

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
“ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

А. С. Иванов

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

Методы решения задач

*Допущено методическим советом Пермского государственного
национального исследовательского университета в качестве
учебно-методического пособия для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки бакалавров “Радиофизика”,
“Нанотехнологии и микросистемная техника” и специальности
“Информационная безопасность автоматизированных систем”*

Пермь 2013

УДК 621.3
ББК 32.841
И 20

Иванов А. С.

И 20 Радиоэлектроника. Методы решения задач: учеб.-метод. пособие / А. С. Иванов; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2013.– 152 с.

ISBN 978-5-7944-2253-5

Представлены методы решения задач по дисциплине “Радиоэлектроника”, которые сопровождаются многочисленными примерами и упражнениями, служащими учебным материалом для студентов физического факультета, обучающихся по направлению “Радиофизика”. Пособие содержит материал по следующим темам: 1. Линейные цепи постоянного тока. 2. Нелинейные цепи постоянного тока. 3. Линейные цепи переменного тока. 4. Пассивные электрические фильтры. 5. Основы транзисторной схемотехники.

Предназначено для студентов 2-го курса специальности “Радиофизика” (профили “Электротехника, микро- и нанoeлектроника” и “Информационная безопасность автоматизированных систем”).

УДК 621.3
ББК 32.841

Печатается по решению ученого совета физического факультета
Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: к.т.н. **Г. Ф. Масич**, коллектив лаборатории динамики дисперсных систем ФГБУН ИМСС УрО РАН (зав. лаб. д.ф.-м.н., проф. **А. Ф. Пиеничников**)

ISBN 978-5-7944-2253-5

© Иванов А.С., 2013

© Пермский государственный национальный
исследовательский университет, 2013

Оглавление

Предисловие	5
1. Линейные цепи постоянного тока	7
1.1. Вводные замечания	7
1.2. Метод узловых и контурных уравнений	17
1.3. Метод контурных токов	21
1.4. Метод эквивалентных преобразований	28
1.5. Метод холостого хода и короткого замыкания	33
1.6. Метод эквивалентного генератора	37
1.7. Метод узловых потенциалов	46
2. Нелинейные цепи постоянного тока	55
2.1. Вводные замечания	55
2.2. Графоаналитический метод	56
2.3. Аналитический метод	61
3. Линейные цепи переменного тока	73
3.1. Вводные замечания	73
3.2. Предварительные теоретические замечания . . .	74
3.3. Метод комплексных амплитуд	89
3.4. Связанные индуктивности	97
4. Пассивные электрические фильтры	111
4.1. Однозвенные фильтры	111

4.2. Многозвенные пассивные фильтры	119
5. Основы транзисторной схемотехники	125
5.1. Вводные замечания	125
5.2. Транзисторный ключ	131
5.3. Активный режим работы транзистора	135
Литература	151

Предисловие

Предлагаемое вашему вниманию пособие можно отнести к малозаполненной нише учебной литературы — методике решения задач по предметам "Теория электрических цепей" и "Основы радиоэлектроники". Указанные учебные курсы читаются практически во всех вузах страны, и библиотеки, как правило, прекрасно обеспечены соответствующей учебной литературой, которую можно вполне определенно подразделить на две группы — "теоретический учебник" и "задачник". Предлагаемое вашему вниманию пособие предназначено для восполнения пробела между указанными группами.

Как показывает педагогическая практика, предметы, посвященные решению задач, имеют специфические особенности и зачастую являются самостоятельными дисциплинами, слабо пересекающимися с теоретическими лекционными курсами. Это связано, в первую очередь, с тем, что в основе решения задач лежит вполне определенный набор конкретных методов (алгоритмов), разработанных для решения определенного круга практически значимых задач. Умение решать задачи целиком зависит от степени овладения студентами той или иной методикой. Таким образом, цель занятий, посвященных решению задач, — дать студенту набор универсальных инструментов, с помощью которого можно решить любую инженерную задачу.

При этом, как известно, лекционный курс выполняет иную задачу: он формирует фундамент теоретических основ,

дает физическое толкование процессов, происходящих в электрических цепях, и т.п. Именно по этой причине было принято решение выделить методику решения задач в самостоятельное учебное пособие для студентов, изучающих дисциплину "Радиоэлектроника".

Пособие включает в себя следующие разделы (по порядку изложения): линейные цепи постоянного тока, нелинейные цепи постоянного тока, линейные цепи переменного тока, пассивные электрические фильтры, основы транзисторной схемотехники.

Пособие разрабатывалось в расчете на студентов младших курсов физических факультетов вузов, освоивших следующие учебные курсы: "Общая физика" (раздел "Электричество и магнетизм"), "Линейная алгебра", "Теория дифференциальных уравнений" и "Теория функций комплексной переменной".

Условия задач, используемых в пособии, взяты из задачников [1], [2].

Глава 1

Линейные цепи постоянного тока

1.1. Вводные замечания

Цель настоящей главы — обучить студентов методам анализа электрических цепей постоянного тока. Перед тем как будут рассмотрены примеры решения задач, дадим определения изучаемых объектов и явлений, которые потребуются нам для практики.

Определение № 1. Линейная электрическая цепь — это цепь, всевозможные режимы работы которой описываются системой линейных алгебраических уравнений.

Определение № 2. Цепь постоянного тока — это электрическая цепь, в которой все напряжения и токи не зависят от времени, выражаются постоянными функциями, т.е. $I_i(t) = \text{const}_i$, $U_j(t) = \text{const}_j$.

Цель анализа электрических цепей — найти все токи, протекающие через все элементы цепи, и найти все напряжения на всех элементах цепи.

Не вникая в разнообразные сложные детали поставленной задачи (анализ работы цепи), сразу же определим, что нужно сделать для успешного ее решения: необходимо, ис-

пользуя физические основы, качественно описать все токи и напряжения в цепи, а потом, используя подходящий математический аппарат, вычислить эти токи и напряжения.

С точки зрения физики и радиоэлектроники, процессы в линейных цепях постоянного тока описываются двумя законами: первым законом Кирхгофа (закон сохранения заряда), и вторым законом Кирхгофа (закон сохранения энергии). Первый закон дает нам алгоритм составления уравнений для узлов цепи, а второй — для контуров цепи. Применяя оба закона, можно получить замкнутую систему уравнений, т.е. такую систему, в которой число независимых друг от друга уравнений равно числу неизвестных величин. Например, если имеется электрическая цепь, состоящая из 7 ветвей, то это значит, что число неизвестных токов будет тоже 7, и нам для анализа этой схемы потребуется 7 уравнений.

Из сказанного выше легко определить необходимый математический аппарат — линейная алгебра. Если по ходу ознакомления с материалом у читателя возникнут проблемы с пониманием математической техники решения, рекомендуется обратиться к известной и доступной литературе по линейной алгебре, например [3].

Однако перед тем как приступить к непосредственному решению задач, перечислим несколько дополнительных пояснений, без которых легко допустить огромное количество ошибок при решении задач.

Замечание № 1. Закон Ома. Полярность электрического напряжения на пассивных элементах

Обозначенная тема связана, в первую очередь, с необходимостью правильно применять закон Ома при решении сложных задач. Несмотря на кажущуюся примитивность, даже такой простой (с точки зрения лекционного курса) вопрос скрывает в себе проблему, с которой часто сталкиваются студенты. Поэтому данный принципиально важный вопрос вынесен в отдельное замечание. Истинная причина описываемой проблемы кроется в том, что при переходе от дифферен-

циальной формы уравнений Максвелла, где перенос зарядов описывается плотностью тока (векторной величиной), к интегральной и при добавлении материального уравнения (закона Ома), где ток описывается скалярной величиной, происходит потеря информации о направлении электрического тока. Для восстановления этой информации при решении задач необходимо прибегать к дополнительным соглашениям, о которых речь пойдет ниже.

Наиболее распространенным элементом электрических схем на постоянном токе является, конечно, активное сопротивление, резистор. При протекании тока через резистор на нем образуется падение напряжения, показанное на рис. 1.1, где ток I протекает слева направо.

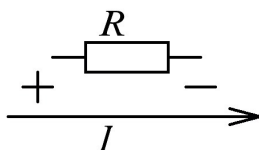


Рис. 1.1. Полярность напряжения на резисторе R при протекании через него тока I

Такая полярность не противоречит следующим логическим рассуждениям. Электрический ток в цепях протекает от положительного полюса источника (+) к отрицательному (-) полюсу. Ток по силе и направлению внутри резистора должен совпадать с током, втекающим в него слева и вытекающим справа. Значит, на зажимах резистора должна быть полярность, показанная на рис. 1.1, обеспечивающая ток внутри резистора R .

Однако применять закон Ома в том виде, как он дается в теоретическом курсе "Общей физики", к рис. 1.1, т.е. писать уравнение для напряжения на резисторе R , нельзя. Приведем пример формулировки закона Ома в классическом учебнике И. Е. Иродова: "Сила тока, протекающего по одно-

родному проводнику, пропорциональна разности потенциалов на его концах (напряжению U)" [4, с. 111]. Неточность предложенной формулировки заключается в том, что на рис. 1.1 не указано, *как* именно мы собираемся измерять напряжение. Один из двух возможных вариантов показан на рис. 1.2. В

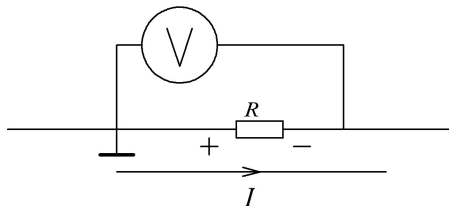


Рис. 1.2. Влияние способа измерения напряжения на его знак

ситуации, показанной на рис. 1.2, вольтметр покажет напряжение U , равное

$$U = -IR.$$

Это связано с тем, что "общий" провод (на схеме соединен с "землей"), относительно которого вольтметр производит измерение, подключен к выводу резистора R с большим потенциалом по отношению к "измерительному" проводу. Таким образом, один из способов определить полярность напряжения на элементах — это изобразить измерительные приборы с указанием "общих" проводов. Однако в большинстве случаев схема состоит из большого числа элементов, и использовать этот способ почти невозможно. Более того, ситуация усложняется, если речь заходит об одновременном протекании нескольких токов (обусловленных одновременным действием разных источников напряжения), как показано на рис. 1.3.

Так как же будет выглядеть закон Ома для резистора, если через него текут токи, как показано на рис. 1.3? Чтобы дать ответ на этот вопрос, нужно сделать выбор положительного направления, подобно ситуации, изображенной на рис. 1.2. На практике это делается путем задания направ-

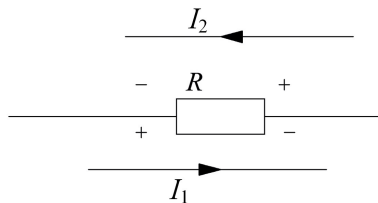


Рис. 1.3. Одновременное протекание двух контурных токов через резистор в разных направлениях

ления обхода по контуру. Для этого необходимо принять произвольное решение: какое направление обхода (по или против часовой стрелки) считать положительным. Например, на рис. 1.3 мы выбираем в качестве положительного направление против часовой стрелки. Тогда закон Ома для участка цепи, изображенного на рис. 1.3, будет записан так:

$$U = I_2 R - I_1 R = R(I_2 - I_1).$$

При этом, если I_2 окажется больше I_1 , напряжение будет отрицательным.

Сделаем полезные выводы.

Для написания закона Ома для участка цепи необходимо пользоваться дополнительным соображением, касающимся полярности напряжений и направлений токов. Это можно делать двумя способами: необходимо задавать направление обхода по контуру, частью которого является выделенный участок цепи, либо оговаривать способ подключения измерительного прибора к этому участку. Первый способ предпочтительнее.

При лабораторных работах легко определять направление тока, протекающего в цепи, с помощью вольтметра — достаточно обратить внимание на то, к какому зажиму подключен "общий" провод и сопоставить этот факт с показаниями прибора.

