когда режим становится стохастическим, кратных частот нет, спектр сплошной. В пространственном спектре для такого режима возбуждены все собственные моды ($R = 73$, см. рис. 3.8). Таким образом, стохастический режим ха-

рактеризуется случайным поведением системы как во времени, так и в пространстве.

Отметим, что режим C отличается от стохастических режимов конвекции, описанных в [5], при которых в колебаниях участвует небольшое число мод, а стохастичность наблюдается только временная. Пространственная структура движения остается сравнительно простой. В данных экспериментах режимами, подобными описанным в [5], являются 3K, 4K.

На рис. 3.11 приведены нормированные собственные функции b_n для квазипериодического конвективного сечения при $R = 62$ и стохастического режима при $R = 73$ и $\alpha = 0$. В обоих случаях собственные моды существенно отличаются от синусоидальных.

3.2. КУБИЧЕСКАЯ ПОЛОСТЬ

Конвективные течения, возникающие в результате кризиса механического равновесия жидкости в подогреваемой снизу замкнутой полости, обладают рядом интересных особенностей, связанных с возможностью существования различных типов движения при одних и тех же внешних условиях. Дискретность спектра критических движений в замкнутой полости существенно облегчает выяснение факторов, определяющих ту или иную структуру движения в надкритической области.

Конвективная неустойчивость в кубической полости исследовалась теоретически в [34] и экспериментально в [124, 138]. В [34] методом Галеркина найдены числа Релея и критические движения, соответствующие трем нижним уровням неустойчивости. Рассмотрены два предельных случая — идеально теплопроводных и теплоизолированных границ. В обоих случаях температурные возмущения не проникают в окружающий полость массив, что существенно упрощает решение задачи.

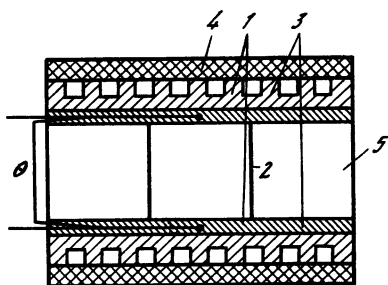
Эксперименты выполнены с дистиллированной водой, заполняющей кубическую полость в прямоугольном плексигласовом блоке, на границах которого задавалась постоянная разность температур. Отношение теплопроводностей жидкости и массива составляло 3,26. В надкритической области наблюдались конвективные движения, обладающие симметрией, которая рассматривается в теории. Из-за отсутствия расчетов для случая, когда тепловые возмущения проникают в массив, количественное сопоставление результатов не проводилось.

Конструкция модели в работе [138] обеспечивала более точное выполнение условий механического равновесия жидкости; граничные условия для возмущений температуры и скорости соответствовали рассматриваемому в [34] случаю твердых, идеально теплопроводных границ.

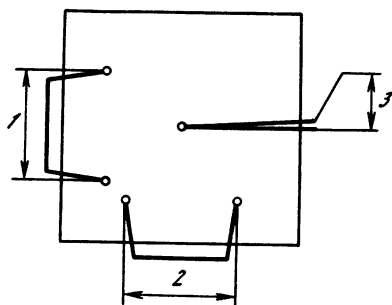
Необходимым условием механического равновесия неравномерно нагретой жидкости является постоянство и вертикальность градиента температуры по всему объему жидкости [32]. Для случая кубической полости это означает, что температура ее боковых стенок должна изменяться с высотой по линейному закону, достигая максимального значения на нижней горизонтальной границе и минимального на верхней. Распределение температуры на горизонтальных гранях полости должно быть однородным.

Конструкция модели схематически изображена на рис. 3.12. Кубическая полость с ребром 40 мм была образована двумя медными пластинами 1 толщиной 5 мм и припаянными к ним боковыми стенками 2 из листовой меди толщиной 1 мм. Разность температур θ между горизонтальными поверхностями полости поддерживалась с помощью двух теплообменников, состоящих из медных пластин 3 толщиной 15 мм и теплоизолирующих крышек 4. Пластины теплообменников имели каналы, по которым прокачивалась вода от ультратермостатов. Для обеспечения хорошего теплового контакта между теплообменниками и пластинами 1 помещался тонкий слой графитовой пасты.

Однородное распределение температуры на горизонтальных гранях полости обеспечивалось благодаря массивности и высокой теплопроводности теплообменников и пластин 1, а также благодаря сравнительно



Р и с. 3.12. Схема кубической ячейки



Р и с. 3.13. Расположение термопар в средней горизонтальной плоскости

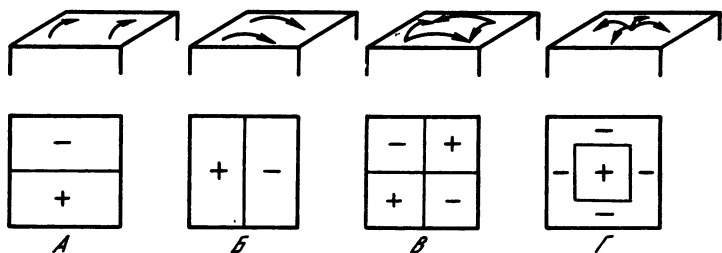
малому потоку тепла вдоль боковых стенок модели. Толщина стенок была выбрана с учетом двух противоречивых требований. При малой толщине стенок теплоотдача в окружающую среду существенно искажает линейное распределение температуры на вертикальных гранях полости, а при большой нарушается изотермичность горизонтальных границ. Для уменьшения теплоотдачи боковых стенок использовался пенопластовый блок 5.

Модель устанавливалась на горизонтальную подставку, которую с помощью регулировочных винтов можно было наклонять в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

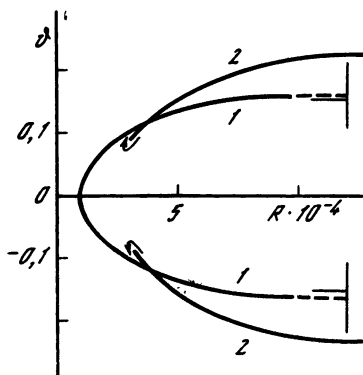
Для идентификации конвективного движения в среднем горизонтальном сечении полости были установлены три дифференциальные термопары. Расположение спаев показано на рис. 3.13. По разностям температур, измеряемым этими термопарами, можно было судить о симметрии и интенсивности крупномасштабных конвективных движений.

Надкритические движения в кубической полости обладают симметрией критических возмущений. На рис. 3.14 стрелками показано направление движения жидкости в верхней части полости для трех критических возмущений, имеющих наиболее низкие уровни устойчивости. Знаком "плюс" обозначены области в среднем горизонтальном сечении, где температура выше, чем при равновесии, а знаком "минус" — где ниже. Критические числа Релея R , соответствующие этим возмущениям, по данным работы [34], равны для A и B 8224, для B 9184 и для Γ 14 032. За единицу температуры принята разность температур между горизонтальными гранями полости, а за единицу длины — ребро куба. Первый уровень вырожден четырехкратно: критические возмущения отличаются друг от друга положением границы раздела восходящего и нисходящего потоков и направлением циркуляции жидкости. Второй и третий уровни вырождены двукратно.

Сравнивая расположение термопар и областей понижения и повышения температуры, можно убедиться, что всем критическим возмущениям соответствуют различные комбинации показаний термопар. Если же рассматривать линейные комбинации критических возмущений, то одно-



Р и с. 3.14. Схема надкритических течений



Р и с. 3.15. Зависимость амплитуд пространственных мод от числа Рейля при подогреве точно снизу

значность частично нарушается, однако в надкритической области таких движений в стационарных условиях не наблюдалось.

Опыты проводились в квазистационарных режимах. Скорость изменения вертикальной разности температур Θ выбиралась такой, чтобы результаты контрольных опытов, выполненных в стационарных условиях, совпадали с квазистационарными. Показания термопар записывались на фотобумагу с помощью низкочастотного терморегистратора НТР-70.

При установке модели по точному уровню конвективное движение, возникающее в критической точке, всегда имеет определенное направление циркуляции жидкости, что говорит о снятии вырождения нижнего уровня неустойчивости в результате погрешностей, допущенных при изготовлении модели и отступлении от идеализированных условий подогрева. Однако, отклоняя модель на углы порядка нескольких десятков секунд, удавалось найти такое положение модели, при котором в критической точке все четыре движения, соответствующие нижнему уровню неустойчивости, появлялись примерно с одинаковой вероятностью. Такое положение модели считалось горизонтальным.

Результаты измерений представлялись в виде зависимости безразмерных разностей температуры ϑ_i в среднем горизонтальном сечении полости от числа Рейля. На рис. 3.15 приведена такая зависимость для случая подогрева точно снизу. Кривая 1 соответствует движениям типа А или Б. Для всех четырех движений этого типа отлична от нуля только одна из разностей температур ϑ_i , а именно ϑ_1 для движения А и ϑ_2 для движения Б. Величина одинакова для всех движений типа А и Б, но отличается знаком

для движений с противоположным направлением циркуляции. Фотозаписи размерных разностей температур представляют собой плавные кривые, поэтому на графиках, построенных по результатам обработки термограмм, экспериментальные точки не отмечены.

Критическое число Релея для движений типа *A* и *B*, определенное по данным опытов, оказалось равным 7800 ± 100 . Если учесть, что метод Галеркина всегда дает завышенное значение критических чисел, то согласованность экспериментального и расчетного чисел Релея можно считать удовлетворительной.

В надкритической области безразмерная разность температур (кривая 1 на рис. 3.15), характеризующая интенсивность конвективного движения типа *A*, пропорциональна $\sqrt{R - R_A}$, что находится в соответствии с законом Ландау [104]. Указанная пропорциональность наблюдается вплоть до $R = 5 \cdot 10^4$. При $R > 10^5$ возникают регулярные колебания разности температур ϑ_1 с периодом 15 с, которые продолжаются неограниченно, если зафиксировать число Релея. Амплитуда колебаний достигает $0,5 \vartheta_1$. Заметного изменения частоты с ростом R не наблюдается. Режим колебаний аналогичен режимам для плоской ячейки.

При дальнейшем увеличении числа Релея колебательное движение типа *A* переходит в одно из движений типа *B*. На рис. 3.15 такие переходы показаны стрелками, а области колебаний — пунктиром. Кривая 2 соответствует движению типа *B*. В этом случае $\vartheta_1 = \vartheta_2$, а $\vartheta_3 = 0$, поэтому на графике приведена только зависимость $\vartheta_1(R)$. Движение типа *B* устойчиво вплоть до $R = 3,14 \cdot 10^5$. Затем кризисным образом возникают нерегулярные колебания, характерные для стохастического режима конвекции.

При уменьшении числа Релея наблюдается обратный переход от движения типа *B* к движению типа *A*, но уже при значительно меньших R , чем переход от *A* к *B*. Таким образом, в диапазоне чисел Релея от $3 \cdot 10^4$ до $12 \cdot 10^4$ могут устойчиво существовать оба типа движений. Такой же результат был получен ранее на водяной модели [124, 138].

Интерполяция кривой 2 на значение $\vartheta_1 = 0$ дает $R_B = 1,32 \cdot 10^4$, что на 6% ниже значения, вычисленного в [34]. Движение типа *Г* в опытах не наблюдалось, хотя критическое число Релея в этом случае меньше, чем для движения типа *Г*. Возможность существования и устойчивость движения типа *Г* в данной работе не исследовались, так как конструкция модели не позволяла вносить контролируемые возмущения, обладающие симметрией движения типа *Г*, а спонтанного возникновения такого движения не происходило.

Как уже отмечалось выше, даже небольшие отклонения от идеализированных условий подогрева влияют на поведение надкритических движений. В данной работе исследовалось влияние малых угловых отклонений полости от положения равновесия. Этот вопрос рассматривался ранее аналитически и путем численного решения уравнений конвекции в [178, 179].

В наклонной полости конвективное движение наблюдается уже при сколь угодно малых числах Релея. Однако чувствительность используемого метода позволяла наблюдать движение только при $R > 0,5 R_A$. Это движение обладает симметрией первого критического возмущения. Циркуляция жидкости определяется направлением поворота: жидкость

поднимается в приподнятой части полости и движется вниз в опущенной. Вблизи критического числа Релея резко возрастает интенсивность движения. Направление циркуляции жидкости остается при этом неизменным.

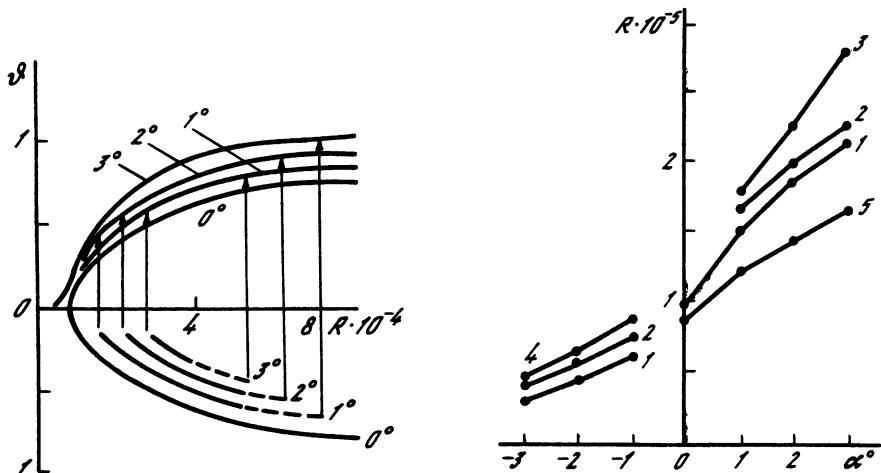
При квазистационарном изменении числа Релея наблюдается только описанное выше основное движение. Однако в некотором диапазоне чисел Релея возможно существование метастабильного движения с противоположным направлением циркуляции жидкости [179]. В экспериментах такое движение удавалось возбуждать следующим образом. До включения подогрева полость наклонялась в противоположном необходимому направлении, после чего устанавливалась некоторая разность температур, а затем медленно, чтобы вязкая волна от стенок не изменила направления циркуляции, полость поворачивалась в нужном направлении на заданный угол. В определенном диапазоне чисел Релея, зависящем от угла наклона полости, движение с направлением циркуляции, противоположным основному, могло существовать неограниченно долго. Интенсивность такого движения меньше, чем основного.

Результаты опытов с наклонной плоскостью приведены на рис. 3.16. Углы наклона модели в градусах поставлены над соответствующими кривыми. Положительные значения ϑ относятся к основному движению, а отрицательные — к метастабильному.

При квазистационарном уменьшении числа Релея сначала уменьшается интенсивность метастабильного движения, а затем происходит переход к основному движению. Граница раздела восходящего и нисходящего потоков поворачивается при этом вокруг вертикальной оси. Если же после возбуждения метастабильного движения медленно увеличивать число Релея, то вначале возникают конвективные колебания. Их амплитуда с увеличением числа Релея возрастает, и при некотором R , зависящем от угла наклона, происходит переход к основному движению. Области стационарных колебаний на рис. 3.16 отмечены пунктиром. Стрелками показаны переходы от метастабильного движения к основному. С ростом угла наклона область существования метастабильных движений уменьшалась, а при углах наклона, превышающих 4° , возбудить метастабильное движение не удавалось.

Основное движение типа *A* или *B* с ростом числа Релея переходит в колебательное движение с одной или двумя независимыми частотами во временном спектре. При дальнейшем увеличении R кризисным образом возникают стохастические колебания.

Таким образом, в кубической полости, как и в плоской ячейке, можно наблюдать механическое равновесие жидкости при подогреве строго снизу, стационарные надкритические движения различной пространственной структуры, колебательные режимы конвекции с доминирующей пространственной модой и стохастические колебания. На рис. 3.17 приведена карта режимов. Значения $\alpha > 0$ соответствуют основным движениям типа *A* и *B*, а $\alpha < 0$ — метастабильным. Кривая 1 соответствует переходу от стационарного движения *A* или *B* к колебательному режиму с одной независимой частотой во временном спектре, 2 — к двухчастотному режиму, 3 — к режиму стохастических колебаний. На кривой 4 происходит переход от метастабильного движения типа *A* или *B* к основному при увеличении R , а на



Р и с. 3.16. Поведение амплитуд пространственных мод при малых наклонах полости

Р и с. 3.17. Карта режимов конвекции в кубической полости

кривой 5 — переход от одночастотных колебаний к стационарному движению при уменьшении R .

Простейшая система индикации, состоящая из четырех термопар, не позволяла более подробно исследовать нестационарные режимы конвекции. В дальнейших опытах на той же модели использовалась более густая сетка термопар и система автоматической регистрации и ввода данных в ЭВМ, что позволило выполнить пространственно-временной анализ конвективных колебаний.

Термопары располагались в среднем горизонтальном сечении полости в узлах квадратной сетки с шагом $H/4$. Из 25 узлов этой сетки 12 лежат на границе области, поэтому внутри полости располагалось только 9 термопар. Опыты показали, что даже установка пяти добавочных термопар по сравнению с прежней системой индикации привела к увеличению критического числа Релея на 28%, хотя отводящие провода термопар диаметром 0,05 мм имели поверхность, составляющую 0,5% общей площади поверхностей теплообмена, и занимали 10^{-5} объема полости. Качественная картина переходов в надкритической области осталась прежней. Меньше изменились и количественные характеристики в надкритической области. Так, число Релея, при котором движение типа A переходит в движение типа B , возросло только на 12%. Тем не менее очевидно, что существенно уменьшить шаг термопарной сетки было нельзя.

Сигналы термопар подавались на вход аналогового устройства, выполнявшего дискретное преобразование Фурье по пространственным переменным. Подробно эта система описана в [70]. Дискретное преобразование соответствовало разложению поля температуры в среднем горизонтальном сечении $T(x, y)$ по следующим базисным функциям:

$$T_A = \sin 2\pi \frac{x}{H} \sin \pi \frac{y}{H},$$

$$T_B = \sin \pi \frac{x}{H} \sin 2\pi \frac{y}{H},$$

$$T_B = \sin 2\pi \frac{x}{H} \sin 2\pi \frac{y}{H},$$

$$T_\Gamma = \left[\frac{9}{16} - \left(\frac{x}{H} - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{y}{H} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \sin \pi \frac{x}{H} \sin \pi \frac{y}{H}.$$

Временные зависимости амплитуд четырех низших пространственных мод записывались на фотобумагу с помощью терморегистратора НТР-70. Кроме временных зависимостей, с помощью двухкоординатного самописца строились проекции фазовых траекторий системы на плоскости, соответствующие различным парам пространственных мод. Для получения временных спектров амплитуд пространственных мод сигналы T_i вводились в ЭВМ. Ниже приведены результаты измерений для угла наклона модели $\alpha = 2^\circ$. При этом угле наклона можно выделить все типы конвективных движений, характерных для других наклонов, а именно: стационарные движения, колебания, близкие по форме к синусоидальным, двухчастотные колебания и нерегулярные стохастические колебания.

Стационарное конвективное движение теряет устойчивость по отношению к колебательным возмущениям для $\alpha = 2^\circ$ при $R = 1,85 \cdot 10^5$.

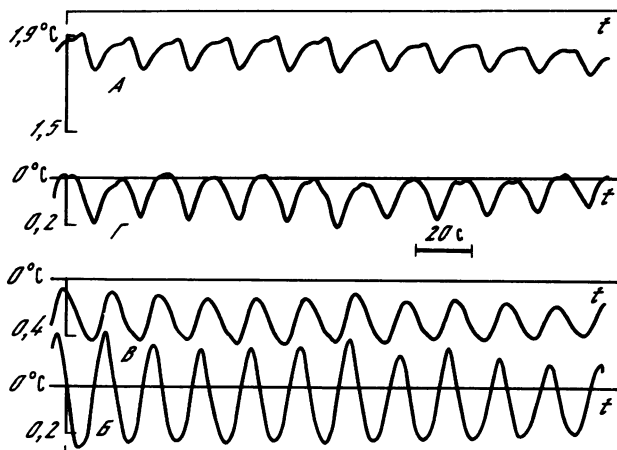
Фотозапись колебаний всех четырех мод (A , B , V , Γ) была сделана при $R = 1,99 \cdot 10^5$ и приведена на рис. 3.18. Осредненное движение представляет собой валообразное течение типа A , о чем свидетельствует большая постоянная составляющая сигнала, регистрируемого первым блоком термопар. Направление движения определяется наклоном модели. На фоне такого движения наблюдаются почти периодические сигналы, форма которых близка к синусоидальной. Амплитуда колебаний движения B приблизительно вдвое больше амплитуд колебаний остальных трех движений. Хорошо заметно, что даже при таком простом движении в колебаниях участвуют все четыре регистрируемые моды.

Фазовые траектории колебаний приведены на рис. 3.19. Колебания (A , B), (B , V), (B , Γ) происходят в противофазе, колебания (A , Γ), (B , Γ) — в фазе.

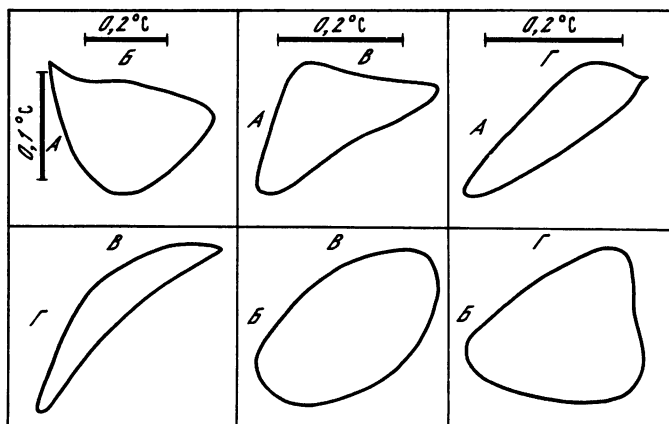
Энергетические спектры колебаний $W(\nu)$ (рис. 3.20) носят линейчатый характер. Первый пик (на частоте 0,054 Гц) соответствует периоду колебаний, равному 18,5 с, а второй пик — удвоенной основной частоте. Из рис. 3.18 хорошо заметно, что колебания не являются строго периодическими, это приводит к тому, что спектральные максимумы немного расширены.

Следующая серия измерений проведена для $R = 2,24 \cdot 10^5$. На рис. 3.21 приведены фотозаписи таких колебаний, а на рис. 3.22 — их спектральные характеристики. Иллюстрации свидетельствуют о наличии двух характерных частот.

Поведение спектральной функции при $R = 2,24 \cdot 10^5$ (сплошные линии на рис. 3.22) и при $R = 1,99 \cdot 10^5$ (пунктирные линии) в области низких частот свидетельствует о подобии формы низкочастотных колебаний с периодом 22,2 с (с частотой 0,0451 Гц). Это позволяет сделать вывод,



Р и с. 3.18. Фотозапись одночастотных колебаний

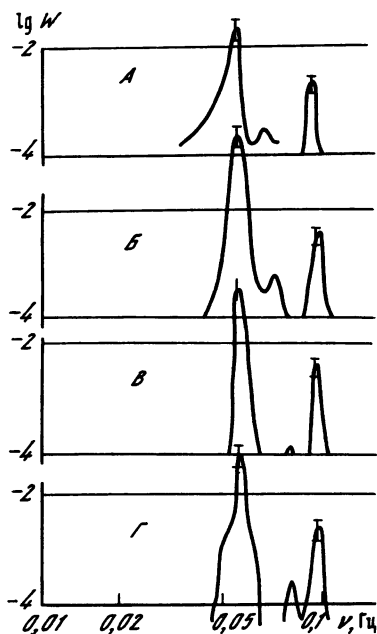


Р и с. 3.19. Фазовые траектории одночастотных колебаний

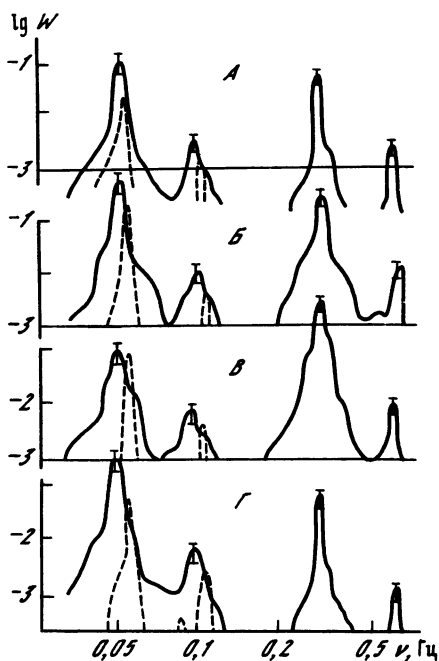
что колебания, наблюдаемые при $R = 1,99 \cdot 10^5$, сохраняются при $R = 2,24 \cdot 10^5$.

Высокочастотная компонента пульсаций (частота 0,304 Гц, период 3,29 с) имеет наибольшую амплитуду для движения типа В. Как и в случае $R = 1,99 \cdot 10^5$, спектральные максимумы уширены, что свидетельствует об отклонении формы колебаний от строго периодической.

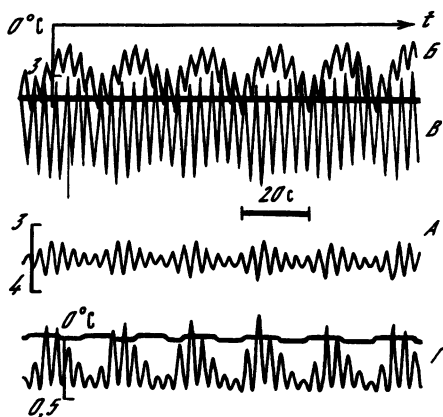
На рис. 3.23 представлены фазовые траектории колебаний при $R = 2,24 \cdot 10^5$, построенные за интервал времени, равный 22,2 с и соответствующий одному периоду колебаний низкой частоты. В рассматриваемом случае взаимодействие различных мод является уже более сложным, чем при $R = 1,99 \cdot 10^5$. Колебания (А, В), (А, Г) происходят в противофазе, а (В, Г) — в фазе. Движение типа В в первую половину интервала наблюдения колеблется в фазе с В и Г и в противофазе с А, а во вторую половину —



Р и с. 3.20



Р и с. 3.22



Р и с. 3.21

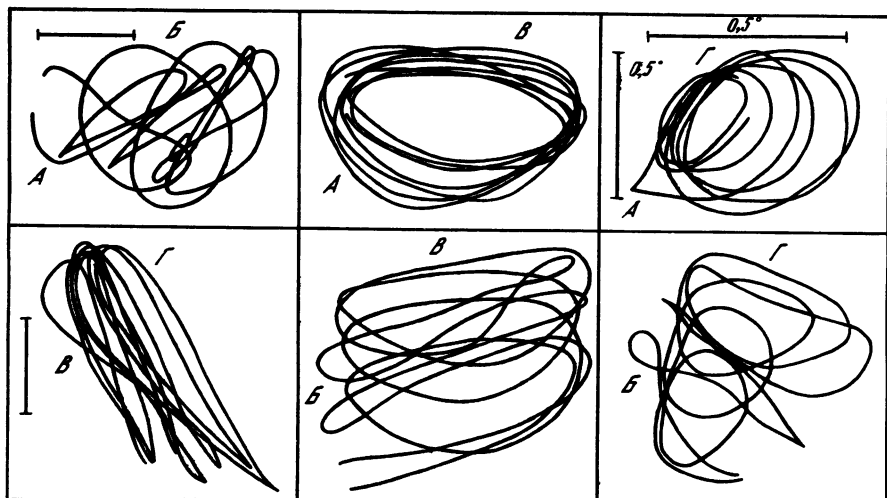
Р и с. 3.20 Спектры одночастотных колебаний

Р и с. 3.21. Фотозапись двухчастотных колебаний

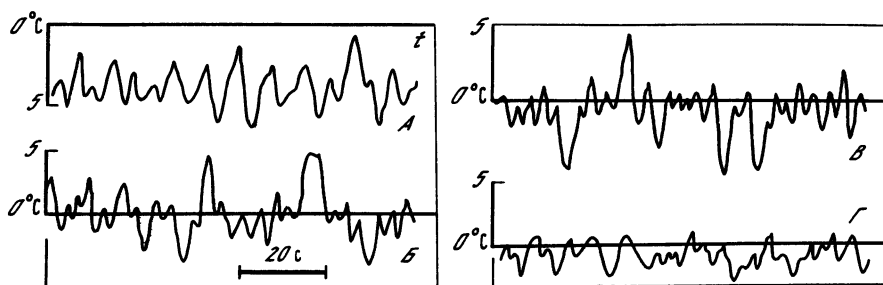
Р и с. 3.22. Спектры двухчастотных колебаний

в противофазе с *В* и *Г* и в фазе с *А*. Так как периоды высокочастотных колебаний (3,29 с) и низкочастотных (22,2 с) не кратны, то замыкание фазовых траекторий (строго говоря, не совсем точное) происходит через шесть периодов колебаний низкой частоты. Отклонение от строгой периодичности также приводит к расширению спектральных линий (см. рис. 3.22).

Хотя конвективное движение при $R = 2,24 \cdot 10^5$ намного сложнее, чем при $R = 1,99 \cdot 10^5$, его все же нельзя отнести к стохастическим или турбу-



Р и с. 3.23. Фазовые траектории двухчастотных колебаний

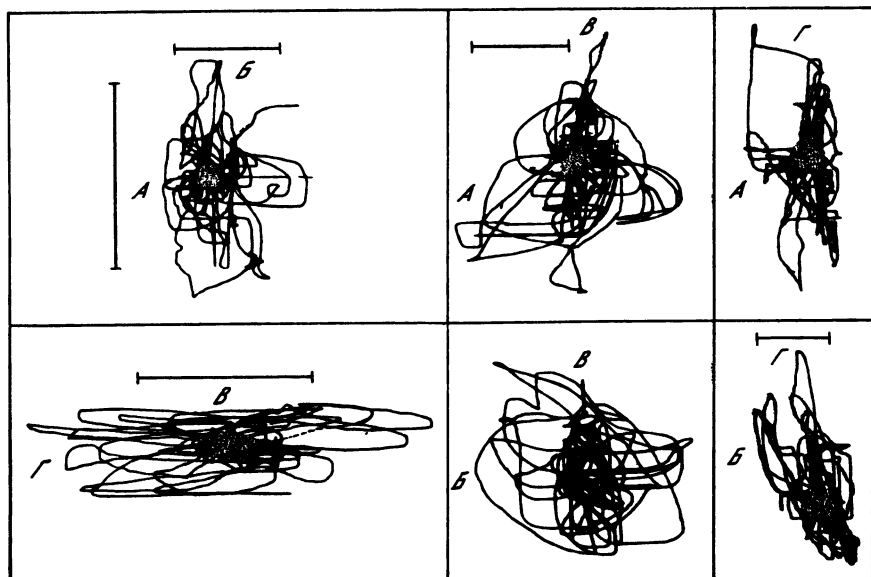


Р и с. 3.24. Фотозапись стохастических колебаний

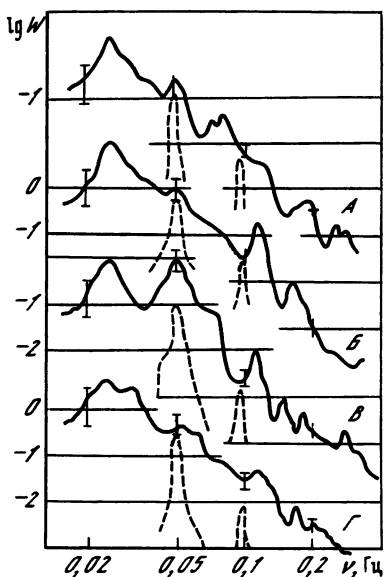
лентным. Напротив, поведение системы во времени может быть предсказано с точностью до небольших отклонений.

Движение становится стохастическим при $R = 2,50 \cdot 10^5$. Запись показаний термопарных блоков приведена на рис. 3.24. Постоянная составляющая сигнала T_A свидетельствует о наличии осредненного течения. Хотя по фотозаписям можно определить характерную частоту колебаний температуры, поведение системы нельзя предсказать точно. Фазовые траектории (рис. 3.25) также подтверждают сложный и неповторяющийся характер движения.

Существенно изменились временные спектры колебаний при стохастическом движении (рис. 3.26). Спектр колебаний стал сплошным. Отдельные пики на спектральной кривой свидетельствуют о сохранении периодических когерентных колебаний, наблюдаемых при более низких числах Релея. Для сравнения на рис. 3.26 пунктирной линией изображены спектры, наблюдаемые при $R = 2,24 \cdot 10^5$. Изменение характера колебаний происходит скачком. В некоторых случаях переход наблюдался спустя 20–30 мин после установления стационарного значения.

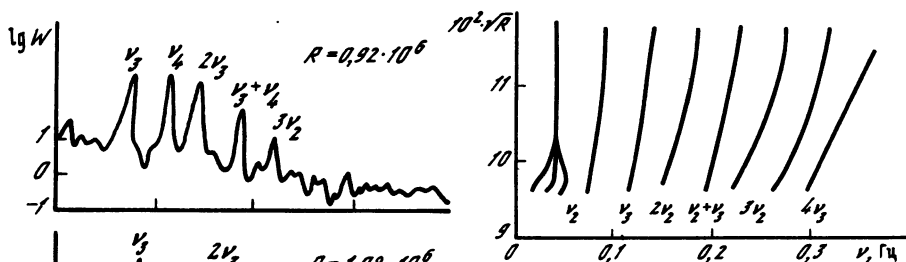


Р и с. 3.25. Фазовые траектории стохастических колебаний

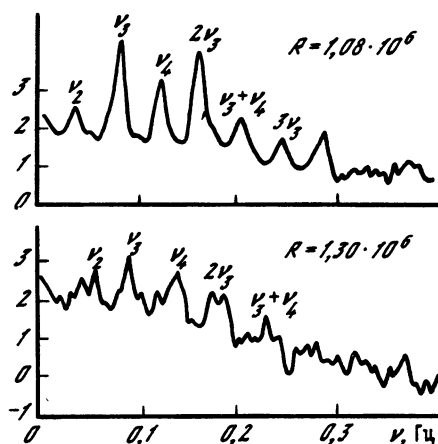


Р и с. 3.26. Спектры стохастических колебаний

Для исследования пространственно-временной структуры конвекции в режимах стохастических колебаний необходимо иметь достаточно высокое пространственное разрешение, но существенно увеличить число термпар нельзя, так как они будут менять характер движения. Поэтому для подобного исследования стохастических конвективных колебаний в трехмерной задаче термпарный метод непригоден.



Р и с. 3.27. Временные спектры



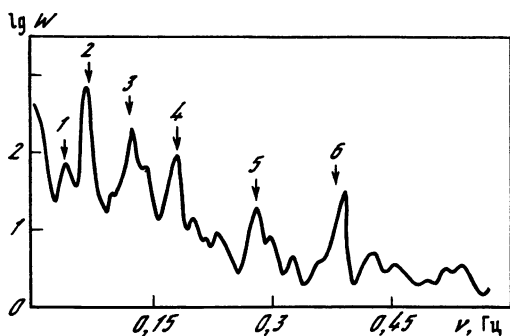
Р и с. 3.28. Зависимость частоты от числа Рейля

Р и с. 3.27

Пространственно-временные спектры стохастических колебаний в подогреваемой снизу кубической полости были измерены оптическим методом. Кубическая полость высотой 1,9 см заполнялась дистиллированной водой. Горизонтальные грани полости были образованы плоскими теплообменниками из меди, а вертикальные — пластинами из оптического стекла. Модель устанавливалась на горизонтальной платформе, имеющей вертикальную ось вращения и лимб с ценой деления 1'. Это позволяло исследовать трехмерное температурное поле в полости методами, описанными в разд. 2.3 и 2.7.

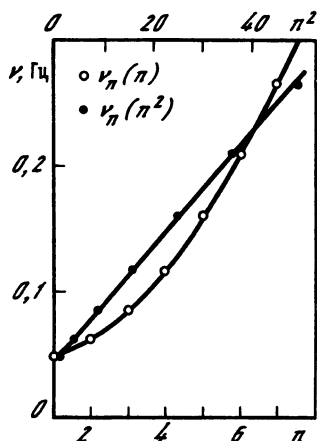
Как и в случае воздушной полости, при достаточно малых числах Рейля наблюдались стационарные конвективные движения, которые с ростом R сменялись квазипериодическими колебаниями, а затем возникали режимы стохастической конвекции. Карта режимов для числа Прандтля $P = 6,4$, при котором проводились все опыты, существенно отличалась от приведенной на рис. 3.17 для $P = 0,7$. Так, например, при подогреве строго снизу с увеличением R стохастические колебания исчезали и вновь устанавливалось стационарное конвективное движение, которое обладало довольно сложной пространственной структурой. С ростом R это движение становилось неустойчивым. Его сменял режим стохастических колебаний, который, судя по визуальным наблюдениям теневой картины, существенно отличался от режима стохастических колебаний при меньших числах Рейля.

Пространственно-временной анализ квазипериодических и стохастических конвективных колебаний выполнялся с помощью методов, опи-



Р и с. 3.29. Временной спектр

Р и с. 3.30. Зависимость частоты от номера пика



санных в разд. 2.5. При этом использовался теневой прибор "Свиль-80", настроенный для работы фотометрическим методом щели и ножа [21], и двухлучевой анализатор пространственного спектра [16] с неподвижными скрещенными дифракционными решетками с периодом $d = 0,2$ мм, установленными в плоскости теневой картины (x, y) . Дифракционные решетки создавали перестраиваемый транспарант с эффективным коэффициентом пропускания по интенсивности $h(x, y)$, равным

$$h(x, y) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \cos 2\pi \left(\eta x - \xi y - \frac{2\delta}{d} \right).$$

Пространственные частоты η и ξ можно было изменять, поворачивая решетки, а начальную фазу δ — перемещая их в направлении, перпендикулярном штрихам.

Измерения выполнялись для дискретной совокупности пространственных частот η_n, ξ_m, ζ_l , соответствующей разложению трехмерного температурного поля в кратный ряд Фурье. Реализации амплитуд пространственных гармоник вводились в ЭВМ, а затем с помощью алгоритма БПФ вычислялись их временные спектры. На рис. 3.27 приведены временные спектры $W(\nu)$ пространственной моды $(0, 1, 0)$. При $R = 0,9 \cdot 10^6$ в спектре наблюдаются отчетливо выраженные пики на двух основных частотах ν_3 и ν_4 , на комбинационной частоте $\nu_3 + \nu_4$ и на кратных частотах $2\nu_3$ и $3\nu_3$. Чтобы убедиться в наличии независимых частот и выделить комбинационные частоты, строили зависимости частот, на которых отмечаются пики в спектре, от числа Релея. Такая зависимость приведена на рис. 3.28.

Если при заданном значении R изменить пространственную частоту транспаранта и тем самым выделить другую пространственную моду температурного поля, то во временном спектре этой моды наблюдается собственная система пиков. В то же время путем сопоставления спектров можно отыскивать слабые пики на частотах, соответствующих положениям пиков других пространственных мод. Это говорит о том, что пространственные моды конвективного движения отличаются от синусоидальных.

С ростом числа Релея наблюдается несколько кризисных перестроек

временного спектра низшей пространственной моды. В верхней области стохастических колебаний в спектре имеется хорошо выраженная серия пиков с плавной зависимостью частоты от порядкового номера пика. Такой спектр для $R = 2,55 \cdot 10^6$ и подогрева строго снизу приведен на рис. 3.29, где цифрами обозначены номера пиков. Высота пиков примерно в 10 раз превышает фон. Зависимость частоты от номера пика n приведена на рис. 3.30. Эта зависимость спрямляется при использовании квадратичного масштаба по оси ν , который также приведен на рис. 3.30.

Визуальные наблюдения теневой картины и движение светорассеивающих частиц показали, что во всех фазах стохастических колебаний пространственная структура полей температуры и скорости остается сравнительно простой. Структура температурного поля сложнее, чем структура поля скорости. Так, например, на теневых фотографиях видны температурные пограничные слои у горизонтальных границ полости, в то время как динамических пограничных слоев при наблюдении светорассеивающих частиц незаметно. Это объясняется довольно большим значением числа Прандтля. Описанные режимы не относятся к режимам развитой турбулентной конвекции. В то же время пространственная стохастичность течения проявляется в том, что число и расположение вихрей меняются со временем случайным образом.