Замечание № 2. Закон Ома. Напряжение на активных элементах. Второй закон Кирхгофа

В электрических схемах в качестве источников напряжения и тока часто используются идеализированные элементы — идеальный источник тока и идеальный источник напряжения. В лекционном курсе объясняется сущность и степень идеализации, равно как и способы приблизить параметры подобных активных элементов к параметрам реальных источников. Для этого к источнику напряжения последовательно подключается небольшое активное сопротивление. Изменения, которые претерпевает источник тока, значительно сильнее — он заменяется источником напряжения с помощью эквивалентных преобразований с помощью теоремы Тевенина (теоремы об эквивалентном генераторе), однако об этих изменениях будет подробнее рассказано в соответствующем дополнительном разделе. На текущий момент мы лишь должны уяснить следующую мысль — источник тока в конечном счете все равно преобразуется к эквивалентному источнику напряжения, и поэтому нас интересует вопрос о том, как записывать закон Ома для участка цепи и второй закон Кирхгофа для замкнутого контура при наличии источника напряжения. К сожалению, приходится отметить, что типичная формулировка второго закона Кирхгофа, которая дается в учебниках по общей физике, таит в себе большие трудности при использовании на практике. Приведем цитату из вышеупомянутого учебника по "Общей физике" (справедливости ради стоит отметить, что учебник Иродова — это прекрасное учебное пособие, но его нельзя использовать в качестве учебника по ТОЭ): "...алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна сумме ЭДС, действующих в этом контуре" [4, с. 118]. Это определение, конечно, правильное, однако непосредственное применение его при решении задач часто приводит к ошибкам в определении знаков. Более удачным является следующее определение: алгебраическая сумма

ЭДС и падений напряжения в произвольном замкнутом контуре равна нулю. Продемонстрируем эту мысль на практике, применив второй закон Кирхгофа к схеме, изображенной на рис. 1.4. Проанализируем работу схемы, изображенной на

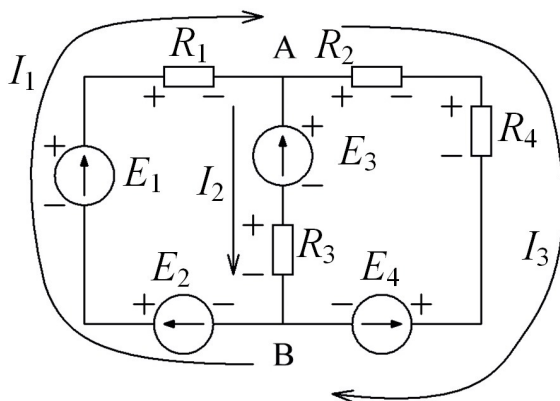


Рис. 1.4. Полярности напряжений на пассивных и активных элементах

рис. 1.4. Данная схема состоит из 3 ветвей, соединенных между собой двумя узлами A и B . Это значит, что наша стандартная задача определения всех токов и всех напряжений на всех элементах схемы сводится к отысканию трех независимых токов I_1 , I_2 , I_3 в каждой из ветвей соответственно. Здесь и далее индекс тока совпадает с номером ветви, т.е. I_1 протекает по ветви 1 и т.д. Направление токов в ветвях задается совершенно произвольно.

В схеме можно выделить три контура, из которых независимыми будут только два. Первый контур состоит из ветвей 1 и 2, второй контур включает в себя ветви 2 и 3, а третий контур можно составить из ветвей 1 и 3. Далее будем рассматривать только первые два варианта.

Итак, мы подошли к написанию уравнений Кирхгофа для контуров. Возьмем для демонстрации второй контур. Ес-

ли воспользоваться формулировкой из [4] "в лоб" для написания уравнений, то можно легко ошибиться: токи в ветвях не согласованы между собой по направлению (I_3 по часовой стрелке, а I_2 — против), равно как и источники питания, включенные навстречу друг другу. Сразу возникает большое количество вопросов: какое направление в контуре выбрать за положительное, чтобы составить необходимые "алгебраические суммы" для токов и напряжений, чтобы не потерять знаки. Дополнительная опасность кроется в том, что суммы падений напряжений и ЭДС находятся по разные стороны от знака равенства, что обязывает дополнительно изменять знак. Сделаем неутешительный вывод из сказанного: несмотря на простоту схемы на рис. 1.4, у нас сразу же возникли затруднения. Следует поэтому признать выбранный нами метод записи уравнений Кирхгофа неудовлетворительным, т.к. он потенциально допускает возможность совершить ошибку. Предложим другой, совершенно универсальный метод, который позволит вне зависимости от степени сложности схемы безошибочно применять второй закон Кирхгофа.

Для написания уравнения Кирхгофа для замкнутого контура необходимо произвольно выбрать направление обхода и записать полную алгебраическую сумму всех падений напряжения и всех ЭДС, приравняв сумму к нулю. Знак члена определяется тем, как мы "проходим" элемент: если мы движемся от "+" к "-", то знак положительный, а если от "-" к "+", то отрицательный.

Продemonстрируем сказанное. Совершим обход второго контура, начав движение от узла А. Выбор направления мы делаем совершенно произвольно. Допустим, мы решили двигаться против часовой стрелки. Первый элемент схемы, который нам встречается на пути обхода — это источник напряжения E_3 . Мы обходим его от его положительной клеммы к его отрицательной клемме, т.е. проходим от "+" к "-". Следовательно, мы запишем первый член в уравнении как "+ E_3 ". Следующий элемент — это резистор R_3 , на котором наблюда-

ется падение напряжения U_3 , обусловленное протеканием тока I_2 через этот резистор. Полярность падения напряжения показана на рисунке, и видно, что мы проходим по контуру это напряжение от "+" к "-", следовательно, следующий член суммы будет равен $+I_2R_3$. Продолжая обход по контуру, подходим к узлу B и далее — к источнику напряжения E_4 , который проходится от минусовой клеммы к плюсовой, следовательно, в уравнение войдет член $-E_4$. Следующие два элемента, которые встречаются нам на пути обхода до того, как мы возвращаемся в исходную точку (узел A), — это два резистора R_4 и R_2 , на которых падают напряжения U_4 и U_2 соответственно. Эти напряжения обусловлены протеканием через резисторы тока I_3 . При обходе этих элементов схемы мы движемся в обоих случаях от "-" к "+", следовательно, в уравнение эти члены войдут как $-I_3R_2$ и $-I_3R_4$. Итоговая запись уравнения для контура будет следующей:

$$E_3 + I_2R_3 - E_4 - I_3R_2 - I_3R_4 = 0.$$

Далее, конечно, можно преобразовать запись к более удобному для дальнейшей работы виду, например

$$I_2R_3 - I_3(R_2 + R_4) = E_4 - E_3.$$

Заметьте, что если мы в качестве обхода по контуру выбрали бы другое направление, т.е. двигались бы по часовой стрелке, то уравнение при этом не изменилось бы, просто обе части уравнения умножатся на -1 , т.е. уравнение будет выглядеть так:

$$-I_2R_3 + I_3(R_2 + R_4) = -E_4 + E_3,$$

что абсолютно ничего не меняет. Пользуясь указанным алгоритмом, можно безошибочно записывать уравнение Кирхгофа для произвольного контура любой сложности без привлечения дополнительных соображений.

Замечание № 3. Первый закон Кирхгофа. Произвольность направления токов

Как известно из курса "Общей физики", первый закон Кирхгофа выражает собой закон сохранения электрического

заряда в узлах электрической цепи. Формулировка его проста: алгебраическая сумма токов, втекающих и вытекающих из узла, равна нулю. Единственная трудность в этом вопросе, которая возникает у студентов, впервые применяющих этот закон, состоит в том, что студент проявляет нерешительность в определении первоначального направления тока в каждой из ветвей, пытаясь предугадать истинное направление. Например, в случае схемы, приведенной на рис. 1.4, предпринимаются попытки угадать, куда потечет ток I_1 — от узла B к A или наоборот. При этом студент пытается сопоставить величины ЭДС источников, приводимые в задаче. Нужно сразу же четко уяснить себе, что подобные изыскания — пустая трата времени. Задачу нужно решать всегда сначала в общем виде, а потом уже подставлять числовые значения, как и в любой другой дисциплине, посвященной практике решения задач.

Итак, на начальном этапе решения задач направления токов в ветвях задаются совершенно произвольно. Истинное направление тока будет ясно после решения задачи. Если величина силы тока имеет знак "+", значит, направление тока в этой ветви было угадано правильно. Если в ответе знак "—", значит, ток в действительности протекает в обратном направлении.

После того как в каждой ветви цепи заданы токи, можно записать уравнение согласно первому закону Кирхгофа в каждом узле схемы. Для этого опять-таки произвольно выбирается "положительное" направление, например, токи, которые втекают в узел, считаются положительными, а вытекающие токи — отрицательными. Применительно к узлу A на схеме (рис. 1.4) можно записать такое уравнение

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Число таких линейно независимых уравнений на единицу меньше общего числа узлов в схеме, т.е. для схемы на рис. 1.4 с двумя узлами можно записать лишь одно уравнение по первому закону Кирхгофа.

Предварительные итоги

В этом разделе мы рассмотрели минимальный набор необходимых начальных сведений, которые потребуются нам для успешного анализа линейных схем постоянного тока. Далее мы рассмотрим следующие методы решения задач: метод узловых и контурных уравнений, метод контурных токов, метод эквивалентного генератора, метод холостого хода и короткого замыкания, метод узловых потенциалов. На первый взгляд, такое разнообразие методов может вызвать вопрос о целесообразности изучения их всех: "Не лучше ли изучить только один, самый универсальный, метод?" Есть несколько причин, по которым мы будем изучать все методы. Во-первых, самый универсальный метод (метод узловых и контурных уравнений), как это всегда бывает, является самым избыточным и трудоемким, — применение его для большого класса задач обернется значительными потерями времени. Именно поэтому мы изучим второй метод (метод контурных токов), который значительно упрощает решение задачи для важнейшего класса задач по радиоэлектронике — для схем, включающих до 5 контуров. К этой же группе "универсальных" методов можно отнести и метод узловых потенциалов, значительно упрощающий устный анализ схемы. Во-вторых, другая группа рассматриваемых методов является как бы дополнением, значительно расширяющим диапазон применимости первой группы методов. Эти методы применяются, чтобы провести с задачей "подготовительную работу", максимально упрощая электрическую схему.

1.2. Метод узловых и контурных уравнений

Суть метода заключается в том, чтобы анализировать работу электрической схемы, пользуясь лишь одними законами Кирхгофа для узлов и контуров цепи. На практике алгоритм решения задач этим методом выглядит так:

- Шаг № 1. В анализируемой схеме мысленно выделяются все независимые ветви и узлы. Для дальнейшего удобства узлы обозначаются заглавными буквами.
- Шаг № 2. Вдоль каждой из ветвей направляется ток в произвольном направлении.
- Шаг № 3. Анализируется число неизвестных величин (число токов, совпадающее с числом ветвей). Выбирается число узлов и соответствующее недостающее число независимых контуров, чтобы составить замкнутую систему уравнений, позволяющую отыскать все неизвестные величины.
- Шаг № 4. Составляется система уравнений.
- Шаг № 5. Полученная система уравнений приводится к стандартному виду, позволяющему решить ее любым из доступных способов, например методом Крамера. Проводится анализ полученных результатов.

Продemonстрируем описанный алгоритм на примере решения задачи анализа схемы, указанной на рис. 1.4, со следующими номиналами: $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 1 \text{ Ом}$, $E_1 = 1 \text{ В}$, $E_2 = 2 \text{ В}$, $E_3 = 2 \text{ В}$, $E_4 = 4 \text{ В}$.

Итак, шаг № 1. Осмотр схемы позволяет сделать следующие заключения: схема состоит из 3 независимых ветвей и двух узлов.

Шаг № 2. Обозначаем произвольно токи, текущие в каждой из ветвей.

Шаг № 3. Исходя из числа ветвей делаем вывод: число неизвестных равно трем. Значит, необходимо составить систему из трех линейно независимых уравнений. Число узлов в схеме равно двум, следовательно, это ограничивает нас только одним линейно независимым уравнением. Значит, для составления системы уравнений придется использовать еще два независимых уравнения для контуров.

Шаг № 4. Составим эти уравнения:

Для узла A : $I_1 - I_2 - I_3 = 0$.

Для первого контура: $I_1 R_1 + I_2 R_3 = E_1 + E_2 - E_3$.

Для второго контура: $I_2 R_3 - I_3(R_2 + R_4) = E_4 - E_3$.

Шаг № 5. Приведем полученную систему к виду, удобному для решения методами линейной алгебры, а именно:

$$I_1 + (-1)I_2 + (-1)I_3 = 0,$$

$$R_1 I_1 + R_3 I_2 + 0 \cdot I_3 = E_1 + E_2 - E_3,$$

$$0 \cdot I_1 + R_3 I_2 + (-R_2 - R_4)I_3 = E_4 - E_3.$$

Эту систему можно представить в матричном виде $\mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{E}$, где $\mathbf{R}$ — матрица сопротивлений:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_3 & 0 \\ 0 & R_3 & -R_2 - R_4 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{I}$ — вектор-столбец токов I_1, I_2, I_3 , а $\mathbf{E}$ — вектор-столбец напряжений. Указанную систему легко решить методом Крамера, подставив соответствующие числовые значения. Найдем определитель матрицы сопротивлений:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 0 - (0 + 0 + 4) = -12.$$

Далее найдем три определителя, заменяя каждый из столбцов в матрице сопротивлений столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 0 - (-4 + 0 + 2) = -1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 0 - (0 + 0 + 0) = -6,$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 4 + 0 + 0 - (0 - 4 + 2) = 6.$$

После чего легко найти значения соответствующих токов в ветвях:

$$I_1 = \Delta_1/\Delta_0 = 1/12A,$$

$$I_2 = \Delta_2/\Delta_0 = 0.5A,$$

$$I_3 = \Delta_3/\Delta_0 = -0.5A.$$

После нахождения этих токов не составляет труда, используя закон Ома, найти все напряжения на всех резисторах и (в случае лабораторной работы) определить их класс мощности. Анализ задачи. Токи в первой и второй ветвях были угаданы верно, а в третьей ветви ток течет в направлении от узла B к узлу A .