3.3. КОНВЕКТИВНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ЗАМКНУТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

В данном разделе излагаются результаты экспериментального исследования устойчивости пограничного слоя и характера движения в ядре для случая прямоугольной полости, на границах которой независимым образом задавались горизонтальная и вертикальная разности температур. Опыты выполнены в диапазоне чисел Релея от 10^6 до 10^9 ; отношение высоты полости к ее ширине изменялось от 0,3 до 1.

Прямоугольная полость составлялась из четырех плоских теплообменников, представлявших собой медные пластины толщиной 20 мм с внутренними каналами для термостатирующей жидкости. Горизонтальный размер полости L был фиксированным и равнялся 10 см, а вертикальный размер H можно было изменять, перемещая горизонтальные пластины. В местах контактов пластин устанавливались тонкие резиновые прокладки. С торцов полость закрывалась плоскопараллельными стеклянными пластинами.

Теплообменники включались независимо во внешние контуры четырех ультратермостатов. Температура на внутренних поверхностях полости измерялась с помощью медьконстантановых термопар. Для уменьшения теплообмена на торцах температуры на границах полости задавались симметрично относительно комнатной температуры: $\pm \Theta/2$ на вертикальных границах и $\pm \vartheta/2$ на горизонтальных.

Визуализация температурного поля в жидкости осуществлялась теневым методом с помощью прибора ИАБ-451. Для исследования стационарных температурных полей использовался метод щели и ножа, а для нестационарных — метод цветных полосовых фильтров с регистрацией картины на цветную кинопленку. Для наблюдения движения в жидкость запускались частицы алюминиевой пудры, а изображение щели в фокальной плоскости

теневого прибора полностью перекрывалось ножом. В этом случае прямой пучок света от коллиматора задерживается ножом, а дифрагированный свет дает изображение частиц в виде ярких точек на темном фоне.

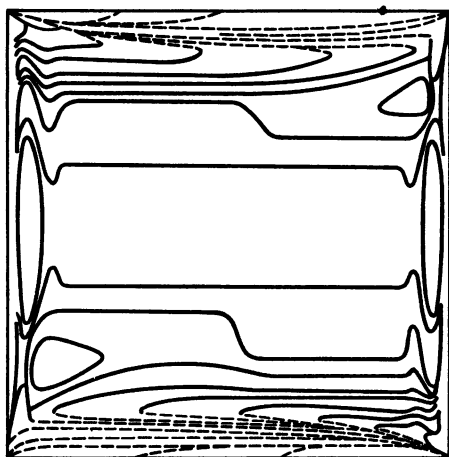
Опыты проводились сериями, каждая из которых характеризовалась постоянными значениями высоты полости H и горизонтальной разности температур Θ . Вертикальная разность температур в каждой серии уменьшалась от опыта к опыту на некоторую величину, начиная с положительного, не превышающего Θ , значения ϑ . Положительные значения ϑ соответствуют подогреву верхней и охлаждению нижней границы полости. Несмотря на это, при $\vartheta < \Theta$ вблизи горизонтальных границ полости образуются области с неустойчивой стратификацией жидкости. Элементы жидкости, прилегающие к стенкам полости и нагретые в восходящем участке пограничного слоя до температуры $\pm\Theta/2$, при движении вдоль верхней границы начинают охлаждаться до температуры $\vartheta/2$, а охладившиеся в нисходящем потоке нагреваются у нижней границы от $-\Theta/2$ до $\vartheta/2$. Температура отсчитывается от ее значения в центре полости.

Таким образом, при $\vartheta < \Theta$ на верхней границе полости жидкость охлаждается сверху, а на нижней — нагревается снизу. И то и другое приводит к образованию областей с неустойчивой стратификацией жидкости. Однако и при достаточно интенсивном движении пограничный слой может сохранять устойчивость. Такая ситуация показана на рис. 3.31, где приведены изолинии вертикального градиента температуры в полости квадратного сечения при $H = 10$ см, $\Theta = 16^\circ$, $\vartheta = 8,7^\circ$. Карта изолиний построена по результатам обработки теневых фотографий, полученных на приборе ИАБ-451 методом щели и ножа. Сплошные линии соответствуют градиенту температуры, направленному вверх, а пунктирные — градиенту температуры, направленному вниз.

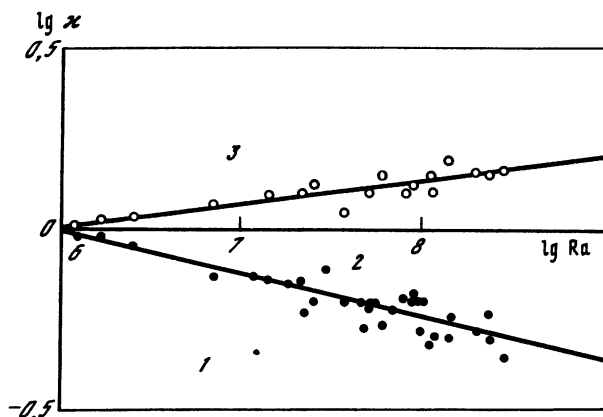
При уменьшении ϑ , начиная с некоторого значения ϑ_1 , завящего от Θ и H , в горизонтальных участках пограничного слоя появляются волнообразные возмущения, распространяющиеся в направлении движения жидкости. Попадая в вертикальные участки пограничного слоя, эти возмущения начинают затухать.

Локальная неустойчивость горизонтальных участков пограничного слоя наступает раньше, чем неустойчивость замкнутого пограничного слоя в целом. В некоторых опытах при ϑ , несколько большем ϑ_1 , с помощью проволочки, установленной в начале горизонтального участка, в поток вносились одиночные возмущения. Эти возмущения циркулировали в замкнутом пограничном слое, нарастая в горизонтальных участках и затухая в вертикальных, однако после каждого цикла, т.е. после обхода всего контура полости, их амплитуда уменьшалась и они затухали. Малые возмущения, возникающие естественным образом, в таких условиях могут и не проявляться, если за время прохождения неустойчивого участка их амплитуда не успевает достигнуть порога чувствительности используемого в эксперименте метода колебаний.

При $\vartheta < \vartheta_1$ волнообразное движение в пограничном слое становится регулярным. В центральной части полости продолжает сохраняться значительный вертикальный градиент температуры, соответствующий устойчивой стратификации жидкости в ядре, поэтому возмущения из пограничного слоя в ядро не проникают.



Р и с. 3.31. Карта изолиний градиента температуры при одновременном подогреве сбоку и снизу



Р и с. 3.32. Карта режимов конвекции при одновременном подогревании сбоку и снизу

С уменьшением ϑ градиент температуры в ядре убывает и при некотором отрицательном значении $\vartheta = \vartheta_2$, соответствующем подогреву нижней и охлаждению верхней границы, становится настолько малым, что возмущения из пограничного слоя проникают в ядро и движение в нем турбулизуется.

Обобщенные экспериментальные данные об устойчивости пограничного слоя и о переходе от ламинарного движения в ядре к турбулентному приведены на рис. 3.32. По оси абсцисс отложен логарифм числа Релея, которое определено через высоту полости H , и разность температур Θ . Определенное таким образом число Релея характеризует интенсивность циркуляции жидкости в пограничном слое [62]. По оси ординат отложен логарифм отношения $(\Theta - \vartheta)/\Theta = \chi$. Область 1 на карте устойчивости соответствует стационарному конвективному движению, 2 — волнообразным возмущениям в пограничном слое, 3 — турбулизации ядра.

Аналогичная картина неустойчивости наблюдалась ранее в горизонтальном цилиндре с синусоидальным распределением температуры на границах [63, 182]. Независимое изменение величины и положения максимума температуры на поверхности цилиндрической полости эквивалентно независимому заданию горизонтальной и вертикальной разности температур.

Глава 4

РАЗВИТАЯ ТУРБУЛЕНТНАЯ КОНВЕКЦИЯ

В разд. 1.2 была схематически поставлена задача о конвекции в замкнутой полости с заданным распределением температуры на границе. Схематизация состоит в том, что пять безразмерных параметров конкретной задачи о конвекции в прямоугольной полости с температурой границы, линейно меняющейся в некотором заданном направлении, используются для характеристики других задач. Разумеется, что для более сложных форм полости и распределений температуры на границах конвекция будет определяться и другими параметрами, но наиболее важными из них по-прежнему будут число Релея, число Прандтля, геометрические параметры, определяющие характерные для данной полости отношения высоты к ширине и длине, а также отношение горизонтальной разности температур на границе к вертикальной.

Экспериментальные данные, описанные в данной главе, являются важным дополнением к ранее известным результатам, относящимся в основном к двум областям в пространстве безразмерных параметров R , P , H/D , H/L , α : к подогреваемому снизу плоскому слою ($H/D \leq 1$, $H/L \leq 1$, $\alpha = 0$) и к вертикальному слою, подогреваемому сбоку ($H/D \geq 1$, $L/D \geq 1$, $\alpha = \pi/2$). В разд. 4.1 описана турбулентная конвекция в вертикальных слоях, подогреваемых снизу ($H/D \geq 1$, $L/D \geq 1$, $\alpha = 0$).

Конвекция в горизонтальных и вертикальных слоях приобретает свои характерные черты в первом случае уже при $H/D \sim 0,2$ и во втором при $H/D \sim 5$ [238, 243, 278]. В связи с этим исследуемый в данной главе случай $H/D = 1$, $H/L = 1$, $0 < \alpha < \pi$ является представительным примером естественной конвекции в замкнутых объемах. Более того, при $H/D \leq 1$ и $H/D \geq 1$ отношение сторон становится второстепенным параметром, а основную роль начинает играть параметр α , определяющий условия подогрева.

В случае подогрева снизу переход от ламинарного режима конвекции к стохастическому происходит при числах Релея порядка 10^5 для $P = 0,7$ и 10^6 для $P = 7$. При этом возбуждаются пространственные моды с характерным масштабом порядка размеров полости. С увеличением R у горизонтальных границ теплообмена формируются пограничные слои, генерирующие "горячие" и "холодные" термики, которые в начале этого процесса хорошо различимы на всем своем пути от одной горизонтальной границы к другой. Термики, генерируемые неустойчиво стратифицированными пограничными слоями, отличаются от сферических термиков, которые можно получить, используя импульсные источники тепла малых размеров.

Термик, всплывающий из пограничного слоя, имеет характерный грибообразный вид и состоит из утолщенной головной части, внутри которой наблюдается тороидальная циркуляция жидкости, и вертикальной струи жидкости, характерной для конвекции над постоянно действующими источниками тепла. Струйное всплытие жидкости из пограничного слоя прекращается вскоре после возникновения термика. Вытянутость термиков по вертикали создает анизотропию пространственного спектра температурных пульсаций.

Интересно отметить, что статистическая модель температурного поля, представляющего собой беспорядочно разбросанные в однородно нагретой жидкости сферические термики, приводит к пространственному спектру температурных пульсаций, пропорциональному k^{-3} . К анизотропному спектру, пропорциональному k^{-3} , при больших k приводит и модель с вытянутыми по вертикали термиками. Экспериментально измеренные спектры в инерционном интервале убывают несколько медленнее. Отличие объясняется тем, что при возбуждении крупномасштабных пространственных мод всплытие термиков из пограничных слоев частично упорядочивается. Большее число термиков всплывает в области крупномасштабного восходящего течения.

Таким образом, основным фактором, определяющим вид спектра в инерционном интервале турбулентной конвекции, для режимов, в которых можно различать отдельные термики, является структура термиков, а их взаимное положение играет второстепенную роль. Строгих количественных результатов получить здесь не удастся ввиду недостаточного совершенства существующих в настоящее время экспериментальных методов. Тем не менее даже качественные результаты, полученные путем визуализации турбулентной конвекции теневым методом, дают богатый материал для оценки перспективности различных теоретических подходов. В частности, теневые картины турбулентной конвекции очень наглядно демонстрируют характер пространственной перемежаемости пульсаций температуры. Области с большими градиентами температуры, дающие основной вклад в высокочастотную часть пространственного спектра, сосредоточены на границах термиков. Отсюда можно сделать вывод, что пространственная перемежаемость турбулентной конвекции обусловлена в первую очередь динамикой развития отдельных термиков. Эти соображения будут использованы при построении моделей мелкомасштабной турбулентности.

При $R > 10^{16}$ большую роль в формировании структуры полей температуры и скорости начинают играть процессы дробления и перемешивания термиков. Передние фронты термиков становятся различимыми только в непосредственной близости от горизонтальных границ теплообмена. В ядре же видны беспорядочно расположенные резкие границы раздела элементов жидкости с различной температурой. В спектре температурных пульсаций исчезает максимум на пространственной частоте, соответствующей характерному размеру термиков. Анизотропия спектра в этом режиме наблюдается только при малых k .

При подогреве сбоку ($\alpha = \pi/2$) в полости формируется замкнутое циркуляционное течение. С увеличением числа Релея образуются пограничные слои на вертикальных поверхностях теплообмена. Погранслоинный режим ламинарной конвекции при боковом подогреве теряет устойчивость при

$R \sim 10^6$ для $P = 7$. Переход к турбулентности в этом случае происходит путем развития волнообразных возмущений в вертикальных пограничных слоях. Возникают выбросы быстро движущейся нагретой или охлажденной жидкости из пограничного слоя в ядро, и движение в нем турбулизуется. В случае комбинированного подогрева сбоку и снизу боковой подогрев, создавая крупномасштабную циркуляцию полости, стабилизирует неустойчиво стратифицированные пограничные слои.

Осредненные поля температуры и скорости развитой турбулентной конвекции при любых α имеют погранслоевой характер. Вблизи $\alpha = 0$ структура осредненных полей может скачком изменяться при малых изменениях внешних условий.

Максимум пульсационной энергии приходится на пульсации, имеющие характерный масштаб порядка размеров полости. Эффективным методом изучения энергосодержащих пульсаций в замкнутом объеме является пространственно-временной фурье-анализ гидродинамических полей. Во всех исследованных случаях, описанных в данной главе, временные спектры низших пространственных мод имеют хорошо выраженные пики.

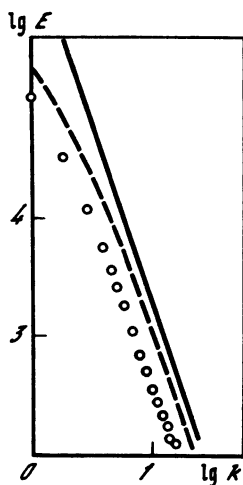
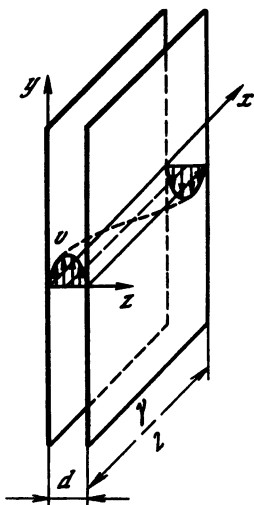
При турбулентной конвекции в замкнутых полостях когерентные структуры удастся строго описать на языке пространственно-временных фурье-образов без привлечения процедур типа условного осреднения. Когерентные структуры наблюдаются во всем диапазоне чисел Релея, начиная с порога возникновения стохастических колебаний и вплоть до установления режима развитой турбулентной конвекции, характеризующегося наличием инерционного интервала в пространственном энергетическом спектре.

4.1. ДВУМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЩЕЛИ

Теория двумерной турбулентности, основные особенности которой обсуждаются в гл. 7, испытывает острый недостаток в экспериментальном материале. Реальные течения, обнаруживающие свойства двумерной турбулентности, — а это в основном течения в океане и атмосфере [25, 118], — во-первых, квазидвумерны и, во-вторых, несут на себе отпечаток большого числа специфических факторов — стратификации, структуры подстилающей поверхности, вращения планеты и т.д.

Первой попыткой реализовать двумерную турбулентность в лабораторных условиях, была серия опытов с жидкими металлами в сильном магнитном поле [91, 92]. Магнитное поле подавляет течение вдоль своих силовых линий, делая таким образом поток квазидвумерным. В этих экспериментах были получены спектральные зависимости, характерные для двумерной турбулентности, — в энергетическом спектре пульсаций скорости присутствовали интервалы, близкие к законам " $-5/3$ " и " -3 ". Однако вопрос о взаимодействии магнитного поля с турбулентным потоком оказался более запутанным [271], что охладило интерес к моделированию двумерной турбулентности в жидких металлах. Сказалась, по-видимому, и техническая сложность таких экспериментов, хотя в последнее время вновь появились попытки такого рода [204].

Некоторое оживление в эксперименты по двумерной турбулентности внесли недавние работы французских исследований [209, 210]. В [210]



Р и с. 4.1. Распределение скорости движения жидкости v в вертикальном слое

Р и с. 4.2. Пространственный энергетический спектр пульсаций температуры в вертикальном слое

прослежена эволюция плоских вихрей, возникающих при обтекании диска в гидродиске. Особенно интересна работа [209] по исследованию турбулентности в мыльных пленках. Это, пожалуй, самая удачная лабораторная реализация двумерной турбулентности, хотя и она не лишена своих специфических свойств, связанных с возможными вариациями толщины пленки и действием сил поверхностного натяжения. Трудности организации количественных измерений в пленках позволили автору лишь качественно проследить эволюцию турбулентного течения, вызванного протягиваемой в пленке решеткой, и зарегистрировать увеличение со временем среднего размера вихрей, что должно подтверждать наличие потока энергии к крупномасштабному движению.

Опишем еще одну попытку реализации двумерной турбулентности в лабораторных условиях [6].

Рассматривается развитая турбулентная конвекция в узкой вертикальной щели, образованной хорошо проводящими тепло пластинами с заданным в них вертикальным градиентом температуры. Ячейка Хеле–Шоу, о которой фактически снова пойдет речь, широко используется в экспериментальных исследованиях надкритических течений [13, 14, 107, 237]. Но примеров изучения в ней турбулентных течений неизвестно.

Решение задачи об устойчивости жидкости в плоском вертикальном слое толщиной d (рис. 4.1) с границами бесконечной теплопроводности и вертикальным градиентом температуры дает спектр критических чисел Рейли для течений с различными профилями поперек слоя [32]:

$$R_n = \left(\frac{\pi^2 n^2}{4} + \gamma^2 \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.1)$$

где R_n — число Рейли, определенное по полуширине слоя, γ — волновое

число возмущения вдоль оси y , а индекс n отвечает решению с зависимостью от координаты z вида $\sin \pi n z/d$.

Для низшей моды ($n = 1$) и возмущений с бесконечной длиной волны ($\gamma = 0$) критическое число Релея имеет значение $R_1 = 6,09$, а для возмущения с длиной волны, равной удвоенной толщине слоя ($\gamma = \pi/d$), $R_1 = 16$. Минимальное значение R_2 (т.е. $\gamma = 0$) составляет 97,4.

Экспериментально исследовалось движение воздуха в полости размером $1200 \times 1200 \times 16$ мм. Для такой толщины слоя и характерной для проводившихся опытов наложенной разности температуры 60° число Релея, определенное по полуширине слоя, равно 18, что позволяет рассчитывать на реализацию плоского течения с профилем вида $\sin \pi z/d$. Число Релея, вычисленное по линейному размеру полости и определяющее характер двумерных конвективных течений при заданных параметрах, равно $1,1 \cdot 10^{10}$.

Модель изготовлена из четырех дюралюминиевых пластин толщиной 8 мм и размером $2 \times 1,2$ м. Между внутренними пластинами заключена рабочая полость, движение воздуха в которой и исследуется. Внешние пластины выполняют роль тепловых экранов. В них создается такое же линейное распределение температуры, как и в основных листах, а пространство между ними и внутренними пластинами толщиной 8 мм заполнено стекловатой для предотвращения конвекции. Внешние пластины на площади, соответствующей рабочей полости, покрыты слоем теплоизоляции. Основные нагреватели смонтированы непосредственно на пластинах у нижней границы рабочей полости. Вдоль верхней границы полости смонтированы аналогичные нагреватели меньшей мощности, позволяющие ускорить выход модели на режим и поддерживающие температуру верхней грани при переохлаждении пластин радиатора, роль которого выполняют сами дюралюминиевые пластины, выпущенные над рабочей полостью на 70 см и обдуваемые вентиляторами. Температура на гранях поддерживалась в интервале $30-150^\circ\text{C}$ с точностью $0,1^\circ$. Распределение температуры, близкое к линейному (с точностью 10%), устанавливается в модели через два часа после включения и поддерживается с точностью 3% в течение всего опыта.

Измерения проводились 64 термопарами, установленными с равномерным шагом вдоль горизонтали в центральном сечении полости и подключенными к термопарному коммутатору с рабочей частотой 40 Гц. Управление процессом измерений, обработка и выдача результатов осуществлялись с помощью ЭВМ СМ-4.

На рис. 4.2. представлен одномерный пространственный энергетический спектр пульсаций температуры, полученный осреднением по 300 реализациям, регистрировавшимся с интервалом, равным 1 мин.

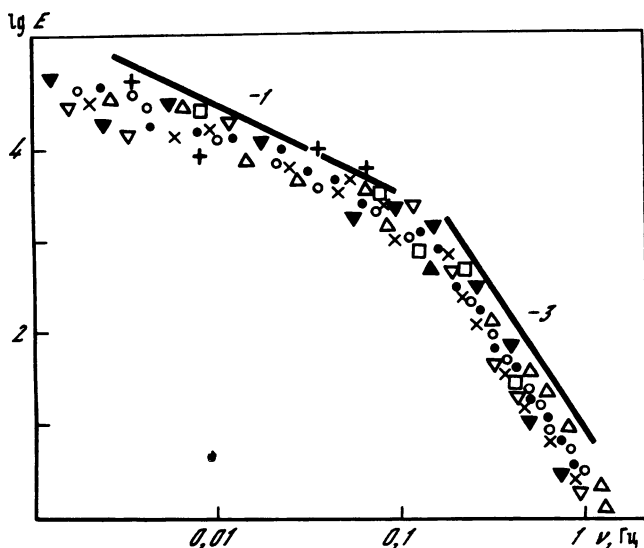
Одномерный энергетический спектр $F_1(\xi)$ двумерной функции $f(x, y)$ имеет вид

$$F_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i \xi x} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) d\eta, \quad (4.2)$$

где $F(\xi, \eta)$ — двумерный спектр функции $f(x, y)$.

$$F(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (4.3)$$

а $\mathbf{k}$ — волновое число.



Р и с. 4.3. Временной спектр пульсаций температуры

Наиболее употребителен спектр, называемый энергетическим [116] и связанный с двумерным соотношением

$$E(k) = \int_{k \approx |k|} F(k) dk, \quad k = (2\pi\eta, 2\pi\xi). \quad (4.4)$$

В однородной и изотропной турбулентности если $E(k) \sim k^{-\kappa}$, то $F(k) \sim k^{-\kappa-1}$, а степенная зависимость в одномерном спектре

$$F_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta, \xi) d\eta \sim \xi^{-\kappa} \quad (4.5)$$

совпадает со степенью в энергетическом спектре.

В случае ограниченной полости в спектре отсутствуют возмущения с волновыми числами, меньшими $2\pi/L$ (L — размер полости), что приводит к завалу в низкочастотной части одномерного спектра (4.5). На рис. 4.2 проведена прямая линия, соответствующая закону убывания спектра “—3”. Пунктиром отмечена теоретическая кривая для одномерного спектра в ограниченной полости при энергетическом спектре “—3”, хорошо повторяющая форму экспериментальной кривой.

На рис. 4.3 представлены результаты измерения временного спектра пульсаций температуры в различных точках полости. С выбранной термопары снималось от 5 до 20 реализаций длиной 1024 точки с периодом выборки от 0,08 до 1,6 с. Осредненный по серии измерений спектр выводился на печать и графопостроитель. Результаты, полученные с одной термопары, помечены на рисунке одинаковыми значками.

В спектре выделяются два интервала. Низкочастотная часть спектра имеет закон спада порядка $E(\omega) \sim \omega^{-1}$, а начиная с частоты около 0,1 Гц подчиняется закону $E(\omega) \sim \omega^{-3}$. Совпадение степени в высокочастотной части спектра со степенью в пространственном спектре свидетельствует о

выполнении для этих масштабов гипотезы Тейлора: мелкомасштабные вихри переносятся крупномасштабными и временной спектр в точке совпадает с пространственным.

Представленный пространственный спектр с хорошо выраженным инерционным интервалом подтверждает возможность реализации развитого плоского турбулентного конвективного течения в вертикальном слое. Особенности турбулентного течения в ячейке Хеле—Шоу более подробно обсуждаются в разд. 7.3.

4.2. ПОДОГРЕВАЕМАЯ СНИЗУ КУБИЧЕСКАЯ ПОЛОСТЬ

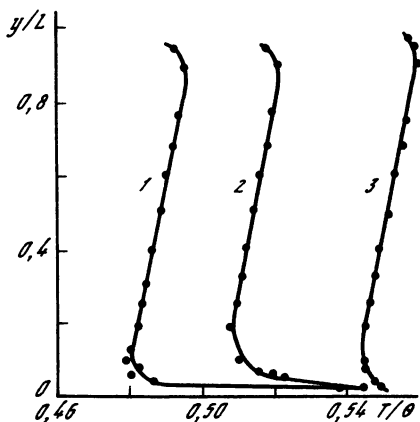
Описанные в этом разделе эксперименты выполнены на четырех моделях однотишной конструкции с ребром куба L , равным 8, 10, 25 и 50 см. Рабочей жидкостью во всех случаях служила дистиллированная вода. Разность температур изменялась от 1 до 50° С. Горизонтальными границами полостей служили массивные медные теплообменники с внутренними каналами для термостатирующей жидкости. Температура теплообменников поддерживалась с помощью ультратермостатов. Все четыре боковые стенки у первой модели были изготовлены из плоскопараллельных пластин оптического стекла толщиной 10 мм. На этой модели оптические измерения можно было проводить, просвечивая полость в двух взаимно перпендикулярных направлениях. У модели с ребром куба 25 см две противоположные стенки были изготовлены из оптического стекла толщиной 40 мм, а две другие — из плексигласа той же толщины. У моделей с ребром куба 10 и 50 см две противоположные стенки были выполнены из оптического стекла, а две другие представляли собой теплоприемники, которые использовались в дальнейшем для создания горизонтальной разности температур.

Для измерения температуры внутри полостей вводились медьконстантановые термодатчики с толщиной спаев 0,1 мм. Вторые спаи дифференциальных термодатчиков закреплялись на верхних теплообменниках. Температуры этих спаев были равны температурам верхних граней полостей. Датчики перемещались в двух направлениях. Их положение определялось с точностью 0,01 мм. С помощью датчиков можно было измерить температуру в любой точке вертикальной плоскости, проходящей через центр куба параллельно одной из боковых стенок.

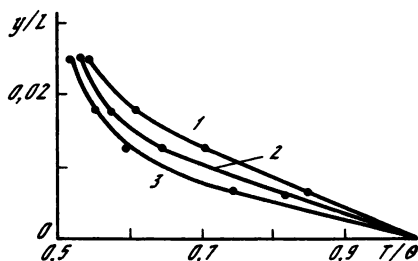
Сигнал с термодатчика подавался на вход усилителя постоянного тока, а напряжение на выходе усилителя измерялось цифровым вольтметром и вводилось в ЭВМ. Осредненная температура измерялась с точностью до 0,05° С, а мгновенные значения температуры — с точностью 0,002° С.

Для индикации крупномасштабных движений в моделях было установлено дополнительно по две дифференциальные термодатчики, спаи которых располагались в центрах противоположных боковых граней полостей. Сигналы этих термодатчиков измерялись гальванометрами низкочастотного термографического регистратора НТР-70 и записывались на фотобумагу.

Профили осредненной температуры T и среднеквадратичных пульсаций температуры T' , полученные при перемещении зонда по вертикальной и горизонтальной линиям, проходящим через центр полости, приведены на рис. 4.4—4.7. Цифрами 1—3 отмечены результаты для различных чисел Рейлея.



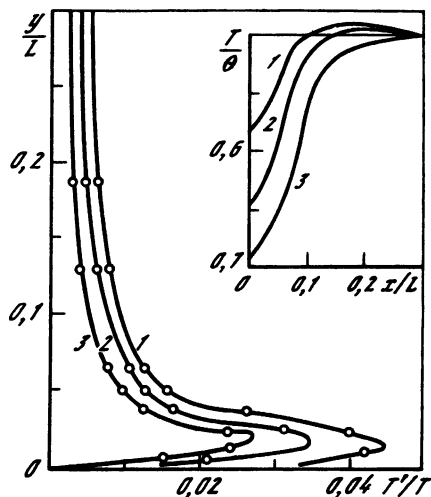
Р и с. 4.4



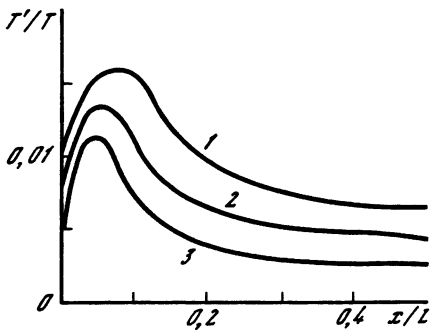
Р и с. 4.5

Р и с. 4.4. Зависимость осредненной температуры от высоты

Р и с. 4.5. Профили осредненной температуры в горизонтальных пограничных слоях



Р и с. 4.6



Р и с. 4.7

Р и с. 4.6. Зависимость среднеквадратичных пульсаций температуры от высоты. Профили осредненной температуры в вертикальных пограничных слоях

Р и с. 4.7. Пульсации температуры у вертикальных границ

Наряду с термозондами для измерения осредненных полей температуры применялся теневой метод щели и ножа с регистрацией на фотопленку, описанный в разд. 2.4. Однородность турбулентного движения в заданном направлении контролировалась путем просвечивания полости в направлении, перпендикулярном исходному. Помимо этого, с помощью термопарных зондов измерялась зависимость величины $\langle T(x, y, z, t) \rangle$ от z для фиксированных точек (x, y) . Следует отметить, что даже в отсутствие однородности потока вдоль оси z пространственно-временные средние

$$\frac{1}{\tau H} \int_0^H \int_0^\tau T(x, y, z, t) dz dt, \quad (4.7)$$

измеряемые данным методом, оказываются достаточно удобными величинами для описания турбулентных течений в замкнутых прямоугольных полостях.

По результатам оптических и термопарных измерений можно составить следующую картину движения жидкости. У горизонтальных границ полости существуют тонкие, порядка 2 мм, пограничные слои с неустойчивой температурной стратификацией. В этих слоях генерируются термики: "холодные" — на верхней границе и "горячие" — на нижней. После отрыва от границ термики движутся с ускорением навстречу друг другу, сталкиваясь, разрушаясь и перемешиваясь в центральной части полости. Отдельные термики достигают противоположной границы.

В центральной части полости наблюдается однородный градиент осредненной температуры, соответствующий устойчивой температурной стратификации. При $R = (g\beta/\nu\chi)H^3\Theta = 5 \cdot 10^8$ его величина составляет $0,02 \Theta/H$, где Θ — разность температур, а H — ребро куба. Зависимость безразмерного градиента температуры от числа Релея слабая.

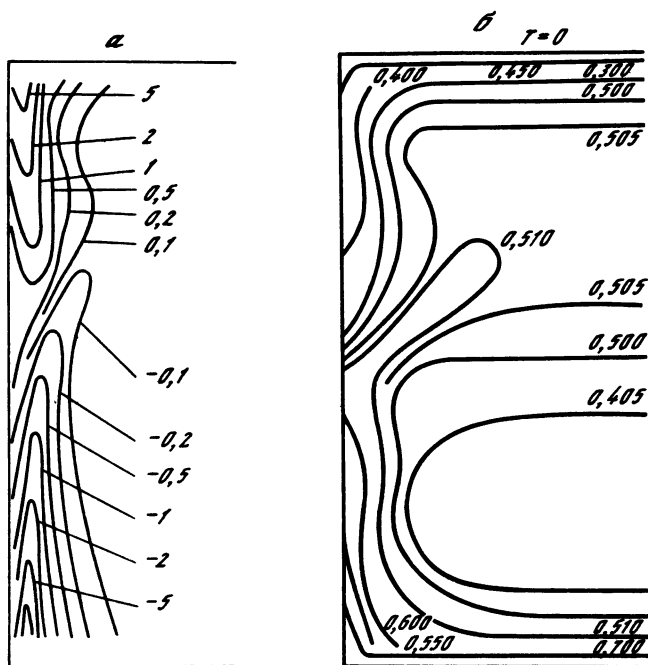
На фоне процесса генерации и перемешивания термиков существует крупномасштабное циркуляционное движение вдоль периметра полости. Это движение имеет погранслоиный характер, однако толщина слоя примерно на порядок больше, чем у температурных пограничных слоев на горизонтальных границах.

Направление циркуляции жидкости очень чувствительно к малейшим наклонам полости. Ввиду высокой чувствительности к наклонам и другим отклонениям от идеализированных граничных условий окончательная установка полости в положение, соответствующее подогреву точно снизу, осуществлялась путем наблюдения за характером движения жидкости. Первоначально модель устанавливалась горизонтально по уровню с ценой деления $30''$.

При повороте полости на величину порядка $30''$ вокруг оси, перпендикулярной одной паре боковых граней, направление циркуляции строго фиксируется. Жидкость поднимается у приподнятой стенки, движется вдоль горизонтальных границ и опускается у противоположной стенки. На рис. 4.8, а, б приведены карты изолиний горизонтальной компоненты осредненного градиента температуры и изотермы ($R \approx 5 \cdot 10^8$, $P = 7$) в первой модели. Карты построены по результатам фотометрирования теневых фотографий, полученных при просвечивании полости в направлении основного поворота. Значения безразмерной температуры и безразмерного градиента температуры указаны для каждой изолинии на рисунке.

Изолинии горизонтального градиента температуры (рис. 4.8, б) выявляют только вертикальные участки циркуляционного течения. Горизонтальные участки хорошо видны при непосредственном наблюдении теневой картины. Интересно отметить, что отрывы осредненного течения от вертикальных стенок и возвратные течения в углах полости, хорошо заметные на рис. 4.8, а, трудно обнаружить при непосредственном наблюдении теневой картины.

Оперативное наблюдение за интенсивностью крупномасштабных движений осуществлялось путем измерения разностей температур противоположных боковых граней полости. Для этого использовались две дифференциальные термопары, спаи которых располагались в центрах граней. Пока-



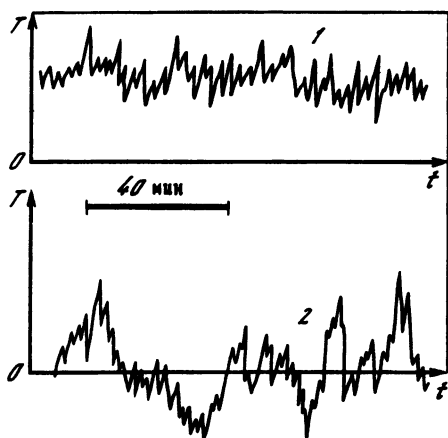
Р и с. 4.8. Осредненные температурные поля в полости

а — изограды осредненной температуры, *б* — изотермы осредненной температуры

зания термопар регистрировались с помощью низкочастотного терморегистратора НТР-70. Пример записи приведен на рис. 4.9. Наклон полости составляет примерно $30''$. Термопара 1 реагирует на циркуляционное движение вокруг оси наклона, термопара 2 — на движение вокруг перпендикулярной оси. Сигнал первой термопары имеет постоянную составляющую и сколь угодно долго сохраняет знак. Сигнал второй термопары изменяет знак, а среднее значение за большие промежутки времени равно нулю. Таким образом, осредненное крупномасштабное движение существует только вокруг оси наклона.

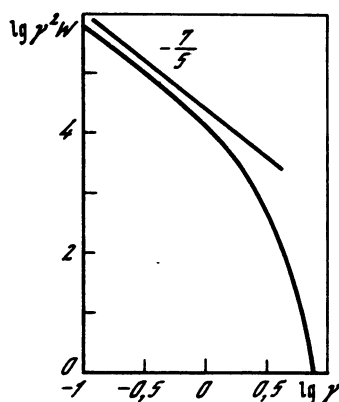
Естественно было предположить, что уменьшением угла наклона можно обратить в нуль постоянную составляющую первого сигнала, что означало бы отсутствие осредненного крупномасштабного движения. Такое положение полости можно было бы считать строго горизонтальным. Однако обратить в нуль постоянные составляющие обеих термопар не удастся. При уменьшении угла наклона постоянная составляющая у первого сигнала не изменяется, затем возникает постоянная составляющая у второго сигнала, которая имеет такую же величину, как и у первого. При этом жидкость движется в плоскостях, параллельных одной из диагональных плоскостей куба.

Объемная структура турбулентной конвекции в полости хорошо распознается при непосредственных наблюдениях теневой картины. Для этого применяется изотропная визуализация. В фокальной плоскости коллима-



Р и с. 4.9. Фотозапись горизонтальных разностей температуры у боковых стенок полости

Р и с. 4.10. Пространственный спектр пульсаций температуры



тора устанавливается диафрагма с круглым отверстием, а в фокальной плоскости приемной части теневого прибора — непрозрачный диск, перекрывающий невозмущенное изображение источника света. При такой настройке прибора интенсивность света в теневой картине I является функцией модуля градиента фазы зондирующей волны $|\nabla\varphi|$. Размер отверстия осветительной диафрагмы выбирается так, чтобы смещение изображения источника за счет угловых отклонений лучей составляло примерно $1/5$ его диаметра. В этом случае зависимость I от $|\nabla\varphi|$ близка к линейной. Наблюдения демонстрируют пространственную перемежаемость турбулентной конвекции. Области с высокими значениями градиента температуры, дающие основной вклад в высокочастотную часть пространственного спектра, имеют линзообразную форму и беспорядочно распределены в объеме.

Следует учесть интегральный характер теневых картин. Все неоднородности температуры вдоль пути луча вносят вклад в $I(x, y)$ и в результате изображения термиков накладываются друг на друга. При просмотре отдельных фотоснимков складывается впечатление, что термики — плохо распознаваемые образы. При визуальном же наблюдении или при просмотре кинофильма термики распознаются легко, так как движутся с разными скоростями, а это создает своеобразный стереоскопический эффект.

Как уже отмечалось выше, крупномасштабное осредненное течение сосредоточено вблизи границ полости. В центральной части полости — ядре — осредненное движение отсутствует. Измерения пространственных энергетических спектров в ядре проводились на моделях с $H = 25$ и 50 см по методикам, описанным в разд. 2.6. В полости с $H = 25$ см измерения осуществлялись с помощью теневого прибора ИАБ-451, настроенного на визуализацию градиентов фазы, и оптического анализатора спектра с движущимися дифракционными решетками. В полости с $H = 50$ см использовался двухлучевой анализатор спектра, а теневой прибор настраивался на визуализацию лапласиана фазы. Оба метода дают одинаковые результаты.

Вторая схема измерений обладает меньшим уровнем шумов благодаря отсутствию движущихся частей и убелению спектра, снижающему требования к динамическому диапазону регистрирующей аппаратуры.

Пространственный энергетический спектр при $R = 1,75 \cdot 10^{10}$ приведен на рис. 4.10. В области низких пространственных частот имеется участок с законом убывания $\gamma^{-7/5}$. Появление данного закона связано обычно с влиянием архимедовых сил. Форма спектров при меньших R совпадает с правой частью спектра, представленного на рис. 4.10. Чем меньше R , тем меньший участок этого спектра воспроизводится. При этом наклон кривой в области меньших пространственных частот возрастает и может быть воспринят как колмогоровский закон $-5/3$.

4.3. ОДНОВРЕМЕННЫЙ ПОДОГРЕВ СБОКУ И СНИЗУ

В последнее время интенсивно разрабатываются методы численного моделирования турбулентной термогравитационной конвекции, основанные на конечно-разностных аппроксимациях двумерных уравнений [54]. Детальная проверка таких моделей требует обширного экспериментального материала, относящегося к достаточно простым по постановке тестовым задачам.

Наиболее полные экспериментальные результаты по турбулентной конвекции в замкнутых полостях были получены в [153] для случая бокового подогрева полости, сильно вытянутой по вертикали. Эти результаты использованы в [54] для проверки двумерной конечно-разностной модели. Существенной особенностью рассмотренного в [153] случая является то, что генерация турбулентности происходит путем образования в вертикальных пограничных слоях крупномасштабных конвективных структур, близких к двумерным. Это обстоятельство может объяснить хорошее соответствие между двумерной моделью [54] и реальным турбулентным течением [123].