Задача решена.

Обсудим рассмотренный метод. Первое, что сразу бросается в глаза — это очевидность и универсальность используемых уравнений: этот метод можно применять к любым электрическим схемам. С другой стороны, сразу же заметна слабая сторона метода, затрудняющая его повсеместное использование: для электрической схемы с N ветвями необходимо решать систему, состоящую из N линейных уравнений. Фактически, это означает, что класс задач ограничен двухконтурными схемами (устно вычислять определители матриц размером более 3×3 крайне затруднительно). В связи с этим перейдем к более удобному методу — методу контурных токов.

Задачи по теме "Метод узловых и контурных уравнений"

Задача № 1. Параметры задачи: $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 1$ кОм, $E_1 = 4$ В. Найти все токи и напряжения на всех элементах цепи методом узловых и контурных уравнений, произвести устную проверку ответа задачи, объединив параллельное соединение резисторов в один.

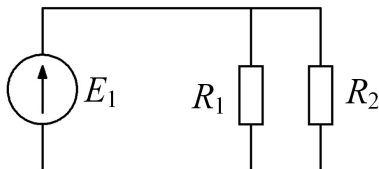


Рис. 1.5. К задаче № 1

Задача № 2. Параметры задачи: $R_1 = 10 \text{ кОм}$, $R_2 = 15 \text{ кОм}$, $R_3 = 20 \text{ кОм}$, $E_1 = 40 \text{ В}$, $E_2 = 200 \text{ В}$. Найти все токи и напряжения на всех элементах цепи.

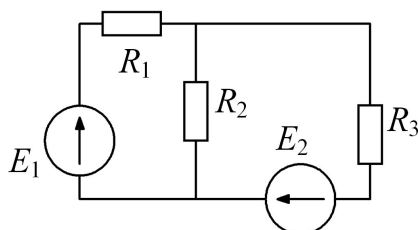


Рис. 1.6. К задаче № 2

Задача № 3. Параметры задачи: $R_1 = 1.3 \text{ Ом}$, $R_2 = 1.2 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $E_1 = 2 \text{ В}$, $E_2 = 1.5 \text{ В}$, $E_3 = 2.5 \text{ В}$. Найти все токи и напряжения на всех элементах цепи.

1.3. Метод контурных токов

Следующим мощным методом анализа электрических схем является метод контурных токов. В основе этого метода лежит принцип суперпозиции, хотя с первого взгляда этот факт не является очевидным. Более подробное теоретическое обоснование метода можно прочитать в большом количестве литературы, посвященной ТОР, например [5]. Чтобы понять суть метода, дадим важное определение.

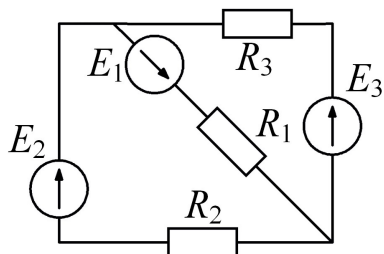


Рис. 1.7. К задаче № 3

Контурный ток — вспомогательная расчетная величина, имеющая размерность силы тока, одинаковая для всех элементов схемы, входящих в выделенный контур. *Контурный ток* — это мыслимый ток, который протекал бы по заданному контуру, если бы он был изолирован от всех остальных контуров цепи.

Сущность метода заключается в том, чтобы вычислить все неизвестные токи, протекающие через все элементы цепи, с помощью вспомогательных величин — контурных токов. Введение контурных токов позволяет в большом классе задач упростить решение. Реальные токи в электрической схеме вычисляются определенными алгебраическими суммами соответствующих контурных токов. Метод обязан своим существованием принципу суперпозиции, который выполняется в линейных цепях. Действительно, суть метода заключается в том, чтобы мысленно выделить в анализируемой схеме нужное число различных контуров, вычислить в каждом из этих мысленно выделенных контуров ток, после чего, пользуясь принципом суперпозиции, наложить действие этих контурных токов друг на друга.

Чтобы не углубляться в теоретические основы метода, изучим предлагаемый метод на примере решения одной из задач. Для систематизации знаний приведем решение в виде четкого алгоритма действий, попутно делая необходимые

комментарии и отступления.

Задача: проанализировать работу электрической схемы, приведенной на рис. 1.8. Параметры задачи: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 2 \text{ Ом}$, $E_1 = 3 \text{ В}$, $E_2 = 7 \text{ В}$, $E_3 = 5 \text{ В}$.

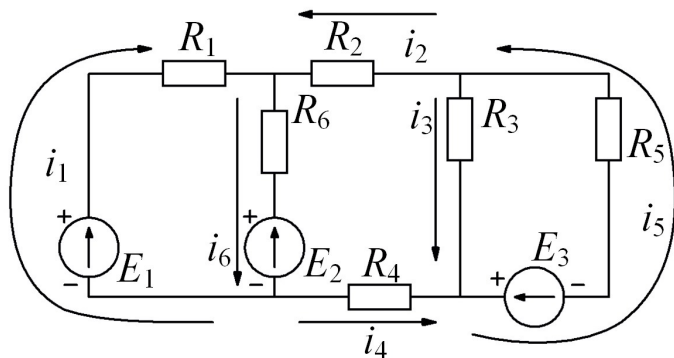


Рис. 1.8. Электрическая схема с обозначенными токами всех ветвей

Шаг № 1. Анализ схемы как всегда начинается с определения всех независимых ветвей, обозначения токов в каждой из ветвей. В представленной схеме существует шесть независимых ветвей, в каждую из которых включен резистор. Для дальнейшего удобства истинные токи, протекающие в ветвях, обозначены теми же индексами, что и соответствующие резисторы, т.е., например, через резистор R_3 протекает ток i_3 . Как и в предыдущем методе, мы задаем направление токов совершенно произвольно в самом начале анализа задачи и более эти направления не меняем. Сразу же обращаем внимание на сложность решения подобной задачи методом узловых и контурных уравнений: у нас 6 неизвестных токов, следовательно, придется вычислять матрицы 6×6 , что сопряжено с огромными трудностями. Тем не менее, как мы сейчас покажем, метод контурных токов позволяет решить эту задачу быстро и без ЭВМ.

Шаг № 2. Выделяем в анализируемой схеме независи-

мые друг от друга контуры. Критерий независимости контуров на практике можно применять так: каждый последующий выделяемый контур не должен включать в себя любой из ранее выделенных. Или, если высказаться по-другому, каждый новый контур должен включать в себя хотя бы одну ветвь, которая ранее не входила ни в один из контуров. Наиболее же простой способ — визуально разбить схему на "ячейки" по типу пчелиных сот и обозначить каждую из этих сот в виде самостоятельного контура, как это сделано на рис. 1.9.

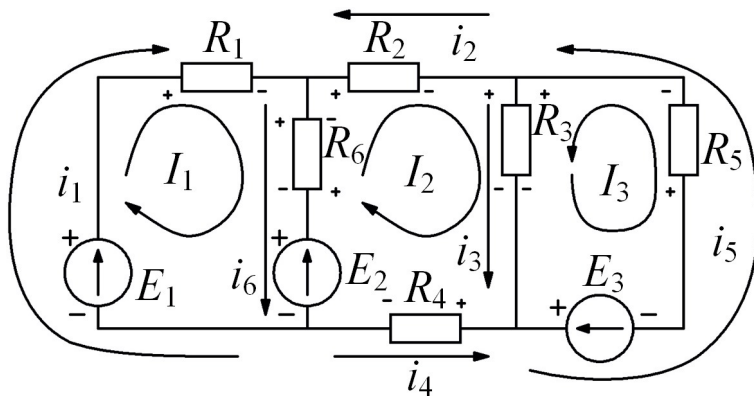


Рис. 1.9. Электрическая схема с обозначенными токами всех ветвей совместно с контурными токами. Полярности напряжений на резисторах относятся к соответствующим контурным токам

В каждом из выделенных контуров обозначается круговой контурный ток. В нашей схеме это контурные токи I_1 , I_2 , I_3 . Направления этих токов совершенно произвольны. Часто для ускорения записи уравнений контурные токи направляют в одном направлении. Мы же с целью демонстрации того, что это непринципиально, направили первый и второй токи по часовой стрелке, а третий против часовой стрелки. Также для наглядности показаны полярности напряжений, которые появляются на каждом резисторе при протекании по ним соответствующего контурного тока. Эти полярности показаны

внутри контура, чтобы было понятно, к какому току что относится. Подчеркнем, что это сделано лишь для большей наглядности, на практике все полярности определяются устно прямо по ходу составления уравнений.

Шаг № 3. Для каждого из контуров записывается уравнение Кирхгофа для контуров. Здесь действуем так же, как и в первом методе, учитывая специфику контурных токов. Итак, запишем, подробно объясняя свои действия, уравнение для первого контура. Направление обхода по контуру, как известно, мы выбираем совершенно произвольно, ведь смена направления обхода приведет лишь к умножению обеих частей уравнения на -1 . На практике же у нас есть некое чуть более предпочтительное направление — это направление, совпадающее с направлением контурного тока. Оно нас ни к чему не обязывает, речь идет лишь об удобстве.

Итак, обходим первый контур по часовой стрелке, начиная свой путь, например, от плюсовой клеммы источника E_1 . Первое напряжение, встречающееся на пути, — это напряжение на резисторе R_1 , образованное протеканием через него тока I_1 . Значит, это напряжение равно $+R_1 I_1$. Следующий элемент схемы, встречающийся нам на пути обхода, — это резистор R_6 . Примечательно то, что через этот резистор протекает сразу два контурных тока. Физически это означает, что посредством этого резистора первый и второй контур воздействуют друг на друга. Обратим при этом внимание на то, что токи I_1 и I_2 протекают через резистор R_6 в противоположных направлениях, т.е. ток I_2 не совпадает с нашим выбранным направлением обхода по контуру. Нетрудно догадаться, что напряжение будет иметь вид $+I_1 R_6 - I_2 R_6$. Следующий элемент схемы — источник напряжения E_2 , который мы проходим от плюсовой клеммы к минусовой, значит, в уравнение войдет ЭДС $+E_2$. Последний же источник питания E_1 мы проходим от минусовой клеммы к плюсовой, значит, в уравнение войдет $-E_1$. Конечный вид уравнения

для первого контура

$$R_1 I_1 + I_1 R_6 - I_2 R_6 + E_2 - E_1 = 0.$$

Для второго и третьего контура запишем уравнения уже без пояснений:

$$I_2 R_2 + I_2 R_3 + I_3 R_3 + I_2 R_4 + I_2 R_6 - I_1 R_6 - E_2 = 0,$$

$$I_3 R_5 + I_3 R_3 + I_2 R_3 + E_3 = 0.$$

Шаг № 4. Полученную систему уравнений записывают в виде, удобном для решения системы линейных уравнений, точно так же, как и в предыдущем методе. В нашем случае система имеет вид

$$(R_1 + R_6)I_1 + (-R_6)I_2 + 0 \cdot I_3 = E_1 - E_2,$$

$$(-R_6)I_1 + (R_2 + R_3 + R_4 + R_6)I_2 + R_3 I_3 = E_2,$$

$$0 \cdot I_1 + (R_3)I_2 + (R_5 + R_3)I_3 = -E_3.$$

После подобного преобразования решают систему уравнений, вычисляя тем самым неизвестные контурные токи. В нашем случае (опустим стандартные вычисления) они равны $I_1 = -0.375A$, $I_2 = 1.25A$, $I_3 = -1.875A$. Полученные контурные токи можно использовать для отыскания истинных токов, которые протекают по ветвям цепи. Сопоставим (учитывая направленность токов) истинные и контурные токи (из рис. 1.9):

$$i_1 = I_1 = -0.375A, i_2 = -I_2 = -1.25A,$$

$$i_3 = I_3 + I_2 = -0.625A, i_4 = -I_2 = -1.25A,$$

$$i_5 = I_3 = -1.875A, i_6 = I_1 - I_2 = -1.625A.$$

Задача решена.

Сделаем выводы относительно рассмотренного метода:

- Метод контурных токов значительно расширяет возможности метода узловых и контурных уравнений, позволяя без лишних усилий и использования ЭВМ решать трехконтурные задачи с 6 неизвестными токами.
- Причина полученных упрощений, позволившая нам столь быстро получить ответ к задаче, состоит в том, что мы заменили одну сложную систему уравнений двумя более простыми. В этом смысле решения, получаемые обоими методами, являются равнозначными.

Задачи для самостоятельного решения по теме "Метод контурных токов"

Задача № 4. Параметры задачи: $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $R_4 = 4 \text{ Ом}$, $R_5 = 3 \text{ Ом}$, $R_6 = 1 \text{ Ом}$, $E_1 = 2 \text{ В}$, $E_2 = 5 \text{ В}$. Найти все токи и напряжения на всех элементах цепи методом контурных токов.

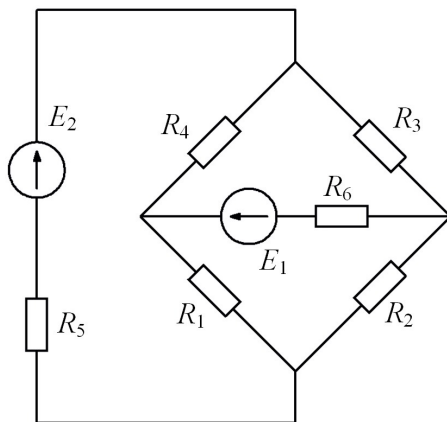


Рис. 1.10. К задаче № 4

Задача № 5. Параметры задачи: $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $R_4 = 4 \text{ Ом}$, $R_5 = 3 \text{ Ом}$, $R_6 = 1 \text{ Ом}$, $E_1 = 2 \text{ В}$, $E_2 = 5 \text{ В}$, $E_3 = 4 \text{ В}$, $E_4 = 3 \text{ В}$. Найти токи во всех ветвях цепи.

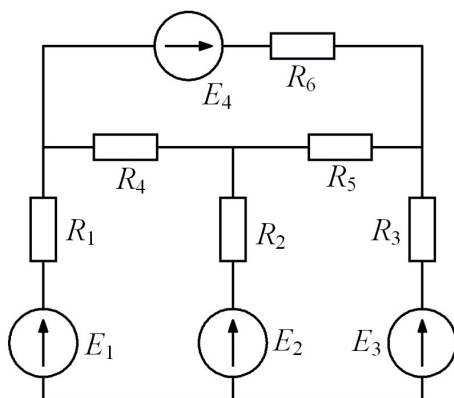


Рис. 1.11. К задаче № 5

Задача № 6. Параметры задачи: $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $r_3 = 1 \text{ Ом}$, $R_4 = 6 \text{ Ом}$, $R_5 = 5 \text{ Ом}$, $R_6 = 15 \text{ Ом}$, $E_1 = 100 \text{ В}$, $E_2 = 30 \text{ В}$, $E_3 = 10 \text{ В}$, $E_4 = 6 \text{ В}$. Найти токи во всех ветвях цепи.

1.4. Метод эквивалентных преобразований

Рассмотрим несколько способов, которые значительно упрощают решение многих задач. Речь пойдет о некоторых предварительных соображениях, которыми нужно пользоваться на первоначальном этапе работы с задачей, чтобы избежать ненужных проблем с ее решением в дальнейшем.

Замечание об эквивалентных преобразованиях № 1. Последовательные соединения резисторов и источников ЭДС

Приступая к анализу схемы, нужно сразу производить эквивалентные преобразования параллельных и последовательных соединений элементов, которые могут упростить ход решения. Поясним эту мысль на примере рис. 1.13 (а). Здесь показан типичный случай — последовательное и параллель-

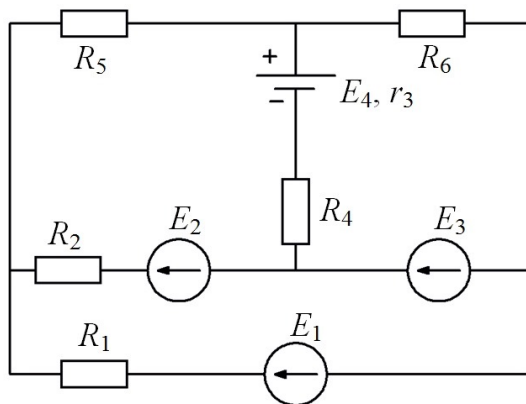


Рис. 1.12. К задаче № 6

ное соединение резисторов, при этом параллельное соединение сильно (с точки зрения математики) усложняет решение задачи, так как увеличивается число независимых ветвей и контуров. Применяя указанные простые преобразования, можно значительно упростить задачу и отыскать все токи и напряжения в цепи на рис. 1.13 (b) устно.

Замечание об эквивалентных преобразованиях № 2.
Применение идеальных источников тока. Недопустимые соединения идеальных источников ЭДС и тока. Преобразования параллельных соединений

Как следует из определения, идеальный источник тока — это источник электрической энергии, обладающий бесконечно большим внутренним сопротивлением, который вырабатывает ток постоянной величины, сила которого не зависит ни от каких внешних параметров: температуры, напряжения на зажимах источника и т.д. Появление такого источника в цепи означает только одно: в этой цепи сила тока не является искомой величиной, она задана по условию задачи. Из этого определения сразу следует логический вывод: в одной ветви невозможно существование двух последовательно включен-

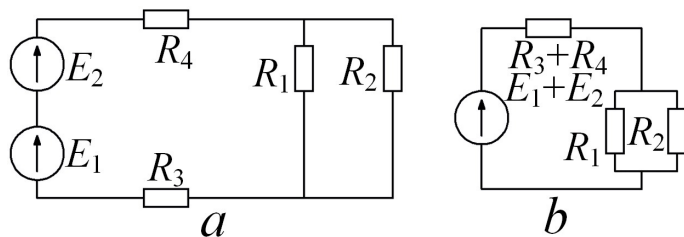


Рис. 1.13. Электрическая двухконтурная цепь до преобразования (а) и после упрощения (б). Произведены эквивалентные преобразования последовательного соединения элементов

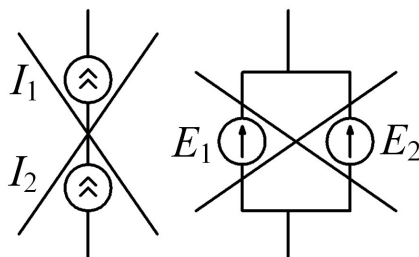


Рис. 1.14. Недопустимые соединения идеальных источников тока и напряжения

ных идеальных источников тока (см. рис. 1.14). К слову, то же самое можно сказать и о параллельном включении двух идеальных источников ЭДС, ведь такое включение в теории противоречит логике (в месте соединения клемм идеальных источников одновременно должно существовать два различных напряжения), а на практике приведет к тому, что источники напряжения станут нагрузкой сами для себя, что вызовет тепловой нагрев как самих источников, так и соединительных проводов. Если не нарушаются установленные нами правила, то применение источников тока в схемах заведомо упрощает решение задачи. Рассмотрим, например, следующую задачу (см. рис. 1.15). Проанализируем работу этой схемы. Схема со-

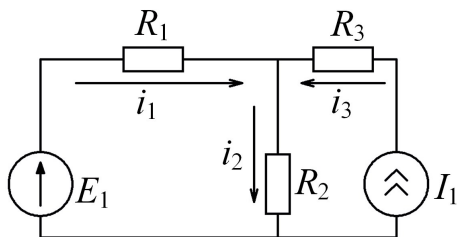


Рис. 1.15. Применение источника тока в электрической схеме

стоит из трех ветвей, следовательно, нам необходимо найти три независимых тока i_1 , i_2 , i_3 . Однако ток i_3 нам заранее известен — он равен току I_1 , вырабатываемому идеальным источником тока. Таким образом, нашу систему уравнений можно сильно упростить. Например, для произвольного узла схемы можно записать уравнение для токов

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0,$$

и записать еще одно уравнение по второму закону Кирхгофа. Здесь надо сделать замечание: писать второй закон Кирхгофа для контура, включающего идеальный источник тока, нельзя, так как внутреннее сопротивление источника тока бесконечно большое и не зависит от напряжения на его зажимах. Это значит, что напряжение на источнике тока — неизвестная величина, которую придется вычислять. Поэтому для быстрого решения задачи надо составить уравнение Кирхгофа для первого контура (направление обхода по часовой стрелке):

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 - E_1 = 0,$$

где можно сделать замену $i_1 = i_2 - i_3$ и подставить в уравнение для определения тока i_2 :

$$i_2 = (E_1 + i_3 R_1) / (R_1 + R_2).$$

После чего находится i_1 и оставшаяся неизвестная величина — напряжение на источнике тока. Таким образом, наличие в

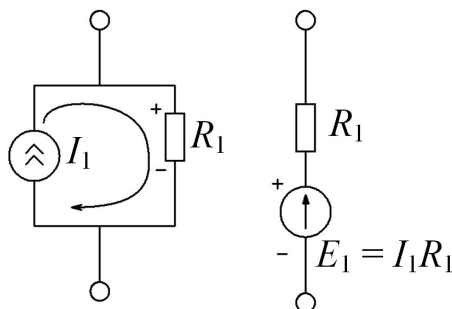


Рис. 1.16. Эквивалентное преобразование источника тока в источник напряжения

ветви источника тока упрощает решение задачи, уменьшая порядок полученной системы уравнений.

И наконец, рассмотрим вопрос о преобразовании источника тока к источнику напряжения. Такое преобразование возможно тогда, когда параллельно к источнику тока есть некоторое конечное сопротивление. Рассмотрим, что происходит при таком включении. На рис. 1.16 показан ток I_1 , протекающий по контуру, образованному источником тока и резистором R_1 . В этом случае мы считаем, что к клеммам не подключена никакая нагрузка и весь ток, вырабатываемый источником, протекает по резистору. На резисторе образуется напряжение указанной полярности, причем при эквивалентном преобразовании полярность, конечно, сохраняется. Напряжение, которое создается при этом на резисторе, равняется $R_1 I_1$. Значит, эквивалентный источник ЭДС должен быть того же номинала, т.е. $E_1 = R_1 I_1$. Далее, обратим внимание на то, какое сопротивление будут иметь схемы и какое сопротивление следует включить последовательно с E_1 . Мы знаем, что внутреннее сопротивление источника тока R_i бесконечно большое, следовательно, сопротивление схемы – это параллельное сопротивление R_i с R_1 , равное, конечно, R_1 . Следовательно, и после преобразования сопротивление схемы должно

быть точно таким же, т.е. должно равняться R_1 . Указанное преобразование, безусловно, получено из логических соображений и не является четко обоснованным. Тем не менее подобного рода рассуждения часто применяются при анализе схем и имеют математическое толкование, нашедшее свое отражение в теории электрических цепей в виде метода, названного "Метод холостого хода и короткого замыкания". Изучим его, тем более что он имеет свои преимущества перед остальными методами.

1.5. Метод холостого хода и короткого замыкания

Сущность метода холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ), применяемого для анализа работы линейных электрических цепей, заключается в том, чтобы получить систему уравнений, описывающих работу цепи, из двух мысленных экспериментов: в первом случае (случай ХХ) схема подключается к бесконечно большой нагрузке (ток в нагрузке равен нулю); во втором случае (случай КЗ) схема нагружается на нулевое сопротивление (ток в нагрузке максимален). Если абстрагироваться от конкретных деталей практического использования метода, то можно дать следующую его трактовку. Функционирование линейной электрической цепи описывается системой линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений — это система линейно независимых функций, а любая линейная функция однозначно определяется двумя точками (см. рис. 1.17). Значит, чтобы описать работу схемы, достаточно лишь посмотреть, как она себя ведет в двух "крайних" режимах — разорвав нагрузку (сделав ее бесконечно большой) и закоротив нагрузку (сделав ее равной нулю).

Рассмотрим пример использования метода ХХ и КЗ на примере схем, приведенных на рис. 1.15. Сформулируем задачу еще раз, сделав акцент на целесообразности примене-

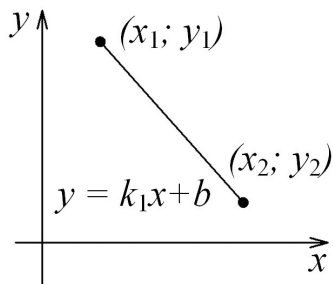


Рис. 1.17. К объяснению метода холостого хода и короткого замыкания. Одно из линейных уравнений, описывающих работу цепи, полностью определяется двумя точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, соответствующими холостому ходу и короткому замыканию

ния изучаемого метода: определить параметры замещающей схемы так, чтобы при всех режимах работы обе схемы были полностью эквивалентны друг другу. Для наглядности можно представить себе, что мы помещаем схемы каждую в отдельный "черный ящик", из которого выводятся лишь две клеммы, причем экспериментатор, использующий такой "безликий" двухполюсный источник питания, не должен замечать никакой разницы.