Подобную ситуацию можно создать в полости квадратного сечения при гораздо меньших значениях числа Релея, определенного по вертикальному размеру полости. Примером может служить задача о конвекции при одновременном подогреве сбоку и снизу, описанная в разд. 3.3. Подогрев снизу сильно дестабилизирует течение. По мере увеличения подогрева в горизонтальных участках пограничного слоя возникают двумерные возмущения, которые при дальнейшем развитии проникают в ядро течения и турбулизуют движение в нем. Однако даже при развитом турбулентном движении крупномасштабные образования остаются сильно вытянутыми по горизонтали, перпендикулярно направлению общей циркуляции жидкости в полости. В связи с этим можно ожидать, что при одновременном подогреве сбоку и снизу турбулентная конвекция в полости будет хорошо описываться двумерной моделью.

Турбулентные режимы конвекции при комбинированном подогреве исследовались на модели с $H = 10$ см. Основной целью этих исследований являлось получение экспериментальных данных, необходимых для отработки и проверки двумерных конечно-разностных моделей. В опытах использовалась экспериментальная установка для измерения осредненных полей фотометрическим методом, описанная в разд. 2.4.

Осредненные значения вертикальной компоненты
градиента температуры

m	n				
	0	1	2	3	4
-4	0,140	-0,110	-0,088	-0,080	-0,031
-3	0,072	-0,050	-0,032	-0,021	-0,008
-2	0,018	-0,008	0	0,015	-0,012
-1	-0,012	0,013	0,012	0,016	-0,033
0	0,020	0,018	0,017	0,006	-0,055
1	0,012	0,010	0,006	-0,016	-0,086
2	-0,018	-0,017	-0,032	-0,071	-0,112
3	-0,072	-0,081	-0,110	-0,110	-0,127
4	-0,140	-0,160	-0,190	-0,185	-0,108

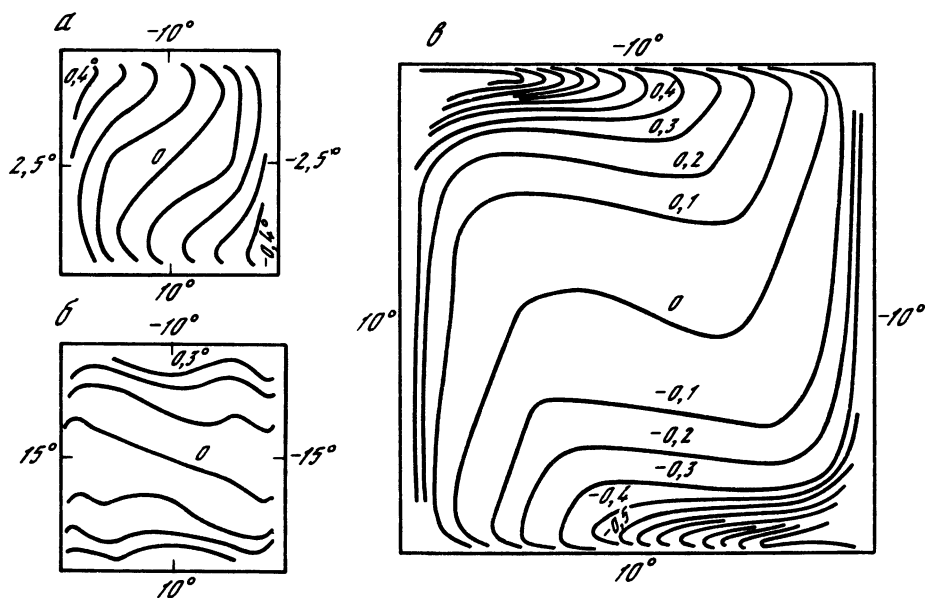
В экспериментах надежно измерялись осредненные градиенты температуры порядка 0,001 град/см. Основная причина погрешностей состояла в появлении оптического клина за счет теплового расширения модели. Для исключения этой погрешности параллельно направлению хода лучей в модели между выступающими за внешние поверхности теплообменников участками стекол устанавливалась медная трубка, стенки которой термостатировались. Трубка заполнялась водой и служила в качестве эталона, позволяющего в ходе эксперимента определять невозмущенное положение изображения щели. Это давало возможность контролировать параллельность стекол и стабильность аналоговой части измерительной системы.

В табл. 4.1 приведены значения $\langle \partial T / \partial x \rangle$, выраженные в единицах ϑ / H , для $\vartheta = \Theta = 20^\circ \text{C}$, $P = 5,4$, $R = 5,2 \cdot 10^5$, $\tau = 10$ мин. Число Релея определено по размеру полости H и разности температур ϑ . Вследствие температурной зависимости параметров жидкости расхождение в значениях $\partial T / \partial x$ в точках (nh, mh) и $(-nh, -mh)$ достигало 10%. Значения, приведенные в табл. 4.1, получены в результате осреднения по соответствующим параметрам точек.

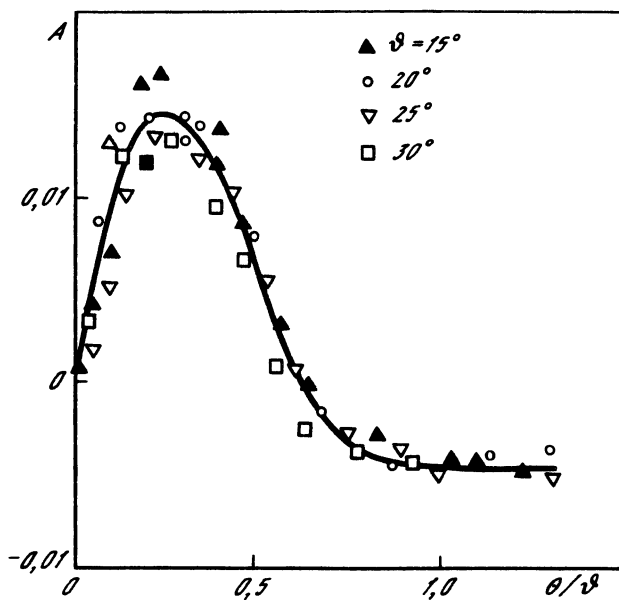
С помощью термопарных зондов для данного теплового режима были проведены измерения средней по времени температуры на линиях, параллельных направлению просвечивания. Эти измерения показали, что в области $-4,5 \text{ см} < z < 4,5 \text{ см}$ изменение величины $\langle T \rangle_\tau$ в направлении просвечивания не превосходит $5 \cdot 10^{-4} \vartheta$. Таким образом, осредненное поле температуры в исследуемом случае практически двумерно.

Для построения изотерм осредненного поля температуры измерялись величины $\langle \partial T / \partial u \rangle$ на вертикали, проходящей через центр полости, проводились интерполяция на межузловые интервалы и интегрирование величины $\langle \partial T / \partial u \rangle$ начиная от центра полости по вертикали, а затем интегрирование величины $\langle \partial T / \partial x \rangle$ по горизонтали. Таким путем удавалось рассчитать $\langle T \rangle$ по всей области, за исключением тепловых пограничных слоев у горизонтальных и вертикальных границ полости.

В зависимости от соотношения разностей температур наблюдались три



Р и с. 4.11. Изотермы осредненной температуры при одновременном подогреве сбоку и снизу



Р и с. 4.12. Зависимость осредненного горизонтального градиента температуры в ядре от условий подогрева

Локальные значения числа Нуссельта на границе полости

x	-5	-5	-5	-2,5	0	2,5
y	2,5	0	-2,5	-5	-5	-5
Nu	76	80	63	79	97	125

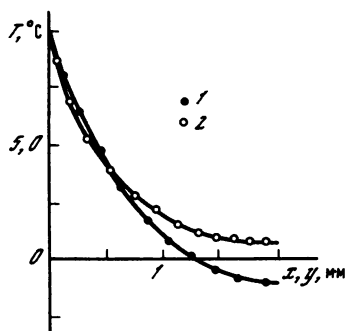
характерные картины изолиний, плавно переходящие друг в друга при изменении отношения Θ/ϑ . Изотермы осредненного поля температуры приведены на рис. 4.11, а–в. Отношение Θ/ϑ равно 0,25; 1; 1,5 соответственно. Из рис. 4.11 видно, что картина изолиний определяется в основном направлением и величиной осредненного градиента температуры в центре полости. Поэтому представляет интерес получение зависимостей $\langle \nabla T \rangle$ от числа Релея и отношения Θ/ϑ . Такие измерения были выполнены в диапазоне $2 \cdot 10^8 < R < 10^9$, $0 < \Theta/\vartheta < 1,5$. Установлено, что вертикальная компонента осредненного градиента температуры в центре полости, выраженная в единицах ϑ/H , не зависит от бокового подогрева и равна $\langle \partial T / \partial y \rangle \times H/\vartheta = -0,025 \pm 5 \cdot 10^{-4}$. Ось y направлена вверх. Знак "минус" означает, что в ядре устанавливается устойчивая температурная стратификация независимо от знака разности температур на горизонтальных границах полости.

Зависимость горизонтальной компоненты осредненного градиента температуры от отношения боковой разности температур к вертикальной приведена на рис. 4.12. По оси ординат отложена величина $A = \langle \partial T / \partial x \rangle \times H/\vartheta$, а по оси абсцисс — отношение Θ/ϑ . Результаты приведены для различных значений ϑ : 1–15°, 2–20°, 3–25°, 4–30°. В отсутствие бокового подогрева осредненный горизонтальный градиент в ядре равен нулю. С увеличением боковой разности температур возникает горизонтальный градиент $\langle \partial T / \partial x \rangle$, направленный от нагретой стенки к холодной. Затем $\langle \partial T / \partial x \rangle$ проходит максимум и меняет знак. При дальнейшем росте Θ/ϑ величина $\langle \partial T / \partial x \rangle$ выходит на постоянное отрицательное значение.

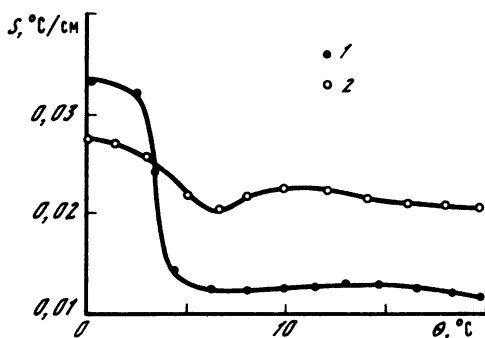
Отметим, что как вертикальная, так и горизонтальная компоненты $\langle \nabla T \rangle$ в исследованном диапазоне оказались независимыми от числа Релея в указанном диапазоне его изменения.

В пограничных слоях у поверхностей теплообмена наблюдалось сильное искривление траектории лучей. При этом их полные угловые отклонения ϵ достигали 0,2 рад, т.е. на порядок превосходили рабочий диапазон прибора ИАБ-451. Известные методы измерения больших угловых отклонений плохо приспособлены для автоматизации, необходимой при получении осредненных данных. В связи с этим был использован метод восстановления осредненных профилей температуры в пограничных слоях по результатам измерения интенсивности света в плоскости выхода лучей из жидкости [64].

На рис. 4.13 приведены осредненные профили температуры в сечении $y = 0$ пограничного слоя у нагретой боковой стенки (2) и в сечении $x = 0$ пограничного слоя у дна полости (1) при $\Theta/\vartheta = 1$, $R = 5,2 \cdot 10^8$, $P = 5,4$. Профили осредненной температуры вблизи стенки аппроксимировались квадратичным полиномом, а затем вычислялись локальные значения числа



Р и с. 4.13. Профили осредненной температуры в пограничных слоях



Р и с. 4.14. Пульсации температуры в ядре

1, 2 — горизонтальный и вертикальный градиент температуры

Нуссельта: $Nu = \langle \partial T / \partial x \rangle \vartheta / H$. Значения Nu для $R = 5,2 \cdot 10^8$, $P = 5,4$, $\Theta / \vartheta = 1$ приведены в табл. 4.2.

В связи с тем что осредненное поле температуры близко к двумерному, все приведенные выше результаты можно непосредственно сопоставлять с результатами расчетов на базе двумерных конечно-разностных моделей. Существенно сложнее обстоит дело с сопоставлением статистических характеристик температурных пульсаций. В условиях данной задачи генерация турбулентных пульсаций происходит вблизи горизонтальных границ путем образования квазидвумерных возмущений, ориентированных перпендикулярно направлению общей циркуляции жидкости. Поэтому можно ожидать, что двумерные конечно-разностные модели будут достаточно точно воспроизводить по крайней мере крупномасштабные пульсации.

В качестве величины, характеризующей крупномасштабные пульсации температуры, был выбран градиент температуры $\langle \nabla T \rangle$, осредненный по объему Ω области $|x| < 0,25 H$, $|y| < 0,25 H$, $|z| < 0,5 H$. Для измерения "мгновенных" значений этой величины на выходе лучей из полости помещалась диафрагма с квадратным отверстием $|x| < 0,25 H$, $|y| < 0,25 H$, а в фокальной плоскости приемного объектива прибора ИАБ-451, сразу же после визуализирующей диафрагмы и обтюратора, устанавливается фотодиод. В этом случае выходной сигнал синхронного детектора пропорционален интегралу от ∇T по объему указанной выше области.

Сигнал с детектора поступал на аналогово-цифровой преобразователь, работающий с частотой 10 Гц, а затем вводился в ЭВМ СМ-1. Обработка данных состояла в построении плотности вероятности величин $\partial T / \partial x$ и $\partial T / \partial y$ и вычислении центра распределения среднеквадратического отклонения, коэффициентов асимметрии и эксцесса. Измерения показали, что для всех тепловых режимов распределение вероятности мало отличается от нормального. Коэффициенты асимметрии и эксцесса не превышали значений $\pm 0,4$ и $\pm 0,5$ соответственно. На рис. 4.14 представлена зависимость среднеквадратичных пульсаций компонент градиента температуры S в центральной части полости от величины боковой разности температур Θ при $\nu = 20^\circ \text{C}$, $R = 5,2 \cdot 10^8$, $P = 5,4$. Как видно из рисунка, анизот-

ропия пульсаций, появление которой в турбулентной конвекции обсуждалось в работах [50, 56, 106, 114, 122, 188, 258, 259], не имеет прямой связи с направлением силы тяжести. Существенное значение имеют условия подогрева.

4.4. ВРЕМЕННЫЕ СПЕКТРЫ НИЗШИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МОД

Крупномасштабные пульсации конвективного движения в подогреваемой снизу кубической полости были выявлены путем специальной киносъемки движения светорассеивающих частиц. При визуальном наблюдении движения частиц в плоскости светового ножа видны только тороидальные вихри внутри всплывающих и опускающихся термиков. Было замечено, что отклонения траекторий термиков от вертикалей в течение некоторых промежутков времени упорядочиваются. Например, все "холодные" термики начинают отклоняться к одной боковой стенке, а "горячие" — к противоположной. Через несколько минут отклонения термиков меняются на противоположные. Наблюдались и более сложные состояния.

Если время экспозиции при фотографировании частиц больше, чем время оборота частицы внутри тороидального вихря в термике, то при достаточно слабом освещении треки быстро движущихся частиц на снимке полностью размазываются и дают только слабо модулированный фон, в то время как частицы, находящиеся в точках с минимальной скоростью, фиксируются в виде очень ярких точек. Чтобы выявить движение таких частиц, использовался режим киносъемки, при котором затвор фоторегистратора РФК-1 оставался открытым в течение нескольких секунд и закрывался только на время смены кадра. Во время демонстрации фильма со скоростью 16 кадров в секунду наблюдались только пульсации крупномасштабных пространственных мод. В целом эти пульсации имели характер стохастических колебаний, но время от времени наблюдались циклические изменения с тремя—пятью повторяющимися фазами движения.

Количественное исследование пульсаций крупномасштабных мод в режиме развитой турбулентной конвекции выполнялось на модели с ребром куба 50 см с помощью оптического метода измерения пространственно-временных спектров, описанного в разд. 2.5. Кроме того, был получен временной спектр низшей пространственной моды с помощью системы термопар в подогреваемом снизу цилиндрическом сосуде высотой 210 см.

На рис. 4.15 приведен временной спектр пространственной моды $(1, 0, 0)$ в подогреваемой снизу кубической полости при $R = 1,75 \cdot 10^{10}$. Пространственный спектр для того же самого числа Релея (см. рис. 4.10) указывает на то, что данный режим относится к развитой турбулентной конвекции. Тем не менее во временном спектре пространственной моды $(1, 0, 0)$ имеются хорошо выраженные пики. Пики на независимых частотах отмечены стрелками и образуют серию с плавной зависимостью частоты от номера пика. Следует отметить, что такой результат получается только с применением пространственной фильтрации температурного поля. Если же измерять временные спектры температурных пульсаций в отдельных точках, то уже вблизи порога возникновения стохастических колебаний спектры становятся сплошными. На рис. 4.16 приведены три таких спектра

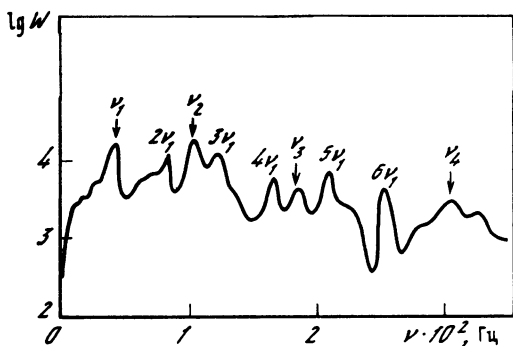


Рис. 4.15. Временные спектры низшей моды

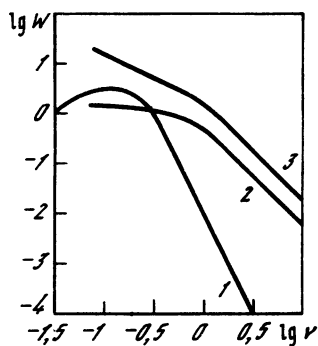


Рис. 4.16. Временные спектры пульсаций температуры в фиксированных точках полости

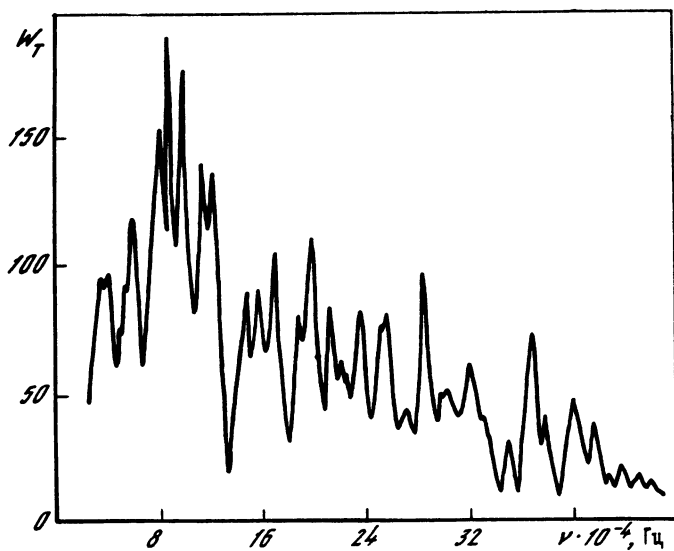
(1–3) для различных R и P . В пульсации температуры для некоторой фиксированной точки вносят вклад все пространственные моды, не имеющие нулей в данной точке. В результате сложения колебаний получается сплошной спектр.

Исследование поведения крупномасштабных мод при больших числах Рейля было выполнено с полостью, имеющей форму вертикального цилиндра с диаметром, равным высоте. Высота цилиндра составляла 210 см. Нижний торец цилиндра равномерно нагревался, а верхний — охлаждался. Разность температур составляла 50°C . Плотность воды составляла 10^{13} .

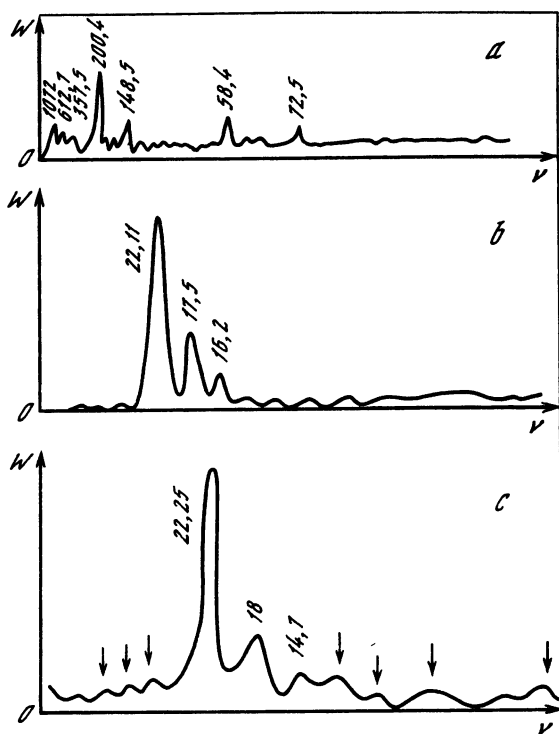
Датчик температуры представлял собой систему термопар, установленных на оси цилиндра с шагом, определяемым соотношением $h_n = \sin 2\pi z_n/H$. Термопары соединялись последовательно. Полярность включения термопар выбиралась положительной на положительном периоде синусоиды и отрицательной — на отрицательном. Результирующий сигнал всех термопар пропорционален мгновенному значению амплитуды гармоники $\sin 2\pi z/H$ в разложении профиля температуры на оси цилиндра в ряд Фурье. В опытах регистрировались временные реализации этой амплитуды в течение семи часов.

Главное отличие временного спектра сигнала (рис. 4.17) от спектра, представленного на рис. 4.15, состоит в том, что появляются пики на близких частотах. Отношение высоты пиков к фону уменьшилось. Такой спектр занимает промежуточное положение между сплошными спектрами, получающимися при отсутствии пространственной фильтрации (см. рис. 4.16), и спектрами, полученными при полной фильтрации трехмерных температурных полей. Пики на независимых частотах обозначены на рис. 4.15 цифрами. Все остальные пики в спектре являются кратными или комбинационными.

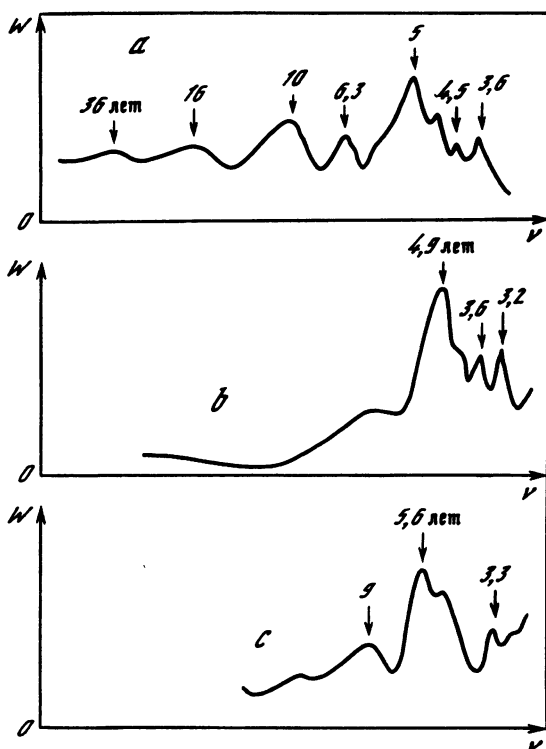
Закономерности, обнаруженные в спектрах стохастических конвективных колебаний, имеют, по-видимому, довольно общий характер и присущи широкому классу систем гидродинамического типа, имеющих механизм накопления потенциальной энергии. В связи с этим были проанализированы существующие в литературе сведения о периодах некоторых крупномас-



Р и с. 4.17. Спектр низшей пространственной моды для развитой турбулентной конвекции



Р и с. 4.18. Временные спектры солнечной активности



Р и с. 4.19. Спектры долгопериодических колебаний в природных процессах

табных природных процессов. В качестве примера приведем результаты обработки данных о периодах солнечной активности и циклических процессов на Земле, которые могут быть обусловлены солнечной активностью.

Анализ данных выполнен в предположении, что процессы на Земле являются квадратичными откликами на колебания низшей пространственной моды солнечных процессов [133], и поэтому периоды циклических процессов на Земле при сопоставлении умножались на два. Информация о периодах циклов в диапазоне от 5 до 300 лет была взята из работ [24, 57, 133, 134, 187] без какого-либо предварительного отбора.

В работе [57] приведены результаты спектрального анализа ряда Шове, цюрихского ряда чисел Вольфа и знакопеременного ряда чисел Вольфа, который получается из предыдущего при учете знакопеременности дипольного момента магнитного поля Солнца. Показано, что при переходе к знакопеременному ряду временной спектр солнечной активности существенно упрощается. Эти данные, а также более ранние результаты периодограммного анализа знакопеременного ряда чисел Вольфа, выполненного Андерсеном, были взяты за основу.

На рис. 4.18 приведены данные Андерсена (а), заимствованные из [57], и спектры (b, c), полученные Жуковым и Музалевским [57]. Цифры над пиками в спектрах указаны в цитируемой статье. Стрелками же отмечены пики, положение которых было измерено по приведенным в статье

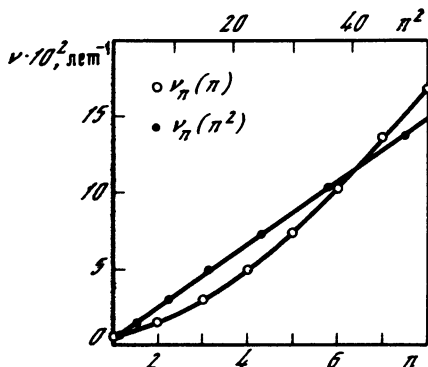
Долгопериодические колебания в природных процессах

№ п/п	<i>i</i>	Периоды циклов (лет)	$\langle T_{ni} \rangle$	$\langle T_n \rangle$	<i>n</i>
1		6, 3; 6, 6 [24], 5,4; 5,9; 6; 6 [187]		6	8
2		7,6 [57], 7,2; 7,2 [24]		7,3	7
3		9,9 [57], 8,9; 9,8; 10 [24]		9,7	6
4		11,8 [57], 11,2; 11,5 [24], 11; 11,4; 11,4; [187]		11,4	
5		13; 14,7 [57], 12,7 [24], 14 [187]		13,6	5
6	<i>a</i>	16,2; 17,5 [57], 18; 17,9 [24], 18 [187],	17,5		
	<i>b</i>	20,2 [24], 21; 21,1 [187],	20,8		
	<i>c</i>	22,1; 22,3 [57], 21,9; 22; 22; 22; 22; 22,8 [187]	22,1	20,5	4
7		32 [57], 31,6 [24], 32; 34; 35 [187]		32,9	3
8		42,5; 40 [57], 40; 42; 42,4; 44; 45 [187]		42,3	
9	<i>a</i>	58,4; 52,6 [57], 59 [187],	56,7		
	<i>b</i>	62; 65 [187],	63,5		
	<i>c</i>	71,4 [24], 70; 70; 70; 70; 74 [187]	70,9	65,7	2
10	<i>a</i>	148,5 [57], 140; 146; 146 [187], 138 [134],	143,7		
	<i>b</i>	170; 178; 182 [187],	176,7		
	<i>c</i>	200,4 [57], 200; 202 [187], 200 [134]	206,6	170,9	1

графикам. На рис. 4.19 приведены спектры (*a*, *b*, *c*) долгопериодических колебаний, обнаруженных в различных процессах на Земле, заимствованные из работы Вулуса и Монины [24]. Из соображений удобства все спектры приведены отдельно. В работе [24] они изображены на одном графике. Стрелками отмечены максимумы в спектрах, положение которых было измерено по приведенным в статье графикам. Третьим источником данных



Р и с. 4.20. Гистограмма солнечных циклов



Р и с. 4.21. Зависимость частоты от номера пика n и от n^2

о периодах циклов послужила таблица Шнитникова, взятая из работы [187]. Дополнительно были использованы данные из [134].

Все использованные данные с указанием на источники приведены в табл. 4.3. Периоды циклов, взятые из [134, 187], удвоены. В тех случаях, когда в цитируемых работах указаны интервалы значений периодов, в таблицу заносилось среднее значение. На рис. 4.20 данные, приведенные в табл. 4.3, представлены в виде гистограммы. Масштаб по оси времени логарифмический. В этом масштабе ширина прямоугольников, обозначающих отдельные экспериментальные точки, такова, что отношение $\Delta T/T_n$ не зависит от положения точки на оси и приблизительно равно 0,02. Здесь T_n — период цикла, ΔT — ширина интервала, соответствующего ширине прямоугольников. Из рис. 4.20 видно, что данные различных авторов, относящиеся как к солнечным, так и к земным процессам, образуют изолированные группы.

Предлагаемая интерпретация этих данных состоит в следующем. На рис. 4.20 и в табл. 4.3 все точки разбиты на 10 групп. Группы 6, 9 и 10-я состоят, в свою очередь, из трех подгрупп — a , b , c . При выделении групп точек за основу были взяты результаты спектральной обработки знакопеременного ряда чисел Вольфа и ряда Шове [57]. В табл. 4.3 приведены средние значения периодов циклов в группах $\langle T_n \rangle$ и подгруппах $\langle T_{ni} \rangle$ ($i = a, b, c$).

Частоты, соответствующие центрам групп 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 и 10, образуют серию с плавной зависимостью частоты от номера. При переходе к квадратичному масштабу по оси v эта зависимость спрямляется (рис. 4.21). Центр группы 4 с точностью 0,5% соответствует комбинационной частоте $\nu_7 - \nu_4$, а центр группы 8 с точно-

стью 1% — кратной гармонике $4\nu_1$. Период цикла (112 лет) из работы [57] не вписывается в предлагаемую классификацию. Центры подгрупп 6a и 6c с точностью 0,7% соответствуют комбинационным частотам $\nu_4 \pm \nu_1$. Расщепление групп 9 и 10 на подгруппы может быть объяснено модуляцией низкочастотными колебаниями с периодами 613 и 1072 года, содержащимися в спектре ряда Шове (см. рис. 4.18).

Глава 5

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

5.1. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В исследованиях турбулентности с помощью ЭВМ широкое распространение получили проекционные методы. При проектировании уравнений гидродинамики на конечномерные функциональные базисы получается система дифференциальных уравнений, описывающая изменение со временем коэффициентов разложения гидродинамических полей.

Конечномерные представления уравнений гидродинамики допускают более простое статистическое описание турбулентности, чем исходные дифференциальные уравнения в частных производных. Проектируя уравнения гидродинамики на функциональные базисы и пренебрегая несущественными взаимодействиями, можно получать достаточно простые модельные уравнения, отражающие основные свойства турбулентного движения жидкости.

Вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых в результате проектирования, целиком определяется выбором базиса. В проекционных методах применяются в основном базисные функции, имеющие выраженные области локализации в пространстве волновых векторов [108]. Характерный размер области локализации в k -пространстве, одинаковый для всех функций базиса, в силу соотношения неопределенностей для волновых пакетов обратно пропорционален размеру рассматриваемой области в r -пространстве. Каждой базисной функции соответствует система когерентных вихрей, заполняющих всю рассматриваемую область.

Если области локализации различных функций базиса не перекрываются в k -пространстве, то базисные функции ортогональны и сохраняют это свойство после применения линейных дифференциальных операторов. Все матрицы линейных членов в динамической системе оказываются при этом диагональными. Неприятным свойством базисов данного типа является сильная связанность динамической системы, возникающая из-за того, что локальные взаимодействия, описываемые членом $(\nabla \nabla) \cdot \mathbf{v}$ в уравнении Навье-Стокса, нелокальны в k -пространстве. С учетом ортогональности базиса число отличных от нуля нелинейных членов в динамической системе оказывается пропорциональным квадрату числа базисных функ-

ций. При этом в уравнения для высоких пространственных частот с существенным весом входят все низшие гармоники.

С сеточными методами численного исследования решений уравнения Навье—Стокса ассоциируются базисы, состоящие из функций с выраженными областями локализации в g -пространстве. Из соотношения неопределенностей для волновых пакетов следует, что базисные функции такого типа имеют широкий спектр пространственных частот.

Задание функций в узлах сетки подразумевает некоторую процедуру интерполяции. Ограничив пространственный спектр рассматриваемых функций, можно представить их в виде рядов Котельникова по функциям отсчетов [177]. Каждой базисной функции соответствует в этом случае вихрь с характерным размером порядка шага сетки, локализованный около данного узла. Базисы такого типа дают простую структуру нелинейных членов, которые в этом случае связывают переменные, относящиеся к небольшому числу соседних узлов. Отсутствие ортогональности базиса после применения линейных дифференциальных операторов приводит к недиагональности матриц линейных членов динамической системы и обуславливает ее сильную связанность. Этот факт объясняется отсутствием в базисе функций, соответствующих крупномасштабным вихрям. Крупномасштабные движения описываются в данном базисе линейной комбинацией мелко-масштабных вихрей.

Оба типа рассмотренных выше базисов характеризуются граничной пространственной частотой k_T , определяющей число степеней свободы динамической системы, приходящихся на единицу объема рассматриваемой области. Увеличение граничной частоты либо за счет добавления высокочастотных пространственных гармоник в базисах тригонометрического типа, либо за счет уменьшения шага сетки в разложении Котельникова отражается на всех уравнениях системы. Это обстоятельство затрудняет экстраполяцию результатов, полученных при рассмотрении свойств конечномерных систем на случай $k_T \rightarrow \infty$.

В теории турбулентности используется понятие об иерархии вихрей. В совокупности с теорией размерностей представление о турбулентном движении как о системе вихрей различного размера со случайными значениями амплитуд позволяет получать различные зависимости для статистических характеристик движения [116]. Для конкретизации этого понятия иногда ссылаются на разложение полей скорости в интегралы Фурье. Такая интерпретация неудовлетворительна. Действительно, каждой фурье-гармонике в разложении векторного потенциала скорости соответствует система когерентных вихрей, заполняющих все пространство. Реальные же процессы переноса, деформации и дробления мелкомасштабных вихрей определяются локальными условиями в турбулентном потоке, поэтому фурье-гармоники должны группироваться в жестко коррелированные волновые пакеты, образующие локализованные вихри.

Построение системы вихрей, которая бы как можно точнее соответствовала существующим качественным представлениям об иерархической структуре турбулентности, и применение ее в качестве базиса при получении конечномерных динамических систем представляют интерес для обобщения методов анализа локально изотропной турбулентности на более сложные ситуации.

В данной главе рассматривается базис промежуточного типа, состоящий из функций с выраженными областями локализации как в k -, так и в g -пространстве [66]. Характерные размеры этих областей должны удовлетворять соотношению неопределенностей для волновых пакетов. Основой построения базиса является разбиение k - и g -пространства на ячейки, для которых произведение объемов $\Delta k \cdot \Delta g / 8\pi^3$ равно 1. Размеры и формы ячеек подбираются так, чтобы сохранить, по крайней мере частично, положительные свойства исходных базисов и, по возможности, скомпенсировать их недостатки. Оказывается, что выбор оптимального в этом смысле базиса существенным образом зависит от вида энергетического спектра течения. Иерархический базис, рассматриваемый в следующем разделе, в случае статистической независимости коэффициентов при базисных функциях дает ступенчатую аппроксимацию энергетического спектра и поэтому одинаково пригоден как на возрастающих, так и на убывающих участках спектра.

5.2. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ БАЗИСЫ

Вначале построим иерархический базис для действительных функций одного переменного, принадлежащих классу $L_2(-\infty, \infty)$. Функция f принадлежит классу $L_2(-\infty, \infty)$, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (5.1)$$

По теореме Планшереля [177] последовательность функций

$$F(\gamma, l_n) = \int_{-l_n}^{l_n} f(x) e^{-2\pi i \gamma x} dx \quad (5.2)$$

сходится в среднеквадратичном к функции $F(\gamma)$, принадлежащей $L_2(-\infty, \infty)$

$$\lim_{l_n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\gamma, l_n) - F(\gamma)|^2 d\gamma = 0. \quad (5.3)$$

Прямое и обратное преобразования Фурье запишем в виде

$$F(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \gamma x} dx, \quad (5.4)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma. \quad (5.5)$$

Интегралы в (5.4) и (5.5) понимаются сходящимися в среднеквадратичном.

Определим функции

$$F_N(\gamma) = \begin{cases} F(\gamma) & \text{при } \gamma_N < |\gamma| < 2\gamma_N, \\ 0 & \text{при } |\gamma| < \gamma_N, \quad |\gamma| > 2\gamma_N, \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\gamma_N = 2^{N-1}, \quad \sum F_N(\gamma) = F(\gamma), \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Функции F_N принадлежат классу $L_2(\gamma_N < |\gamma| < 2\gamma_N)$. Построим в $L_2(\gamma_N < |\gamma| < 2\gamma_N)$ полный ортонормированный базис. С этой целью периодически продолжим $F_N(\gamma)$ за пределы интервала $\gamma_N < |\gamma| < 2\gamma_N$:

$$\tilde{F}_N(\gamma) = \begin{cases} F_N(\gamma - 2\gamma_N n) & \text{при } -2\gamma_N + 2\gamma_N n < \gamma < -\gamma_N + 2\gamma_N n, \\ F_N(\gamma + 2\gamma_N n) & \text{при } \gamma_N - 2\gamma_N n < \gamma < 2\gamma_N - 2\gamma_N n. \end{cases} \quad (5.7)$$

В силу действительности $f(x)$ $F(\gamma) = F^*(-\gamma)$, т.е. действительная часть F_N симметрична, а мнимая — антисимметрична. Возможность периодического продолжения (5.7) обусловлена равенством интервалов $0 < \gamma < \gamma_N$ и $\gamma_N < \gamma < 2\gamma_N$.

Функцию $\tilde{F}_N(\gamma)$ с периодом $2\gamma_N$ представим в виде ряда Фурье

$$\tilde{F}_N(\gamma) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_{Nn} h_N^{1/2} e^{-2\pi i h_N n \gamma}, \quad (5.8)$$

$$A_{Nn} = \int_{-\gamma_N}^{\gamma_N} \tilde{F}_N(\gamma) h_N^{1/2} e^{2\pi i h_N n \gamma} d\gamma; \quad h_N = \frac{1}{2\gamma_N}.$$

Отметим, что $A_{Nn}^* = A_{Nn}$.

Функции $h_N^{1/2} \exp\{-2\pi i h_N n \gamma\}$ образуют полный ортонормированный базис в классе функций $\tilde{F}_N(\gamma)$, а те же самые функции, заданные в области $\gamma_N < |\gamma| < 2\gamma_N$, образуют полный ортонормированный базис в классе функций $F_N(\gamma)$. Применив к этому базису преобразование Фурье

$$\begin{aligned} f_{Nn}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (h_N^{1/2} e^{-2\pi i h_N n \gamma}) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma = \\ &= h_N^{-1/2} \frac{\sin[(\pi/2) h_N^1 (x - h_N n)]}{(\pi/2)(x - h_N n)} \cos \frac{3\pi}{2h_N} (x - h_N n), \end{aligned} \quad (5.9)$$

не изменяющее соотношений ортогональности и нормировку базисных функций, получим полный ортонормированный базис для функций $f_N(x)$, определяемых соотношением

$$f_N(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_N(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma, \quad (5.10)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_N(x) = f(x). \quad (5.11)$$

Разложение функции $f(x)$, принадлежащей $L_2(-\infty, \infty)$, можно записать теперь в виде

$$f(x) = \sum_{Mn} A_{Mn} f_{Mn}(x). \quad (5.12)$$

Остается выразить коэффициенты A_{Nn} через $f(x)$. Проще всего это сделать, используя соотношение ортогональности для f_{Nn}

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Nn}(x) f_{Mm}(x) dx = \delta_{NM} \delta_{nm}, \quad (5.13)$$

которое следует из ортогональности функций

$$F_{Nn}(\gamma) = \begin{cases} h_N^{1/2} e^{-2\pi i h_N n \gamma} & \text{при } \gamma_N < |\gamma| < 2\gamma_N, \\ 0 & \text{при } |\gamma| < \gamma_N, \quad |\gamma| > 2\gamma_N. \end{cases} \quad (5.14)$$

и инвариантности скалярного произведения относительно преобразования Фурье.