Здесь уместно подчеркнуть, что решать подобную задачу каким-либо из ранее изученных методов не представляется возможным, ведь анализируемые цепи являются разомкнутыми, следовательно, нет возможности написать уравнения Кирхгофа для контуров без привлечения дополнительных соображений. В противоположность этому, метод ХХ и КЗ как раз дает четкие рекомендации — какие именно дополнительные соображения нужно использовать: нужно разорвать и закоротить нагрузку, как это сделано на рис. 1.18, и тем самым определить необходимые параметры цепи. Определив напряжение холостого хода U_{xx} и ток короткого замыкания I_{kz} , мы можем определить внутреннее сопротивление схемы: $R = U_{xx}/I_{kz} = R_1$. Таким образом, мы пришли к тем же зна-

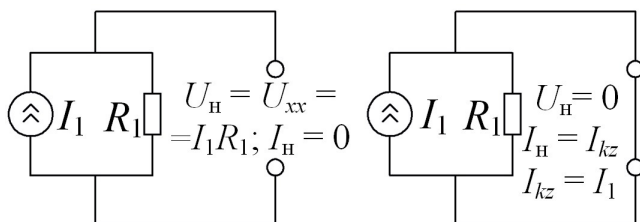


Рис. 1.18. Режим холостого хода и короткого замыкания для параллельного соединения идеального источника тока и резистора

чениям E_1 и R_1 для замещающей цепи, что и ранее. Сделаем вывод: метод ХХ и КЗ позволяет анализировать разомкнутые схемы с помощью мысленного эксперимента с подключением нагрузки. Возможность применения метода ХХ и КЗ основана на линейности изучаемых систем. Рассмотрим одну из наиболее значимых задач, решение которой возможно лишь только с привлечением метода ХХ и КЗ, — задачу о преобразовании треугольника сопротивлений в звезду. Рассмотрим две схемы,

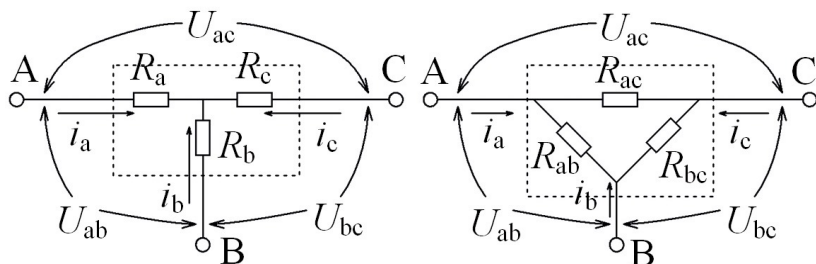


Рис. 1.19. Соединение резисторов звездой (слева) и треугольником (справа)

приведенные на рис. 1.19, где изображены два трехполюсника, работа которых определяется токами i_a , i_b , i_c и соответствующими напряжениями U_{ac} , U_{ab} , U_{bc} . Нам необходимо найти выражения, которые ставят в соответствие параметры схем,

чтобы схемы были эквивалентными. Ход решения этой (и подобных) задачи можно подразделить на две стадии, которые логично следуют из постановки задачи: сначала мы находим одно преобразование (например, треугольника в звезду), а в последствии — обратное преобразование. При этом становится ясно, что на каждом шаге у нас присутствует 3 неизвестных величины (для первой задачи неизвестными считаются R_a, R_b, R_c) и 3 известных величины (R_{ac}, R_{ab}, R_{bc}). Значит, для отыскания ответов к каждой из задач нам необходимо составить по 3 уравнения. Таким образом, полная задача решается с помощью 6 уравнений, 3 из которых получаются с использованием мысленного холостого режима работы (холостой ход) схем, а 3 других с использованием мысленного короткозамкнутого режима работы схем. Поясним сказанное на практике, решив задачу о преобразовании треугольника в звезду, т.е. найдем функциональные зависимости вида

$$R_a = f_a(R_{ab}, R_{ac}, R_{bc}),$$

$$R_b = f_b(R_{ab}, R_{ac}, R_{bc}),$$

$$R_c = f_c(R_{ab}, R_{ac}, R_{bc}),$$

считая величины R_{ac}, R_{ab}, R_{bc} известными. Для этого составим первое уравнение, реализовав мысленно режим холостого хода для узла C , т.е. предположив, что ток в узле C равен нулю: $i_c = 0$ А. При этом все остальные параметры схемы остаются фиксированными, что означает равенство токов в узлах A и B и напряжения U_{ab} . Значит, сопротивление, которое можно измерить омметром, подключив его к клеммам A, B , будет равно

$$R_a + R_b = \frac{(R_{ab} + R_{bc})R_{ac}}{R_{ac} + R_{bc} + R_{ab}}, \quad (1.1)$$

где слева стоит выражение для звезды (последовательное соединение резисторов R_a и R_b), а справа — для треугольника

(параллельное соединение резистора R_{ab} с двумя последовательно соединенными резисторами R_{ac}, R_{bc}). Реализуем далее режим холостого хода для узла B , т.е. предположим $i_b = 0$ А. Сопоставление сопротивлений обеих схем относительно клемм A, C будет

$$R_a + R_c = \frac{(R_{ac} + R_{bc})R_{ac}}{R_{ac} + R_{bc} + R_{ab}}. \quad (1.2)$$

Аналогично, реализуя режим холостого хода для узла A , получим

$$R_b + R_c = \frac{(R_{ac} + R_{ab})R_{ac}}{R_{ac} + R_{bc} + R_{ab}}. \quad (1.3)$$

Далее легко найти искомые величины. Например, составив комбинацию уравнений $(1.2 - 1.3 + 1.1)$, можно получить значение для R_a :

$$R_a = \frac{R_{ac}R_{ab}}{R_{ac} + R_{bc} + R_{ab}}.$$

Используя аналогичные комбинации, получим оставшиеся выражения:

$$R_b = \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ac} + R_{bc} + R_{ab}},$$

$$R_c = \frac{R_{ac}R_{bc}}{R_{ac} + R_{bc} + R_{ab}}.$$

Обратное преобразование (звезды в треугольник) рекомендуется делать, используя вторую группу условий: условия для короткого замыкания (в этом случае соответствующие напряжения U_{ab}, U_{ac}, U_{bc} полагаются равными нулю и процедура повторяется).

1.6. Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора — это метод, позволяющий произвести упрощение сложной схемы методом эквивалентных преобразований. Применять этот метод имеет смысл только тогда, когда рассматривается режим работы

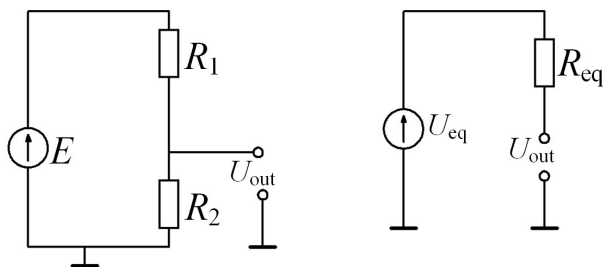


Рис. 1.20. Преобразование делителя напряжения к эквивалентной схеме

только 1-й части (например, ток в одной из ветвей, рассеиваемая мощность на одном элементе, разность потенциалов между двумя конкретными точками схемы) некоторой большой схемы. В определенном смысле метод эквивалентного генератора можно рассматривать как частный случай метода холостого хода и короткого замыкания. Рассмотрим работу метода эквивалентного генератора на примере преобразования схемы на рис. 1.20. Слева на рис. 1.20 изображена схема с делителем напряжения на резисторах R_1 , R_2 и источником ЭДС E , которая используется для того, чтобы создать на своем выходе напряжение U_{out} , используемое для питания нагрузки (не изображена на схеме). Наша цель — заменить схему с делителем на более простую (справа на рис. 1.20), чтобы упростить анализ режимов работы нагрузки. В первом случае нагрузка подключена параллельно резистору R_2 , и это осложняет задачу. Решение задачи об отыскании эквивалентного генератора U_{eq} произведем с использованием метода холостого хода и короткого замыкания, как это делалось в предыдущем разделе. Итак, шаг первый — мысленно нагрузить схему на бесконечно большое сопротивление, тогда U_{out} будет равно U_{xx} :

$$U_{xx} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}.$$

Это же напряжение и будет U_{eq} , так как при реализации режима холостого хода на схеме справа на рис. 1.20 мы должны получить то же самое напряжение, что и в режиме холостого хода в изначальной схеме. Поэтому $U_{eq} = U_{xx}$. На втором шаге мы определяем ток короткого замыкания, мысленно замкнув накоротко выходные клеммы. При этом провод, чье сопротивление мы принимаем равным нулю, идеально шунтирует (создает для электрического тока обходной путь) резистор R_2 . При этом в схеме останется только резистор R_1 , и ток короткого замыкания будет равен

$$I_{kz} = \frac{E}{R_2}.$$

При этом легко определяется эквивалентное внутреннее сопротивление схемы:

$$R_{eq} = \frac{U_{xx}}{I_{kz}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Задача решена.

Обсудим задачу. Мы преобразовали источник питания в виде делителя напряжения к идеальному источнику ЭДС с последовательно подключенным внутренним сопротивлением. Номинальное значение ЭДС равно напряжению на резисторе R_2 в режиме холостого хода, что логично: делитель напряжения отдает лишь определенную долю полного исходного напряжения. Внутреннее же сопротивление равно параллельному включению сопротивлений R_1 и R_2 . С первого взгляда ответ кажется неочевидным, ведь сопротивления в исходном контуре включены последовательно. Однако на рис. 1.21 этот же делитель нарисован в более привычном виде, где сразу угадывается именно параллельный характер соединения. Приведенный рис. 1.21 сделан по следующим важным причинам: он тренирует инженерный навык чтения электрических схем и, как будет видно в дальнейшем, имеет большое значение для транзисторных схем, где рабочая точка схемы определяется резистивным делителем.

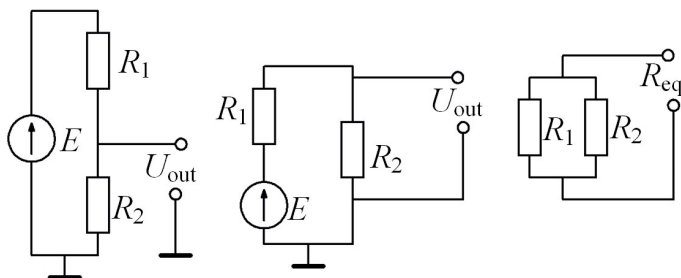


Рис. 1.21. Визуальное преобразование схемы делителя с целью наглядной демонстрации параллельности сопротивлений в этой схеме со стороны выхода

Алгоритм решения задач методом эквивалентного генератора

Сейчас, когда стала ясна сущность эквивалентных преобразований в электрических цепях, можно сформулировать алгоритм решения задач подобным методом. Для наглядности решим еще одну задачу. Дана цепь, изображенная на рис. 1.22. Найти силу тока i_5 , протекающего через резистор R_5 .

Шаг № 1. Анализируем условие задачи и делаем вывод о целесообразности применения метода эквивалентного генератора. Применим это действие к нашей задаче. Схема, которую мы анализируем, довольно простая, и решение можно искать практически любым из доступных способов, но постановка задачи подталкивает нас к использованию именно метода эквивалентного генератора. Действительно, в исследуемой схеме у нас 6 ветвей и 4 узла. Число неизвестных токов равно 5, так как в одной из ветвей задан идеальный источник тока, и, следовательно, ток в этой ветви известен. Если нам необходимо было бы искать все 5 неизвестных токов, то нам пришлось бы использовать метод контурных токов или (что предпочтительней) метод узловых потенциалов. Однако цель задачи — найти не все 5 токов, а всего лишь 1. Логично использовать некий более подходящий метод — метод эквивалентного ге-

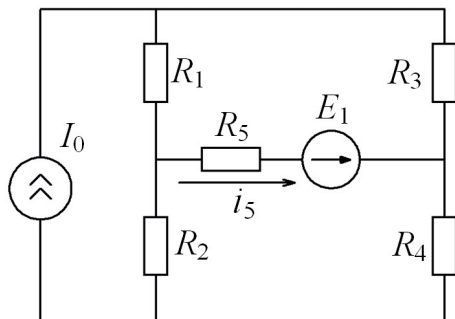


Рис. 1.22. Электрическая цепь, удобная для анализа методом эквивалентного генератора

нератора. Можно сказать, что с обоснованием применимости метода мы разобрались, переходим к дальнейшим действиям.

Шаг № 2. Преобразуем схему. Для этого выделим исследуемую цепь клеммами "a", "b" (см. рис. 1.23). Исследуемой цепью является, естественно, ветвь, в которую включен резистор R_5 и источник ЭДС E_1 . Всю остальную схему представим на данном этапе в виде активного (т.е. содержащего внутри себя источник питания) двухполюсника, как показано на рис. 1.23.

При этом весь эквивалентный генератор (источник ЭДС E_{eg} и его внутреннее сопротивление R_{eg}) заключен в пунктирный прямоугольник, как показано на схеме справа. Сделав такое преобразование, мы сразу обозначили способ измерения E_{eg} — это напряжение холостого хода эквивалентного генератора, определяемое как

$$E_{eg} = \varphi_a - \varphi_b.$$

Это выражение следует из того, как мы разместили клеммы источника питания E_{eg} . Отметим и другую важную особенность. В исходной схеме (слева) мы обозначили искомый ток

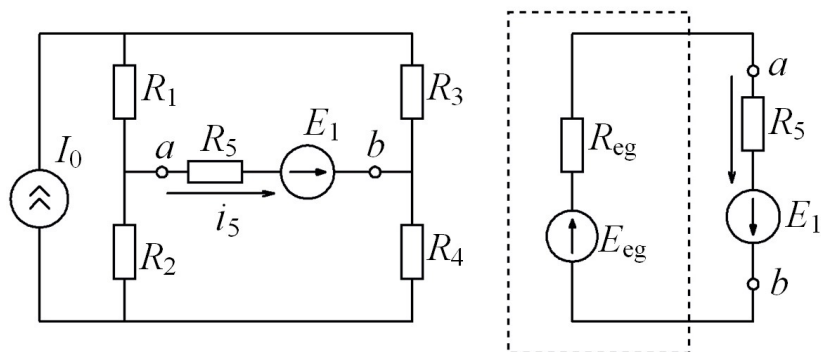


Рис. 1.23. Преобразование исходной схемы

так, что он течет от клеммы "a" к клемме "b". Мы обязаны сохранить это направление и в преобразованной схеме (справа). Искомый ток в эквивалентной цепи находится очень легко, согласно закону Ома:

$$i_5 = \frac{E_1 + E_{eg}}{R_5 + R_{eg}}.$$

Шаг № 3. Определим сопротивление R_{eg} . Для этого из исходной цепи нужно удалить нашу исследуемую ветвь между клеммами "a" и "b", а также удалить (с сохранением внутренних сопротивлений) из схемы источники электрического тока. Такая схема изображена на рис. 1.24. Отметим, что у источника тока внутреннее сопротивление бесконечно большое, поэтому в цепи оставлен "разрыв", и конечное сопротивление между клеммами "a" и "b" легко найти, особенно если переписать схему в более привычном виде (справа на рис. 1.24). Отсюда сопротивление равно

$$R_{eg} = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{(R_1 + R_3 + R_2 + R_4)}.$$

Заметим, что если бы в левой ветви исходной схемы стоял бы источник ЭДС, то сопротивление такой цепи между клеммами

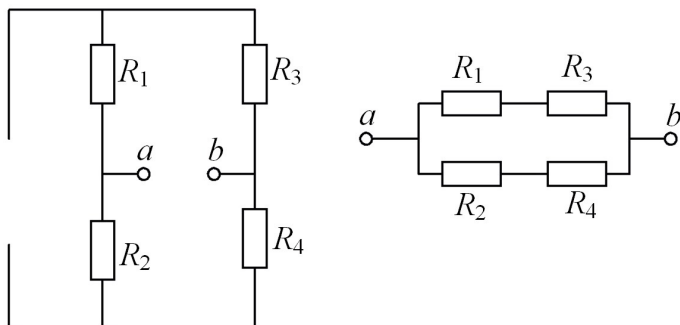


Рис. 1.24. Преобразование схемы для отыскания эквивалентного внутреннего сопротивления генератора

"a" и "b" равнялось бы сумме параллельных соединений R_1 с R_2 и R_3 с R_4 соответственно.

Шаг № 4. Определим напряжение холостого хода на клеммах "a" и "b" в исходной цепи, из которой удалили исследуемую ветвь. Следует сказать, что это наиболее сложный момент решения задачи. В текущей задаче эта операция делается устно, но в общем случае придется прибегнуть к какому-либо оптимальному методу, например, к методу узловых потенциалов. В нашей же задаче легко видеть, что после исключения анализируемой ветви ток идеального источника тока разветвляется на две ветви (см. рис. 1.25). Искомое напряжение — это разность потенциалов на клеммах "a" и "b". Искомые потенциалы можно отсчитывать от любой произвольной точки, мы же будем отсчитывать их, как это принято в радиоэлектронике, от точки, называемой "землей", обозначенной на рис. 1.25.

Как видно на схеме, напряжения на клеммах "a" и "b" — это напряжения на резисторах R_2 и R_4 . Их легко найти, зная напряжение U_0 . Действительно:

$$U(R_2) = \frac{R_2 U_0}{R_1 + R_2},$$

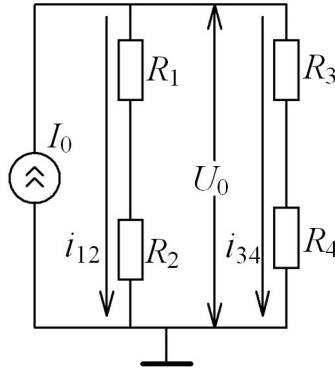


Рис. 1.25. Преобразованная схема для расчета напряжения холостого хода

$$U(R_4) = \frac{R_4 U_0}{R_3 + R_4}.$$

Напряжение U_0 легко определить, ведь это то напряжение, которое возникнет на параллельном соединении резисторов $R_1 + R_2$ и $R_3 + R_4$ при протекании по ним тока I_0 :

$$U_0 = \frac{I_0(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Тогда искомое напряжение холостого хода $U_{ab} = U(R_2) - U(R_4)$ будет равно

$$U_{ab} = \frac{(R_2(R_3 + R_4) - R_4(R_1 + R_2))I_0}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Шаг № 5. Подставить числовые значения в полученные выражения, определить искомые величины (ток или напряжение) в анализируемой ветви.

Дадим оценку методу эквивалентного генератора, рассмотрев нашу задачу. Как можно было убедиться, применение этого метода позволило нам найти ответ с минимальными усилиями. При определенной сноровке подобные задачи можно решать устно.

Конечным результатом решения подобных задач является режим работы отдельной ветви. Это немаловажно, ведь нас часто интересует именно такая постановка вопроса: что будет с устройством (каким-либо потребителем электроэнергии: лампой, реле, тиристором и т.д.), если его включить в некую сложную цепь. На практике часто приходится решать задачи именно в такой постановке, ведь многие схемы собираются в виде готовых модулей (например, блок питания, частотный фильтр, повторитель), к которым и подключается нагрузка. Анализировать же исходную сложную цепь нет никакого смысла, и мы заменяем ее условно некоторым источником ЭДС с внутренним сопротивлением.

Сделаем еще одно замечание, которое пригодится только в последней главе, посвященной анализу схем на биполярных транзисторах. По сути, метод эквивалентного генератора негласно используется и при анализе многокаскадных транзисторных схем, где предыдущий каскад анализируется не как сложное нелинейное техническое устройство, а заменяется мысленно "черным ящиком" с некоторым внутренним сопротивлением "со стороны выхода" и двумя клеммами, на которых действует некоторое напряжение холостого хода. Анализ таких многокаскадных схем с помощью аналитических уравнений практически невозможен в связи с их сложностью, но подход с мысленной изоляцией каскадов друг от друга с последующим применением метода эквивалентного генератора позволяет упростить анализ схем до устного счета.

Задачи для самостоятельного решения по теме "Метод эквивалентного генератора"

Задача № 7. Параметры задачи: $R_1 = R_2 = 40 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 160 \text{ Ом}$, $R_6 = 15 \text{ Ом}$, $E_1 = E_2 = 20 \text{ В}$. Найти ток в цепи с сопротивлением R_5 .

Задача № 8. Параметры задачи: источник тока $I_0 = 50 \text{ мА}$, $R_1 = 5 \text{ кОм}$, $R_2 = 4 \text{ кОм}$, $R_3 = 16 \text{ кОм}$, $R_4 = 2 \text{ кОм}$, $R_5 = 8 \text{ кОм}$, $E = 60 \text{ В}$. Найти ток в цепи с сопротивлением R_5 .

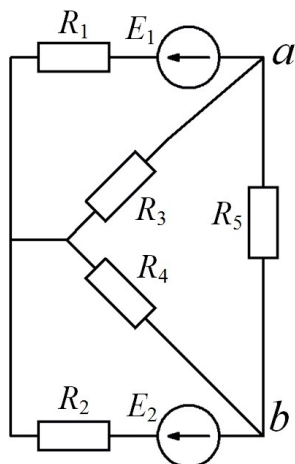


Рис. 1.26. К задаче № 7

1.7. Метод узловых потенциалов

Рассматриваемый метод позволяет полностью проанализировать любую электрическую цепь, используя лишь закон Ома и первый закон Кирхгофа. В этом смысле метод узловых потенциалов является дополнением к методу контурных токов, который использует закон Ома и второй закон Кирхгофа. Краткая суть метода: в исследуемой цепи, содержащей N узлов, составляют $(N - 1)$ независимых уравнений по первому закону Кирхгофа. При этом токи, втекающие в узел и вытекающие из него, выражаются через потенциал описываемого узла и потенциалы ближайших к нему узлов. Полученную систему линейных уравнений решают любым удобным способом.

Предварительное замечание об электрической проводимости

Проводимость G — это физическая величина, обратная сопротивлению R :

$$G = R^{-1}.$$

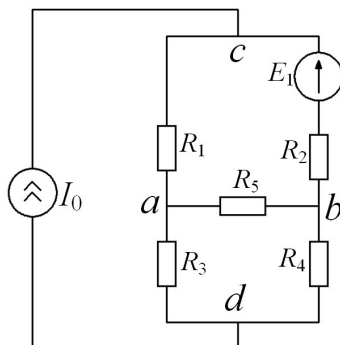


Рис. 1.27. К задаче № 8

Единица измерения G — Сименс, сокращенно "См" (не путайте с сантиметрами, которые обозначаются как "см"). В учебной литературе часто встречаются избитые клише об определении электрической проводимости, однако редко когда подчеркивается особая роль этой величины: проводимость ничем не "хуже" сопротивления, и бывают ситуации, когда без ее использования решение задачи усложняется многократно.

Приведем пример: найти сопротивление десяти различных резисторов $R_1 - R_{10}$, соединенных параллельно. Даже такой простейший случай заставляет задуматься, ведь типичную формулу о параллельном соединении 2 сопротивлений, которую непременно можно встретить во всех учебниках по теории цепей, здесь придется применять 9 раз. Приходится признать, что формула о сопротивлении двух параллельных резисторов — это просто частный случай. Для универсального решения нужно, конечно, прибегнуть к понятию проводимости, т.е. найти общую проводимость цепи как сумму проводимостей каждого из десяти резисторов:

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_{10},$$

после чего общее сопротивление находится элементарно: $R = 1/G$.

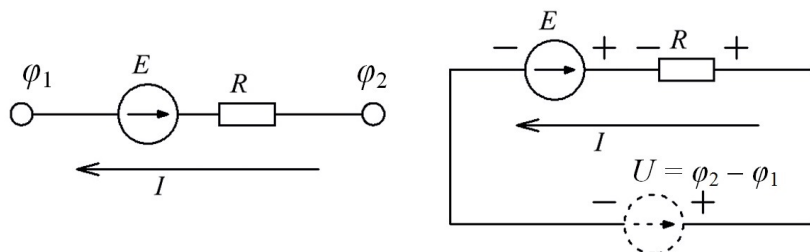


Рис. 1.28. Иллюстрация к закону Ома для участка цепи

Замечание о применении закона Ома для участка цепи

До сих пор мы рассматривали только замкнутые контуры, однако для написания уравнений в методе узловых потенциалов нам понадобится вспомнить (или ознакомиться) с законом Ома для участка цепи. Пусть дан участок цепи, изображенный слева на рис. 1.28. Ток I в этой ветке задан произвольно, а о величине и соотношении электрических потенциалов φ_1 и φ_2 , действующих на зажимах цепи, нам тоже ничего неизвестно. Для того чтобы написать правильное уравнение и не ошибиться в знаках, нам необходимо сделать допущение, что наш искомый ток согласован с неизвестными потенциалами и записать уравнение Кирхгофа для полученного контура, замкнутого на виртуальный источник ЭДС с номиналом $U = (\varphi_2 - \varphi_1)$, как показано на рис. 1.28 справа. Для пущей убедительности на всех источниках указаны полярности ЭДС, а на резисторе R — полярность напряжения, которое падает на нем при протекании через него искомого тока. Тогда закон Кирхгофа будет (обходим контур против часовой стрелки)

$$+U(R) + E - U = 0.$$

Подставляя исходные величины, получим

$$I = G[(\varphi_2 - \varphi_1) - E].$$

Здесь, как и ранее, G — проводимость ветви, т.е. R^{-1} .

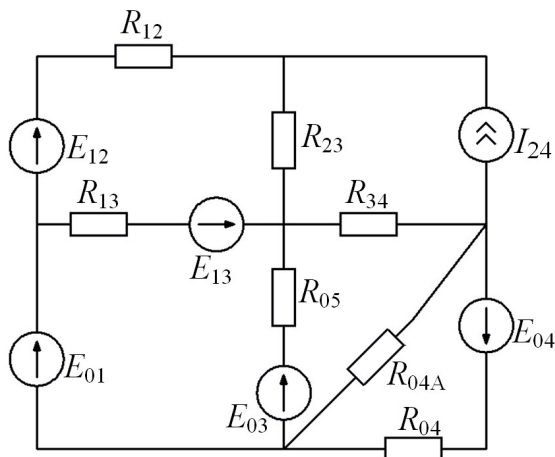


Рис. 1.29. Электрическая цепь, удобная для анализа методом узловых потенциалов. Условие задачи взято с интернет-ресурса [6], однако ход и алгоритм решения коренным образом отличаются

Продолжим изучать метод узловых потенциалов так же, как и ранее, путем изложения готового пошагового алгоритма решения задач на выбранном примере.

Пример: найти токи во всех ветвях цепи, показанной на рис. 1.29.