Умножив (5.12) на f_{Nn} и проинтегрировав по x с учетом (5.13), найдем

$$A_{Nn} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f_{Nn}(x) dx. \quad (5.15)$$

График функции $f_{Nn}(x)$ приведен на рис. 5.1. Характерный размер области локализации функций яруса N на оси x есть $h_N = 1/2\gamma_N$. Фурье-образы F_{Nn} функций f_{Nn} локализованы на оси γ в двух симметрично расположенных областях общей протяженностью $2\gamma_N$ (рис. 5.2). Произведение размеров этих областей удовлетворяет соотношению неопределенностей для волновых пакетов $\Delta x \cdot \Delta \gamma = 1$.

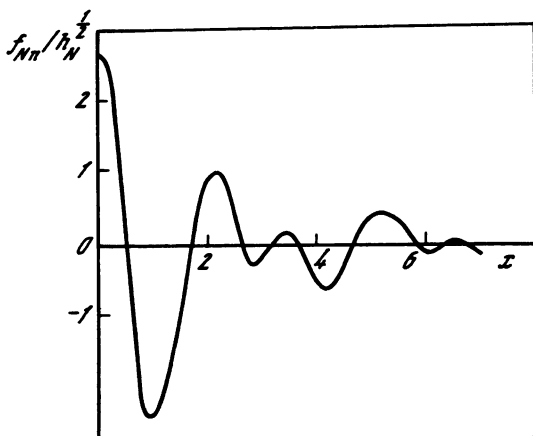
Удобства использования базиса f_{Nn} для аппроксимации функций класса $L_2(-\infty, \infty)$ состоят в том, что при изменениях характерного размера области задания $f(x)$ на оси x или полосы пространственных частот γ легко изменять количество базисных функций, необходимых для достижения заданной точности аппроксимации. При этом базисные функции, локализованные в центральных частях этих интервалов, не изменяются.

Таким образом, система функций f_{Nn} состоит из групп (ярусов), отличающихся значением индекса N . Индекс N определяет характерный размер области локализации функций данного яруса и шаг пространственной сетки, в узлах которой расположены "центры тяжести" базисных функций. Функции одного яруса могут быть получены друг из друга путем сдвига по оси x на расстояние $(n - m)h_N$. Функции, относящиеся к различным ярусам, при совпадении их центров могут быть найдены друг из друга преобразованием подобия.

Если к любой из функций f_{Nn} применить линейный дифференциальный оператор L , то функция Lf_{Nn} остается ортогональной к любой функции f_{Mm} с $M \neq N$. Это свойство следует из того факта, что фурье-образы F_{Nn} функций f_{Nn} с разными значениями N не перекрываются на оси γ . Операции Lf_{Nn} соответствует умножение F_{Nn} на некоторый многочлен вида $\sum_K C_K \gamma^K$. Области, в которых F_{Nn} и $F_{Mm} \sum_K C_K \gamma^K$ имеют ненулевые значения, совпадают. Поэтому скалярные произведения $\int_{-\infty}^{\infty} F_{Mm}(\gamma) [\sum_K C_K \gamma^K F_{Nn}(\gamma)] d\gamma = 0$ при $N \neq M$. В силу инвариантности скалярного произведения относительно преобразования Фурье этим свойством обладают и функции Lf_{Nn} .

Наряду с равномерными сетками с шагом h_N можно использовать сетки со случайным расположением узлов, но таким же средним шагом. Это дает преимущества при вычислении средних значений характеристик случайных полей, но при этом, к сожалению, ортогональность функций внутри одного и того же яруса нарушается. Ортогональность функций различных ярусов сохраняется.

Формальный способ построения одномерного иерархического базиса



Р и с. 5.1. График одномерной базисной функции

со случайным распределением центров базисных функций состоит в следующем. Ось γ разбивается на октавы

$$2^{N-1} < |\gamma| < 2^N, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.16)$$

Вычисляется обратный фурье-образ функции, принимающей действительное постоянное значение F_{N0} в интервале (5.16) и равной нулю за его пределами. Значение F_{N0} выбирается так, чтобы

$$2^{N-1} < |\gamma| < 2^N \int F_{N0} F_{N0}^* d\gamma = 1. \quad (5.17)$$

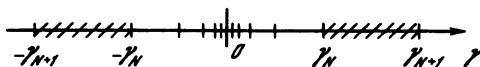
В результате получаются базисные функции f_{N0} , определяемые формулой (5.9) с $n = 0$. Для каждого яруса берется сетка со случайным расположением узлов и средним расстоянием между узлами, равным h_N . Функции f_{Nn} получаются путем сдвига центра функции f_{N0} в n -й узел сетки.

Иерархический базис для функций двух переменных можно получать как прямое произведение одномерных базисов f_{Nn} , f_{Mm} . Но при этом усложнится номенклатура базисных функций. Области локализации будут иметь различные размеры по осям x и y в зависимости от N и M . Имея в виду локальную изотропию мелкомасштабной турбулентности, желательно получить базис, в котором функции, обладая различными характерными размерами областей локализации, оставались бы изотропными. Естественное обобщение разбиения γ -пространства на ярусы состоит в следующем:

$$2^{N-1} < |\gamma| < 2^N. \quad (5.18)$$

Для точного воспроизведения процедуры построения одномерного базиса необходимо было бы разложить фурье-образ $F(\eta, \xi)$ функции $f(x, y)$ в каждой области (5.18) в ряды по функциям $\exp\{2\pi i(\eta x_n + \xi y_n)\}$. За основу берется функция f_{N0} , являющаяся фурье-образом области (5.18), точнее, функции F_{N0} , принимающей постоянное значение в (5.18), равной нулю вне (5.17) и нормированной на единицу. Умножение F_{N0} на

$\exp\{2\pi i(\eta x_n + \xi y_n)\}$ смещает f_{N0} на расстояние x_n вдоль оси x и на y_n вдоль оси y . Но система функций $\exp\{2\pi i(\eta x_n + \xi y_n)\}$ не ортогональна в кольцевой области (5.18), поэтому точное воспроизведение описанной выше процедуры выполнить не удастся. Если же использовать сетки со случайным расположением узлов, отказавшись от ортогонализации функций внутри ярусов, то никаких новых особенностей в процедуре построения базиса не возникает.



Р и с. 5.2. Область локализации базисной функции в k -пространстве

Построим двумерный скалярный иерархический базис. Зададим функцию

$$F_{N0} = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_0 \sqrt{3\pi}} 2^{1-N} & \text{при } \gamma_N < |\gamma| < 2\gamma_N, \\ 0 & \text{при } |\gamma| < \gamma_N, |\gamma| > 2\gamma_N, \end{cases} \quad (5.19)$$

$$\gamma_N = 2^{N-1}, \quad \gamma = (\eta, \xi).$$

Вычислив обратный фурье-образ функции F_{N0}

$$f_{N0}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{N0} e^{2\pi i(\eta x + \xi y)} d\eta d\xi, \quad (5.20)$$

найдем вид базисной функции яруса N с центром в начале координат. Выполнив сдвиг центра в точку с координатами $\mathbf{r}_{Nn} = (x_{Nn}, y_{Nn})$, получим выражение для произвольной базисной функции яруса N :

$$f_{Nn} = \sqrt{\frac{\pi}{3}} 2^{-N} \left(\frac{2I_1(2s) - I_1(s)}{s} \right), \quad (5.21)$$

где $s = \pi 2^N |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}|$, а I_1 — функция Бесселя. Сдвигу функции f_{N0} на величину $\mathbf{r}_{Nn}$ соответствует умножение фурье-образа F_{N0} функции f_{N0} на $\exp\{-2\pi i \gamma \mathbf{r}_{Nn}\}$, поэтому фурье-образ произвольной базисной функции яруса имеет вид

$$F_{Nn} = \begin{cases} \frac{2^{1-N}}{\sqrt{2\pi}} e^{-2\pi i \gamma \mathbf{r}_{Nn}} & \text{при } \gamma_N < |\gamma| < 2\gamma_N, \\ 0 & \text{при } |\gamma| < \gamma_N, |\gamma| > 2\gamma_N. \end{cases} \quad (5.22)$$

Будем считать, что $\mathbf{r}_{Nn}$ — случайные точки, равномерно распределенные на плоскости (x, y) со средней плотностью

$$\rho_N = \frac{3\pi}{4} 2^{2N}. \quad (5.23)$$

Величина ρ_N есть площадь кольцевой области на плоскости (η, ξ) .

Иерархический базис для двумерного соленоидального векторного

поля можно ввести следующим образом:

$$v_{Nn} = \left(\frac{\partial}{\partial y} f_{Nn}, - \frac{\partial}{\partial x} f_{Nn} \right). \quad (5.24)$$

Недостаток такого базиса заключается в том, что пространственный энергетический спектр $V_{Nn} V_{Nn}^*$ функций v_{Nn} оказывается возрастающим с ростом $|\gamma|$. Если построить случайное векторное поле как суперпозицию v_{Nn} со случайными взаимно некоррелированными коэффициентами, то пространственный энергетический спектр такого поля пропорционален $V_{Nn} V_{Nn}^*$. Но в связи с тем, что спектры мелкомасштабной турбулентности убывают с ростом $|\gamma|$, желательно иметь базис, у которого $V_{Nn} V_{Nn}^*$ либо убывает с ростом $|\gamma|$, либо по крайней мере не зависит от γ .

Устранить этот недостаток можно следующим образом. Умножим фурье-образ $V_N(\gamma)$ на некоторую весовую функцию $G(\gamma) \neq 0$ в области (5.18) и представим его в виде разложения по полной системе базисных функций

$$V_{Nn} = (2\pi i \xi F_{Nn}, -2\pi i \eta F_{Nn}), \quad (5.25)$$

являющимися фурье-образами v_{Nn} :

$$G(\gamma) V(\gamma) = \sum_{Nn} A_{Nn} V_{Nn}. \quad (5.26)$$

Разделив обе части (5.26) на $G(\gamma)$, получим полную систему базисных функций $G^{-1}(\gamma) V_{Nn}$. Подбором функции $G(\gamma)$ можно обеспечить требуемую зависимость величины $G^{-2}(\gamma) V_{Nn} V_{Nn}^*$ от $|\gamma|$. После этого координатные представления базисных функций находятся путем обратного преобразования Фурье.

Базисные функции с энергетическим спектром, убывающим как γ^{-2} , получаются при $G = 2\pi^4 \gamma^2 \sqrt{6\pi}$. Фурье-образы V_{Nn} и координатные представления v_{Nn} для этого случая можно записать в виде

$$V_{Nn} = \begin{cases} \frac{2^{-N} i(\gamma \times e)}{\sqrt{3\pi^3} \gamma^2} e^{-2\pi i \gamma r_{Nn}} & \text{при } \gamma_N < |\gamma| < 2\gamma_N, \\ 0 & \text{при } |\gamma| < \gamma_N, |\gamma| > 2\gamma_N, \end{cases} \quad (5.27)$$

$$v_{Nn}(r) = \frac{r \times e}{r \sqrt{3\pi}} \left(\frac{I_0(2s) - I_0(s)}{s} \right). \quad (5.28)$$

Здесь e — единичный вектор, перпендикулярный плоскости (x, y) , I_0 — функция Бесселя.

Фурье-образы функций $f_{Nn}(r - r_{Nn})$ трехмерного иерархического скалярного базиса имеют вид

$$F_{Nn}(\gamma) = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{7\pi} 2^{-3N/2} e^{-2\pi i \gamma r_{Nn}} & \text{при } \gamma_N < |\gamma| < 2\gamma_N, \\ 0 & \text{при } |\gamma| < \gamma_N, |\gamma| > 2\gamma_N. \end{cases} \quad (5.29)$$

Величина $F_{Nn} F_{Nn}^*$ не зависит от γ . Выполняя обратное преобразование

Фурье от (5.29), найдем

$$f_{Nn}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6\pi}{7}} 2^{3N/2} \left(\frac{\sin 2s - 2s \cos 2s - \sin s + s \cos s}{s^3} \right), \quad (5.30)$$

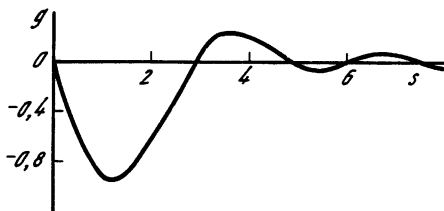
где $s = \pi 2^N |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}|$.

Случайные точки $\mathbf{r}_{Nn}$ распределены равномерно со средней плотностью

$$\rho_N = \frac{7\pi}{6} 2^{3N}. \quad (5.31)$$

Величина ρ_N — это объем шарового слоя $2^{N-1} < |\gamma| < 2^N$.

Р и с. 5.3. Базисная функция трехмерного поля скорости



Фурье-образы функций $\mathbf{v}_{Nn\nu}$ трехмерного соленоидального иерархического базиса имеют вид

$$\mathbf{V}_{Nn\nu} = \begin{cases} \frac{3i}{\sqrt{7\pi}} 2^{-3N/2} \frac{(\gamma \times \mathbf{e}_\nu)}{\gamma} e^{-2\pi i \gamma \mathbf{r}_{Nn}} & \text{при } \gamma_N < |\gamma| < 2\gamma_N, \\ 0 & \text{при } |\gamma| < \gamma_N, |\gamma| > 2\gamma_N, \end{cases} \quad (5.32)$$

где $\mathbf{e}_\nu$ — единичные векторы в направлении координатных осей, $\mathbf{r}_{Nn}$ — случайные точки, распределенные равномерно со средней плотностью

$$\rho_N = \frac{7\pi}{9} 2^{3N}. \quad (5.33)$$

Плотность точек на $1/3$ меньше, чем для скалярного базиса, так как из трех компонент поля $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ только две являются независимыми вследствие условия соленоидальности $\nabla \mathbf{v} = 0$.

Выполнив обратное преобразование Фурье от (5.32), получим

$$\mathbf{v}_{Nn\nu} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{7}} 2^{3N/2} \mathbf{e}_\nu \times \frac{d}{ds} \left(\frac{\cos s - \cos 2s}{s^2} \right). \quad (5.34)$$

Каждой базисной функции (5.36) соответствует осесимметричный вихрь с осью вращения $\mathbf{e}_\nu$. При переходе от яруса N к $N+1$ размеры вихрей вдвое уменьшаются, а их число в единице объема увеличивается в 8 раз. Крупные и более мелкие вихри существуют в одном и том же объеме.

На рис. 5.3. представлен график функции $g = \frac{d}{ds} \left(\frac{\cos s - \cos 2s}{s^2} \right)$, описывающей зависимость скорости от расстояния s до центра вихря. Поверх-

ности нулевой скорости образуют концентрические сферы. В соседних сферических слоях жидкость вращается в противоположных направлениях. Отметим, что полный момент количества движения такого вихря равен нулю.

5.3. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Выберем в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, давления величины l , l^2/ν , ν/l , $\rho\nu^2/l^2$ и запишем уравнение Навье—Стокса в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla p + \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (5.35)$$

Подставив $\mathbf{v} = \sum_{N\nu\nu} A_{N\nu\nu} \mathbf{v}_{N\nu\nu}$ в (5.35) и умножив полученное уравнение на $\mathbf{v}_{N\nu\nu}$, проинтегрируем его по объему. Так как $\mathbf{v}_{N\nu\nu}$ удовлетворяют уравнению неразрывности и обращаются в нуль при $s \rightarrow \infty$, то член с градиентом давления исчезает. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{m\mu} \mathcal{P}_{N\nu\nu m\mu} \dot{A}_{Nm\mu} &= \sum_{Mm\mu} \sum_{Ll\lambda} \mathcal{R}_{N\nu\nu Mm\mu Ll\lambda} A_{Mm\mu} A_{Ll\lambda} + \\ &+ \sum_{m\mu} \mathcal{K}_{N\nu\nu m\mu} A_{Nm\mu}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathcal{P}_{N\nu\nu m\mu} = \int \mathbf{v}_{N\nu\nu} \mathbf{v}_{Nm\mu} d\mathbf{r}, \quad (5.37)$$

$$\mathcal{K}_{N\nu\nu m\mu} = \int \mathbf{v}_{N\nu\nu} \nabla^2 \mathbf{v}_{Nm\mu} d\mathbf{r}, \quad (5.38)$$

$$\mathcal{R}_{N\nu\nu Mm\mu Ll\lambda} = - \int \mathbf{v}_{N\nu\nu} (\mathbf{v}_{Mm\mu} \nabla) \mathbf{v}_{Ll\lambda} d\mathbf{r}. \quad (5.39)$$

Уравнение (5.36) и формулы (5.37)–(5.39) записаны с учетом того факта, что фурье-образы (5.27) базисных функций (5.28) с различными N не перекрываются в $\mathbf{K}$ -пространстве. Следовательно, базис ортогонален по индексу N и сохраняет это свойство после применения линейных дифференциальных операторов. В результате матрицы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{K}$ оказываются диагональными по индексу яруса.

Недиагональность $\mathcal{P}$ и $\mathcal{K}$ по оставшимся индексам слабая. При осреднении $\mathcal{P}$ и $\mathcal{K}$ по сферам радиуса $\rho_N^{-1/3}$, равного среднему расстоянию между соседними вихрями яруса N , получаются значения 0,1 и 0,2 соответственно.

Для оценки нелинейных членов в (5.36) вычислим значения $|\mathcal{R}_{N\nu\nu Mm\mu Ll\lambda}|^2$, осредненные по положениям центров тройки взаимодействующих вихрей и направлениям их вращения:

$$\mathcal{R}_{NML}^2 = \left(\frac{7\pi}{9}\right)^2 2^{3q} \frac{1}{27} \sum_{\nu\mu\lambda} \iint \mathcal{R}_{N\nu\nu Mm\mu Ll\lambda}^2 d\mathbf{r}_{Mm} d\mathbf{r}_{Ll}. \quad (5.40)$$

Величину $\left[\left(\frac{7\pi}{9}\right)^2 2^{3q}\right]^{-1}$ можно назвать эффективным объемом области

интегрирования. Хотя шестикратный интеграл в (5.40) берется в бесконечных пределах, значения подынтегральной функции малы всюду, за исключением таких значений $(\mathbf{r}_{Mm} - \mathbf{r}_{Nn})$ и $(\mathbf{r}_{Ll} - \mathbf{r}_{Nn})$, при которых области локализации вихрей $\mathbf{v}_{N\nu\nu}$, $\mathbf{v}_{Mm\mu}$ и $\mathbf{v}_{Ll\lambda}$ перекрываются. Выбор характерных

размеров областей локализации в некоторой степени условен, но относительные значения $\mathcal{R}_{NML}$, определяемые формулой (5.40), дают возможность сравнивать эффективность взаимодействия различных троек вихрей.

Эффективный объем области интегрирования находится из рассмотрения пересечений шаров с радиусами $\rho_N^{-1/3}$, $\rho_M^{-1/3}$, $\rho_L^{-1/3}$. Величина q , входящая в (5.40), равна

$$q = \begin{cases} M + L - N & \text{при } M < N, L < N, \\ M - N & \text{при } M < N, L \geq N, \\ L - N & \text{при } M \geq N, L \leq N. \end{cases} \quad (5.41)$$

Вычисление $\mathcal{R}_{NML}$ удобно выполнять, исходя из формулы, выражающей матричные элементы $\mathcal{R}_{N\nu\mu M m \mu L l \lambda}$ через фурье-образы базисных функций:

$$\mathcal{R}_{N\nu\mu M m \mu L l \lambda} = \iint V_{N\nu\mu}(\gamma) V_{M m \mu}(\gamma' - \gamma) 2\pi i \gamma' V_{L l \lambda}(\gamma') d\gamma d\gamma'. \quad (5.42)$$

Интегрирование в (5.42) выполняется по пересечению областей

$$2^{N-1} < |\gamma| < 2^N, \quad 2^{M-1} < |\gamma' - \gamma| < 2^M, \quad 2^{L-1} < |\gamma'| < 2^L. \quad (5.43)$$

Если для данной тройки чисел N, M, L неравенства (5.43) несовместны, то соответствующий матричный элемент обращается в нуль. Можно показать, что неравенства (5.43) несовместны для всех матричных элементов, удаленных от диагоналей $M = N, L = N$ при $M, L < N$ и $M = L$ при $M, L > N$ более чем на единицу.

Подставив (5.27) в (5.42), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{NML}^2 &= \frac{4\pi}{21} 2^{-3(N+M+L-q)} \iint d\mathbf{r}_{Mm} d\mathbf{r}_{Li} \iiint d\gamma d\gamma' d\gamma_1 d\gamma'_1 \times \\ &\times \sum_{\nu\mu\lambda} \frac{(\gamma \times \mathbf{e}_\nu)}{\gamma} \frac{(\gamma' \times \mathbf{e}_\mu)}{\gamma'} \frac{(\gamma_1 \times \mathbf{e}_\nu)}{\gamma_1} \frac{(\gamma'_1 \times \mathbf{e}_\lambda)}{\gamma'_1} \left(\frac{(\gamma \times \mathbf{e}_\mu)}{|\gamma' - \gamma|} \gamma' \right) \times \\ &\times \left(\frac{(\gamma_1 \times \mathbf{e}_\mu)}{|\gamma'_1 - \gamma_1|} \gamma'_1 \right) \exp \{ 2\pi i [(\gamma - \gamma' + \gamma_1 - \gamma'_1) \mathbf{r}_{Mm} + (\gamma + \gamma_1) \mathbf{r}_{Li}] \}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Интегрирование по $d\mathbf{r}_{Li}$ и $d\mathbf{r}_{Mm}$ дает $\delta(\gamma + \gamma_1)$ и $\delta(\gamma'_1 + \gamma')$. Используя δ -функции, выполним интегрирование по $d\gamma_1$ и $d\gamma'_1$, а затем просуммируем по ν, μ, λ . Заменяя γ' на γ_1 , получим

$$\mathcal{R}_{NML}^2 = \frac{4\pi}{21} 2^{-3(N+M+L-q)} \iint \frac{(1 + \cos^2 \Theta) \gamma_1^2 \gamma^2 \sin^2 \Theta}{\gamma^2 + \gamma_1^2 - 2\gamma\gamma_1 \cos \Theta} d\gamma d\gamma_1, \quad (5.45)$$

где Θ — угол между γ и γ_1 . Интегрируя далее по трем угловым переменным, не входящим в подынтегральное выражение (5.45), находим

$$\mathcal{R}_{NML}^2 = \frac{32\pi^3}{21} 2^{-3(N+M+L-q)} \iiint \frac{\gamma^4 \gamma_1^4 (1 + \cos^2 \Theta) \sin^3 \Theta}{\gamma^2 + \gamma_1^2 - 2\gamma\gamma_1 \cos \Theta} \times \quad (5.46)$$

$\times d\gamma d\gamma_1 d\Theta.$

Интегрирование в (5.46) производится по пересечению областей

$$\begin{aligned} 2^{N-1} < \gamma < 2^N, \quad 2^{L-1} < \gamma_1 < 2^L, \\ 2^{M-1} < (\gamma^2 + \gamma_1^2 - 2\gamma\gamma_1 \cos \Theta) < 2^M. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Матрица R_{NML} ($N = 0$)

M								L
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
0	0	0	0	0	0	0	0,1482	4
0	0	0	0	0	0	0,2448	1,7491	3
0	0	0	0	0	0,3714	1,6624	0,2201	2
0,0022	0,0088	0,0353	0,1406	0,5345	1,4586	0,2944	0	1
0,0065	0,0257	0,1032	0,4089	1	0,3467	0	0	0
0,0016	0,0063	0,0248	0,0945	0,2579	0,0522	0	0	-1
0	0	0	0,0116	0,0520	0,0069	0	0	-2
0	0	0	0,0014	0,0097	0,0008	0	0	-3
0	0	0	0,0002	0,0018	0,0001	0	0	-4

Интегралы (5.46) для различных N, M, L вычисляются численно. В табл. 5.1 приведены отношения R_{NML}/R_{NNN} . Обращение в нуль матричных элементов, удаленных от диагоналей $M = N, L = N$ при $M, L < N$ и $M = L$ при $M, L > N$ более чем на единицу, является следствием ортогональности базиса по индексу яруса.

Диагональные члены матрицы R_{NML} удовлетворяют следующим асимптотическим зависимостям, которые можно получить аналитически из формулы (5.46):

$$\begin{aligned}
 R_{NMM} &\sim 2^{\frac{5M}{2}} \quad \text{при } M > N, \\
 R_{NNL} &\sim 2^{\frac{5L}{2}} \quad \text{при } L < N, \\
 R_{NMN} &\sim 2^{N + \frac{3}{2}M} \quad \text{при } M < N.
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

Вклад отдельных слагаемых нелинейных членов в правую часть (5.36) определяется произведением R_{NML} на характерные значения коэффициентов A_N . Для инерционного интервала спектра, на котором $A_N^2 \sim 2^{-\frac{11}{3}N}$, имеем оценки

$$\begin{aligned}
 R_{NMM} A_M^2 &\sim 2^{\frac{5}{2}N - \frac{11}{3}M} \quad \text{при } M > N, \\
 R_{NML} A_N A_L &\sim 2^{-\frac{11}{6}N + \frac{2}{3}L} \quad \text{при } L < N, \\
 R_{NMN} A_N A_M &\sim 2^{-\frac{5}{6}N - \frac{1}{3}M} \quad \text{при } M < N.
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Две первые диагонали убывают с ростом $|M - N|$ и $|L - M|$. Диагональ $L = M$ при $M < N$ возрастает с увеличением $|M - N|$. Эта диагональ описывает перенос мелкомасштабных вихрей крупномасштабными.

5.4. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ИЕРАРХИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Первым этапом построения модели является упрощение исходной системы уравнений (5.36) путем отбрасывания малых членов. В связи с тем, что недиагональность матриц $\mathcal{P}$ и $\mathcal{K}$ слабая, заменим их диагональными. Диагональные члены матрицы $\mathcal{P}$ равны единице в силу нормировки базисных функций. Диагональные члены матрицы $\mathcal{K}$, вычисленные по формуле (5.38), зависят от индекса яруса $\mathcal{K}_N = \mathcal{K}_0 2^{2N}$, где $\mathcal{K}_0 = -26,2$. В результате вместо (5.36) будем иметь

$$\dot{A}_{N\nu\nu} = \sum_{Mm\mu} \sum_{Ll\lambda} \mathcal{R}_{N\nu\nu Mm\mu Ll\lambda} A_{Mm\lambda} A_{Ll\lambda} + \mathcal{K}_0 2^{2N} A_N. \quad (5.50)$$

Матричные элементы нелинейных членов $\mathcal{R}_{N\nu\nu Mm\mu Ll\lambda}$ зависят от взаимного расположения тройки взаимодействующих вихрей $\mathbf{v}_{N\nu\nu}$, $\mathbf{v}_{Mm\mu}$ и $\mathbf{v}_{Ll\lambda}$, причем большие значения $\mathcal{R}$ получаются в том случае, когда области локализации всех трех вихрей совпадают. При пропорциональном увеличении расстояния между центрами вихрей $\mathcal{R}$ убывает как s^{-7} , где s равно либо $\pi 2^N |\mathbf{r}_{Mm} - \mathbf{r}|$, либо $\pi 2^N |\mathbf{r}_{Ll} - \mathbf{r}|$. Аппроксимируем зависимость $\mathcal{R}$ от $\mathbf{r}_{Nn}$, $\mathbf{r}_{Mm}$ и $\mathbf{r}_{Ll}$ ступенчатой функцией, принимающей постоянное значение, когда области локализации тройки вихрей перекрываются, и равной нулю в противном случае. В качестве характерного размера области локализации вихря яруса N выберем величину $\rho_N^{-1/3}$. Таким образом, матричный элемент $\mathcal{R}_{N\nu\nu Mm\mu Ll\lambda}$ имеет постоянное значение для таких $\mathbf{r}_{Nn}$, $\mathbf{r}_{Mm}$ и $\mathbf{r}_{Ll}$, при которых шаровые области с радиусами $\rho_N^{-1/3}$, $\rho_M^{-1/3}$ и $\rho_L^{-1/3}$ и центрами в точках $\mathbf{r}_{Nn}$, $\mathbf{r}_{Mm}$, $\mathbf{r}_{Ll}$ имеют точки, принадлежащие всем трем областям. Если таких точек нет, то матричный элемент принимается равным нулю.

После замены $\mathcal{R}_{N\nu\nu Mm\mu Ll\lambda}$ на их ступенчатые аппроксимации число нелинейных членов в (5.50), первоначально бесконечное для неограниченного объема жидкости, становится конечным. Например, для $M > N$, $L = M + 1$ число нелинейных членов, описывающих взаимодействие ярусов N , M и $M + 1$, равно в среднем $8\rho_M \rho_N^{-1}$, где ρ_N^{-1} — объем области локализации вихря яруса N , ρ_M — средняя плотность вихрей яруса M в области ρ_N^{-1} , а множитель 8 учитывает среднее число вихрей яруса $M + 1$ внутри каждого вихря яруса M . Переход к ступенчатой аппроксимации позволяет оценить среднеквадратичные значения элементов матрицы $\mathcal{R}$ для различных вихрей рассматриваемых ярусов N , M и L по формулам (5.46).

Следующий шаг — переход от рассмотрения отдельных базисных функций к коллективным переменным, характеризующим поведение всех вихрей данного масштаба, т.е. всех базисных функций данного яруса. Проблема заключается в выборе процедуры, позволяющей записать уравнения для коэффициентов A_N , таких, что $A_N^2 = \langle A_{N\nu\nu}^2 \rangle$. Угловые скобки соответствуют осреднению по индексам n и ν .

Уравнения

$$\dot{A}_N = \sum_{ML} R_{NML} A_M A_L + K_N A_N \quad (5.51)$$

с матрицей R_{NML} , полученной путем вычисления среднеквадратичных значений элементов $R_{N\nu\nu M\mu L\lambda}$ при различных положениях тройки взаимодействующих вихрей (см. табл. 5.1), не могут дать удовлетворительное описание процесса перераспределения энергии между ярусами. Требуется указать не только модуль, но и направление действия элемента матрицы R .

Из условия несжимаемости жидкости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ следует, что

$$R_{N\nu\nu M\mu L\lambda} = -R_{L\lambda L M\mu N\nu}. \quad (5.52)$$

Взаимодействие вихрей $\mathbf{v}_{N\nu\nu}$, $\mathbf{v}_{M\mu\mu}$ и $\mathbf{v}_{L\lambda\lambda}$ описывается шестью элементами матрицы $R_{N\nu\nu M\mu L\lambda}$. Чтобы определить взаимное положение всех шести элементов, представим их векторами, скалярное произведение которых определяется формулой

$$\begin{aligned} (R_{NML} R_{NLM}) &= |R_{NML}| |R_{NLM}| \cos \alpha = \\ &= \left(\frac{7\pi}{9}\right)^2 2^{3q} \frac{1}{27} \sum_{\nu\mu\lambda} \iint R_{N\nu\nu M\mu L\lambda} R_{N\nu L\lambda M\mu} d\mathbf{r}_{M\mu} d\mathbf{r}_{L\lambda}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Вычисления по формулам (5.53) с использованием выражений для элементов матрицы через фурье-образы базисных функций (5.42) позволяют определить величину и взаимное положение всех шести векторов R , которые оказываются размещенными в одной плоскости. Чтобы получить уравнения вида (5.51), нужно вернуться к скалярной матрице нелинейных взаимодействий, т.е. найти направление проецирования векторной матрицы R .

С этой целью воспользуемся уравнением для вихря скорости

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{v} = -\text{rot} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] + \nabla^2 \text{rot} \mathbf{v} \quad (5.54)$$

и повторим для него всю проделанную процедуру. Используя разложение

$$\text{rot} \mathbf{v} = \sum_{N\nu\nu} A_{N\nu\nu} \text{rot} \mathbf{v}_{N\nu\nu}, \quad (5.55)$$

уравнение (5.54) без учета вязкого члена, рассмотрение которого тривиально, дает

$$\dot{A}_{N\nu\nu} = \sum S_{N\nu\nu M\mu L\lambda} A_{M\mu\mu} A_{L\lambda\lambda}, \quad (5.56)$$

где

$$S_{N\nu\nu M\mu L\lambda} = -\int \text{rot} \mathbf{v}_{N\nu\nu} \text{rot} [(\mathbf{v}_{M\mu\mu} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{L\lambda\lambda}] d\mathbf{r}. \quad (5.57)$$

При переходе к осредненным по ярусу коэффициентам A_N по определенным выше правилам находится матрица S_{NML} . Вычисляются шесть векторов S_{NML} , S_{NLM} , S_{MNL} , S_{MLN} , S_{LNM} , S_{LMN} и углы между ними, а также их положение относительно соответствующей шестерки векторов R . Анализ матриц R и S показывает, что существует единственная ось, проекции на которую матриц R и S совпадают. Эти проекции и дают результирующую матрицу T_{NML} . При получении матрицы T элементы R_{NML} и R_{NLM} были объединены в один элемент T_{NML} , поэтому суммирование по L проводит-

Матрица T_{NML} ($N = 0$)

p	$T_{N, N-p, N-1}$	$T_{N, N-p+1, N+1}$	$T_{N, N+p-1, N+p}$
2	$9,050 \cdot 10^{-3}$	1,226	$3,697 \cdot 10^1$
3	$1,841 \cdot 10^{-3}$	$1,941 \cdot 10^{-1}$	$2,270 \cdot 10^3$
4	$2,633 \cdot 10^{-4}$	$2,554 \cdot 10^{-2}$	$1,263 \cdot 10^5$
5	$3,440 \cdot 10^{-5}$	$3,216 \cdot 10^{-3}$	$6,960 \cdot 10^5$
6	$4,327 \cdot 10^{-6}$	$4,000 \cdot 10^{-4}$	$3,914 \cdot 10^6$
7	$5,409 \cdot 10^{-7}$	$5,023 \cdot 10^{-5}$	$2,212 \cdot 10^8$
8	$6,761 \cdot 10^{-8}$	$6,281 \cdot 10^{-6}$	$1,252 \cdot 10^6$
9	$8,451 \cdot 10^{-9}$	$7,852 \cdot 10^{-7}$	$7,085 \cdot 10^6$
10	$1,056 \cdot 10^{-9}$	$9,816 \cdot 10^{-8}$	$4,010 \cdot 10^7$

ся только для $L > M$:

$$\dot{A}_N = \sum_M \sum_{L > M} T_{NML} A_M A_L + K_N A_N. \quad (5.58)$$

В матрице T отличны от нуля только элементы трех типов, приведенные в табл. 5.2.

Рассмотренная процедура определения матрицы T наиболее логично выглядит при рассмотрении двумерной турбулентности, для которой она и была предложена [166]. В двумерной турбулентности уравнения движения сохраняют две квадратичные величины — энергию и энстрофию, поэтому построить модельные уравнения, сохраняющие наряду с энергией и энстрофию, без привлечения уравнения для вихря не удастся (см. разд. 7.1).

Глава 6

ТРЕХМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНАЯ КОНВЕКЦИЯ

6.1. ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Обзор результатов исследования различных турбулентных течений с помощью иерархической модели начнем со случая однородной и изотропной изотермической турбулентности [185]. Учитывая, что в матрице T_{NML} отличны от нуля элементы трех типов, запишем модельные уравнения в следующем виде:

$$\left(\frac{d}{dt} - K_0 2^{2N} \right) A_N = \sum_{p=2}^{p_{\max}} (T_{N, N-p, N-1} A_{N-p} A_{N-1} + T_{N, N-p+1, N+1} A_{N-p+1} A_{N+1} + T_{N, N+p-1, N+p} A_{N+p-1} A_{N+p}). \quad (6.1)$$

Увеличение индекса p , по которому проводится суммирование, соответствует учету взаимодействий вихрей яруса N со все более далекими ярусами.

В отсутствие вязкости ($K_0 = 0$) система (6.1) имеет стационарное решение

$$A_N = A_0 2^{-11/6N}, \quad (6.2)$$

соответствующее закону Колмогорова "–5/3" для спектра энергии локально изотропной турбулентности в инерционном интервале [93]. При нулевой вязкости система (6.1) должна сохранять общую энергию. В однородной турбулентности имеет смысл говорить об энергии, отнесенной к единице объема

$$E = \frac{1}{2} \frac{1}{V} \int v^2 dr. \quad (6.3)$$

При принятом разложении поля скорости по базисным функциям v_{Nnv} с коэффициентами A_{Nnv} и с учетом ортогональности функций по номеру яруса энергия системы разбивается на парциальные энергии ярусов

$$E = \sum_N E_N, \quad E_N = \sum_{nv} \sum_{tm} \frac{1}{2V} \mathfrak{P}_{Nnvm\mu} A_{Nnv} A_{Ntm\mu}. \quad (6.4)$$

Как и выше, недиагональные члены матрицы $\mathfrak{P}_{Nnvm\mu}$ отбрасываются. Суммирование в (6.4) заменяется умножением среднеквадратичного по ярусу значения A_N^2 на число вихрей этого яруса в единице объема

$$E_N = \frac{\rho_N A_N^2}{2}. \quad (6.5)$$

Умножение (6.1) на $\rho_N A_N / 2$ дает уравнения для энергии яруса

$$\dot{E}_N = \frac{1}{2} \sum_{ML} \rho_N T_{NML} A_N A_M A_L. \quad (6.6)$$

Сохранение энергии возможно при выполнении условия

$$\rho_N T_{NML} + \rho_M T_{MNL} + \rho_L T_{LNM} = 0. \quad (6.7)$$

Элементы матрицы T_{NML} (см. табл. 5.2) удовлетворяют этому соотношению, что обеспечивает консервативность (6.1).

Интерес представляет и другая квадратичная мера движения—энтрофия Ω , определяемая соотношением

$$\Omega = \frac{1}{2V} \int (\text{rot} v)^2 dr. \quad (6.8)$$

Аналогично (6.5) имеем

$$\Omega = \frac{31}{35} \pi^2 \sum_N \rho_N A_N^2 \cdot 2^{2N}. \quad (6.9)$$

Так как в трехмерной турбулентности имеет место эффект интенсификации поля вихря скорости, происходящей за счет возбуждения вихрей все более малых масштабов, то энтрофия недиссипативной системы должна увеличиваться.

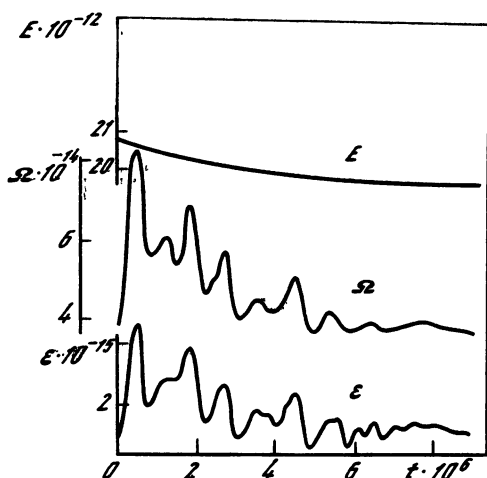


Рис. 6.1. Эволюция энергии E , энтропии Ω и скорости диссипации энергии ϵ в вырождающейся турбулентности

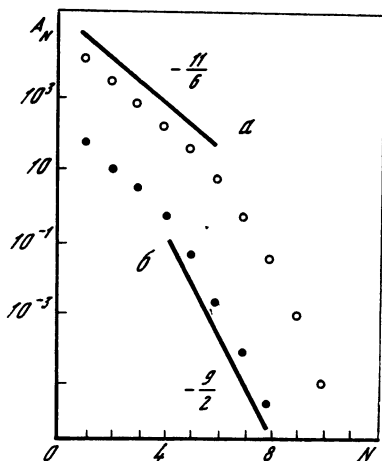


Рис. 6.2. Результаты моделирования однородной изотермической турбулентности
а — $Re = 2 \cdot 10^4$, б — $Re = 120$

Соответствие свойств модельной системы качественным особенностям турбулентного движения идеальной жидкости проверялось при численном интегрировании системы (6.1). Решалась система из 15 уравнений, что соответствует рассмотрению диапазона волновых чисел от 1 до $3,2 \cdot 10^4$. $P_{\max} = 10$, что равносильно учету взаимодействий вихрей с размерами, отличающимися в 1000 раз. Рассматривались начальные условия двух типов: а) полностью развитый спектр, т.е. в начальный момент времени все коэффициенты A_N отличны от нуля, б) энергия сосредоточена в начальный момент времени в крупномасштабном движении. Во всех случаях система хорошо сохраняет энергию и дает существенный рост завихренности. Изменение энергии системы после 6000 шагов по времени составило менее 1% при семикратном увеличении энтропии.