Шаг № 1. Обозначить (перенумеровать) все узлы в цепи, обозначить один (не используемый для составления уравнения по 1-му закону Кирхгофа) из узлов в качестве базового, "земляного". Его потенциал в задаче будет считаться равным нулю, а все остальные потенциалы будут отсчитываться от его нулевого уровня. Такое преобразование сделано на рис. 1.30. Здесь же мы произвольно обозначаем мгновенное распределение токов во всех ветвях. Единственная ветвь в этой задаче, в которой ток имеет однозначное направление — это ветвь с включенным идеальным источником тока I_{24} . Каждый ток обозначается буквой i с индексом, соответствующим узлам, к

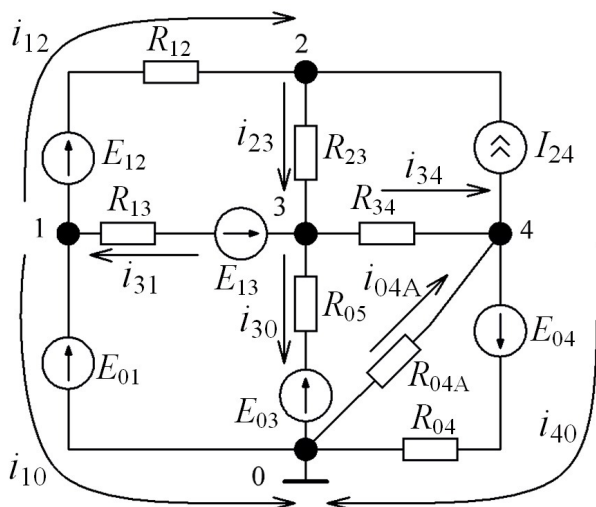


Рис. 1.30. Схема, подготовленная к анализу методом узловых потенциалов

которым подключена ветвь, например, ток i_{23} протекает от узла 2 к узлу 3. Такое обозначение ни к чему не обязывает, оно просто удобное.

Шаг № 2. Составим соответствующие узловые уравнения, описывающие данную цепь. Проанализируем задачу на предмет составления уравнений: у нас всего 5 узлов в этой задаче. Значит, нам нужно будет определить 5 потенциалов φ_0 , φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 для данной цепи. Однако потенциал одного из узлов мы должны определить за нулевой (за базовый), и мы выбрали узел № 0 для этой цели. Таким образом, мы знаем уже один потенциал $\varphi_0 = 0$ В. Однако, приглядевшись к задаче внимательней, можно заметить, что потенциал первого узла тоже нам уже известен: между узлами 0 и 1 действует один единственный идеальный источник ЭДС E_{01} . Значит, какой бы ток i_{10} ни протекал по этой ветви, потенциал точки 1 от этого не зависит в силу свойств идеального источника

ЭДС. Поэтому $\varphi_1 = E_{01}$ В. Осталось только три неизвестных величины: $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Их можно найти стандартным способом, решив линейную систему из 3 уравнений. Составим эти уравнения для искоемых трех потенциалов (т.е. для узлов № 2, 3, 4). Сначала запишем в простом виде 1-й закон Кирхгофа для каждого узла

$$\text{Узел № 2. } i_{12} + I_{24} - i_{23} = 0.$$

$$\text{Узел № 3. } i_{23} - i_{31} - i_{30} - i_{34} = 0.$$

$$\text{Узел № 4. } i_{34} + i_{04A} - I_{24} - i_{40} = 0.$$

При записи этих уравнений ток брался со знаком "+", если втекал в узел.

Шаг № 3. Используя закон Ома для участка цепи, выразим все неизвестные токи, входящие в только что написанную систему уравнений, через неизвестные потенциалы $\varphi_2 - \varphi_4$. Для этого над анализируемой ветвью мысленно производим операцию, отраженную на рис. 1.28. Используя проводимости вместо соответствующих сопротивлений, получим

$$i_{12} = G_{12}[(\varphi_1 - \varphi_2) + E_{12}] = G_{12}[(E_{01} - \varphi_2) + E_{12}],$$

$$i_{23} = G_{23}[(\varphi_2 - \varphi_3)],$$

$$i_{30} = G_{05}[(\varphi_3 - \varphi_0) - E_{03}] = G_{05}[\varphi_3 - E_{03}],$$

$$i_{34} = G_{34}[(\varphi_3 - \varphi_4)],$$

$$i_{04A} = G_{04A}[(\varphi_0 - \varphi_4)] = G_{04A}[-\varphi_4],$$

$$i_{40} = G_{04}[(\varphi_4 - \varphi_0) + E_{04}] = G_{04}[\varphi_4 + E_{04}],$$

$$i_{31} = G_{13}[(\varphi_3 - \varphi_1) - E_{13}].$$

Шаг № 4. Поставим полученные токи в наши уравнения для узлов № 2, 3, 4:

$$G_{12}[(E_{01} - \varphi_2) + E_{12}] - G_{23}[(\varphi_2 - \varphi_3)] = -I_{24},$$

$$\begin{aligned} G_{23}[(\varphi_2 - \varphi_3)] - G_{13}[(\varphi_3 - \varphi_1) - E_{13}] - G_{05}[\varphi_3 - E_{03}] - \\ - G_{34}[(\varphi_3 - \varphi_4)] = 0, \end{aligned}$$

$$G_{34}[(\varphi_3 - \varphi_4)] + G_{04A}[-\varphi_4] - G_{04}[\varphi_4 + E_{04}] = I_{24}.$$

Преобразуем подобные и перенесем в правую часть известные выражения:

$$-(G_{12} + G_{23})\varphi_2 + G_{23}\varphi_3 + 0 \cdot \varphi_4 = -I_{24} - G_{12}E_{12} - G_{12}E_{01},$$

$$\begin{aligned} G_{23}\varphi_2 - (G_{23} + G_{13} + G_{05} + G_{34})\varphi_3 + G_{34}\varphi_4 = \\ = -G_{05}E_{03} - G_{13}E_{13} - G_{13}E_{01}, \end{aligned}$$

$$0 \cdot \varphi_2 + G_{34}\varphi_3 - (G_{34} + G_{04A} + G_{04})\varphi_4 = I_{24} + G_{04}E_{04}.$$

Шаг № 5. Полученная система уравнений решается любым известным способом, в результате чего находятся потенциалы φ_2 , φ_3 , φ_4 . Подставляя их в выражения для токов, полученные на Шаге № 3, можно найти сами токи, и, конечно, напряжения, которые действуют на всех резисторах.

Обсудим полученное решение. В нашей задаче применение метода узловых потенциалов фактически дало возможность получить решение без применения дополнительной вычислительной техники: система уравнений 3 порядка решается легко. При этом использование, например, метода контурных токов здесь не дало бы такого легкого решения. Обратите внимание, число контуров, на которые подразделяется схема (подобно пчелиным сотам), равно 5. Однако ветвь, соединяющая узлы 2 и 4, содержит идеальный источник тока, и, следовательно, ток в этой ветви известен, следовательно, известен и соответствующий контурный ток. Поэтому число неизвестных контурных токов с 5 сокращается до 4. Далее задачу уже невозможно упростить и поэтому метод контурных токов дал бы нам систему уравнений 4 порядка.

Выводы относительно метода узловых потенциалов. Метод узловых потенциалов является самым универсальным методом для анализа линейных цепей, так как позволяет получить минимальное число уравнений. Это объясняется тем, что для вычисления токов в параллельных ветвях нам не нужно вводить дополнительные независимые переменные (в решенной выше задаче обратите внимание на ветви с токами i_{40} ,

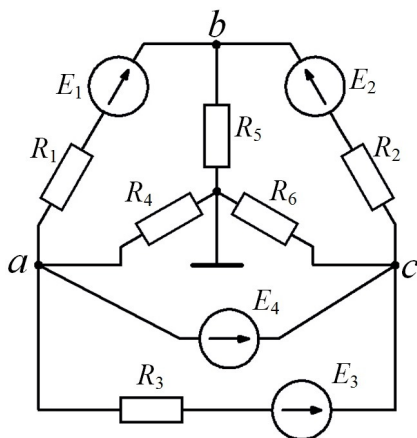


Рис. 1.31. К задаче № 9

i_{04A}). Метод узловых потенциалов является оптимальным для программирования, и поэтому именно он реализован в схемотехнических САПР, например в "MicroCAP". Примечательно, что для начала расчета схемы в "MicroCAP" обязательно требуется указать "землю", ведь без этого опорного узла не работает метод узловых потенциалов.

Задачи для самостоятельного решения
по теме "Метод узловых потенциалов"

Задача № 9. Параметры задачи: $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 10 \text{ Ом}$, $R_5 = 10 \text{ Ом}$, $R_6 = 4 \text{ Ом}$, $E_1 = 85 \text{ В}$, $E_2 = 84 \text{ В}$, $E_3 = 5 \text{ В}$, $E_4 = 12 \text{ В}$. Найти все токи и потенциалы точек a , b , c , d относительно земли.

Задача № 10. Параметры задачи: $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $R_3 = 6 \text{ Ом}$, $R_4 = 8 \text{ Ом}$, $R_5 = 15 \text{ Ом}$, $R_6 = 40 \text{ Ом}$, $R_7 = 10 \text{ Ом}$, $E_1 = 30 \text{ В}$, $E_2 = 10 \text{ В}$, $E_3 = 200 \text{ В}$, $E_4 = 56 \text{ В}$. Найти все токи методом узловых потенциалов.

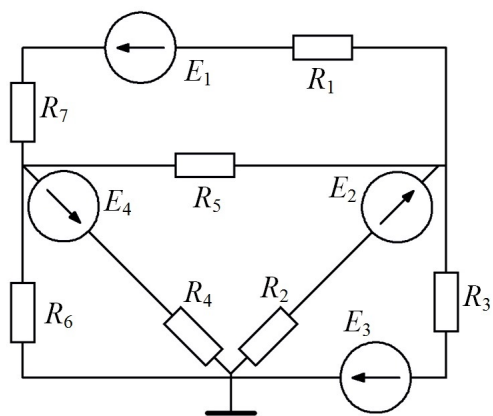


Рис. 1.32. К задаче № 10

Глава 2

Нелинейные цепи постоянного тока

2.1. Вводные замечания

Нелинейная электрическая цепь — это цепь, содержащая хотя бы один нелинейный элемент. Изучение нелинейных схем связано с известными трудностями: режимы работы таких цепей описываются системой нелинейных уравнений, которые не имеют аналитического решения. Поэтому изучение таких цепей ограничивается в нашем курсе самыми простыми случаями, в которых исследуемая цепь включает в себя один-два нелинейных элемента. В качестве способов анализа подобных схем мы опишем лишь два: аналитический и графоаналитический. Выбор между этими двумя методами зависит от того, в какой форме задана вольт-амперная характеристика (ВАХ) нелинейного прибора.

Способы математического описания нелинейного прибора

Описания всех возможных режимов работы нелинейного элемента производятся с помощью ВАХ, которая может быть задана либо в табличном виде, либо в виде приближенной аналитической функции $I = f(U)$. Несмотря на некото-

рую неточность табличного метода, следует признать его более подходящим для реальных прикладных задач, когда некоторый объект (исследуемый или используемый в схеме) проявляет ярко выраженные нелинейные свойства. Построение графика на основе табличной ВАХ с вспомогательными функциями (например, нагрузочной кривой или ВАХ подключенной цепи) позволяет быстро найти требуемое значение тока или напряжения.

2.2. Графоаналитический метод

Рассмотрим указанный способ на примере двух характерных задач, охватывающих параллельное и последовательное соединение элементов в цепи, придерживаясь следующего алгоритма действий:

Шаг № 1. Определить характер соединения элементов в цепи (последовательный, параллельный или смешанный).

Шаг № 2. Изобразить на одной плоскости ВАХ всех пассивных элементов цепи.

Шаг № 3. Объединять ВАХ соответствующих элементов графическим способом в зависимости от того, как элементы включены.

Если элементы включены последовательно, значит, через них протекает общий ток. Ток в этом случае считается независимой переменной, варьируя которую можно определить величины напряжений на элементах. Суммируя найденные по ВАХ напряжения, найдем неизвестную ВАХ нелинейного участка цепи.

Если элементы включены параллельно, значит, к ним приложено общее напряжение. Напряжение в этом случае считается независимой переменной, варьируя которую можно определить силу тока, протекающего через каждый из элементов. Суммируя найденные по ВАХ токи, найдем неизвестную ВАХ нелинейного участка цепи.

Шаг № 4. Используя найденную графически ВАХ, най-

дем числовые значения для интересующих нас режимов работы нелинейной цепи.

Задача о последовательном соединении нелинейных элементов.

Определить ток, протекающий через лампу накаливания в схеме, показанной на рис. 2.1. ВАХ лампы приведена в табл. 2.1. Параметры задачи: $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 60$ Ом,

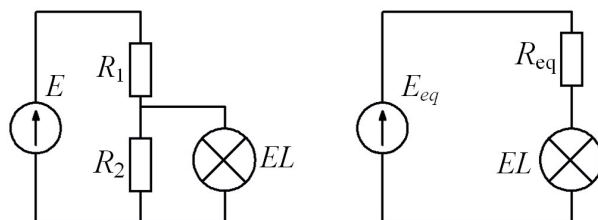


Рис. 2.1. Нелинейная цепь с лампой накаливания (слева) и ее эквивалентная упрощенная схема (справа)

$E = 10$ В. Для решения этой задачи сначала используем известный нам метод эквивалентного генератора и заменим исходную цепь на более простую эквивалентную. Это возможно сделать, несмотря на присутствие нелинейного элемента: ведь эквивалентные преобразования затрагивают только ту часть схемы, где все элементы являются линейными. Как известно, $R_{eq} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 24$ Ом, а $E_{eq} = R_2 E / (R_1 + R_2) = 6$ В.