Шаг интегрирования системы выбирается с учетом времени оборота вихря наименьшего масштаба:

$$t_N = \frac{\pi l_N}{v_N} = \frac{\pi l_0^2}{v A_N} 2^{-\frac{5N}{2}}. \quad (6.10)$$

При максимальном значении N , равном $\bar{N}$, с учетом стационарного решения (6.2) шаг интегрирования имеет порядок

$$\tau = \frac{\pi}{A_0} 2^{-\frac{2\bar{N}}{3}}. \quad (6.11)$$

Отметим, что при выбранном способе обезразмеривания число Рейнольдса не вошло в параметры системы. Численно оно равно значению коэффициента A_0 , характеризующего максимальный масштаб движения.

Результаты моделирования вырождения изотермической турбулентности

вязкой жидкости представлены на рис. 6.1 и 6.2. На рис. 6.1 показана эволюция квадратичных мер движения — энергии E и энтропии Ω , а также скорости диссипации энергии $\epsilon = -\dot{E}$ при следующих начальных условиях: $A_0 = 10^6$, $A_1 = 10^5$. Шаг интегрирования равен 10^{-8} . Наблюдаются значительные всплески энтропии, сопровождающиеся синхронным возрастанием скорости диссипации энергии. Картина качественно соответствует результатам численного исследования спектральным методом вырождения вихря вида $\mathbf{v} = \{\cos x \sin y \cos z, \sin x \cos y \cos z, 0\}$ в кубической области с периодическим продолжением решения за ее пределы [260].

На рис. 6.2 приведен энергетический спектр. Прямая линия на графике a соответствует решению (6.2), эквивалентному колмогоровскому спектру $E(k) \sim k^{-5/3}$. Решение (6.2) неустойчиво. Коэффициенты A_N совершают непрерывные колебания. На графике приведены среднеквадратичные значения величин A_N , полученные осреднением по 1000 шагов по времени.

По результатам решения системы (6.1) можно определить константу C в законе Колмогорова для энергетического спектра локально изотропной турбулентности в инерционном интервале

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (6.12)$$

Энергия яруса при таком распределении энергии есть

$$E_N = \int_{2\pi \cdot 2^{N-1}}^{2\pi \cdot 2^N} E(k) dk = 0,259 C \epsilon^{2/3} \cdot 2^{-2N/3}. \quad (6.13)$$

С учетом (6.5) для константы C получаем выражение

$$C = 4,72 A_0^2 \epsilon^{-2/3}. \quad (6.14)$$

Для определения константы решалась система (6.1) с постоянной подкачкой энергии в нулевой ярус. После выхода системы на стационар со спектром (6.12) скорость подкачки энергии равна скорости ее диссипации, а формула (6.14) дает значение константы $C = 1,6$, что близко к общепризнанному значению 1,5 [189].

Следует подчеркнуть, что в отличие от известных каскадных моделей [38, 55, 197] иерархическая модель позволяет вычислить все константы, входящие в спектральные законы.

Отметим еще один результат, касающийся диссипативного интервала спектра. Кривая b на рис. 6.2 соответствует стационарному решению при числе Рейнольдса, равном 120. В правой части спектра на протяжении шести ярусов формируется диссипативный интервал. Прямая линия отвечает распределению $A_N \sim 2^{-9N/2}$, что эквивалентно спектру $E(k) \sim k^{-7}$. Спектр "—7" для диссипативного интервала экспериментально получен в [231].

Диссипативный интервал однородной турбулентности был предметом исследования многих теоретических [42, 90, 99] и экспериментальных [49] работ, в которых получены спектры двух типов: $E(k) \sim k^{-7}$ и $E(k) \sim e^{f(k)}$. Обсуждению этих двух вариантов спектра в диссипативном интервале посвящена работа [283], где предпочтение отдано спектру "—7".

6.2. КОНВЕКЦИЯ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Вернемся к уравнениям конвекции несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска, записанным в безразмерной форме

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v} + G \zeta T,$$

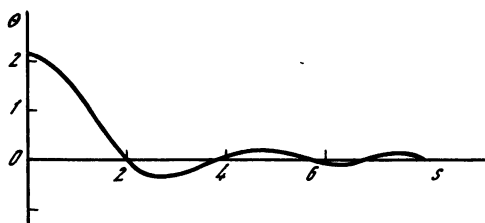
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

(6.15)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = P^{-1} \nabla^2 T.$$

При малых числах Грасгофа G температура не оказывает существенного влияния на поле скорости и может рассматриваться как пассивная примесь. Именно такая ситуация разбирается в данном разделе.

Р и с. 6.3. Базисная функция для температуры



Систему каскадных уравнений (6.1) необходимо дополнить уравнениями для поля температуры. Далее будем говорить о температуре, не забывая, что имеем в виду любое пассивное скалярное поле. Аналогично полю скорости поле температуры раскладывается по базисным функциям

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{Nn} C_{Nn}(t) \vartheta_{Nn}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}). \quad (6.16)$$

Базис для температуры вводится по тем же принципам, что и для скорости (гл. 5). Переход к скалярному полю приводит к уменьшению числа индексов, так как исчезает индекс, отвечающий за ориентацию вихря в пространстве. Функция ϑ_{Nn} скалярного иерархического базиса и ее фурье-образ Θ_{Nn} имеют вид [83]

$$\vartheta_{Nn} = \sqrt{\frac{3\pi}{14}} 2^{3N/2} \left(\frac{\sin 2s - 2s \cos 2s - \sin s + s \cos s}{s^3} \right), \quad (6.17)$$

$$\Theta_{Nn} = \sqrt{\frac{6}{7\pi}} 2^{-3N/2} e^{-2\pi i \boldsymbol{\gamma} \mathbf{r}_{Nn}} \quad \text{при} \quad 2^{N-1} < |\boldsymbol{\gamma}| < 2^N, \quad (6.18)$$

где $s = \pi 2^N |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{Nn}|$.

Базисная функция ϑ_{Nn} соответствует сферически симметричному распределению температуры, приведенному на рис. 6.3. Функции яруса N распределены в пространстве с плотностью

$$\rho'_N = \frac{7\pi}{6} 2^{3N}. \quad (6.19)$$

$N-5$	$N-4$	$N-3$	$N-2$	$N-1$	N	$N+1$	$N+2$	$N+3$	$N+4$	M L
										$N+4$
										$N+3$
										$N+2$
										$N+1$
										N
										$N-1$
										$N-2$
										$N-3$
										$N-4$
										$N-5$

Р и с. 6.4. Структура матрицы H_{NML} , заштрихованы ненулевые элементы

Подстановка (6.16) в уравнение теплопроводности дает

$$\sum_m \varphi'_{Nnm} \dot{C}_{Nm} = \sum_{Mm\mu} \sum_{Li} \mathcal{H}_{NnMm\mu Li} A_{Mm\mu} C_{Li} + P^{-1} \sum_m K_{Nnm} C_{Nm}, \quad (6.20)$$

где

$$\mathcal{H}_{NnMm\mu Li} = - \int \vartheta_{Nn} v_{Mm\mu} \nabla \vartheta_{Li} dr. \quad (6.21)$$

Следуя принципам построения иерархических уравнений, изложенным в разд. 5.3, можно получить из (6.20) уравнения для среднеквадратичных по ярусу значений C_N :

$$\dot{C}_N = \Sigma H_{NML} A_M C_L + P^{-1} K_N C_N. \quad (6.22)$$

Таблица 6.1

Матрица H_{NML} ($N=0$)

p	$H_{N,N-p,N-1}$	$H_{N,N-1,N-p}$	$H_{N,N,N-p}$	$H_{N,N+1,N-p}$
1	$2,404 \cdot 10^{-3}$	$2,404 \cdot 10^{-3}$	$4,265 \cdot 10^{-1}$	$4,262 \cdot 10^{-1}$
2	$2,762 \cdot 10^{-3}$	$2,246 \cdot 10^{-3}$	$1,166 \cdot 10^{-1}$	$3,049 \cdot 10^{-2}$
3	$3,337 \cdot 10^{-4}$	$1,557 \cdot 10^{-4}$	$2,378 \cdot 10^{-2}$	$2,449 \cdot 10^{-3}$
4	$4,333 \cdot 10^{-5}$	$9,731 \cdot 10^{-6}$	$4,387 \cdot 10^{-3}$	$2,167 \cdot 10^{-4}$
5	$6,018 \cdot 10^{-6}$	$6,082 \cdot 10^{-7}$	$7,755 \cdot 10^{-4}$	$1,918 \cdot 10^{-5}$
6	$1,020 \cdot 10^{-6}$	$3,801 \cdot 10^{-8}$	$1,371 \cdot 10^{-4}$	$1,697 \cdot 10^{-6}$
7	$1,774 \cdot 10^{-7}$	$2,376 \cdot 10^{-9}$	$2,423 \cdot 10^{-5}$	$1,502 \cdot 10^{-7}$
8	$3,112 \cdot 10^{-8}$	$1,485 \cdot 10^{-10}$	$2,284 \cdot 10^{-6}$	$1,329 \cdot 10^{-8}$
9	$5,508 \cdot 10^{-9}$	$9,280 \cdot 10^{-12}$	$7,572 \cdot 10^{-7}$	$1,176 \cdot 10^{-9}$
10	$9,371 \cdot 10^{-10}$	$5,800 \cdot 10^{-13}$	$1,339 \cdot 10^{-7}$	$1,041 \cdot 10^{-10}$

Структура матрицы H_{NML} иная, чем матрицы T_{NML} . В отличие от T матрицу H нельзя свернуть относительно диагонали $L = M$. Ненулевые значения имеют все элементы матрицы, у которых какая-либо пара индексов отлична не более чем на единицу, за исключением диагонали $L = N$. Структуру матрицы поясняет рис. 6.4, на котором заштрихованы все ненулевые элементы матрицы H . В табл. 6.1 приведены значения элементов матрицы четырех типов: $H_{0,-p,-1}$; $H_{0,-1,-p}$; $H_{0,0,-p}$; $H_{0,1,-p}$. Все остальные ненулевые элементы получаются из соотношений

$$H_{NML} = 2^{5N/2} H_{0,M-N,L-N}; \quad H_{NML} = -H_{LMN}. \quad (6.23)$$

Модельные уравнения, описывающие процесс переноса пассивной примеси в однородной и изотропной турбулентности, включают уравнения (6.1) и (6.22). Анализ уравнений позволяет предсказать вид спектра пульсаций температуры при различных числах Прандтля.

6.2.1. ИНЕРЦИОННО-КОНВЕКТИВНЫЙ ИНТЕРВАЛ ($P \sim 1$)

При больших числах Рейнольдса уравнение (6.1) по-прежнему допускает решение (6.2), соответствующее инерционному интервалу со спектром (6.12). В том же диапазоне волновых чисел в спектре пульсаций температуры появляется инерционно-конвективный интервал. Влияние диффузионного члена в (6.22) в этих масштабах мало, и из свойств матрицы H (6.23) с учетом установившегося распределения (6.2) для коэффициентов A_N следует, что стационарное решение (6.22) возможно при

$$C_N = C_0 2^{-11N/6}, \quad (6.24)$$

т.е. спектр энергии пульсаций пассивной примеси E_T имеет тот же вид, что и спектр пульсаций скорости. Это известный для инерционно-конвективного интервала спектр [116]

$$E_T(k) = B_T \epsilon_T \epsilon^{-1/3} k^{-5/3}, \quad (6.25)$$

где ϵ — скорость диссипации кинетической энергии, а ϵ_T — скорость диссипации энергии температурных пульсаций. Численное интегрирование системы (6.1)–(6.22) подтверждает существование режима (6.2) – (6.24) и позволяет определить значение константы B_T в законе (6.25) [184]. Вычисления дают значение $B_T = 1, 2$.

6.2.2. ИНЕРЦИОННО-ДИФфуЗИОННЫЙ ИНТЕРВАЛ

В этом случае каскадный перенос кинетической энергии преобладает над каскадным переносом пульсаций температуры. Рассматривается диапазон волновых чисел, в которых влияние вязкости еще несущественно и в (6.1) сохраняется решение (6.2). В то же время в (6.22) основной вклад вносит именно диссипативный член. Пусть K — номер яруса, начиная с которого основное действие в (6.22) оказывает диссипативный член $P^{-1} K_N C_N$. Тогда приток энергии пульсаций температуры в высшие ярусы обеспечивается членами $H_{NNK} A_N C_K$, и в случае стационара они должны точно компенсироваться диссипативными членами:

$$H_{NNK} A_N C_K + P^{-1} K_0 2^{2N} C_N = 0. \quad (6.26)$$

С учетом асимптотики убывания элементов H_{NNK} с ростом разности $(N - K)$ стационарное решение для C_N имеет вид

$$C_N = C_K 2^{-23(N-K)/6}. \quad (6.27)$$

Это решение соответствует асимптотическому закону

$$E_T(k) \sim k^{-17/3},$$

полученному Бэтчелором для коротковолновой части спектра температурного поля при $P \ll 1$ [116].

6.2.3. ВЯЗКОКОНВЕКТИВНЫЙ ИНТЕРВАЛ ($P \gg 1$)

Реализуется в случае, когда значительная вязкость подавляет каскад кинетической энергии, сохраняя лишь крупномасштабное движение (A_0 значительно превосходит все A_N), а спектр температурных пульсаций еще не подвержен влиянию теплопроводности. В (6.22) остаются только члены, содержащие скорость нулевого масштаба, и стационарное состояние становится возможным при условии

$$H_{N,0,N-1} A_0 C_{N-1} + H_{N,0,N+1} A_0 C_{N+1} = 0. \quad (6.29)$$

Искомое решение для C_N определяется асимптотикой убывания элементов $H_{N,N-p,N-1}$ и равно

$$C_N = C_0 2^{-3N/2}. \quad (6.30)$$

Оно соответствует спектру температурных пульсаций Бэтчелора для вязко-конвективного интервала [116]

$$E_T(k) \sim k^{-1}. \quad (6.31)$$

Численное интегрирование системы (6.1)–(6.22) для рассмотренных случаев подтверждает существование решений (6.24), (6.27) и (6.30).

6.3. ТЕРМОГРАВИТАЦИОННАЯ ТУРБУЛЕНТНАЯ КОНВЕКЦИЯ

В конвективном течении жидкости температурные неоднородности являются основной причиной движения среды и, естественно, в значительной мере определяют структуру потока. С увеличением числа Релея движение интенсифицируется и при некотором значении R турбулизуется. Вопрос в том, насколько существенно влияние конвективного члена в уравнении (6.15) на движения различного масштаба. Определяет ли он только крупномасштабную структуру потока, или его влияние распространяется на все масштабы течения?

Обратимся к системе уравнений (6.15). При проектировании на иерархический базис член $G \xi T$ дает

$$G \sum_m F_{Nnvm} C_{Nm}, \quad (6.32)$$

где

$$F_{Nnvm} = \int v_{Nnv} \xi \vartheta_{Nm} dr.$$

В силу ортогональности базиса по номеру яруса температурные возмущения яруса N вносят энергию в движения только этого же яруса. При переходе к каскадным уравнениям среднее по ярусу значение элементов матрицы F равно

$$F_N = \langle F_{Nnm} \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} = F_0. \quad (6.33)$$

Правила, по которым выполняется операция осреднения, описаны в предыдущей главе. Окончательные уравнения иерархической модели турбулентной термогравитационной конвекции имеют вид

$$\dot{A}_N = \Sigma T_{NML} A_M A_L + K_N A_N + G F_N C_N, \quad (6.34)$$

$$\dot{C}_N = \Sigma H_{NML} A_M C_L + P^{-1} K_N C_N. \quad (6.35)$$

Независимость коэффициентов F_N от номера яруса означает, что воздействие конвективного члена на вихри скорости обуславливается только величиной амплитуды температурных пульсаций, в то время как нелинейные члены, определяемые матрицей T , растут с увеличением номера яруса пропорционально $2^{5N/2}$. Следовательно, при достаточно больших N температура перестает оказывать существенное воздействие на поле скорости и мелкомасштабные температурные пульсации можно рассматривать как пассивную примесь.

Рассмотрим возможные стационарные спектры при развитой турбулентной термогравитационной конвекции [183]. В уравнении (6.34) в этом случае наряду с нелинейным членом существенным становится конвективный член. Сбалансировав эти два члена, можно добиться стационарного решения для A_N и C_N вида

$$A_N = A_0 2^{-\kappa N}, \quad C_N = C_0 2^{-\theta N}. \quad (6.36)$$

С учетом зависимости нелинейного члена от номера яруса баланс между нелинейным и конвективным членом в (6.34) возможен только при следующем соотношении между показателями κ и θ :

$$2\kappa - \theta = 5/2. \quad (6.37)$$

Стационарное решение (6.35) по-прежнему обеспечивается занулением пар членов

$$H_{NMN+l} A_M C_{N+l} + H_{NM-lN-l} A_{M-l} C_{N-l} = 0, \quad (6.38)$$

которое в силу соотношений (6.23) для матрицы H обеспечивается при

$$2\theta + \kappa = 11/2. \quad (6.39)$$

Сопоставление (6.37) и (6.39) дает решение для коэффициентов κ и θ :

$$\kappa = 21/10, \quad \theta = 17/10, \quad (6.40)$$

эквивалентное энергетическим спектрам пульсаций скорости E и температуры E_T вида

$$E(k) \sim k^{-11/5}, \quad (6.41)$$

$$E_T(k) \sim k^{-7/5}. \quad (6.42)$$

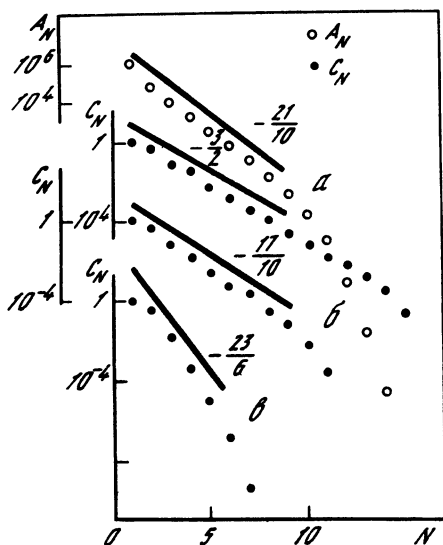


Рис. 6.5. Турбулентная конвекция при различных числах Прандтля

а — $P = 1$, б — $P = 10^3$, в — $P = 10^{-3}$

Выводы из анализа модельных уравнений подкрепляются результатами численных экспериментов [183]. Для чисел Грасгофа порядка 10^{11} , характерных для развитой турбулентной конвекции, решалась система (6.34)–(6.35) из 30 уравнений (15 ярусов). Расчеты проводились для различных чисел Прандтля и начальных условий.

На рис. 6.5, а приведены результаты расчета для $P = 1$. В начальный момент времени поле скорости отсутствовало. Энергия подводилась к низшему температурному

ярусу — значение C_0 поддерживалось равным единице. Шаг интегрирования $\tau = 10^{-9}$. На рисунке приведены среднеквадратичные значения коэффициентов A_N и C_N , полученные осреднением по 5000 шагам интегрирования после выхода системы на стационарное решение. Прямые на графике соответствуют распределениям (6.40). Результаты расчета подтверждают появление спектров (6.41) и (6.42) в восьми нижних ярусах системы (диапазон волновых чисел 1–256). Вариация начальных условий не влияет на установившиеся спектры системы.

Рис. 6.5, б, в показывает зависимость решения от числа Прандтля: приведенные решения соответствуют $P = 10^3$ и $P = 10^{-3}$. Энергия по-прежнему подводится к нулевому ярусу температуры. В обоих случаях спектр скорости сохраняет участок с наклоном “–11/5” ($A_N \sim 2^{-21N/10}$). Спектр пульсаций температуры сильно зависит от числа Прандтля. При больших значениях числа Прандтля (рис. 6.5, б) распределение C_N приближается к $2^{-3N/2}$, что совпадает с распределением, полученным для пассивной примеси при больших числах Прандтля (6.30). При малых P результат аналогичен — закон спада для C_N совпадает с полученным для пассивной примеси и равен $2^{-23/6}$ (6.27).

Таким образом, можно констатировать, что в режиме турбулентной конвекции спектр пульсаций скорости независимо от числа Прандтля подчиняется закону “–11/5” (6.41), что отличается от выводов работы [11]. Спектр пульсаций температуры при числах Прандтля порядка единицы удовлетворяет закону “–7/5” (6.42), а при малых и больших числах Прандтля совпадает со спектральными законами для пассивной примеси, подчиняясь в первом случае закону “–17/3” (6.28), а во втором — закону “–1” (6.31).

6.4. МГД-ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Рассматриваемая модель допускает обобщение на различные турбулентные течения. В данном разделе описывается модель однородной и изотропной неспиральной магнитогидродинамической турбулентности [83].

При построении модели принимается, что турбулентное движение вязкой несжимаемой проводящей жидкости описывается системой уравнений магнитной гидродинамики, состоящей из уравнения Навье—Стокса, уравнения диффузии магнитного поля и уравнений неразрывности магнитного поля и поля скорости:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(p + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) + \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + P_m^{-1} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (6.44)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (6.45)$$

Уравнения записаны в безразмерной форме. За единицу измерения индукции магнитного поля принята величина $\nu (\rho \mu_0)^{1/2} l^{-1}$, а остальные единицы сохранены прежними. Магнитное число Прандтля $P_m = \mu_0 \sigma \nu$ (σ — проводимость, ν — кинематическая вязкость).

Для магнитного поля применяется та же система базисных функций, что и для поля скорости:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{N n \nu} B_{N n \nu}(t) \mathbf{v}_{N n \nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{N n}). \quad (6.46)$$

Проектирование системы (6.43)–(6.44) на иерархический базис и редукция к системе для коллективных переменных A_N и B_N дают

$$\dot{A}_N = \sum_{M L > M} \sum T_{N M L} (A_M A_L - B_M B_L) + K_N A_N, \quad (6.47)$$

$$\dot{B}_N = \sum_M \sum_{L > M} M_{N M L} (A_M B_L - A_L B_M) + P_m^{-1} K_N B_N. \quad (6.48)$$

Структура нелинейных членов в уравнении Навье—Стокса и уравнении диффузии магнитного поля подобна, но если при приведении подобных в уравнении (5.50) элементы матрицы $T_{N M L}$ складываются из суммы элементов $R_{N M L}$ и $R_{N L M}$, то элементы матрицы $M_{N M L}$ представляют собой разность тех же элементов матрицы $R_{N M L}$. В табл. 6.2. приведены значения матрицы M для нулевого яруса.

Как известно [256], система МГД-уравнений в отсутствие вязкости и джоулевой диссипации обладает тремя интегралами движения:

1) полной энергией

$$E = \frac{1}{2} \int (\mathbf{v}^2 + \mathbf{B}^2) d\mathbf{r}, \quad (6.49)$$

2) перекрестной спиральностью

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2} \int \mathbf{v} \mathbf{B} d\mathbf{r}, \quad (6.50)$$

Матрица M_{NML} ($N = 0$)

p	$M_{N,N-p,N-1}$	$M_{N,N-p+1,N+1}$	$M_{N,N+p-1,N+p}$
2	$3,620 \cdot 10^{-2}$	$8,193 \cdot 10^{-1}$	$1,854 \cdot 10^1$
3	$4,909 \cdot 10^{-3}$	$1,111 \cdot 10^{-1}$	$5,687 \cdot 10^1$
4	$6,018 \cdot 10^{-4}$	$1,362 \cdot 10^{-2}$	$1,578 \cdot 10^2$
5	$7,339 \cdot 10^{-5}$	$1,661 \cdot 10^{-3}$	$4,353 \cdot 10^2$
6	$8,933 \cdot 10^{-6}$	$2,021 \cdot 10^{-4}$	$1,199 \cdot 10^3$
7	$1,099 \cdot 10^{-6}$	$2,487 \cdot 10^{-5}$	$3,338 \cdot 10^3$
8	$1,363 \cdot 10^{-7}$	$3,084 \cdot 10^{-6}$	$9,366 \cdot 10^3$
9	$1,697 \cdot 10^{-8}$	$3,840 \cdot 10^{-7}$	$2,639 \cdot 10^4$
10	$2,116 \cdot 10^{-9}$	$5,989 \cdot 10^{-8}$	$7,445 \cdot 10^4$

3) магнитной спиральностью

$$\mathcal{H}_M = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \mathbf{B} d\mathbf{r}, \quad (6.51)$$

где $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

Первые два инварианта выражаются через коэффициенты разложения скорости и магнитного поля следующим образом:

$$E = \frac{1}{2} \sum_N \rho_N (A_N^2 + B_N^2), \quad (6.52)$$

$$\mathcal{H}_C = \frac{1}{2} \sum_N \rho_N A_N B_N. \quad (6.53)$$

Третий инвариант — магнитная спиральность при выбранном изотропном базисе — тождественно равен нулю, что эквивалентно рассмотрению отражательно-симметричных неспиральных магнитных полей. Если из системы (6.47)–(6.48) исключить диссипативные члены (положить $K_0 = 0$), то уравнение для энергии примет вид

$$\dot{E} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_N \rho_N (A_N^2 + B_N^2) = \sum_{NML} \rho_N [T_{NML} (A_N A_M A_L - A_N B_M B_L) + M_{NML} (B_N A_M B_L - B_N B_M A_L)]. \quad (6.54)$$

Так как $\sum \rho_N T_{NML} = 0$, то сохранение общей энергии системы обеспечивается выполнением для любой тройки индексов N, M, L соотношения

$$\rho_N T_{NML} - \rho_L (M_{LNM} - M_{LMN}) + \rho_M (M_{MLN} - M_{MNL}) = 0. \quad (6.55)$$

Таким же образом можно показать, что выполнение (6.55) приводит к сохранению перекрестной спиральности. Подстановка в (6.55) соответствующих элементов матриц T и M подтверждает, что матрицы удовлетворяют условию (6.55), сохраняя таким образом инварианты (6.49)–(6.50).

Обратимся к возможным решениям для спектров магнитогидродинамической турбулентности. Стационарное решение индукционного уравне-

ния (6.48) обязательно появится при

$$A_M B_L = A_L B_M, \quad (6.56)$$

т.е. при одинаковых законах спада спектров кинетической и магнитной энергий. Для элементов матрицы M справедливо соотношение

$$M_{N,M,N+p} = -2^{9p/2} M_{N,M-p,N-p}. \quad (6.57)$$

Для показателей степени в решениях $A_N = A_0 \cdot 2^{-\kappa N}$, $B_N = B_0 \cdot 2^{-\chi N}$ это дает

$$2\chi = 9/2 - \kappa, \quad (6.58)$$

что совместно с требованием $\kappa = \chi$ приводит к законам

$$A_N \sim 2^{-3N/2}, \quad B_N \sim 2^{-3N/2}. \quad (6.59)$$

Энергетические спектры пульсаций скорости и магнитного поля убывают при этом пропорционально k^{-1} . Подобные спектры для идеальной трехмерной МГД-турбулентности описаны в [256].

Остановимся на ситуации, когда $B_N \ll A_N$ и магнитное поле можно рассматривать как векторную пассивную примесь, не влияющую на поле скорости. Спектр кинетической энергии подчиняется в этом случае закону " $-5/3$ " ($A_N = A_0 \cdot 2^{-11N/6}$). Подстановка $\kappa = 11/6$ в (6.58) дает значение $\chi = 4/3$, т.е.

$$B_N = B_0 \cdot 2^{-4N/3}, \quad E_M(k) \sim k^{-2/3}. \quad (6.60)$$

Отметим, что решение (6.60) обеспечивается структурой нелинейных членов без учета влияния джоулевой диссипации.

В противном случае ($P_m \ll 1$) существует интервал волновых чисел, на котором спектр скорости еще не испытывает влияния вязкости, а джоулева диссипация уже достаточно велика. Повторяя рассуждения, приведенные выше для инерционно-диффузионного интервала скалярной пассивной примеси (см. разд. 6.2), и используя асимптотику убывания элементов матрицы M , находим решение

$$B_N \sim 2^{-17N/6}, \quad (6.61)$$

соответствующее спектру $E_M(k) \sim k^{-11/3}$. Этот результат получен в [41].

Уравнения (6.47)–(6.48) допускают и приводящееся в [245] решение $E \sim k^{-3}$, $E_M \sim k^{-5}$ ($\kappa = 5/2$, $\chi = 7/2$).

Численное интегрирование системы (6.47)–(6.48) подтверждает сохранение интегралов (6.52)–(6.53). Численные эксперименты позволяют проследить и за эволюцией этих величин под действием вязкости и джоулевой диссипации.

Характер поведения системы (6.47)–(6.48), в том числе и ее квадратичных мер движения, определяется, как известно, числом Рейнольдса $Re = \nu l/\nu$ и магнитным числом Рейнольдса $Re_m = \mu_0 \sigma \nu l$. Re характеризует отношение нелинейного и вязкого членов в уравнении Навье–Стокса, а Re_m играет аналогичную роль в уравнении диффузии магнитного поля и может рассматриваться как безразмерная проводимость при заданном

кинематическом числе Рейнольдса. При $Re_m \gg 1$ основную роль в уравнении диффузии играют нелинейные члены, а при $Re_m \ll 1$ нелинейные эффекты слабы, т.е. поведение магнитного поля в основном зависит от диффузионных членов и слабо подвержено влиянию поля скорости.

Параметры Re и Re_m не входят в явном виде в уравнения (6.47)–(6.48). Как указывалось выше, в рассматриваемых динамических системах роль числа Рейнольдса выполняет коэффициент A_0 , характеризующий крупномасштабное движение. Магнитное число Рейнольдса определяется соотношением

$$Re_m = P_m \cdot Re = P_m A_0. \quad (6.62)$$

Магнитное число Прандтля P_m характеризует свойства среды и меняется от привычных для лабораторных условий значений 10^{-6} – 10^{-5} до значений порядка единицы для астрофизических объектов. В системе (6.47)–(6.48) задание P_m эквивалентно заданию Re_m .

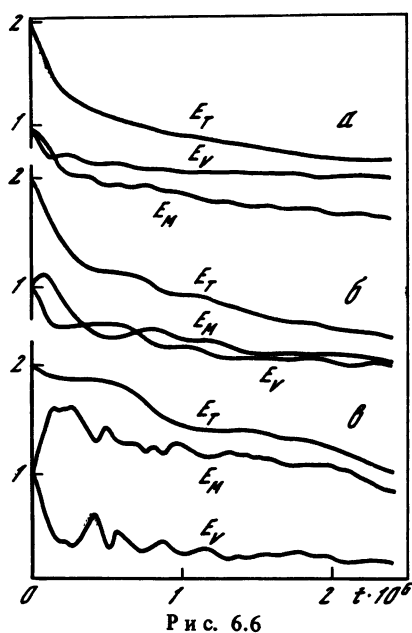
Графики изменения кинетической E_V , магнитной E_M и общей E_T энергий в процессе вырождения однородной и изотропной МГД-турбулентности для различных магнитных чисел Прандтля представлены на рис. 6.6. При $P_m = 5 \cdot 10^{-4}$ происходит быстрый спад как магнитной, так и кинетической энергии. Начиная с $P_m = 10^{-3}$ наблюдается небольшой начальный рост магнитной энергии. С увеличением P_m начальный рост E_M усиливается. Последующая эволюция сводится к периодическому перераспределению энергии между E_V и E_M на фоне общего угасания. При этом магнитная энергия в целом преобладает над кинетической, несмотря на начальное равенство $E_V = E_M$.

Остановимся на некоторых результатах численного моделирования вынужденной диссипативной МГД-турбулентности [183]. Во всех перечисленных случаях энергия подкачивается в крупномасштабные возмущения (нулевой ярус), причем подкачка может быть кинетической, магнитной или смешанной.

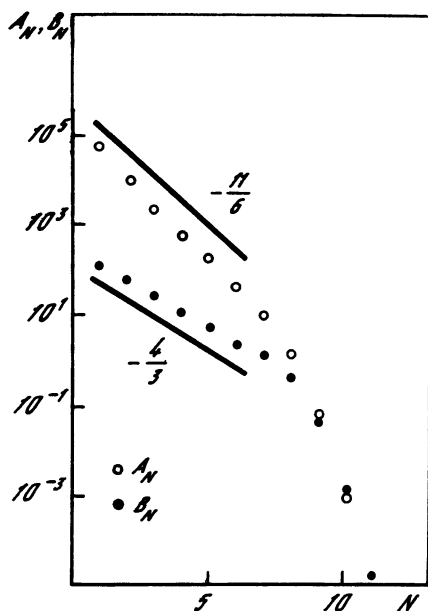
При слабых магнитных полях ($E_M = 10^{-3} E_V$), малых магнитных числах Прандтля ($P_m = 10^{-5}$) и смешанной подкачке энергии система (6.47)–(6.48) дает стационарное решение, соответствующее спектру кинетической энергии $E_V \sim k^{-5/3}$ и спектру магнитной энергии $E_M \sim k^{-11/3}$ (6.61).

В аналогичной ситуации при слабой омической диссипации ($P_m = 1$) в соответствии с (6.60) спектр магнитной энергии следует закону " $-2/3$ ", что соответствует зависимости $B_N \sim 2^{-4/3 N}$ (рис. 6.7). Этот случай имеет прямое отношение к вопросу о динамо-возбуждении магнитного поля в движущейся проводящей среде. Возможность усиления магнитного поля за счет движения жидкости связана с представлениями о вмероженности магнитных силовых линий в идеально проводящую среду. Проводящая жидкость увлекает за собой силовые линии поля и при определенных движениях может усиливать первоначальное поле.

Особенно запутанным остается вопрос о турбулентном МГД-динамо. По мере развития теории динамо из числа движений, претендующих на реализацию МГД-динамо, были исключены сначала осесимметричные (теорема Каулинга), а затем и двумерные (теорема Зельдовича) течения. Ярд авторов считают, что для возникновения турбулентного динамо является обязательным отсутствие отражательной симметрии поля, мерой



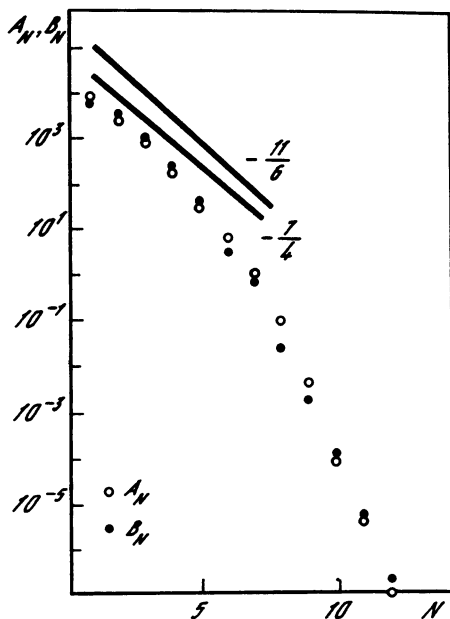
Р и с. 6.6



Р и с. 6.7

Р и с. 6.6. Эволюция кинетической E_V , магнитной E_M и общей энергии E_T в вырождающейся МГД-турбулентности
 а - $P_m = 5 \cdot 10^{-4}$, б - $P_m = 10^{-3}$,
 в - $P_m = 5 \cdot 10^{-2}$

Р и с. 6.7. Слабое магнитное поле в развитой турбулентности $P_m = 1$, $E_M/E_V = 10^{-3}$



Р и с. 6.8

Р и с. 6.8. Однородная МГД-турбулентность. $Re = Re_m = 10^6$

которой служит спиральность [246, 256]. Так, по мнению автора [256], рост крупномасштабного магнитного поля возможен при наличии обратного каскада магнитной спиральности. Однако другие авторы, например [245], считают возможной генерацию магнитного поля однородной и изотропной турбулентностью, указывая критические магнитные числа Рейнольдса в пределах 10–100.

В описанных численных опытах на развитое турбулентное течение $Re \sim 10^6$ при $P_m = 1$ накладывалось затравочное магнитное поле $E_M = 10^{-8} E_V$. После незначительного роста на первых ста шагах интегрирования магнитная энергия убывает. Стационарный спектр, приведенный на рис. 6.7, удается получить только при подкачке энергии как в поле скорости, так и в магнитное поле.

Существенно изменяет процессы переноса энергии по спектру сильное магнитное поле. Симметрия нелинейных членов в уравнении диффузии магнитного поля и уравнении Навье–Стокса приводит к появлению инерционного интервала с равным распределением магнитной и кинетической энергии. Для скорости спадания энергии предлагаются трудноразличимые значения $^{-3/2}$ и $^{-5/3}$ [256]. На рис. 6.8 показаны результаты моделирования вырождения однородной и изотропной МГД-турбулентности при начальных параметрах $Re = Re_m = 10^6$. Прямые на графике соответствуют наклонам $^{-7/4}$ (спектр $^{-3/2}$) и $^{-11/6}$ (спектр $^{-5/3}$). Различие невелико, и отдать предпочтение какому-либо закону невозможно. Ясно, что в инерционном интервале действительно наблюдается равнораспределение кинетической и магнитной энергии. Такие же спектры получаются при вынужденной турбулентности со смешанной подкачкой энергии и различных начальных условиях.

При малых магнитных числах Прандтля ($P_m = 10^{-3}$), больших начальных магнитных полях ($B_0 = 10^6$) и магнитной подкачке энергии в низший ярус устанавливаются спектры

$$E_V(k) \sim k^{-3}, E_M(k) \sim k^{-5}, \quad (6.63)$$

описанные в [245].

Как отмечалось выше, к основным преимуществам малопараметрических моделей турбулентности, в том числе и иерархических, относятся крайне скромные требования в отношении мощности вычислительных машин, применяемых для численных экспериментов. Это и позволило моделировать всевозможные комбинации начальных условий и условий подкачки энергии в таких богатых на варианты ситуациях, как МГД-турбулентность. Приведем конкретные цифры. Интегрирование системы каскадных уравнений для МГД-турбулентности (6.47)–(6.48), включающих 15 ярусов, что эквивалентно рассмотрению волновых чисел в интервале $1 - 3 \cdot 10^7$, на интервалах времени, достаточных для получения достоверных осредненных пространственных спектров пульсаций магнитного поля и поля скорости, требует затрат машинного времени на ЭВМ типа БЭСМ-6 порядка 10–15 мин.

Глава 7

ДВУМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Трудности решения уравнений гидродинамики, в частности уравнений термогравитационной конвекции, всегда побуждали использовать там, где это возможно, плоскую постановку задач. Двумерная постановка позволила решить многие задачи и получила особое развитие с внедрением численных методов, так как рассмотрение трехмерных краевых задач даже для простейших случаев остается на грани возможностей вычислительных машин. Для двумерного случая получены численные решения нестационарных уравнений естественной конвекции при числах Грассхофа, достигающих значений 10^{12} [128]. Это позволяет следить за эволюцией структуры течения в ядре и пограничных слоях, но в силу ограничений на число точек и время счета не обеспечивает диапазон масштабов, достаточный для построения пространственных спектров и рассмотрения инерционных интервалов.

Что касается турбулентности, то переход к двум измерениям является принципиальным, так как приводит к сохранению энтропии и вследствие этого к совершенно особым свойствам турбулентных течений. Рассмотрению однородной изотермической двумерной турбулентности посвящено большое число работ (например, [118, 180, 193, 215, 241, 266]).

Отметим два подхода к моделированию двумерной турбулентности. Первый основан на описании течений с помощью точечных вихрей и позволяет рассматривать как динамику нескольких вихрей [123], так и системы с большим числом вихрей (в работе [270] их число превысило 16 000), в которых воспроизводятся и спектральные характеристики двумерной турбулентности. Второй подход состоит в моделировании процессов переноса энергии и энтропии системами с небольшим числом степеней свободы и опирается либо на понятие системы гидродинамического типа [38, 39], либо на сокращение числа переменных в уравнениях движения путем введения коллективных переменных, характеризующих амплитуды поля скорости для некоторого интервала волновых чисел [55].

Преимущества этих двух способов моделирования двумерной турбулентности представляется возможным объединить на основе подхода, развиваемого в данной книге. Проектирование уравнений Навье—Стокса на иерархический базис, описывающий совокупность вихрей различного масштаба, позволяет лучше, чем точечными вихрями, описать локальную структуру потока и без дополнительных предположений о характере взаимодействий между вихрями различных масштабов построить модель каскадных процессов переноса энергии и энтропии.

7.1. ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ И ЭНТРОПИИ

Иерархическая модель двумерной турбулентности строится по тем же принципам, что и трехмерной (см. гл. 5). Переход к двум измерениям, с одной стороны, упрощает вид функционального базиса, а следовательно, и процесс вычисления входящих в каскадные уравнения матриц. С другой

стороны, наличие второго существенного интеграла движения-энтропии требует более аккуратного моделирования течения.

Кратко повторим основные моменты построения иерархической модели, акцентируя внимание на особенностях, связанных с двумерностью процесса [166]. k -пространство (теперь это плоскость) разбивается на кольцевые зоны

$$2^{N-1} < |\gamma| < 2^N, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.1)$$

Внутри N -й зоны фурье-образ функции тока раскладывается по совокупности базисных функций

$$\psi_{Nn} = \frac{2^{-N} \exp \{-2\pi i \gamma r_{Nn}\}}{2\sqrt{3} \pi^5 \gamma^2}, \quad (7.2)$$

а базисные функции для фурье-образов скорости и завихренности внутри зоны соответственно имеют вид

$$V_{Nn}(\gamma) = \frac{2^{-N} i (\gamma \times e) \exp \{-2\pi i \gamma r_{Nn}\}}{\sqrt{3} \pi^3 \gamma^2}, \quad (7.3)$$

$$W_{Nn}(\gamma) = \frac{2^{1-N}}{\sqrt{3}} \exp \{-2\pi i \gamma r_{Nn}\}. \quad (7.4)$$

Вне зоны N функции (7.2)–(7.4) по определению равны нулю.

Единичный вектор, нормальный к рассматриваемой плоскости, обозначен как e . Плотность распределения вихрей яруса N в пространстве в двумерном случае есть

$$\rho_N = \frac{3\pi}{4} \cdot 2^{2N}. \quad (7.5)$$

Числовые коэффициенты в базисных функциях выбраны из условия нормировки для функций W_{Nn} , а не для функций V_{Nn} , как в трехмерном случае. Это обеспечивает ступенчатую аппроксимацию энтропии и аппроксимацию энергии спадающими прямыми в пределах каждого яруса. Обратное преобразование Фурье дает вид базисных функций для скорости и вихря в координатном пространстве

$$v_{Nn}(r) = \frac{(r \times e)}{\sqrt{3} \pi r} \left(\frac{J_0(2s) - J_0(s)}{s} \right), \quad (7.6)$$

$$\omega_{Nn}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{3}} 2^{-N} \left(\frac{2J_1(2s) - J_1(s)}{s} \right), \quad (7.7)$$

где $s = \pi r 2^N$, а J_0, J_1 — функции Бесселя.

Подстановка в безразмерное уравнение Навье–Стокса разложения поля скорости

$$v(r, t) = \sum_{Nn} A_{Nn}(t) v_{Nn}(r - r_{Nn}) \quad (7.8)$$

с учетом ортогональности базисных функций по номеру яруса и слабой неортогональности по индексу n , отвечающему за положение функции

в пространстве, приводит к уравнению для коэффициентов разложения скорости

$$\dot{A}_N = \sum_{Mm} \sum_{Ll} R_{NnMmLl} A_{Mm} A_{Ll} + K_N A_{Nn}, \quad (7.9)$$

где

$$K_N = -21,4 \cdot 2^{2N}, \quad R_{NnMmLl} = K_N \int v_{Nn} (v_{Mm} \nabla) v_{Ll} dr.$$

Матрица нелинейных взаимодействий R_{NnMmLl} описывает процессы перераспределения энергии и энтропии между тройкой соответствующих вихрей.

Рассмотрим триаду вихрей n, m, l , принадлежащих соответственно ярусам N, M, L . Интересен средний результат взаимодействия вихрей, поэтому представляется естественным оценить элемент R_{NnMmLl} вычислением его среднеквадратичного значения при осреднении по всевозможным положениям вихрей n, m, l (табл. 7.1). В силу ортогональности функций по индексу яруса отличны от нуля только элементы, лежащие вблизи диагоналей $M = N, L = N, M = L$.

Следует, однако, учесть, что взаимодействие тройки вихрей характеризуется шестью элементами матрицы $R - R_{NML}, R_{NLM}, R_{MNL}, R_{MLN}, R_{LNM}$ и R_{LMN} , связанными друг с другом вполне определенным образом. Эти элементы можно представить векторами в функциональном пространстве, которые направлены под определенными углами друг к другу. Из точных выражений для элементов R_{NnMmLl} следует, что

$$R_{NML} = -R_{LMN}, R_{MLN} = -R_{NLM}, R_{MNL} = -R_{LNM}. \quad (7.10)$$

Средние значения углов между любой другой парой векторов можно получить из общих правил действий с векторами

$$\cos \alpha_{NML} = \frac{\int R_{NnMmLl} R_{NnLlMm} dr_M dr_L}{R_{NML} R_{NLM}}. \quad (7.11)$$

Вычисление углов α_{NML} позволяет однозначно определить взаимное положение векторов R , описывающих средние взаимодействия вихрей, принадлежащих ярусам N, M и L . Интересно отметить, что шестерка векторов в функциональном пространстве лежит в одной плоскости. Их сумма, конечно же, равна нулю, что отвечает закону сохранения энергии. Взаимная ориентация векторов не определяет тем не менее их положения в функциональном пространстве, т.е. не указывает направления, проекция на которое даст уравнение для коэффициентов A_N .

Потребуем, чтобы уравнение для A_N удовлетворяло не только уравнению Навью—Стокса, но и уравнению для завихренности

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (v \nabla) \omega = \nabla^2 \omega. \quad (7.12)$$

Необходимо повторить всю процедуру с уравнением (7.12), т.е. спроецировать его на базис (7.7), что приводит к уравнению

$$\dot{A}_N = \sum_{Mm} \sum_{Ll} S_{NnMmLl} A_{Mm} A_{Ll} + K_N A_{Nn}, \quad (7.13)$$

вычислить матрицу нелинейных взаимодействий $S_{NnMmLl} = \int \omega_{Nn} \times \times (\mathbf{v}_{Mm} \nabla) \omega_{Ll} d\mathbf{r}$, определить углы между элементами матрицы S_{NML} , относящимися к одним и тем же вихрям. Анализ результатов показывает, что существует только одно направление, на котором проекции элементов R и S совпадают и, следовательно, уравнения (7.9) и (7.13) дают при осреднении одинаковые уравнения для A_N :

$$\dot{A}_N = \sum_{M,L>M} T_{NML} A_M A_L + K_N A_N. \quad (7.14)$$

где A_N — среднеквадратичное значение коэффициентов яруса A_{Nn} , а индекс L пробегает только значения, большие M , так как при переходе к матрице T исходные матрицы сложили вдоль диагонали $M = L$. Следует отметить, что уравнение (7.9) сохраняет только энергию, уравнение (7.13) — энтрофию и лишь уравнение (7.14), являющееся аппроксимацией следующего порядка точности, сохраняет оба интеграла движения.

Стоит сказать несколько слов о диагоналях матрицы T . Как известно [118], функция $T(k, p, q)$, описывающая перенос энергии при взаимодействии возмущений с волновыми числами p, q и k , равна нулю при совпадении какой-либо пары аргументов. Элемент T_{NML} даже на диагоналях, т.е. при совпадении какой-нибудь пары индексов, описывает взаимодействие вихрей, которые, в пространстве волновых чисел занимают конечный интервал, и равенство нулю этих элементов не очевидно. Тем не менее рассмотрение векторов K и S показывает, что они перпендикулярны направлению, обеспечивающему одновременное удовлетворение уравнений завихренности и Навье—Стокса. В табл. 7.2 приведены значения элементов матрицы T_{NML} для $N = 0$ (для остальных ярусов $T_{NML} = 2^N T_{0,M-N,L-N}$). При их вычислении учтено количество троек вихрей, которое образует один вихрь яруса N с вихрями ярусов M и L .

Уравнение (7.14) запишем в виде

$$\dot{A}_N = \sum_{p=1}^{p_{\max}} (T_{N,N-p-1,N-1} A_{N-p-1} A_{N-1} + T_{N,N-p,N+1} A_{N-p} A_{N+1} + + T_{N,N+p,N+p+1} A_{N+p} A_{N+p+1}) + K_N A_N. \quad (7.15)$$

удобном для анализа стационарных решений и характера процессов переноса. Рост $p_{\max}$ означает учет взаимодействий все более дальних ярусов. Случай $p_{\max} = 1$ (в уравнении остается одна тройка элементов T) соответствует модели, рассмотренной в [39]. Насколько удовлетворительно такое описание, будет видно из дальнейшего рассмотрения.

Уравнение (7.15) имеет два стационарных решения — $A_N = A_0 \cdot 2^{-N/3}$ и $A_N = A_0 \cdot 2^{-N}$, соответствующие инерционным интервалам переноса энергии и энтропии, в которых энергетический спектр имеет вид

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (7.16)$$

$$E(k) = C_\omega \epsilon_\omega^{2/3} k^{-3}. \quad (7.17)$$

Поток энергии от ярусов с номерами $k < N$ к ярусам с номерами $k \geq N$

определяется выражением

$$\Pi = \sum_{K > N} \dot{E}_K = \frac{\ln 2}{2\pi} \left[\sum_{K > N} \sum_{M, L < N} T_{KML} A_K A_M A_L - \sum_{K < N} \sum_{M, L > N} T_{KML} A_K A_M A_L \right]. \quad (7.18)$$

В инерционном интервале энергии с учетом зависимости для A_N имеем

$$\Pi = \frac{A_0^3 \ln 2}{2^{3/2} \pi} \sum_{p=1}^{p_{\max}} \left(2^{\frac{p+1}{3}} T_{N, N-p-1, N-1} - 2^{-\frac{2(p+1)}{3}} T_{N, N+p, N+p+1} \right). \quad (7.19)$$

Подстановка в (7.19) значений T_{NML} из табл. 7.2 дает поток энергии $\Pi = -0,052 A_0^3$. Знак "минус" соответствует потоку вниз по спектру. Интересно, что на долю локальных процессов, т.е. на взаимодействия ближайших ярусов ($p = 1$), приходится только 35% переносимой энергии. На первые три члена в (7.19) ($p = 1, 2, 3$) приходится более 80% общего потока. Вычисленный поток энергии позволяет оценить значение константы в законе (7.16). Получается $C = 1,55$, что ниже известной оценки Крейчана [239] и Лилли [248], где получены значения $C \sim 6$. Отметим, что учет только локальной доли потока приводит к значению константы, равному четырем. В инерционном интервале энтропии поток энергии Π с точностью более 0,1% равен нулю.

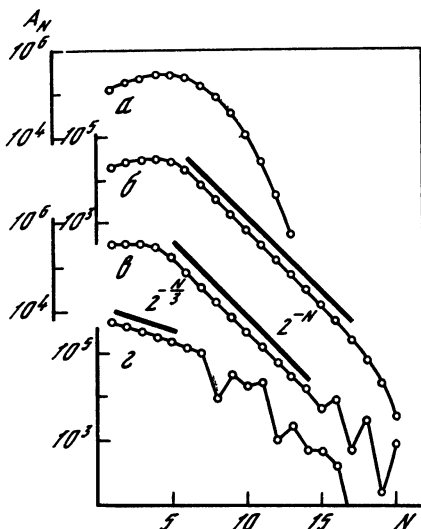
Поток энтропии по спектру

$$Q = \sum_{K > N} \dot{Q}_K = \frac{3\pi}{4} \left[\sum_{K > N} \sum_{LM < N} 2^{2K} T_{KML} A_K A_M A_L - \sum_{K < N} \sum_{L, M > N} 2^{2K} T_{KML} A_K A_M A_L \right] \quad (7.20)$$

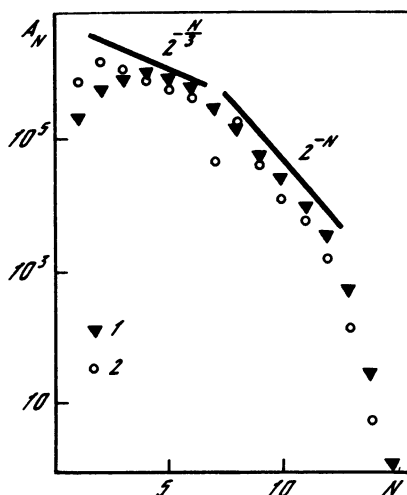
в инерционном интервале энтропии имеет вид

$$Q = \frac{3\pi}{4} \sum_{p=1}^{p_{\max}} [2^{p+1} T_{N, N-p-1, N-1} - p 2^{-2p-2} T_{N, N+p, N+p+1}]. \quad (7.21)$$

Общий поток энтропии $Q = 1,4 A_0^3$. Процесс переноса энтропии носит ярко выраженный нелокальный характер. В этом случае 80% общего потока обеспечивают уже пять членов выражения (7.21), а на долю локальных взаимодействий приходится только четвертая часть потока. В инерционном интервале энергии поток энтропии равен нулю. Сопоставление (7.21) с (7.17) дает значение константы $C_\omega = 1,36$. Экспериментальных данных для констант в двумерной турбулентности нет. Теоретические оценки для C_ω , полученные разными авторами, имеют значительный разброс: [117] — 1,54, [244] — 1,74, [248] — 2–4, [270] — 10.



Р и с. 7.1. Результаты численного моделирования невязкой турбулентности
 a — начальное распределение, $b - t = 5 \cdot 10^{-8}$, $c - t = 1,5 \cdot 10^{-7}$, $d - t = 5 \cdot 10^{-7}$



Р и с. 7.2. Результаты расчета с учетом вязкости
 $1 - t = 3 \cdot 10^{-8}$, $2 - t = 1,5 \cdot 10^{-7}$

При численном решении уравнений (7.15) моделировались различные способы подвода энергии в турбулентное течение [166]. Решалась система из 20 уравнений, что соответствует рассмотрению волновых чисел в интервале от 1 до 1 000 000; $p_{\max}$ принималось равным 10, что обеспечивает учет потоков энергии и энтропии с точностью до долей процента.

Рассмотрение невязкой турбулентности показало, что система хорошо сохраняет энергию и энтропию. Решение стремится к стационарным режимам, однако они неустойчивы. На неустойчивость стационарных решений подобных систем указывалось в работе [39], где исследовались уравнения типа (7.15) с $p_{\max} = 1$ и было показано, что законы (7.16), (7.17) выполняются в среднем. Неустойчивость стационаров возникает на краях инерционных интервалов. В отсутствие вязкости интервал "—3" быстро развивается до правой границы рассматриваемого диапазона волновых чисел, после чего на границе возникают возмущения, распространяющиеся по всем ярусам системы. Введение вязкости стабилизирует правый край инерционного интервала, но в этом случае возмущения развиваются, хотя и медленнее, на левом краю интервала.

На рис. 7.1 показано развитие решения в системе без вязкости. В начальном распределении (кривая a) максимум энергии приходится на $N = 6$. В системе быстро развивается интервал переноса энтропии для $N > 6$ (кривая b), но после того, как распределение $A_N \sim 2^{-N}$ доходит до $N = 20$, возникают возмущения (кривая c), распространяющиеся вниз по спектру. При распространении энергии вниз по спектру система стремится к закону

—5/3, однако время установления этого режима значительно больше, так как характерные времена для крупномасштабного движения, естественно, велики. На кривой ε для $N = 1-4$ установился режим $A_N \sim 2^{-N/3}$, соответствующий инерционному интервалу переноса энергии вниз по спектру.

На рис. 7.2 представлены результаты решения системы с теми же начальными условиями с учетом вязкости. Видно, что в этом случае неустойчивость возникает на границе двух инерционных интервалов.

Подчеркнем, что в отличие от известных способов построения каскадных моделей в данном подходе не делается никаких предположений о характере взаимодействий между возмущениями различных масштабов. Рассматриваются все взаимодействия, описываемые иерархической моделью. Результаты свидетельствуют о существенно нелокальном характере процессов переноса не только в инерционном интервале энтропии, но, хотя и в меньшей степени, также и в инерционном интервале энергии. Из этого следует, что для экспериментального определения констант необходимо реализовать инерционные интервалы в диапазоне волновых чисел порядка восьми октав для закона "—3" и пяти-шести октав для закона "—5/3". Кзавид двумерные турбулентные течения, возникающие в природе (астрофизические и геофизические процессы), как и выполненные до настоящего времени лабораторные эксперименты с двумерными турбулентными течениями не дают такого диапазона волновых чисел.

7.2. ДВУМЕРНАЯ МГД-ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Систематическое исследование двумерной МГД-турбулентности было начато авторами работ [223–225] в связи с задачами турбулентности в плазме. В [223] рассматривалась двумерная турбулентность в идеально проводящей невязкой жидкости. Было показано, что в этом случае существует три "сильных" интеграла движения, т.е. интеграла, не чувствительных к обрыву рядов Фурье. Этими интегралами являются общая энергия E , квадрат векторного потенциала a и перекрестная спиральность P . Исследовались равновесные спектры в идеальной недиссипативной системе, численное изучение которых, предпринятое в [225], подтвердило возможность переноса квадрата потенциала к низшим волновым числам при одновременном переносе энергии к высшим.

Анализ размерностей позволил авторам предсказать вид спектров в инерционных интервалах в диссипативной МГД-турбулентности. При наличии возбуждения на некотором промежуточном значении волновых чисел k_0 для $k < k_0$ ожидается возникновение инерционного интервала переноса квадрата потенциала вниз по спектру, в котором $a \sim k^{-7/3}$, что соответствует спектру магнитной энергии $E_M \sim k^{-1/3}$, а для $k > k_0$ появляется инерционный интервал переноса энергии вверх по спектру с распределением энергии по закону $E \sim k^{-3/2}$.

Систематическое моделирование различных способов подвода энергии в вынужденную диссипативную МГД-турбулентность было проведено в работе [224] при численных решениях двумерных МГД-уравнений спектральным методом Орсага. Возможности ЭВМ позволили рассмотреть лишь небольшой интервал волновых чисел $k_{\max}/k_{\min} = 16$, что помешало авторам сделать выводы о степенных зависимостях в спектрах. Основные

выводы работ [223–225] сводятся к следующему: 1) наличие в двумерной МГД-турбулентности существенного обратного потока квадрата потенциала, 2) значительно большие колебания амплитуд Фурье в сравнении с обычной гидродинамической турбулентностью, 3) очень медленное развитие максимальных размеров магнитного поля и 4) строгая тенденция к равенству магнитной и кинетической энергии при больших k .

Эти выводы были в основном подтверждены в [261] при численном моделировании вырождения МГД-турбулентности. В этой работе интервал волновых чисел был значительно расширен ($k_{\max}/k_{\min} = 256$), но спектральные законы также получены не были. Основная цель работы [261] состояла в проверке гипотез о развитии особенностей в решении уравнений идеальной двумерной магнитной гидродинамики, высказанных Пуке в [264] при исследовании двумерной МГД-турбулентности на основе *EDQNM*-замыкания. Было показано, что двумерные МГД-уравнения по своим свойствам ближе к трехмерным уравнениям Навье–Стокса, чем к двумерным, так как последние имеют в отличие от трехмерных гладкие решения для идеальной жидкости на любом отрезке времени (что является следствием сохранения энтропии). Было также показано, что в отсутствие непосредственной подкачки магнитной энергии поле вымирает (подтверждение теоремы об антидинамо в двумерной МГД [60]).

Рассматриваются МГД-течения, в которых скорость и магнитное поле имеют только две компоненты: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$ — и не зависят от координаты z . Соответственно завихренность, электрический ток и векторный потенциал имеют только z -компоненту. Уравнения магнитной гидродинамики, записанные в безразмерном виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(p + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) + \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (7.22)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + P_m^{-1} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (7.23)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0,$$

проецируются на иерархический базис (7.6) и после усреднения по ярусам дают систему уравнений для A_N и B_N [167]:

$$\dot{A}_N = \sum_{M, L > M} T_{NML} (A_M A_L - B_M B_L) + K_N A_N, \quad (7.24)$$

$$\dot{B}_N = \sum_{M, L > M} M_{NML} (A_M B_L - A_L B_M) + P_m^{-1} K_N B_N, \quad (7.25)$$

где $K_N = -21,4 \cdot 2^{2N}$.

Основным этапом в построении модельных уравнений (7.24)–(7.25) является процедура получения матриц нелинейных взаимодействий T_{NML} и M_{NML} , которые и определяют характер процессов переноса по спектру квадратичных величин. В разд. 7.1 описана операция получения матрицы T и приведена таблица ее значений. Напомним, что в матрице отличны от нуля только элементы трех типов: $T_{N, N-p-1, N-1}$, $T_{N, N-p, N+1}$, $T_{N, N+p, N+p+1}$.

Матрица M_{NML} вычисляется аналогичным образом, однако можно указать более простой путь для ее определения, основанный на использовании интегралов движения для двумерной МГД. Уравнения должны сохранять общую энергию, квадрат векторного потенциала и перекрестную спиральность [223], которые выражаются через коэффициенты A_N и B_N следующим образом:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\ln 2}{4\pi} \sum_N (A_N^2 + B_N^2), \\ P &= \frac{\ln 2}{4\pi} \sum_N A_N B_N, \\ a &= \frac{3}{8\pi^3} \sum_N 2^{-2N} B_N^2. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Анализ системы (7.24)–(7.25) показывает, что она сохраняет эти три величины только при следующих соотношениях между элементами матриц M и T :

$$\begin{aligned} M_{N, N-p-1, N-1} &= \frac{4T_{N, N-p-1, N-1}}{1 - 2^{2(1-p)}}; \\ M_{N, N-p, N+1} &= \frac{T_{N, N-p, N+1}}{4(1 - 2^{-2p})}; \\ M_{N, N+p, N+p+1} &= \frac{4T_{N, N+p, N+p+1}}{3 \cdot 2^{2p}}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Вычисление элементов матрицы M по схеме, описанной в разд. 7.1, дает близкие значения, подтверждая тем самым справедливость описанной процедуры, и позволяет не приводить таблицу значений для матрицы M , ограничившись формулами (7.27).

Опыт решения (7.24) для случая $B_N = 0$ показывает, что коэффициенты A_N совершают стохастические, слабо коррелированные между собой колебания. Коэффициенты корреляции для A_N и A_{N+1} , вычисленные на интервале 10 000 шагов по времени, дали значения менее 0,1. Спектральные законы выполняются в среднем для величин A_N^2 . Нельзя интерпретировать величины A_N как средние по всему пространству, так как в этом случае трудно объяснить наблюдаемые колебания и необходимость длительного осреднения по времени для получения спектральных законов. Правильнее считать, что (7.24)–(7.25) описывает систему вихрей, находящихся под одним вихрем наибольшего масштаба A_0 , под которым в среднем находятся четыре вихря первого яруса, шестнадцать – второго и т.д.

Остановимся на некоторых результатах моделирования двумерной МГД-турбулентности для магнитного числа Прандтля, равного единице.

Вырождению двумерной МГД-турбулентности соответствует решение системы (7.24)–(7.25) с различными начальными условиями. Серия опытов для идеальной жидкости (в уравнениях были отброшены диссипативные члены, т.е. $K_N = 0$) показала, что система хорошо сохраняет все три ин-

Рис. 7.3. Вырождение МГД-турбулентности. Средние значения A_N^2 и B_N^2 на интервале от 10 000-го до 12 000-го шага по времени

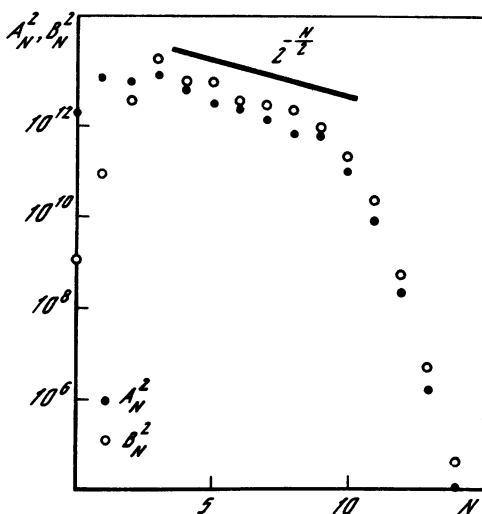
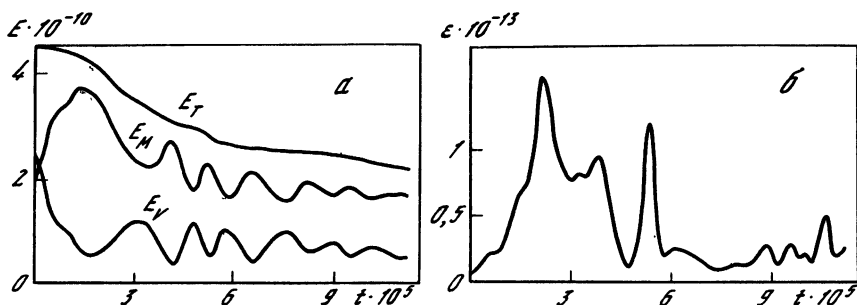


Рис. 7.4. Изменение кинетической E_V , магнитной E_M , общей E_T энергий (а) и скорости диссипации энергии ϵ (б) в вырождающейся МГД-турбулентности



теграла движения. За 30 000 по времени общая энергия изменяется на 1,1%, перекрестная спиральность — на 0,6%, квадрат векторного потенциала — менее чем на 0,1%. В начальный момент времени энергия либо сосредоточена в некотором промежуточном интервале волновых чисел (например, отличны от нуля только A_5 , A_6 , B_5 и B_6), либо равномерно распределена в пяти-шести нижних ярусах. В обоих случаях эволюция спектров приводит к распределению в высших ярусах вида $A_N^2 \sim B_N^2 \sim \text{const}$, соответствующему распределению энергии $E(k) \sim k^{-1}$. Дальнейший рост энергии высших ярусов прекращается, однако при длительных эволюциях (35–40 тысяч шагов) решение становится неустойчивым — система начинает генерировать энергию и переполняется. Механизм неустойчивости остался неясным. Таким образом, предсказанные в [223] для идеальной магнитной гидродинамики равновесные спектры вида $E(k) \sim k$ получены не были.

Большой интерес представляет моделирование турбулентных потоков жидкости с учетом вязкости и джоулевой диссипации. Характерные результаты моделирования вырождения МГД-турбулентности представлены на рис. 7.3 и 7.4. На рис. 7.3 показан результат эволюции спектров для случая, когда в начальный момент времени энергия сосредоточена в четвертом

и пятом ярусах ($A_4, A_5, B_4, B_5 \sim 10^7$). Приведены значения A_N^2 и B_N^2 , усредненные по времени на интервале от 10 до 12 тыс. шагов (шаг по времени $\tau = 4 \cdot 10^{-8}$). На графике проведена прямая, соответствующая зависимости $A_N^2 \sim 2^{-N/2}$, эквивалентной спектру энергии $E(k) \sim k^{-3/2}$, предсказанному в [225] для инерционного интервала переноса энергии вверх по спектру. Очевидно, что отличие между спектрами $^{-5/3}$ и $^{-3/2}$ слишком мало, чтобы по результатам расчета можно было склониться в пользу какого-нибудь из них. Факт переноса к высшим ярусам, где происходит основная диссипация энергии при одновременном переносе квадрата потенциала в нижние, подтверждается следующими цифрами: за время расчета энергия системы уменьшилась на 58%, а квадрат потенциала только на 1,2%. Расчет подтверждает и вывод работы [224] о том, что крупномасштабное магнитное поле развивается значительно медленнее соответствующих масштабов скорости. Примерно так же соотносятся времена угасания крупномасштабных мод. При решении системы (7.24)–(7.25) с первоначально равномерным распределением энергии в шести низших ярусах после длительной эволюции магнитная энергия нулевого яруса остается на порядок выше кинетической энергии этого яруса и еще более превосходит энергии всех остальных ярусов.

На рис. 7.4 представлены графики изменения общей энергии системы E_T , магнитной E_M и кинетической E_V энергии, а также скорости диссипации энергии ϵ . Эволюция этих величин в двумерной вырождающейся МГД-турбулентности специально исследовалась в [261] при численном счете в квадрате с периодическими граничными условиями. Следует отметить, что это наиболее полный численный счет по МГД-турбулентности (сетка 256×256 в фурье-пространстве). Результаты качественно хорошо совпадают. Двумерная МГД-турбулентность сопровождается ростом завихренности, что ведет к росту диссипации энергии. Максимальное усиление скорости диссипации энергии по отношению к начальному превысило 20 (рис. 7.4), в то время как в обычной двумерной турбулентности $\epsilon(t) < \epsilon(0)$ для любых t . Джоулева диссипация в целом превышает вязкую, хотя рассматривается случай $P_m = 1$. Общее превышение магнитной энергии над кинетической вновь отражает факт накопления магнитной энергии в низших ярусах с очень медленной последующей диссипацией.

Дополним уравнения (7.24)–(7.25) членами, описывающими действие внешних случайных сил, служащих источниками энергии турбулентного течения,

$$\dot{A}_N = \sum_{M, L > M} T_{NML} (A_M A_L - B_M B_L) + K_N A_N + f_N, \quad (7.28)$$

$$\dot{B}_N = \sum_{M, L > M} M_{NML} (A_M B_L - A_L B_M) + P_m^{-1} K_N B_N + g_N, \quad (7.29)$$

и попытаемся предсказать возможные решения системы из вида уравнений.

При отсутствии магнитного поля уравнение (7.28) имеет два стационарных решения, вытекающих из свойств матрицы T : $A_N \sim 2^{-N/3}$, соответствующее инерционному интервалу переноса энергии вниз по спектру с распределением энергии по закону $E \sim k^{-5/3}$, и $A_N \sim 2^{-N}$, отвечающее инерционному интервалу переноса энтропии со спектром энергии $E \sim k^{-3}$.

Эти решения неустойчивы и реализуются в среднем при осреднении по большим интервалам времени.

В обсуждаемом случае ситуация значительно усложняется. Ищем решения вида $A_N = A_0 \cdot 2^{-\kappa N}$ и $B_N = B_0 \cdot 2^{-\chi N}$. Из вида уравнений (7.28) – (7.29) очевидно, что стационарный режим должен иметь место, если

$$B_0 = A_0 \text{ и } \kappa = \chi. \quad (7.30)$$

Кроме того, можно указать как минимум еще один механизм, способный обеспечить стационар уравнению (7.29). Для матрицы M_{NML} справедливо соотношение

$$M_{N,M,N+p} = -2^P M_{N,M-p,N-p}.$$

Следовательно, правая часть уравнения может быть равной нулю за счет зануления пар

$$M_{N,M,N+p} A_M B_{N+p} + M_{N,M-p,N-p} A_{M-p} B_{L-p} = 0,$$

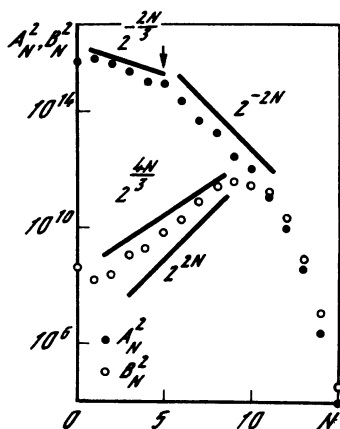
что возможно при

$$\chi = -\frac{1+\kappa}{2}. \quad (7.31)$$

Проще всего указать решение в случае, когда $B_N^2 \ll A_N^2$, т.е. магнитное поле мало и выступает в роли пассивной примеси, не оказывая существенного влияния на поле скорости. Кинетическая энергия по-прежнему может следовать двум законам — “-5/3” и “-3” ($\kappa = 1/3$ и $\kappa = 1$). Тогда спектр магнитной энергии либо будет удовлетворять тем же законам, либо, согласно (7.31), в интервале “-5/3” приведет к значениям $\chi = -2/3$, $E_M \sim k^{1/3}$, а в интервале “-3” — $\chi = -1$ и $E_M \sim k$.

На рис. 7.5 показаны результаты одного из опытов по моделированию поведения магнитного поля в вынужденной турбулентности с подкачкой механической энергии на некоторых промежуточных значениях волновых чисел. Случайная сила f действует в шестом ярусе, $g_N = 0$. Энергия магнитного поля в начальный момент времени также сосредоточена в шестом ярусе. На графике приведены значения A_N^2 и B_N^2 , усредненные на интервале от 4000-го до 5000-го шага во времени ($\tau = 3 \cdot 10^{-8}$). Стрелкой помечен ярус, в который подкачивается механическая энергия. В спектре A_N^2 видны интервалы “-5/3” и “-3”. Магнитное поле достаточно быстро угадает, что следует из теоремы об антидинамо в двумерной МГД-турбулентности [60]: поле скорости не может самостоятельно поддерживать магнитное поле. На рисунке проведены прямые, соответствующие значениям $\chi = -2/3$ и $\chi = -1$. Различие невелико, и трудно указать, к какому наклону тяготеют точки на графике, но ясно, что работает механизм, выражаемый соотношением (7.31), и спектры магнитной энергии соответствуют законам $E_M \sim k^{1/3}$ и $E_M \sim k$.

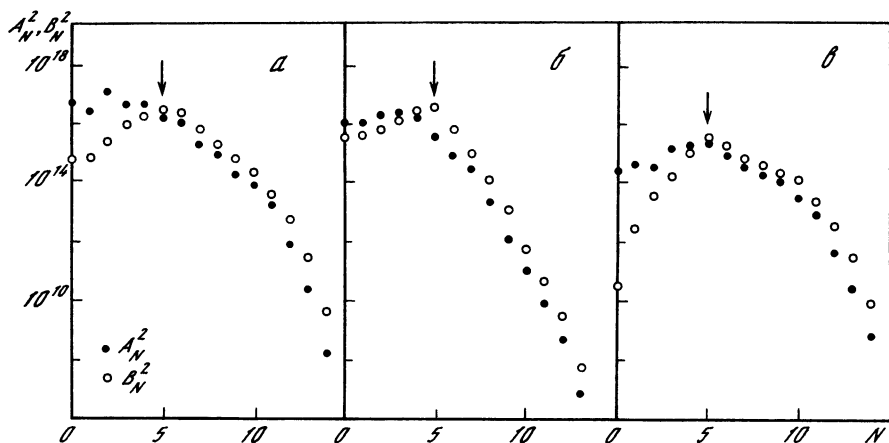
В [224] при моделировании аналогичной ситуации был получен очень крутой спектр магнитной энергии ($E_M \sim k^{5/2}$), объяснить который авторы не смогли. Следует, однако, учитывать, что интервал рассматриваемых в [224] волновых чисел составлял всего четыре октавы.



Р и с. 7.5. Поведение слабого магнитного поля в развитой вынужденной турбулентности

Р и с. 7.6. Вынужденная диссипативная МГД-турбулентность

a — магнитная подкачка энергии, нулевые начальные условия; b — магнитная подкачка энергии, начальные условия: $A_N^2 \sim B_N^2 \sim \text{const}$ для $N = 1-5$; $в$ — смешанная подкачка энергии, нулевые начальные условия. Стрелками помечены ярусы, к которым подводится энергия



Сложнее обстоит дело со спектральными законами, когда A_N^2 и B_N^2 одного порядка. Если предположить, что должно установиться распределение, удовлетворяющее одновременно (7.30) и (7.31), то их совместное решение приводит к $\kappa = \chi = -1/3$, соответствующее спектру энергии $E(k) \sim k^{-1/3}$ — это известный интервал “-7/3” — интервал инерционного переноса квадрата векторного потенциала к крупным масштабам [225, 264]. В то же время это не единственно допустимое решение.

Численные решения (7.28) и (7.29) подтверждают возможность реализации разных распределений энергии по спектру в зависимости от механизма подкачки и начальных условий.

На рис. 7.6, a показан случай чисто магнитной подкачки энергии ($f_N = 0$, $g_6 = 10^6 \xi$, где ξ — случайное число в интервале $(-1, 1)$). При $t = 0$ все A_N и B_N были равны нулю. Приведены значения A_N^2 и B_N^2 , усредненные на интервале от 4000-го до 8000-го шага по времени. Следует отметить, что распределение энергии принимает такой вид уже приблизительно к 1000-му шагу. За последующие 7000 шагов заметно изменяется только магнитная энергия двух низших ярусов. Вновь наблюдается более медленное разви-

тие больших масштабов поля в сравнении с крупномасштабными образованиями скорости. Спектр кинетической энергии ниже возбуждаемой частоты имеет наклон порядка $-1,5 - -2$ ($\kappa = 1/3 - 1/2$), а для магнитной энергии χ приблизительно равно $-1/2$, что соответствует равномерному распределению энергии $E_M(k) \sim \text{const}$.

Сильную зависимость установившихся спектров от начальных условий иллюстрирует рис. 7.6, б. Способ подвода энергии остается тот же, что и в случае, изображенном на рис. 7.6, а, но в начальный момент времени и кинетическая и магнитная энергия были равномерно распределены в нижних ярусах системы. В этом случае устанавливается предсказываемый интервал $"-1/3"$ ($\kappa = \chi = -1/3$, $E \sim k^{-1/3}$). На рис. 7.6, б приведены результаты расчета со стократным увеличением вязкости и электрического сопротивления, что отразилось на инерционном интервале переноса энергии вверх по спектру.

Результаты эволюции системы с нулевыми начальными условиями при смешанной подкачке энергии ($f \neq 0$, $g \neq 0$) представлены на рис. 7.6, в. Случайные силы вновь подводят энергию в шестой ярус. Кинетическая энергия в низковолновой части имеет распределение порядка $E_V \sim k^{1/3}$ ($\kappa = -1/3$). Для магнитной энергии наклон еще больше, чем в случае чисто магнитной подкачки энергии, и приблизительно соответствует степенному закону $E_M \sim k^{3/2}$.

7.3. ПАССИВНАЯ ПРИМЕСЬ В ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Не повторяя рассуждений разд. 6.2, приведем систему каскадных уравнений для естественной конвекции

$$\dot{A}_N = \Sigma T_{NML} A_M A_L + K_N A_N + G F_N C_N, \quad (7.32)$$

$$\dot{C}_N = \Sigma H_{NML} A_M C_L + F^{-1} K_N C_N. \quad (7.33)$$

В отличие от трехмерного случая $F_N = 3,3 \cdot 2^N$, $H_{NML} = 2^N H_{0, M-N, L-N}$. Базисные функции для температуры в плоском случае совпадают с базисными функциями для завихренности (7.7). Значения элементов матрицы H_{NML} приведены в табл. 7.3. Энергия пульсации скорости и энергия пульсации температуры яруса N равны

$$E_N = \frac{\ln 2}{4\pi} A_N^2, \quad (E_T)_N = \frac{\rho_N C_N^2}{2}.$$

Рассматривается случай малых чисел Грассхофа, когда температура ведет себя как пассивная примесь, что позволяет сравнить результаты с известными результатами исследования эволюции спектров пассивной примеси в двумерной турбулентности [117, 247].

При малых G коэффициенты C_N не оказывают влияния на поведение A_N и уравнение (7.32) сохраняет два стационарных решения

$$A_N = A_0 \cdot 2^{-N/3}, \quad A_N = A_0 \cdot 2^{-N}, \quad (7.34)$$

отвечающие инерционным интервалам переноса энергии и энтрофии, где

спектр энергии удовлетворяет соответственно законам (7.16) и (7.17).

В инерционно-конвективном интервале уравнение (7.33) в зависимости от поведения коэффициентов A_N (7.34) дает в инерционном интервале энергии стационарное решение $C_N = C_0 \cdot 2^{-4N/3}$, соответствующее спектру энергии пульсаций температуры

$$E_T(k) = B\epsilon_T \epsilon^{-1/3} k^{-5/3}, \quad (7.35)$$

и в инерционном интервале энтропии $C_N = C_0 \cdot 2^{-N}$, что дает для спектра закон

$$E_T(k) = B_\omega \epsilon_T \epsilon_\omega^{-1/3} k^{-1}. \quad (7.36)$$

Скорость диссипации энергии пульсаций температуры ϵ_T определяется выражением

$$\epsilon_T = \sum_{k > N} \sum_{L < NM} \sum \rho_K H_{KML} A_M C_L \quad (7.37)$$

и равна при спектре (7.35) $1,76 A_0 C_0^2$, а при спектре (7.36) $3,1 \cdot A_0 C_0^2$, что соответствует значениям констант $B = 0,5$ и $B_\omega = 0,92$. В работе [117] при численном моделировании двумерной турбулентности с пассивной примесью был получен спектр (7.36) с константой $B_\omega = 1,56$.

В вязкоконвективном интервале, реализуемом при больших числах Прандтля, каскад температуры еще сохраняется, а соответствующие масштабы скорости подавляются вязкостью и существенно только крупномасштабное движение. Учитывая, что отлично от нуля только A_0 , а $C_N = C_0 \cdot 2^{-\theta N}$, запишем (7.33):

$$\dot{C}_N = A_0 C_0 \cdot 2^{N(1-\theta)} (H_{0,-N,-1} \cdot 2^\theta - H_{0,-N,1} 2^{-\theta}). \quad (7.38)$$

Стационарное состояние возможно при $H_{0,-N,-1} = 2^{2\theta} H_{0,-N,1}$. Из матрицы H (см. табл. 7.3) видно, что θ растет с увеличением N и стремится к значению $\theta = 1$. Это подтверждается и численным моделированием вязкоконвективного интервала ($P = 10^3$, $G = 0$, $P_{\max} = 10$). Следовательно, спектр энергии температурных пульсаций в вязкоконвективном интервале также

Т а б л и ц а 7.3

Матрица H_{NML} ($N = 0$)

M					
-4	-3	-2	-1	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
-0,0058	-0,0145	-0,0374	-0,0996	-0,221	
0	0	0	0	0	
0,0018	0,00468	0,0125	0,0277	0,0457	
0	0	0	0,00196	0,0113	
0	0	0	0,000184	0,00291	
0	0	0	0,000013	0,000731	

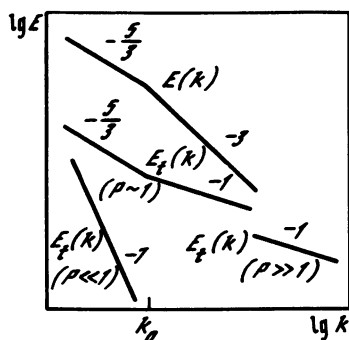
удовлетворяет закону:

$$E_T(k) \sim k^{-1}. \quad (7.39)$$

В инерционно-диффузионном интервале (малые числа Прандтля) сохраняется каскад скорости, но существенно тепловая диффузия, что делает диффузионный член более весомым, чем временной. В (7.33) это приводит к уравнению

$$\sum_M H_{NM0} A_M C_0 + K_N C_N = 0. \quad (7.40)$$

Р и с. 7.7. Спектры пассивной примеси в двумерной турбулентности



В матрице существенна только нижняя диагональ, а для C_N получаем

$$C_N = 2^{-2N} C_0 A_0 H_{0,0,-N} \sim 2^{-4N},$$

что дает спектр

$$E_T(k) \sim k^{-7}. \quad (7.41)$$

Спектры минус один для вязкоконвективного и минус семь для инерционно-диффузионного интервалов в двумерной турбулентности получаются также из квазинормальной марковской модели [247]. Сводный график спектральных законов для пассивной примеси в двумерной турбулентности при различных числах Прандтля приведен на рис. 7.7.

M				L
1	2	3	4	
0	0	-0,054	-2,991	4
0	-0,094	-1,490	-0,154	3
-0,125	-0,720	-0,153	0	2
-0,365	-0,145	0	0	1
0	0	0	0	0
0,0181	0	0	0	-1
0,00239	0	0	0	-2
0,000300	0	0	0	-3
0,000038	0	0	0	-4

7.4. ТУРБУЛЕНТНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ СЛОЯХ

Интересно проследить за влиянием конвекции на распределение энергии по спектру. Если при больших числах Грассхофа показатели степени в законах $A_N \sim 2^{-\kappa N}$ и $C_N \sim 2^{-\theta N}$ изменяются, то режим подобия уже не будет обеспечиваться балансом соответствующей тройки членов в уравнении (7.15). Подобие можно обеспечить только балансом нелинейных членов с членом при G . Это возможно, если $T_{NML} A_M A_L \sim G F_N C_N$ и, следовательно, $G \sim A_0^2$, а

$$2^N (1 - 2\kappa) = 2^{N(1-\theta)}. \quad (7.42)$$

Из уравнения (7.33) получаем второе условие

$$2^\theta = 2^{3-\kappa-\theta}. \quad (7.43)$$

Сопоставление (7.42) и (7.43) дает $\kappa = 3/5$ и $\theta = 6/5$, что соответствует спектральным законам

$$E(k) \sim k^{-11/5}, \quad (7.44)$$

$$E_T(k) \sim k^{-7/5}. \quad (7.45)$$

Задаваясь вопросом о реальности существования двумерной турбулентной конвекции, содержащей инерционные интервалы (7.44)–(7.45), рассмотрим квазидвумерное движение жидкости в тонкой вертикальной плоскопараллельной щели с характерным размером l и расстоянием d между стенками ($l \gg d$). Движение плоское ($\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$), стенки считаем теплоизолированными, т.е. $T = \text{const}(z)$, а скорость $\mathbf{v} = 0$ при $z = 0$ и $z = d$. Скорость задается в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t) \sin \frac{\pi z}{d}. \quad (7.46)$$

При сделанных допущениях безразмерное, проинтегрированное по z уравнение для скорости запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\pi}{4} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v} - D\mathbf{v} + \zeta G T. \quad (7.47)$$

Уравнение для температуры при выбранных граничных условиях не изменяется. При переходе к иерархическим уравнениям в (7.32) появится множитель перед матрицей нелинейных взаимодействий и дополнительный член, описывающий трение жидкости о боковые стенки, который в отличие от "внутренней" вязкости дает равный вклад в движение любого масштаба:

$$\dot{A}_N = \frac{\pi}{4} \Sigma T_{NML} A_M A_L + (K_N - D) A_N + G F_N C_N, \quad (7.48)$$

где $D = (\pi l/d)^2$.

Спектры (7.44)–(7.45) проходят через уравнения (7.48) так же, как и через (7.32). Вопрос состоит лишь в том, позволит ли трение о боковые

стенки щели развиваться турбулентному течению со спектральными законами (7.44)–(7.45).

Система (7.48), (7.33) решалась численно с параметрами $G = 1,5 \cdot 10^{11}$, $P=7$, $D=5 \cdot 10^5$, соответствующими ячейке Хеле–Шоу, стенки которой выполнены из теплоизолирующего материала (пенопласт) размером 1×1 м, с шириной щели 5 мм, заполненной водой с наложенной разностью температуры 50° [170]. Энергия подводится к нулевому ярусу температуры. Счет показал, что решение (7.44)–(7.45) устанавливается в шести нижних ярусах системы. В реальном течении можно ожидать некоторого ослабления энергии высших ярусов за счет влияния возмущений с масштабами, меньшими d , которые к тому же имеют трехмерную структуру. Тем не менее поведение низкочастотной части спектра измениться не должно.

Обратимся к задаче, описанной в разд. 4.1. Ситуация отличается от рассмотренной выше распределением температуры и условиями теплоотдачи на боковых стенках. Линейное распределение температуры приводит к дополнительному члену в уравнении теплопроводности, а хорошая теплопроводность стенок требует учета поперечного профиля температуры. Температура задается в виде

$$T = -Ay + \vartheta \sin \frac{\pi z}{d}, \quad (7.49)$$

где A – заданный в стенках градиент температуры. Система каскадных уравнений записывается следующим образом:

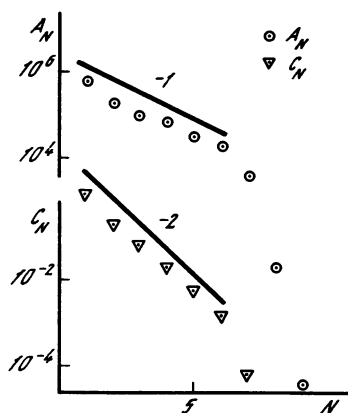
$$\dot{A}_N = \frac{\pi}{4} \sum_{ML} T_{NML} A_M A_L + (K_N - D) A_N + G F_N C_N, \quad (7.50)$$

$$\dot{C}_N = \frac{\pi}{4} \sum_{ML} H_{NML} A_M C_L + P^{-1} (K_N - D) C_N + \mathcal{F}_N A_N, \quad (7.51)$$

где $\mathcal{F}_N = 0,15 \cdot 2^{-N}$.

Рассматриваемое движение представляет собой одну из немногих реальных возможностей получения двумерного турбулентного течения в лабораторных условиях. Однако способ создания турбулентного конвективного движения накладывает существенный отпечаток на характер процесса, в том числе и на распределение энергии по спектру пульсаций полей скорости и температуры. Приток энергии обеспечивают члены $G F_N C_N$ в уравнении (7.50) и $\mathcal{F}_N A_N$ в уравнении (7.51), причем подкачка энергии осуществляется во все масштабы движения. Видоизменяется и процесс диссипации энергии. Геометрия полости приводит к тому, что основной отток энергии происходит на боковых стенках, причем диссипация одинаково эффективна в движениях любого масштаба (члены $D A_N$ и $D C_N$ соответственно в уравнениях (7.50) и (7.51)).

В рассматриваемой ситуации режим подобия можно обеспечить только балансом членов, описывающих подкачку энергии в данный ярус с диссипативными и нелинейными членами. Степенные законы для A_N и C_N ищем, как обычно, в виде $A_N \sim 2^{-\kappa N}$, $C_N \sim 2^{-\theta N}$. В нижних ярусах (крупномасштабное движение) существенна лишь диссипация на боковых стенках и члены $K_N A_N$ и $K_N C_N$ можно не рассматривать.



Р и с. 7.8. Результаты решения каскадных уравнений для вертикального слоя с теплопроводными границами при $G = 1,4 \cdot 10^4$, $D = 55\,000$, $P = 0,7$

Чтобы действие диссипативных членов скомпенсировать конвективными, нужно потребовать, чтобы

$$DA_N \sim GF_N C_N \text{ и } DC_N \sim F_N A_N.$$

Оба условия приводят к одинаковому соотношению между показателями степеней κ и θ :

$$\kappa = \theta - 1. \quad (7.52)$$

Баланс между энергией, поступающей от соседних ярусов, и ее диссипацией, требующий

$$T_{NMLA_M A_L} \sim DA_N, \quad H_{NMLA_M C_L} \sim DC_N, \text{ возможен только при } \kappa = 1 \quad (7.53)$$

независимо от распределения по ярусам энергии температурных пульсаций. Баланс нелинейных членов в (7.50) с конвективными

$$T_{NMLA_M A_L} \sim GF_N C_N$$

возможен при $A^2 \sim G$ и

$$\kappa = \theta/2, \quad (7.54)$$

а равновесие нелинейных членов в уравнении теплопроводности с членом, описывающим генерацию тепловых возмущений вихрями скорости, существующими на фоне линейного распределения температуры

$$H_{NMLA_M C_L} \sim F_N A_N,$$

требует

$$\theta = 2. \quad (7.55)$$

Таким образом, для определения величин κ и θ из различных соображений получено четыре соотношения (7.52)–(7.55). При этом любая пара из полученных соотношений дает решение

$$\kappa = 1, \quad \theta = 2. \quad (7.56)$$

Это решение соответствует энергетическому спектру пульсаций скорости

$$E(k) \sim k^{-3} \quad (7.57)$$

и спектру пульсаций температуры

$$E_T(k) \sim k^{-3}. \quad (7.58)$$

Спектр пульсаций скорости (7.57) совпадает с известным для двумерной изотермической турбулентности спектром "–3", устанавливающимся в инерционном интервале переноса энтропии, в котором поток энергии по спектру равен нулю (см. разд. 7.1). Природа интервала "–3" в рассматри-

ваемом случае иная, но если установился закон "—3", то поток энергии по спектру, обусловленный взаимодействиями триад вихрей, равен нулю. Это означает, что кинетическая энергия конвективного движения жидкости диссипирует в тех же масштабах, что и рождается, но существует постоянный поток энтропии от крупномасштабного движения к мелкомасштабному.

Интервал волновых чисел, в котором устанавливается распределение (7.57)–(7.58), был получен и при численном решении системы (7.50)–(7.51). На рис. 7.8 представлены результаты решения для случая $G = 1,4 \times 10^{10}$, $P = 0,7$, $D = 55\,000$, что соответствует течению воздуха в полости, описанному в разд. 4.1. Прямые линии на графике отвечают законам (7.57)–(7.58). Результаты счета согласуются с экспериментальными данными.

7.5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ

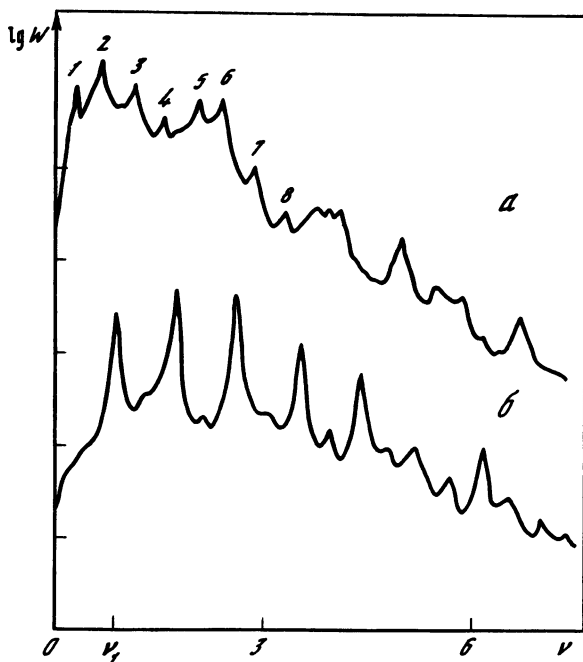
Внедрение вычислительной техники в гидродинамический эксперимент позволило наряду с пространственными и временными спектрами турбулентных течений регистрировать пространственно-временные спектры, т.е. временные спектры выделенного пространственного масштаба. Для измерения пространственно-временного спектра требуется реализовать пространственный фурье-анализ исследуемого поля в реальном времени с записью получаемых спектров через определенные интервалы времени и последующим фурье-анализом записанных реализаций пространственного спектра.

Наиболее простой смысл пространственно-временные спектры имеют при рассмотрении надкритических движений, когда в потоке возбуждено небольшое число мод. В этом случае они фактически являются временными спектрами отдельных мод. Существенно более информативным в такой ситуации оказывается разложение исследуемого поля в ряд по собственным функциям системы. Тогда пространственно-временные спектры есть спектры координат изображающей точки при ее движении в фазовом пространстве не слишком большой размерности.

Именно в надкритических течениях и были получены первые интересные результаты для пространственно-временных спектров [14]. При стохастических колебаниях в конвективной ячейке было обнаружено существование в спектрах серий независимых частот (см. разд. 3.1). Более удивительным явилось наличие аналогичных серий в пространственно-временных спектрах развитой турбулентной конвекции (см. гл. 4).

Вполне естественным является стремление найти простейшую систему гидродинамического типа, воспроизводящую подобные спектры. Приведенные в [186] спектры побудили обратиться к ставшей классической системе Лоренца. Эта система, описывающая движение несжимаемой жидкости в подогреваемом снизу горизонтальном слое с учетом лишь трех низших мод (одной моды скорости и двух мод температуры), является одной из простейших динамических систем, дающих стохастические решения.

Выпишем систему Лоренца, не останавливаясь на ее выводе и свойствах,



Р и с. 7.9. Энергетические спектры колебаний величин x (а), z (б)

которые можно найти, например, в [139, 141, 148, 186]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{7.59}$$

где r — перенормированное число Релея, σ — число Прандтля (ниже всюду $\sigma = 10$, $b = 8/3$). В [186] приведен спектр величины x , всплески в котором и стали поводом для данного анализа [171]. На рис. 7.9 представлены спектры величин x и z для случая $r = 90$ (спектр z идентичен спектру x). Для простоты все приведенные ниже результаты относятся к случаю $r = 90$, хотя расчеты проводились для различных значений r . Приводимые графики получены многократным (от 500 до 1000) осреднением спектров, вычисленных по 512 точкам.

Отметим принципиальное отличие спектров x и z . В спектре z все пики равноудалены друг от друга, т.е. существует выделенная частота ν_1 и кратные ей частоты $\nu_n = n\nu_1$. Подчеркнем, что на рис. 7.9 использован логарифмический масштаб и интенсивность колебаний на частоте ν_n превышает фон более чем на порядок. Спектр x имеет сложную структуру. В нем пики не такие резкие и представляют независимые частоты. На рис. 7.9 пронумерованы первые 8 пиков.

При анализе стохастических систем используют метод точечных отображений, позволяющий перейти от системы с непрерывным временем к системе с дискретным временем. Лоренц в качестве отображения использовал

зависимость значения величины в текущем локальном максимуме от значения в предыдущем. Полученная зависимость имела форму буквы Λ и позволила понять процесс стохастизации решения системы.

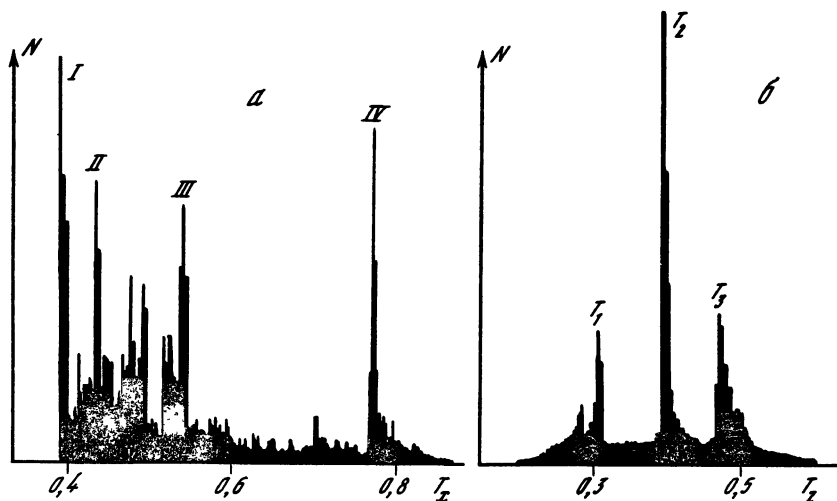
Нас интересует временная структура решения, поэтому логично попытаться использовать в качестве точек отображения временные характеристики, а именно время полного колебания, т.е. время от одного локального максимума до другого. Обозначим их в зависимости от того, за какой геличиной мы следим, T_x и T_z . Сначала построим гистограммы величин T_x и T_z (рис. 7.10).

В гистограмме T_z (рис. 7.10, б) резко выделяются три пика — T_1 , T_2 , T_3 , однако ни один из них не соответствует частоте ν_1 в спектре z (см. рис. 7.9, б). Построим аналог Λ -функции для величин T_z — зависимость продолжительности данного колебания величины z от одного локального максимума до другого от длительности предыдущего колебания, т.е. функцию $T_N = f(T_{N-1})$ (рис. 7.11, а). Точки на графике распределены неравномерно. Наиболее плотно они лежат в трех областях, отмеченных на рисунке, которые последовательно отображаются друг в друга. Эти три группы точек и дают основные пики в гистограмме (см. рис. 7.10, б), а совокупность трех следующих друг за другом колебаний определяет основной всплеск в спектре z . Частота $\nu_1 = (T_1 + T_2 + T_3)^{-1}$. Центральный пик в гистограмме очень острый, боковые — шире и ниже, но в процессе колебаний они связаны таким образом, что уменьшение T_1 приводит к увеличению T_3 и наоборот, так что суммарное время $T_1 + T_2 + T_3$ остается примерно одинаковым. Выделенная тройка колебаний является, естественно, не единственной, но наиболее представительной формой изменения z в процессе стохастических колебаний системы.

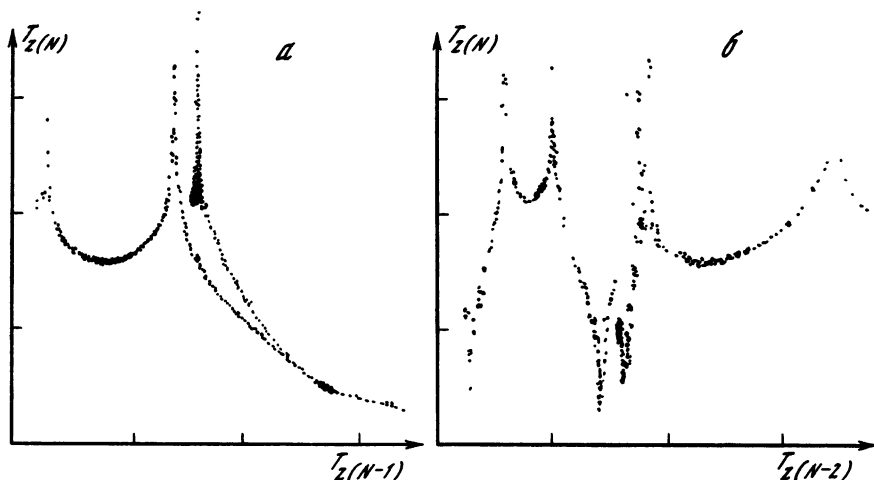
Представленная на рис. 7.11, а зависимость не дает однозначной связи последующего значения T_z от предыдущего и не позволяет в большинстве случаев прогнозировать значения величины T_z . Выявленная склонность системы к сериям из трех колебаний позволяет надеяться, что привлечение двух предыдущих значений T_z существенно увеличит вероятность правильного прогноза. На рис. 7.11, б приведена зависимость T_z от предпоследнего значения, т.е. $T_N = f_1(T_{N-2})$. Одновременное использование функций f и f_1 действительно резко повышает достоверность прогноза. Численные эксперименты показали, что цепочки значений T_z , построенные по двум заданным начальным значениям, дают в большинстве случаев 7–10 (иногда до 15) правильных последующих значений T_z с ошибкой в пределах 5%.

Для расшифровки пиков в спектре x и гистограмме T_x следует вспомнить характер движений системы в фазовом пространстве. В области устойчивого стохастического режима изображающая точка описывает в фазовом пространстве траекторию, охватывающую стационарные точки s_+ , s_- с координатами $x = y = \pm \sqrt{b(r-1)}$, и вся траектория складывается из витков вокруг верхней s_+ и нижней s_- стационарных точек и переходов из области положительных x в область отрицательных и обратно.

Можно, следуя [186], обозначить вращение изображающей точки вокруг s_+ буквой A , переход от s_+ к s_- буквой B , обратный переход — буквой C и вращение вокруг s_- — буквой D . Тогда любая траектория описывается набором этих четырех букв.



Р и с. 7.10. Гистограммы периодов колебаний T_x (а) и T_z (б)



Р и с. 7.11. Зависимость T_z от двух предыдущих значений

Логично предположить, что эти элементарные отрезки траектории должны быть отражены в спектре. Действительно, на гистограмме T_x (см. рис. 7.10, а) пик I ($T = 0,387$) равен среднему времени оборота вокруг s_+ (движение А), пик III ($T = 0,534$) отвечает движению D, пик IV — обороту вокруг обоих центров, т.е. движению BC. Соответственно в спектре на рис. 7.9, а движение А дает пик 6, D — пик 5, BC — пик 4.

Построение отображения $T_x, N = f(T_x, N-1)$ мало что дает, так как зависимость неоднозначная, состоящая из большого числа отдельных ветвей. Однако в процессе ее построения выявились частые повторения довольно длинных однотипных последовательностей элементов траекторий.

**Прогнозирование очередного элемента
фазовой траектории по M предыдущим элементам**

M	Общее число элементов	Число встречающихся комбинаций	Достоверность прогноза
6	2433	86	0,758
8	2625	242	0,806
10	2501	557	0,852
12	5341	1318	0,868

Именно эти цепочки и дают низшие пики в спектре T_x ; пик 3 — это последовательность CAB , пик 2 — $CBDD$, пик 1 — $BDCBDDCAA$ — самая длинная цепочка, отраженная в спектре.

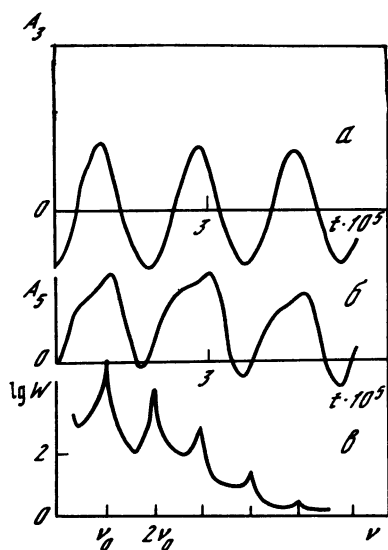
Всплески в спектре показывают на достаточно частое повторение таких участков фазовых траекторий. Можно утверждать, что в решении содержатся временные когерентные структуры, т.е. имеется некая самоорганизация именно в смысле времени, а не пространства. Наличие таких когерентных структур можно было бы отнести за счет слабой стохастичности системы Лоренца, но экспериментальные данные свидетельствуют о том, что и в развитой турбулентной конвекции в спектре присутствуют частоты на несколько порядков ниже характерных частот системы. Так, например, при турбулентной конвекции в кубической полости с ребром 10 см при значениях числа Релея порядка 10^9 , когда время оборота жидкости в полости составляло несколько секунд, наблюдались колебания с периодом порядка одного часа [172].

Наличие в фазовых траекториях повторяющихся комбинаций элементов позволяет рассчитывать на возможность улучшения достоверности прогноза поведения системы. Ставились следующие численные эксперименты. В процессе решения системы накапливалась информация о вероятности появления в траектории цепочек элементов длиной M , изменяющейся от 6 до 12. После прохождения первой тысячи шагов (за шаг считается прохождение системой одного из элементов A, B, C, D) каждый последующий шаг предсказывается по M предыдущим элементам. По результатам счета определяется достоверность прогноза как отношение правильно предсказанных шагов к их общему числу. Результаты представлены в табл. 7.4.

Таким образом, всплески в спектре переменной x связаны с конкретными структурами в фазовой траектории системы. Число наиболее представительных структур невелико, и каждая из них отражается в спектре.

В поисках системы, спектр которой воспроизводит основные особенности пространственно-временных спектров развитых конвективных систем, обратимся к иерархическим уравнениям (7.32)–(7.33) двумерной турбулентной конвекции.

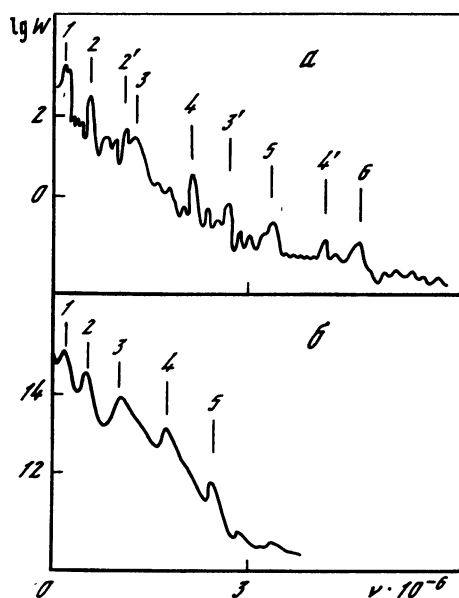
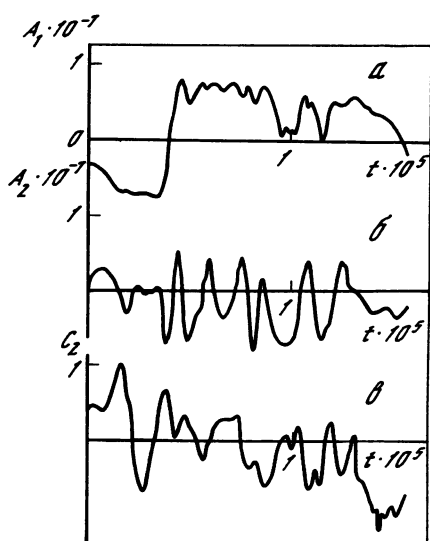
Уравнения имеют стационарные решения, однако даже в самом простом случае — изотермической турбулентности — стационарные решения неустойчивы и реализуются в среднем. На рис. 7.12, *а, б* приведены типичные реализации для коэффициентов A_N при интегрировании уравнений (7.32) в слу-



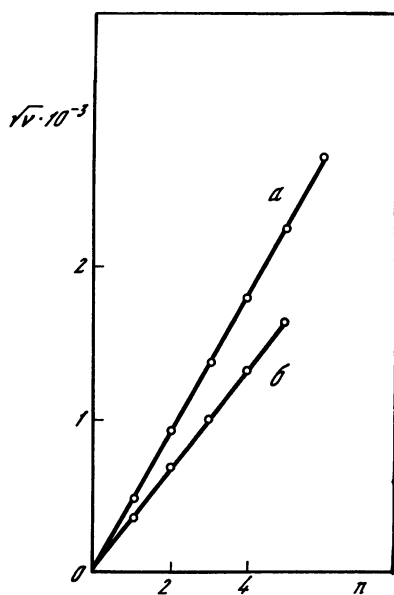
Р и с. 7.12. Изотермическая турбулентность ($G = 0$)

$a, б$ — изменение во времени коэффициентов A_N , $в$ — энергетический спектр пульсаций коэффициента A_7

Р и с. 7.13. Изменение коэффициентов A_N, C_N при $G = 1,5 \cdot 10^{11}$



Р и с. 7.14. Спектры пульсаций величин C_1 (а) и A_8 (б)



Р и с. 7.15. Зависимость частоты от номера пика для C_1 (а) и A_8 (б)

чае $G = 0$ (изотермическая турбулентность). Колебания носят вполне регулярный характер с ярко выраженной доминирующей частотой, что подтверждает и временной энергетический спектр, приведенный на рис. 7.12, в. В нем пики соответствуют частоте ν_0 и кратным частотам. Интересно, что частота ν_0 одинакова для всех коэффициентов A_N .

Интегрирование системы (7.32)–(7.33) для больших чисел Грассхофа (развитая турбулентная конвекция) показывает, что колебания становятся значительно интенсивнее и все менее регулярными. Рис. 7.13 иллюстрирует случай развитой гравитационной конвекции: $G = 1,5 \cdot 10^{11}$, $P = 7$. Приведенные реализации для коэффициентов A_N и C_N свидетельствуют о существенном изменении характера колебаний. Имеет место стохастизация решений.

Система (7.32)–(7.33) решалась для различных способов подкачки энергии и начальных условий. Графики на рис. 7.13 относятся к случаю, когда энергия к системе подводится путем наложения крупномасштабной разности температуры со случайными вариациями амплитуды, т.е. $C_0 = C_0 + \kappa \xi$, где ξ — случайное число в интервале $(-1, 1)$, а κ определяет амплитуду флуктуации внешней разности температуры. Кроме этого, рассматривались случаи, в которых крупномасштабная разность температуры считалась постоянной ($C_0 = 1$), или энергия подводилась к некоторому промежуточному масштабу, а также случай вырождения развитой турбулентной конвекции (отсутствие подкачки энергии). Во всех случаях решение системы дает стохастические колебания коэффициентов A_N и C_N .

Каждый из коэффициентов A_N и C_N характеризует пространственные возмущения определенных размеров, и, следовательно, временные энергетические спектры их пульсаций являются фактически пространственно-временными спектрами. В качестве примера вычисленных пространственно-временных спектров развитой двумерной турбулентной конвекции на рис. 7.14 приведены в логарифмическом масштабе спектр пульсаций нижней пространственной моды температуры (коэффициент C_0 , рис. 7.14, а) для случая вырождения турбулентной конвекции и спектр пульсаций скорости промежуточного масштаба (коэффициент A_ξ , рис. 7.14, б) для течения с постоянно поддерживаемой крупномасштабной разностью температуры. В обоих случаях число Грассхофа порядка 10^{11} . Следует отметить, что спектры своим общим видом и интенсивностью основных и побочных пиков похожи на экспериментальные пространственно-временные спектры для развитой турбулентности, приведенные на рис. 4.15.

На рис. 7.14 пронумерованы пики, образующие серии с плавной зависимостью частоты от номера пика. Номера со штрихами отвечают кратным частотам. На рис. 7.15 для этих же спектров приведена зависимость значения квадратного корня от частоты, на которую приходится пик, от номера этого пика.

Интересно, что попытки добиться большей достоверности путем усреднения ряда спектров, полученных для различных реализаций с небольшими вариациями в начальных условиях, не дали положительных результатов. Создается впечатление, что серии пиков не являются для системы заданными однозначно и изменяются при изменении внешних условий.

Сопоставление временных спектров колебаний коллективных переменных, входящих в каскадные уравнения, с пространственно-временными

спектрами реальных турбулентных течений требует большой осторожности. Однако получение пространственно-временных спектров развитой турбулентной конвекции на основе любой другой модели в настоящее время невозможно. Приведенные результаты позволяют констатировать, что решения уравнений (7.32)–(7.33), полученных на основе иерархической модели турбулентной конвекции, дают нерегулярные стохастические колебания величин A_N и C_N , спектры которых подобны экспериментальным пространственно-временным спектрам развитой турбулентной конвекции. В этих спектрах прослеживаются серии пиков с плавной зависимостью частоты от номера пика.

На качественное соответствие полученных спектров реальным ситуациям указывает и тот факт, что при решении уравнений (7.50)–(7.51), описывающих турбулентную конвекцию в вертикальной щели между теплопроводными стенками при подогреве снизу, были получены стационарные распределения величин A_N и C_N , отсутствовавшие во всех других случаях. Результат стал понятен после проведения экспериментов, описанных в разд. 4.1. Измерения пространственно-временных спектров показали, что это единственный из рассмотренных случаев турбулентной конвекции, при котором временные спектры выделенных пространственных мод спадают монотонно и не имеют выделенных частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абен Х.К.* Интегральная фотоупругость. Таллин: Валгус, 1975. 218 с.
2. *Александров А.А., Ахметзянов М.Х.* Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973. 576 с.
3. *Алексеев Н.В., Бородин Ю.В., Кура-
сов Б.В.* Возможности фотоэлектрических теневых приборов с пространственной фильтрацией теневой картины, применяемых для исследований турбулентности // Оптика и спектроскопия. 1984. Т. 56, № 3. С. 531–536.
4. *Баженова Т.В., Леонтьева З.С.* Способ измерения полей плотности трехмерных объектов при помощи метода Теплера // Газодинамика и физика горения. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 88–94.
5. *Баранников В.А., Богатырев Г.П.,
Зимин В.Д.* и др. Закономерности чередования пиков в спектрах стохастических колебаний гидродинамических систем. Препр. Свердловск: Ин-т механики сплошных сред УНЦ АН СССР, 1982. 32 с.
6. *Баранников В.А., Фрик П.Г., Шай-
дуров В.Г.* Спектральные характеристики двумерной турбулентности в конвективной ячейке Хеле–Шоу // VI Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: Тез. докл. Ташкент, 1986. С. 76.
7. *Бекетова А.К., Белозеров А.Ф.,
Березкин А.Н.* и др. Голографическая интерферометрия фазовых объектов. Л.: Наука, 1979. 232 с.
8. *Белоцерковский С.М., Сухору-
ких В.С., Татаренчик В.С.* Определение поля плотности пространственных газодинамических течений на основе оптических методов // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1964. № 3. С. 95–99.
9. *Беляев Ю.Н., Монахов А.А., Щер-
баков С.А., Яворская И.М.* Возникновение турбулентности во вращающихся жидкостях // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 6. С. 329–333.
10. *Беляев Ю.Н., Яворская И.М.* Экспериментальное исследование возникновения стохастичности в сферическом течении Куэтта // Механика неоднородных систем. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1985. С. 6–31.
11. *Бенилов А.Ю., Лозовецкий И.Д.* Об инерционном интервале в спектрах турбулентности стратифицированной жидкости // Исследование изменчивости гидрофизических полей в океане. М.: Наука, 1974. С. 77–86.
12. *Бердников В.С., Кирдяшкин А.Г.* Турбулентная конвекция в горизонтальном слое жидкости со свободной верхней границей // Притенные турбулентные течения. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1975. С. 243–255.
13. *Богатырев Г.П., Гилев В.Г.* Надкритические конвективные движения в коротком горизонтальном цилиндре // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 137–142.
14. *Богатырев Г.П., Гилев В.Г., Зи-
мин В.Д.* Пространственно-временные спектры стохастических колебаний в конвективной ячейке // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32, № 3. С. 229–232.
15. *Богатырев Г.П., Зимин В.Д.* Пространственно-временные спектры стохастических колебаний в гидродинамических системах // Гидродинамическая и конвективная устойчивость несжимаемых жидкостей. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. С. 86–93.
16. *Богатырев Г.П., Зимин В.Д., Ке-
тов А.И.* Измерение пространственно-временных спектров турбулентных пульсаций температуры // Метрология гидрофизических изме-

- рений: Тез. докл. I Всесоюз. конф. М., 1980. С. 213–215.
17. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
 18. Брэдшоу П. Введение в турбулентность и ее измерение. М.: Мир, 1974. 278 с.
 19. Брэдшоу П., Вудс Дж.Д. Геофизическая турбулентность и течения с силами плавучести // Турбулентность / Под. ред. П. Брэдшоу. М.: Машиностроение, 1980. С. 178–199.
 20. Бычков Ю.М. Визуализация тонких потоков несжимаемой жидкости. Кишинев: Штиинца, 1980. 132 с.
 21. Васильев Л.А. Теневые методы. М.: Наука, 1968. 400 с.
 22. Вертгейм И.И., Непомнящий А.А., Тарунин Е.Л. и др. О численном моделировании турбулентной конвекции в горизонтальном и вертикальном плоских слоях // Конвективные течения: Сб. науч. тр. Перм. пед. ин-та. Пермь, 1981. С. 112–129.
 23. Власов П.В., Свиридов Н.К. Нобелевская премия по медицине 1980 г. // Природа. 1980. № 1. С. 91.
 24. Вулис И.Л., Монин А.С. О спектрах долгопериодных колебаний метеорологических полей // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 4. С. 328–331.
 25. Гаврилин Б.Л., Миравель А.П., Монин А.С. О спектре энергии синоптических процессов // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1972. Т. 8, № 5. С. 483–493.
 26. Гарвей Д. Атмосфера и океан. М.: Прогресс, 1982. 184 с.
 27. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. 656 с.
 28. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958. 307 с.
 29. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
 30. Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б., Шмидт В.М. Взаимодействие трехмерных волн во вращающемся слое жидкости, подогреваемой снизу // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 3. С. 545–548.
 31. Герценштейн С.Я., Шмидт В.М. Нелинейное взаимодействие конвективных волновых движений и возникновение турбулентности во вращающемся горизонтальном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 2. С. 9–15.
 32. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
 33. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1978. Т. 11. С. 66–154.
 34. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Овчинников А.П. Конвективная устойчивость жидкости в кубической полости // Гидродинамика. Пермь, 1968. Вып. 1. С. 49–55. (Учен. зап. Перм. ун-та; № 184).
 35. Гидродинамическая неустойчивость и переход к турбулентности / Пер. с англ. под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба. М.: Мир, 1984. 344 с.
 36. Гинзбург В.М., Филленко Ю.И. Влияние преломления световых лучей при голографической интерферометрии фазовых объектов // Журн. техн. физики. 1970. Т. 40, № 10. С. 2217–2220.
 37. Гледзер Е.Б. О редукции уравнения Навье–Стокса к нелинейным цепочкам каскадного типа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 1. С. 26–35.
 38. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 368 с.
 39. Гледзер Е.Б., Макаров А.А. О построении каскадной модели двумерной турбулентности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 9. С. 899–906.
 40. Глушко Г.С., Трасковский В.Д. Метод расчета спектральной плотности энергии однородной изотропной турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 1. С. 13–19.
 41. Голицын Г.С. Флуктуации магнитного поля и плотности тока в турбулентном потоке слабо проводящей жидкости // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 2. С. 315–318.
 42. Голицын Г.С. Флуктуации диссипации в локально-изотропном потоке // Там же. 1962. Т. 144, № 3. С. 520–523.
 43. Голография: Методы и аппаратура / Под ред. В.М. Гинзбург, Б.М. Степанова. М.: Сов. радио, 1974. 376 с.

44. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. К теории структурной турбулентности // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 6. С. 1319–1322.
45. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Структурная турбулентность в диссипативных системах. Препр. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981. 48 с.
46. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Структурный анализ турбулентности // Современные проблемы теории теплообмена и физической гидродинамики. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1984. С. 200–222.
47. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
48. Гурвич А.С. Влияние временной эволюции турбулентных неоднородностей на частотные спектры // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16, № 4. С. 345–354.
49. Гурвич А.С., Zubковский С.Л. Об экспериментальной оценке флуктуаций диссипации энергии турбулентности // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. № 12. С. 1858–1868.
50. Гурвич А.С., Пахомов В.В., Черемухин А.М. Об изотропности флуктуаций показателя преломления в приземном слое атмосферы для малых масштабов турбулентности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1971. Т. 7, № 1. С. 76–80.
51. Гурвич А.С., Тиме Н.С. Оценка высокочастотной части спектра с помощью лазера // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 6. С. 142–145.
52. Гурвич А.С., Тиме Н.С., Туровцева Л.С., Турчин В.Ф. Восстановление спектра пульсаций температуры в атмосфере из оптических измерений // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1974. Т. 10, № 5. С. 484–492.
53. Гурвич А.С., Юрченко Б.Н. Частотные спектры пульсаций температуры при турбулентной конвекции // Там же. 1980. Т. 16, № 8. С. 854–857.
54. Дайковский А.Г., Полежаев В.И., Федосеев А.И. Численное моделирование переходных режимов конвекции на основе нестационарных уравнений Навье–Стокса: Препр. Ин-та пробл. механики АН СССР, № 101. М., 1979. 66 с.
55. Деснянский В.Н., Новиков Е.А. Моделирование каскадных процессов в турбулентных течениях // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, № 3. С. 507–513.
56. Дрофа А.С. Определение некоторых параметров атмосферной турбулентности из оптических измерений // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 5. С. 524–532.
57. Жуков Л.В., Музалевский Ю.С. Корреляционно-спектральный анализ периодичностей активности Солнца // Астрон. журн. 1969. Т. 46, № 3. С. 600–609.
58. Зверев В.А., Орлов Е.Ф. Оптические анализаторы. М.: Сов. радио, 1971. 240 с.
59. Зельдович Я.Б. Предельные законы свободно-восходящих конвективных потоков // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1937. Т. 7, № 12. С. 1463–1465.
60. Зельдович Я.Б. Магнитное поле в проводящей турбулентности при двумерном движении // Там же. 1956. Т. 31, № 1. С. 154–155.
61. Зимин В.Д. Применение теневых методов в условиях сильной рефракции лучей // Гидродинамика. Пермь, 1970. Вып. 2. С. 263–271. (Учен. зап. Перм. ун-та; № 216).
62. Зимин В.Д. Естественная конвекция в замкнутой прямоугольной полости в режиме развитого пограничного слоя // Гидродинамика. Пермь, 1972. Вып. 4. С. 97–106. (Учен. зап. Перм. ун-та; № 293).
63. Зимин В.Д. Естественная конвекция внутри горизонтального кругового цилиндра // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 2. С. 172–175.
64. Зимин В.Д. Оптические методы исследования прозрачных неоднородностей: Учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1976. 92 с.
65. Зимин В.Д. Оптическая обработка информации в теневых приборах: Учеб. пособие. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1977. 80 с.
66. Зимин В.Д. Иерархическая модель турбулентности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17, № 12. С. 1265–1273.
67. Зимин В.Д., Кетов А.И. Надкритические конвективные движения в кубической полости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 5. С. 110–114.
68. Зимин В.Д., Кетов А.И. Конвективные колебания в подогреваемой снизу кубической полости // Гидро-

- динамика. Пермь, 1975. Вып. 6. С. 3–12. (Учен. зап. Перм. ун-та; № 327).
69. Зимин В.Д., Кетов А.И. Турбулентная конвекция в подогреваемой снизу кубической полости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 133–138.
 70. Зимин В.Д., Кетов А.И. Спектры конвективных колебаний в кубической полости при подогреве снизу // Ин-т механики сплошных сред УНЦ АН СССР. Пермь, 1982. 16 с. Деп. в ВИНТИ 14.07.82, № 3032-82.
 71. Зимин В.Д., Кетов А.И., Фрик П.Г. Применение теневого метода для измерения осредненных температурных полей в турбулентных потоках // Конвективные течения и гидродинамическая устойчивость. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. С. 108–115.
 72. Зимин В.Д., Ляхов Ю.Н. Конвективный пристеночный факел // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1970. № 3. С. 159–161.
 73. Зимин В.Д., Ляхов Ю.Н., Петухова В.Г., Шайдунов Г.Ф. Исследование стационарной тепловой конвекции в полости прямоугольного сечения // Гидродинамика. Пермь, 1979. С. 121–130. (Учен. зап. Перм. ун-та; № 216).
 74. Зимин В.Д., Ляхов Ю.Н., Шайдунов Г.Ф. Экспериментальное изучение поля температуры при естественной конвекции жидкости в замкнутой прямоугольной полости // Гидродинамика. Пермь, 1971. Вып. 3. С. 126–138. (Учен. зап. Перм. ун-та; № 248).
 75. Зимин В.Д., Фрик П.Г. Исследование осесимметричных оптических неоднородностей при сильной рефракции лучей // Журн. техн. физики. 1976. Т. 46, № 2. С. 408–410.
 76. Зимин В.Д., Фрик П.Г. Голографическая интерферометрия в условиях сильной рефракции лучей // Оптика и спектроскопия. 1976. Т. 40, № 3. С. 578–581.
 77. Зимин В.Д., Фрик П.Г. Теневой метод исследования трехмерных неоднородностей // Там же. № 6. С. 1060–1062.
 78. Зимин В.Д., Фрик П.Г. Осредненные температурные поля в осесимметричных турбулентных струях над локализованными источниками тепла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 2. С. 199–203.
 79. Зимин В.Д., Фрик П.Г. Восстановление трехмерных полей показателя преломления по ракурсным теневым картинам // Оптика и спектроскопия. 1981. Т. 50, № 4. С. 736–732.
 80. Зимин В.Д., Фрик П.Г., Шайдунов В.Г. Турбулентная конвекция в кубической полости при одновременном подогреве сбоку и снизу // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 2. С. 147–151.
 81. Зимин В.Д., Шайдунов В.Г. Неустойчивость конвективного пограничного слоя в замкнутой прямоугольной полости // Там же. 1975. № 5. С. 188–190.
 82. Зимин В.Д., Шайдунов В.Г. Изменение пространственных спектров стохастических фазовых неоднородностей по ракурсным голограммам // Фотометрия и ее метрологическое обеспечение: Тез. докл. Всесоюз. конф. М., 1976. С. 87.
 83. Зимин В.Д., Шайдунова Т.Е. Иерархическая модель турбулентности // Гидродинамические и магнито-гидродинамические явления при больших числах Рейнольдса и магнитных числах Рейнольдса. Препр. Свердловск: Ин-т механики сплошных сред УНЦ АН СССР, 1981. С. 40–76.
 84. Зимин В.Д., Шахурдин В.И. Соотношения для тневых и интерференционных методов исследования напряженно-деформированного состояния твердых тел // Прикл. механика. 1978. Т. 14. С. 25–29.
 85. Золотарев В.М., Морозов В.Н., Смирнова Е.В. Оптические постоянные природных и технических сред. Л.: Химия, 1984. 215 с.
 86. Иванов В.Г. О возможностях использования шпирен-метода для измерения характеристик турбулентности // Журн. техн. физики. 1974. Т. 44, № 3. С. 677–680.
 87. Инверсия Абеля и ее обобщение: Сб. ст. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978. 272 с.
 88. Иоффе Б.В. Рефрактометрические методы химии. Л.: Госхимиздат, 1960. 383 с.
 89. Каплан С.А., Пикельнер С.Б., Цытович В.Н. Физика плазмы солнечной атмосферы. М.: Наука, 1977. 256 с.
 90. Келлер Б.С., Яглом А.М. О влиянии

- флуктуации диссипации энергии на форму спектра турбулентности в крайней коротковолновой области // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 70–79.
91. Колесников Ю.Б., Цинобер А.Б. Двумерное турбулентное течение за круглым цилиндром // Магнит. гидродинамика. 1972. № 3. С. 23–31.
 92. Колесников Ю.Б., Цинобер А.Б. Экспериментальное исследование двумерной турбулентности за решеткой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 4. С. 146–150.
 93. Калмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.
 94. Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л. Оптическая голография. М.: Мир, 1973. 686 с.
 95. Копилевич Ю.И. Связь характеристик сигнала теневого прибора со спектром турбулентности // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1975. № 6. С. 121–127.
 96. Копилевич Ю.И., Курасов Б.В., Неопалимов Е.Г., Социлин Г.Б. О повышении разрешающей способности оптического метода исследования турбулентности // Оптика и спектроскопия. 1978. Т. 44, № 3. С. 574–577.
 97. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
 98. Кузнецов Е.Н., Львов В.С., Предтеченский А.А. и др. О проблеме перехода к турбулентности в течении Куэтта // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 226–229.
 99. Кузьмин Г.А., Паташинский А.З. Представление взаимодействия в теории турбулентности // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1978. № 1. С. 62–72.
 100. Кутателадзе С.С., Бердников В.И., Кирдяшкин А.Г. Турбулентная естественная конвекция у вертикальной пластины // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, № 6. С. 1270–1273.
 101. Кутателадзе С.С., Ивакин В.П., Кирдяшкин А.Г., Кекалов А.Н. Турбулентная естественная конвекция в вертикальном слое // Теплофизика высоких температур. 1977. Т. 15, № 3. С. 545–553.
 102. Кутателадзе С.С., Кирдяшкин А.Г., Бердников В.С. Поле скорости в конвективной ячейке горизонтального слоя жидкости при тепловой гравитационной конвекции // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1974. Т. 10, № 2. С. 137–145.
 103. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 278 с.
 104. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1954. 795 с.
 105. Лукашук С.Н., Предтеченский А.А., Фальковик Г.Е., Черных А.И. О выяснении размерностей аттракторов по экспериментальным данным: Препр. Ин-та автоматизации и электротехники СО АН СССР, № 280. Новосибирск, 1985. 20 с.
 106. Лукин В.П., Сазанович В.М., Слободян С.М. Исследование анизотропии турбулентности при конвекции // Распространение оптических волн в случайно-неоднородной атмосфере. Новосибирск: Наука, 1979. С. 61–66.
 107. Любимов Д.В., Путин Г.Ф., Чернышневский В.И. О конвективных движениях в ячейке Хеле–Шоу // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 3. С. 554–556.
 108. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
 109. Методы расчета турбулентных течений: Пер. с англ. / Под ред. В. Кольмана. М.: Мир, 1984. 464 с.
 110. Миллионщиков М.Д. К теории однородной изотропной турбулентности // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 9. С. 611–614.
 111. Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В. и др. Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1983. Т. 85, № 6. С. 1979–1987.
 112. Монин А.С. О макротурбулентном обмене в земной атмосфере // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1956. № 4. С. 452–463.
 113. Монин А.С. О природе турбулентности // Успехи физ. наук. 1978. Т. 125, № 1. С. 97–122.
 114. Монин А.С., Рахманова Н.К., Рузмайкин Н.К. Анизотропия турбулентного переноса в конвективном слое: Препр. Ин-та прикл. математики АН СССР, № 17. М., 1985. 13 с.

115. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965. Ч. 1. 639 с.
116. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967. Ч. 2. 720 с.
117. *Мирабель А.П.* Численная модель эволюции спектров энергии и поля концентрации пассивной примеси в двумерном турбулентном потоке // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1974. Т. 10, № 2. С. 211–216.
118. *Мирабель А.П., Монин А.С.* Двумерная турбулентность // Успехи механики. 1979. Т. 2, № 3. С. 47–95.
119. *Мирабель А.П., Монин А.С.* О статистических закономерностях перемешивания примеси двумерной турбулентности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1983. Т. 19, № 9. С. 902–912.
120. *Моффат Г.* Некоторые направления развития теории турбулентности // Современная гидродинамика: Успехи и проблемы: Пер. с англ./ Под ред. Дж. Бэтчелора, Г. Моффата. М.: Мир, 1984. С. 49–76.
121. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 339 с.
122. *Никитина И.В., Сазонтов А.Г.* О спектральной структуре турбулентной конвекции // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1981. № 4. С. 88–97.
123. *Новиков Е.А., Седов Ю.Б.* Коллапс вихрей // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1979. Т. 77, № 2. С. 588–597.
124. *Овчинников А.П.* Конвективная неустойчивость жидкости в кубической полости // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1967. № 3. С. 118–120.
125. Оптическая обработка информации / Под ред. Д. Кейсесента. М.: Мир, 1980. 350 с.
126. *Островский Ю.И., Бутусов М.М., Островская Г.В.* Голографическая интерферометрия. М.: Мир, 1977. 339 с.
127. *Остроумов Г.А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1952. 256 с.
128. *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
129. *Пикалов В.В.* Некорректные задачи локальной оптической диагностики плазмы и газовых объектов произвольной конфигурации // Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978. С. 25–67.
130. *Пикалов В.В., Преображенский Н.Г.* О преобразовании Абеля при голографической интерферометрии точечного взрыва // Физика горения и взрыва. 1974. № 6. С. 923–930.
131. *Пикалов В.В., Преображенский Н.Г.* О восстановлении локальных характеристик плазмы в условиях ограниченной экспериментальной информации // Оптика и спектроскопия. 1976. Т. 40, № 6. С. 1094–1096.
132. *Пикалов В.В., Преображенский Н.Г.* Вычислительная томография и физический эксперимент // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, № 3. С. 469–498.
133. *Полоскин Г.Е.* О воздействии корпускулярной активности Солнца на энергетику атмосферы // Солнечно-атмосферные связи. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. С. 85–93.
134. Поток энергии Солнца: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 558 с.
135. *Преображенский Н.Г., Пикалов В.В.* Неустойчивые задачи диагностики плазмы. Новосибирск: Наука, 1984. 238 с.
136. *Пресняков Ю.П.* Вычисление двумерной функции показателя преломления // Оптика и спектроскопия. 1976. Т. 40, № 1. С. 124–127.
137. *Престон К.* Когерентные оптические вычислительные машины. М.: Наука, 1974. 400 с.
138. *Путин Г.Ф., Любимов Д.В.* Надкритические движения в кубической полости // Гидродинамика. Пермь, 1977. Вып. 10. С. 15–26. (Учен. зап. Перм. ун-та).
139. *Рабинович М.И.* Стохастические автоколебания и турбулентность // Успехи физ. наук. 1978. Т. 125, № 1. С. 123–168.
140. *Рабинович М.И., Сушик М.М.* Когерентные структуры в турбулентных течениях // Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983. С. 56–85.
141. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.*

- Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
142. Решетов Л.А. Исследование мелко-масштабной турбулентности интегральными оптическими приборами // Оптико-механическое приборостроение. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. С. 46–48. (Науч. тр. ЛГУ; № 1).
 143. Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 117–152.
 144. Скотников М.М. Теневые количественные методы в газовой динамике. М.: Наука, 1976. 160 с.
 145. Сороко Л.М. Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971. 616 с.
 146. Стасенко В.Н. Применение теневого прибора для измерения характеристик турбулентности // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1970. № 3. С. 152–155.
 147. Стефанов С.Р., Трохан А.М., Чашечкин Ю.Д. Об исследовании турбулентных пульсаций коэффициента преломления воды тепловым методом // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1971. № 5. С. 103–108.
 148. Странные аттракторы /Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. 254 с.
 149. Структурная турбулентность: Сб. науч. тр./Под ред. М.А. Гольдштика. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1982. 166 с.
 150. Суяшев В.А. Получение турбулентных характеристик газовых потоков и пламен методом оптического фурье-разложения амплитуды зондирующего лазерного излучения // Физика горения и взрыва. 1975. Т. 11, № 1. С. 67–73.
 151. Суяшев В.А. О переносе скалярного поля свободной турбулентностью // Изв. СО АН СССР. Сер. тех. наук. 1979. № 3. С. 101–117.
 152. Таблицы физических величин: Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
 153. Тарулин Е.Л. Численное исследование свободной конвекции // Гидродинамика. Пермь, 1968. Вып. 1. С. 135–168. (Учен. зап. Перм. ун-та; № 184)
 154. Тарулин Е.Л., Шайдунов В.Г. О колебательном режиме конвекции в замкнутой полости при подогреве боку // Современные проблемы тепловой конвекции: Тез. докл. Всесоюз. конф. Пермь, 1975. С. 159–160.
 155. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
 156. Тиме Н.С. Оценка спектра турбулентности в интервале диссипации по измерениям флуктуации лазерного излучения // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1972. Т. 8, № 1. С. 91–92.
 157. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.
 158. Турбулентность: Принципы и приложения / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. М.: Мир, 1980. 527 с.
 159. Турчин В.Ф., Козлов В.П., Малкевич М.С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // Успехи физ. наук. 1970. Т. 102, № 3. С. 345–386.
 160. Файнбург Г.З. К уравнениям свободно-конвективной турбулентности несжимаемой жидкости // Учен. зап. Перм. пед. ин-та. 1976. № 152. С. 100–112.
 161. Файнбург Г.З., Шарифулин А.Н. Некоторые вопросы численного моделирования свободно-конвективной турбулентности // Исследование тепловой конвекции и теплопередачи. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 64–72.
 162. Физико-газодинамические баллистические исследования / Под общ. ред. Г.И. Мишина. Л.: Наука, 1980. 238 с.
 163. Физические измерения в газовой динамике и при горении. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 484 с.
 164. Филенко Ю.И., Фадеев В.А., Штейн И.Н. Восстановление объемного распределения показателя преломления // Проблемы голографии: Межвуз. сб. науч. тр. М., 1973. С. 64–68.
 165. Фрик П.Г. Восстановление трехмерных осредненных температурных полей в турбулентных струях по ракурсным теневым фотографиям // Семинар по прикладной магнитной гидродинамике: Тез. докл. Пермь: ОФП УНЦ АН СССР, 1978. Ч. 2. С. 114–115.
 166. Фрик П.Г. Иерархическая модель двумерной турбулентности //

- Магнит. гидродинамика. 1983. № 1. С. 60–66.
167. Фрик П.Г. Двумерная МГД-турбулентность: Иерархическая модель // Там же. 1984. № 3. С. 48–54.
 168. Фрик П.Г. Иерархическая модель двумерной турбулентной конвекции // Гидродинамическая и конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. С. 74–85.
 169. Фрик П.Г. Моделирование пространственно-временной структуры развитой двумерной турбулентной конвекции // Неизотермические течения вязкой жидкости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 35–39.
 170. Фрик П.Г. Моделирование каскадных процессов в двумерной турбулентной конвекции // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1986. № 2. С. 71–79.
 171. Фрик П.Г. Система Лоренца и пространственно-временные спектры турбулентности // Процессы тепло- и массопереноса вязкой жидкости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 10–15.
 172. Фрик П.Г., Шайдуров В.Г. Измерения осредненных температурных полей при турбулентной конвекции в замкнутой кубической полости // Семинар по прикладной магнитной гидродинамике: Тез. докл. Пермь: ОФП УНЦ АН СССР, 1978. Ч. 2. С. 115–118.
 173. Хауф В., Григуль У. Оптические методы в теплопередаче. М.: Мир, 1973. 240 с.
 174. Хемминг Р.В. Численные методы. М.: Наука, 1972. 400 с.
 175. Холдер Д., Норт Р. Теневые методы в аэродинамике. М.: Мир, 1966. 180 с.
 176. Хице И.О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
 177. Хурган Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.
 178. Чернатынский В.И. Численное исследование конвекции в горизонтальном цилиндре кругового сечения // Гидродинамика. Пермь, 1974. Вып. 7. С. 65–82. (Учен. зап. Перм. ун-та).
 179. Чернатынский В.И., Шлиомис М.И. Конвекция вблизи критических чисел Рейлея при почти вертикальном градиенте температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 64–70.
 180. Цескис А.Л. О двумерной турбулентности // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1982. Т. 83, № 1. С. 176–182.
 181. Шайдуров Г.Ф. Устойчивость конвективного пограничного слоя в жидкости, заполняющей горизонтальный цилиндр // Инж.-физ. журн. 1959. Т. 2, № 12. С. 68–72.
 182. Шайдуров Г.Ф. Тепловая неустойчивость жидкости в горизонтальном цилиндре // Там же. 1961. Т. 4, № 11. С. 109–111.
 183. Шайдурова Т.Е. Иерархическая модель турбулентной конвекции. Препр. Свердловск: Ин-т механики сплошных сред УНЦ АН СССР, 1986. 32 с.
 184. Шайдурова Т.Е. Моделирование диффузии пассивной примеси в однородной изотропной турбулентности // Динамика вязкой жидкости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 36–43.
 185. Шайдурова Т.Е. Иерархическая модель однородной и изотропной изотермической турбулентности // Процессы тепло- и массопереноса вязкой жидкости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 3–9.
 186. Штерн В.Н. Спектральный анализ аттрактора Лоренца: Препр. Ин-та теплофизики СО АН СССР, № 31. Новосибирск, 1979. 24 с.
 187. Эйгенсон М.С. Солнце, погода и климат. Л.: Гидрометеоздат, 1963. 274 с.
 188. Юрченко Б.Н. Исследование пространственной структуры температурного поля в условиях турбулентной конвекции // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980. Т. 16, № 8. С. 793–799.
 189. Яглом А.М. Закономерности мелкомасштабной турбулентности в атмосфере и океане // Там же. 1981. Т. 17, № 12. С. 1235–1257.
 190. Яненко Н.Н., Григорьев Ю.Н., Левинский В.Б., Шавалиев М.Ш. Неравновесная статистическая механика систем точечных вихрей в идеальной жидкости и ее приложения к моделированию турбулентности: Препр. Ин-та теорет. и прикл. механики СО АН СССР, № 22. Новосибирск, 1982. 37 с.
 191. Ahlers G., Behringer R.P. Evolution of turbulence from the Rayleigh-Benard instability // Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 40, N 11. P. 712–716.

192. *Antonia R.A., Browne L.W., Chambers A.J.* Relations between spectra of spatial derivatives of temperature in a turbulence jet // *Phys. Fluids*. 1985. Vol. 28, N 1. P. 420–423.
193. *Babiano A., Basdevant C., Sadourny R.* Le spectre d'énergie d'un écoulement turbulent bidimensionnel est-il mesurable? // *C.r. Acad. sci. B*. 1984. Vol. 299, N 9. P. 495–498.
194. *Bardina J., Ferziger J.H., Reynolds W.C.* Improved subgrid scale models for large eddy simulation // *AIAA Pap.* 1980. N 1357. 9 p.
195. *Batchelor G.K.* Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures // *Quart. Appl. Math.* 1954. Vol. 12, N 3. P. 209–233.
196. *Batt R.G., Bigoni R.A., Rowland D.J.* Temperature field structure within atmospheric buoyant thermals // *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 141. P. 1–25.
197. *Bell T.L., Nelkin M.* Time-dependent scaling relations and cascade model of turbulence // *Ibid.* 1978. Vol. 88, N 2. P. 369–393.
198. *Benzi R., Vulpiani A.* Small-scale intermittency of turbulent flows // *J. Phys. A: Math. and Gen.* 1980. Vol. 13. P. 3319–3324.
199. *Berge P., Dubois M.* Different routes to turbulence in high Prandtl number convection and in rectangular cells: Influence of the structure and of the aspect ratio // *Lect. Notes Phys.* 1980. Vol. 132. P. 381–394.
200. *Berge P., Dubois M., Manneville P., Pomeau Y.* Intermittency in Rayleigh-Bénard convection // *J. phys. Lett.* 1980. Vol. 41, N 15. P. 341–345.
201. *Berry M.V., Gibbs D.F.* The interpretation of optical projections // *Proc. Roy. Soc. London. A*. 1970. Vol. 314, N 1517. P. 143–152.
202. *Brachet M.E., Sulem P.L.* Free decay of high Reynolds number two-dimensional turbulence // *Lect. Notes Phys.* 1985. Vol. 218. P. 103–108.
203. *Brandstater A., Swift J., Swinney H. et al.* Low-dimensional chaos in a hydrodynamic system // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 51, N 16. P. 1442–1445.
204. *Caperan P., Alemany A.* Turbulence homogene MHD a faible nombre de Reynolds magnétique: Etude de la transition vers la phase quasi bidimensionnelle et caractérisation de son anisotropie // *J. mec. theor. et appl.* 1985. Vol. 4, N 2. P. 175–200.
205. *Chau H.H.* Three-dimensional reproduction of shadowgrams // *Opt. Commun.* 1971. Vol. 4, N 1. P. 1–4.
206. *Chu T.Y., Goldstein R.J.* Turbulent convection in a horizontal layer of water // *J. Fluid Mech.* 1973. Vol. 60, N 1. P. 141–153.
207. *Constantin P., Foias C., Manley O.P., Temam R.* Determining modes and fractal dimension of turbulent flow // *Ibid.* 1985. Vol. 150. P. 427–440.
208. *Constantin P., Foias C., Temam R.* Attractors representing turbulent flows // *Mem. AMS.* 1985. Vol. 53, N 314. P. 1–67.
209. *Couder Y.* Two-dimensional grid turbulence in a thin liquid film // *J. phys. Lett.* 1984. Vol. 45, N 8. P. 353–360.
210. *Couder Y., Basdevant C., Thome H.* Sur l'apparition de couples solitaires de tourbillons dans les sillages bidimensionnelles turbulentes // *C.r. Acad. sci. B*. 1984. Vol. 299, N 3. P. 89–94.
211. *Daly B.J.* A numerical study of turbulence transitions in convective flow // *J. Fluid Mech.* 1974. Vol. 64, N 1. P. 129–165.
212. *Davenport I.F., King C., Judson A.* A note on Howard's model for turbulent natural convection // *Trans. ASME C*. 1975. Vol. 97, N 3. P. 476–478.
213. *Deardorff J.W., Willis G.E.* Investigation of turbulent thermal convection between horizontal plates // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 28, N 4. P. 675–704.
214. *Deissler R.G.* On the localness of the spectral energy transfer in turbulence // *Appl. Sci. Res.* 1978. Vol. 34, N 3. P. 379–392.
215. *Delorm Ph.* Simulation numérique de turbulence homogène, isotrope bidimensionnelle pour un fluide compressible // *Rech. aerospac.* 1984. N 1. P. 1–13.
216. *Dubois M., Berge P.* Instabilités de couche limite dans un fluide en convection: Evolution vers la turbulence // *J. phys.* 1981. Vol. 42. P. 167–174.
217. *Elder J.W.* Turbulent free convection in a vertical slot // *J. Fluid Mech.* 1965. Vol. 23, N 1. P. 99–111.
218. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19, N 1. P. 25–51.
219. *Fitzjerald D.E.* An experimental study of turbulent convection air // *J. Fluid Mech.* 1976. Vol. 73, N 4. P. 693–719.
220. *Flumb O.A., Kennedy L.A.* Applica-

- tion of a K- ϵ turbulence model to natural convection from a vertical isothermal surface // *Trans. ASME C*. 1977. Vol. 99, N 1. P. 79-85.
221. *Frisch U., Sulem P.L.* Numerical simulation on the inverse cascade in two-dimensional turbulence // *Phys. Fluids*. 1984. Vol. 27, N 8. P. 1921-1923.
 222. *Frisch U., Sulem P.L., Nelkin M.A.* simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 87, N 4. P. 719-736.
 223. *Fyfe D., Montgomery D.* High-beta turbulence in two-dimensional magnetohydrodynamics // *J. Plasma Phys.* 1976. Vol. 16, N 2. P. 181-191.
 224. *Fyfe D., Montgomery D., Joyce G.* Dissipative, forced turbulence in two-dimensional magnetohydrodynamics // *Ibid.* 1977. Vol. 17, N 3. P. 369-398.
 225. *Fyfe D., Joyce G., Montgomery D.* Magnetic dynamo action in two-dimensional turbulent magnetohydrodynamics // *Ibid.* N 2. P. 317-335.
 226. *Garon A.M., Goldstein R.J.* Velocity and heat transfer measurements in thermal convection // *Phys. Fluids*. 1973. Vol. 16, N 11. P. 1818-1825.
 227. *Giglio M., Musazzi S., Perini U.* Transition to chaotic behavior via a reproducible sequence of period-doubling bifurcations // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 47, N 4. P. 243-246.
 228. *Gollub J.P., Benson S.V.* Chaotic response to periodic perturbation of a convecting fluid // *Ibid.* 1978. Vol. 41, N 13. P. 948-950.
 229. *Gollub J.P., Benson S.V.* Many routes to turbulent convection // *J. Fluid Mech.* 1980. Vol. 100, N 3. P. 449-470.
 230. *Gollub J.P., Swinney H.L.* Onset of turbulence in rotating fluid // *Phys. Rev. Lett.* 1975. Vol. 35, N 14. P. 927-930.
 231. *Grant H.L., Stewart R.W., Moillet A.* Turbulence spectra from a tidal channel // *J. Fluid Mech.* 1962. Vol. 12. P. 241-263.
 232. *Herring J.R.* Statistical theory of thermal convection at large Prandtl numbers // *Phys. Fluids*. 1969. Vol. 12, N 1. P. 39-52.
 233. *Hignett P., Ibbetson A., Killworth P.D.* On rotating thermal convection driven by non-uniform heating from below // *J. Fluid Mech.* 1981. Vol. 109. P. 161-187.
 234. *Hussain A.K.M.* Coherent structures - reality and myth // *Phys. Fluids*. 1983. Vol. 26, N 10. P. 2816-2850.
 235. *Jones W.P., Launder B.E.* The prediction of laminarization with two-equation model of turbulence // *Intern. J. Heat and Mass Transfer*. 1972. Vol. 15. P. 301-314.
 236. *Junginger H.G., Haceringer W.* Calculation of three-dimensional refractive index field using phase integrals // *Opt. Commun.* 1972. Vol. 5, N 1. P. 1-4.
 237. *Koster J.M.* Zeitabhängige Naturkonvektion in Hele-Shaw Zellen // *Ztschr. angew. Math. und Mech.* 1984. Bd. 64, N 4. S. 209-211.
 238. *Koster J.M., Muller U.* Time-dependent free convection in vertical slots // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 47, N 22. P. 1599-1601.
 239. *Kraichnan R.H.* Inertial range transfer in two- and three-dimensional turbulence // *J. Fluid Mech.* 1971. Vol. 47, N 3. P. 525-535.
 240. *Kraichnan R.H.* Eulerian and Lagrangian renormalisation in turbulence theory // *Ibid.* 1977. Vol. 83, N 2. P. 349-347.
 241. *Kraichnan R.H., Montgomery D.* Two-dimensional turbulence // *Rep. Progr. Phys.* 1980. Vol. 43, N 5. P. 547-619.
 242. *Krishnamurti R.* On the transition to turbulent convection: The transition to time-dependent flow // *J. Fluid Mech.* 1970. Vol. 42, N 2. P. 309-320.
 243. *Lee Y., Korpela S.A.* Multicellular natural convection in a vertical slot // *Ibid.* 1983. Vol. 126. P. 91-121.
 244. *Leith C.E., Kraichnan R.H.* Predictability of turbulent flows // *J. Atmos. Sci.* 1972. Vol. 29, N 6. P. 1041-1058.
 245. *Leorat J., Pouquet A., Frisch U.* MHD-turbulence near critical magnetic number // *J. Fluid Mech.* 1981. Vol. 104. P. 419-445.
 246. *Lewich E., Tsinober A.* On the role of helical structures in three-dimensional turbulent flow // *Phys. Lett. A*. 1983. Vol. 93. P. 293-297.
 247. *Lesieur M., Sommeria J., Holloway G.* Zones inertielles du spectre d'un contaminant passif en turbulence bidimensionnelle // *C. r. Acad. sci. B*. 1981. Vol. 292. P. 272-274.
 248. *Lilly D.* Numerical simulation of two-dimensional turbulence // *Phys. Fluids*. 1969. Vol. 12, N 12, suppl. 2. P. 240-249.

249. *Lindberg W.R., Haberstroh R.D.* The thermal-burst model of thermohaline natural convection // AICHE Symp. Ser. 1973. Vol. 69, N 131. P. 159–166.
250. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20, N 2. P. 130–141.
251. *Lyov N.S., Predtechensky A.A.* On Landau and "stochastic attractor" pictures in the problem of transition turbulence: Prepr. Inst. of automation and electrometry Siberian branch USSR Acad. Sci. N 111. Novosibirsk, 1979.
252. *Malraison B., Alten P., Berge P., Dubois M.* Dimension d'attracteurs étranges: Une détermination expérimentale en régime chaotique de deux systèmes convectifs // C. r. Acad. sci. B. 1983. Vol. 297, N 3. P. 209–214.
253. *Matulka R.D., Collins D.J.* Determination of three-dimensional density fields from holographic interferograms // J. Appl. Phys. 1971. Vol. 42, N 3. P. 1109–1119.
254. *McLaughlin J.B., Orszag S.A.* Transition from periodic to chaotic thermal convection // J. Fluid Mech. 1982. Vol. 122. P. 123–142.
255. *Mitchell W.T., Quinn J.A.* Thermal convection in a completely confined fluid layer // AICHE J. 1966. Vol. 12. P. 1116–1123.
256. *Montgomery D.* The origins of fluid and magnetofluid turbulence // Res. Rep. Inst. Plasma Phys. Nagoya Univ. 1984. N 670. P. 5–53.
257. *Mowbray D.E.* The use of schlieren and shadowgraph techniques in the study of flow patterns in density stratified liquids // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 27, N 4. P. 595–608.
258. *Nakano T.* The anisotropic temperature spectrum in isotropic turbulence with a constant temperature gradient // J. Phys. Soc. Jap. 1984. Vol. 53, N 4. P. 1284–1290.
259. *Nakano T., Fukushima T., Unno W., Kondo M.* Viscosity, conductivity and power spectra of turbulent convection in Boussinesq fluid // Publ. Astron. Soc. Jap. 1979. Vol. 31. P. 713–735.
260. *Orszag S.A.* Numerical simulation of the Taylor–Green vortex // Lect. Notes Comput. Sci. 1974. Vol. 11. P. 50–64.
261. *Orszag S.A., Tang C.M.* Small-scale structure of two-dimensional magneto-hydrodynamic turbulence // J. Fluid Mech. 1979. Vol. 90, N 1. P. 129–143.
262. *Packard N.H., Cruitchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* Geometry from a time series // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, N 9. P. 712–716.
263. *Pomeau Y.* Mesure de la densité d'information en turbulence // C. r. Acad. sci. B. 1985. Vol. 300, N 7. P. 239–241.
264. *Pouquet A.* On two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence // J. Fluid Mech. 1978. Vol. 88, N 1. P. 1–16.
265. *Pryputnievich R.J., Bowley W.W.* An experimental study of vertical buoyant jets discharged into water of finite depth // Trans. ASME C. 1975. Vol. 97, N 2. P. 120–126.
266. *Quian J.* Nonequilibrium statistical mechanics of two-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1984. Vol. 27, N 10. P. 2412–2417.
267. *Rose H.A., Sulem P.L.* Fully developed turbulence and statistical mechanics // J. phys. 1978. Vol. 39, N 5. P. 441–484.
268. *Schluter A., Lortz D., Busse F.* On the stability of steady finite amplitude convection // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 23, N 1. P. 129–144.
269. *Schmidt W.S.* Turbulente Ausbreitung des Stromes erhitzter Luft // Ztschr. angew. Math. und Mech. 1941. Bd. 21, N 5. S. 265–278.
270. *Siggia E.D., Aref H.* Point-vortex simulations of the inverse energy cascade in two-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1981. Vol. 24, N 1. P. 171–173.
271. *Sommeria J., Moreau R.* Why, how and when MHD-turbulence become two-dimensional // J. Fluid Mech. 1982. Vol. 118. P. 507–518.
272. *Sweeney D.W., Vest C.M.* Reconstruction of three-dimensional refractive index field by holographic interferometry // Appl. Opt. 1972. Vol. 11, N 1. P. 205–207.
273. *Sweeney D.W., Vest C.M.* Reconstruction of three-dimensional refractive index fields from multidirectional interferometric data // Ibid. 1973. Vol. 12, N 12. P. 2649–2663.
274. *Thomas L., Nelkin M.* Nonlinear cascade models for fully developed turbulence // Phys. Fluids. 1977. Vol. 29, N 3. P. 345–350.
275. *Thompson L.L., Taylor L.S.* Analy-

- sis of turbulence by shlieren photography // *AIAA J.* 1969. Vol. 7, N 19. P. 2030–2046.
276. *Turner J.S.* Buoyant plumes and thermals // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1969. Vol. 1, N 1. P. 29–44.
277. *Veltishev N.F., Zelnin A.A.* Numerical simulation of cellular convection in air // *J. Fluid Mech.* 1975. Vol. 68, N 2. P. 353–368.
278. *Vest C.M., Arpaci V.S.* Stability of natural convection in a vertical slot // *Ibid.* 1969. Vol. 36, N 1. P. 1–23.
279. *Willis G.E., Deardorff J.W.* The oscillatory motion of Rayleigh convection // *Ibid.* 1970. Vol. 44, N 4. P. 661–672.
280. *Willis G.E., Deardorff J.W.* A laboratory model of the unstable planetary layer // *J. Atmos. Sci.* 1974. Vol. 31. P. 1297–1307.
281. *Yoshizawa A.* An Eulerian Galilean invariant theory for homogeneous turbulence, with application to inhomogeneous turbulence with arbitrary mean flow // *J. Phys. Soc. Jap.* 1980. Vol. 48, N 5. P. 1195–2003.
282. *Yoshizawa A.* Statistical theory for Boussinesq turbulence // *Ibid.* N 2. P. 647–652.
283. *Yoshizawa A., Nisijima S.* Structure of the dissipation range in homogeneous turbulence // *Ibid.* 1982. Vol. 51, N 2. P. 349–374.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Глава 1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ . . .	6
1.1. Экспериментальные методы	6
1.2. Экспериментальные исследования турбулентной конвекции в замкнутых объемах	11
1.3. Теоретические модели турбулентной термогравитационной конвекции . .	17
Глава 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ	20
2.1. Интерференционные и теневые методы	20
2.2. Оптическая томография	23
2.3. Измерения в пограничных слоях и струях	29
2.4. Осреднение турбулентных полей	35
2.5. Фурие-анализ турбулентных полей	41
2.6. Практические аспекты применения интегральных оптических методов к задачам термогравитационной конвекции	50
Глава 3. ПЕРЕХОД ОТ ЛАМИНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ К ТУРБУЛЕНТНОЙ	54
3.1. Плоская ячейка	55
3.2. Кубическая полость	65
3.3. Конвективный пограничный слой в замкнутой прямоугольной полости . .	78
Глава 4. РАЗВИТАЯ ТУРБУЛЕНТНАЯ КОНВЕКЦИЯ	81
4.1. Двумерная турбулентность в вертикальной щели	83
4.2. Подогреваемая снизу кубическая полость	87
4.3. Одновременный подогрев сбоку и снизу	92
4.4. Временные спектры низших пространственных мод	97
Глава 5. ИЕРАРХИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ	103
5.1. Конечномерные представления уравнений гидродинамики	103
5.2. Иерархические базисы	105
5.3. Динамическая система	112
5.4. Принципы построения иерархических моделей	115
Глава 6. ТРЕХМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНАЯ КОНВЕКЦИЯ	117
6.1. Изотермическая турбулентность	117
6.2. Конвекция пассивной примеси	121
6.3. Термогравитационная турбулентная конвекция	124
6.4. МГД-турбулентность	127
Глава 7. ДВУМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ	133
7.1. Перенос энергии и энтрофии	133
7.2. Двумерная МГД-турбулентность	140
7.3. Пассивная примесь в двумерной турбулентности	147
7.4. Турбулентная конвекция в вертикальных слоях	150
7.5. Моделирование пространственно-временной структуры турбулентной конвекции	153
ЛИТЕРАТУРА	161

Научное издание

ЗИМИН Валерий Дмитриевич

ФРИК Петр Готлобович

ТУРБУЛЕНТНАЯ КОНВЕКЦИЯ

Утверждено к печати

Уральским отделением АН СССР

Редактор *О.И. Шербакова*

Художник *Ю.С. Шлеппер*

Художественный редактор *Н.Н. Власик*

Технический редактор *Г.И. Астахова*

Корректор *О.А. Разуменко*

Набор выполнен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 37098

Подписано к печати 19.04.88 Т — 00099

Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1

Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная

Усл.печ.л. 11,0. Усл.кр.-отт. 11,4. Уч.-изд.л. 12,1

Тираж 1500 экз. Тип. зак. 205. Цена 2р. 50к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"

117864 ГСП-7, Москва В-485

Профсоюзная ул., д. 90

Ордена Трудового Красного Знамени

1-я типография издательства "Наука"

199034, Ленинград В-34, 9-я линия, 12