Теперь мы можем изобразить на графике ВАХ полученной цепи (последовательного соединения R_{eq} и лампы EL). Для этого изобразим сначала на графике каждую ВАХ по отдельности $I_1(U)$ и $I_2(U)$ (кривые 1 и 2 на рис. 2.2).

После этого составим результирующую ВАХ нашей схемы, представляющей из себя последовательное соединение лампы и резистора. При таком соединении ток, протекающий по цепи, является общим для обоих элементов, т.е. $I(EL) = I(R_{eq})$, а напряжение на их последовательном соединении — суммой напряжений на каждом из элементов, т.е. $U =$

Таблица 2.1. ВАХ лампы накаливания EL

$U, \text{В}$	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
$I, \text{А}$	0.0	0.1	0.2	0.25	0.27	0.29	0.3	0.3	0.3

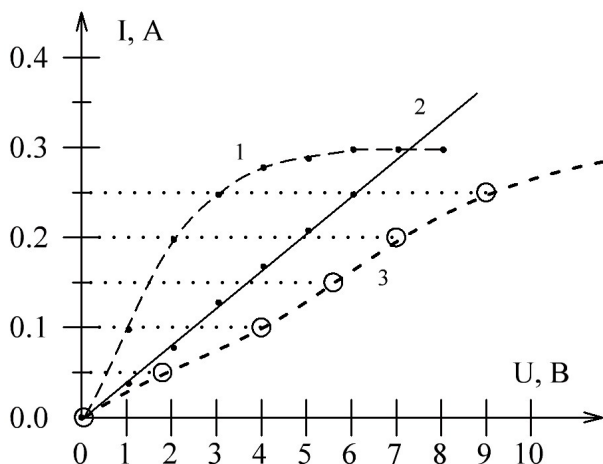


Рис. 2.2. ВАХ элементов цепи, изображенной на рис. 2.1. 1 – ВАХ лампы EL , 2 – ВАХ резистора R_{eq} , 3 – ВАХ последовательного соединения EL и R_{eq}

$U(EL) + U(R_{eq})$. Таким образом, мы можем построить новую ВАХ последовательного соединения, отсекая на рис. 2.2 по оси ординат некоторые фиксированные значения тока I_j и сопоставляя этим значениям тока напряжение

$$U_3(I_j) = U_1(I_j) + U_2(I_j).$$

Полученная кривая $I_3(U)$ позволяет найти ответ нашей задачи. Для этого достаточно по кривой 3 на рис. 2.2 найти значение тока, соответствующее напряжению $U = 6 \text{ В}$. Ответ: ток в цепи, изображенной на рис. 2.1, равен 0.16 А .

Таблица 2.2. ВАХ стабилитрона КС133А, включенного в обратном направлении (данные взяты с сайта <http://radiobooka.ru/radionach/68-stabilizaciya-vupryamlenno-go-napryazheniya.html> с помощью обработки изображения в программе "Graph2Digit")

U , В	4.1	3.9	3.8	3.6	3.5	3
I , мА	40	25	20	10	4	2.7
U , В	2	0	-0.5	-0.7	-0.8	-1
I , мА	1.9	0	-0.1	-1.3	-2.8	-10

Задача о параллельном соединении нелинейных элементов. Найти диапазон изменения напряжения на резисторе $R = 300$ Ом в схеме (см. рис. 2.3), если цепь питается нестабильным источником с силой тока от 20 до 40 мА. В схеме

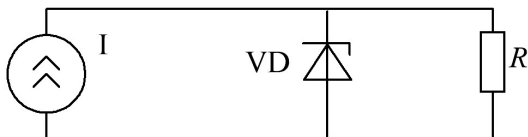


Рис. 2.3. Параллельное соединение нелинейного элемента (стабилитрона) с резистором R

использован стабилитрон VD марки КС133А, чья ВАХ приведена в табл. 2.2.

Итак, начнем с построения ВАХ стабилитрона (кривая 1) и резистора (кривая 2) на общей плоскости (I, U) , как показано на рис. 2.4. Так как пассивные элементы схемы соединены параллельно, на их зажимах действует общее напряжение. Найдем суммарный ток, который протекает через такое соединение при различных значениях приложенного напряжения, как показано на рис. 2.4 (кривая 3). Сложение мы проводили только в первом квадранте плоскости (I, U) , т.к.

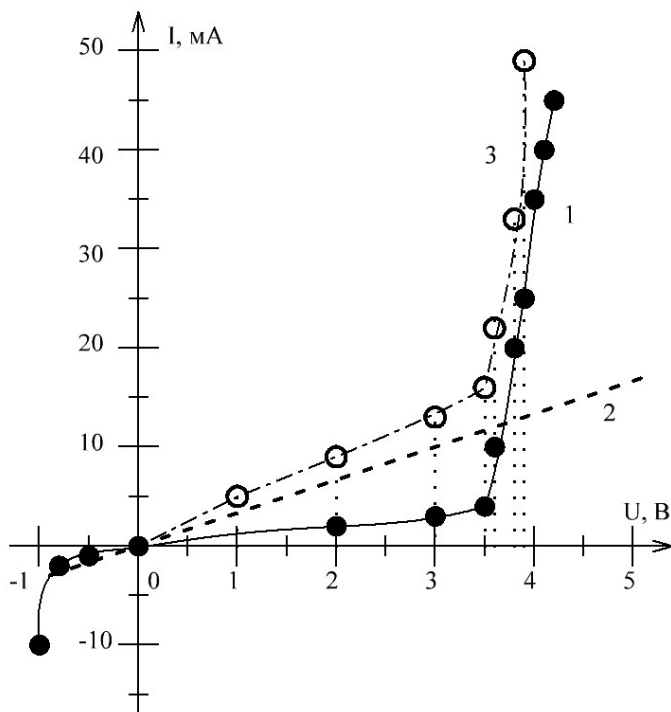


Рис. 2.4. ВАХ элементов цепи, изображенной на рис. 2.3. 1 – ВАХ стабилитрона VD, включенного в обратном направлении, 2 – ВАХ резистора R, 3 – ВАХ параллельного соединения VD и R

направление тока в схеме на рис. 2.3 задано однозначно и нас интересует именно такая конфигурация цепи. Далее, используя линейку (если работа выполняется на бумаге) или маркер (если графики анализируются на компьютере), найдем два значения напряжения, соответствующих двум крайним режимам работы нестабильного источника тока, а именно $U_3(I = 20 \cdot 10^{-3} \text{ A}) = 3.6 \text{ В}$, $U_3(I = 40 \cdot 10^{-3} \text{ A}) = 3.9 \text{ В}$.

Значит, ток, протекающий через резистор R, будет меняться от 12 мА до 13 мА, т.е. стабилитрон в данной ситуации прекрасно справляется с функцией стабилизации тока,

протекающего через нагрузку: при изменении входного тока на 100 % ток в нагрузке меняется всего лишь на 8.3 %.

Обсуждение графоаналитического метода

Сначала следует, конечно, подчеркнуть основные достоинства графоаналитического метода: наглядность получаемых результатов и простота в использовании. Однако рассмотренный метод также имеет ряд существенных недостатков, среди которых наиболее сильным следует признать его неуниверсальность в плане получаемых с его помощью результатов. Действительно, представьте, что в последней задаче (после ее решения) появилась идея заменить исходный резистор другим. Это приведет к тому, что задачу придется решать с нуля – снова рисовать ВАХ, графически их складывать и т.д. Другой слабой стороной графоаналитического метода следует признать его ограничения по точности: графические операции напрямую зависят от аккуратности человека, рисующего графики. Тем не менее при научно-исследовательской работе этот метод является, пожалуй, наиболее предпочтительным: ведь заранее аналитические выражения ВАХ изучаемых устройств неизвестны, и графоаналитический метод остается единственно доступным для анализа нелинейных цепей.

2.3. Аналитический метод

Если нам известны аналитические выражения, описывающие ВАХ устройств, входящих в состав некоторой цепи, то ВАХ всей цепи можно (в зависимости от сложности задачи) вычислить аналитически. Никакого особого алгоритма для этого метода не существует, а решение задач производится в соответствии с законами Кирхгофа. Решим для наглядности несколько задач рассматриваемым методом. Рассмотрим основной нелинейный элемент, чья ВАХ хорошо изучена, – полупроводниковый диод. Диод имеет хорошо знакомое обозначение (см. рис. 2.5), состоящее из стрелки, упирающейся в

перегородку. Иногда студенты путаются, какой электрод относится к p , а какой к n области. Запомнить это очень легко: электротехническое направление тока принято считать от "+" к "-", и при таком включении ("+" к p -области) через диод течет большой ток (диод открыт). Такое направление (большого) тока через диод соответствует стрелке в обозначении диода. Если же включить ток в обратном направлении ("+" к n -области), то ток уткнется в перегородку на изображении диода, т.е. ток "перекрыт" и не проходит через диод. Считается, что ток I_d , протекающий через диод, зависит от напряжения U_d на нем согласно выражению

$$I_d = I_0[e^{U_d\varphi_0} - 1],$$

где I_0 — так называемый "обратный" ток, который протекает через диод даже в том случае, когда он закрыт. Этот ток обусловлен тепловым движением неосновных носителей зарядов (т.е. дырками в n -области и электронами в p -области), поэтому он очень мал: характерная величина I_0 для маломощных (прямой ток до 1 А) диодов составляет порядка 10 мкА. В этом же выражении φ_0 — константа, равная отношению заряда электрона к энергии теплового движения k_bT , где k_b — постоянная Больцмана, а T — температура в градусах Кельвина. При комнатной температуре $\varphi_0 = 38 \text{ В}^{-1}$. Проанализируем несколько цепей, содержащих диоды.

Задача № 1. Определить ВАХ цепи, изображенной на рис. 2.5. На схеме изображены два диода, соединенные анодами (p -областями). Катоды (n -области) диодов подключены к клеммам A , B . Цель задачи — найти ВАХ цепи, т.е. найти зависимость вида $I_{AB} = f(U_{AB})$. Чтобы придать задаче осмысленность, дадим следующую интерпретацию: анализируемая цепь является простейшей моделью биполярного $n - p - n$ транзистора в режиме отсечки (напряжения на базе нет, транзистор закрыт, через него течет только обратный ток коллектора). Для того чтобы написать аналитическое выражение для ВАХ анализируемой цепи, нам необходимо проанализировать включение элементов в цепь: диоды VD1, VD2

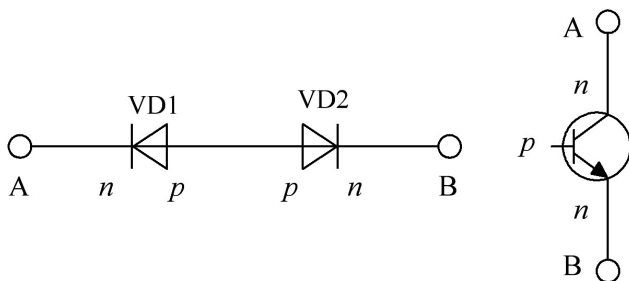


Рис. 2.5. Последовательное соединение двух диодов (слева) и простейшая модель биполярного $n - p - n$ транзистора (справа), основанная на таком включении диодов

включены последовательно, и через них протекает общий ток I_{AB} , напряжение U_{AB} складывается из двух U_{VD1} и U_{VD2} . Таким образом, можно записать следующие выражения:

$$I_{AB} = I_{VD1} = I_{VD2},$$

$$U_{AB} = U_{VD1} + U_{VD2}.$$

Чтобы воспользоваться известной формулой для ВАХ диода надо предварительно договориться о полярности подключаемого источника, т.е. нужно определиться, какой из диодов включен в прямом направлении, а какой — в обратном, и что считать отрицательным направлением тока. Для определенности будем считать, что потенциал клеммы A выше потенциала клеммы B . Тогда диод VD2 включен в прямом направлении, и для него можно записать:

$$I_{AB} = I_0[\exp(\varphi_0 U_{VD2}) - 1],$$

откуда

$$U_{VD2} = (\varphi_0)^{-1} \ln \left(\frac{I_{AB}}{I_0} + 1 \right).$$

С выражением для U_{VD1} дело обстоит значительно сложнее, ведь у нас есть уже определенное на предыдущем шаге положительное направление тока и напряжения. Чтобы не

запутаться в знаках, рекомендуется качественно нарисовать ВАХ при указанном включении и "восстановить" выражение с последующей его мысленной проверкой, как это сделано на рис. 2.6, на котором слева изображена качественная ВАХ диода, из которой видно, что в первом квадранте $I_{AB} \sim (\exp(U_{AB}) - 1)$. На этом же рис. 2.6 справа качественная ВАХ

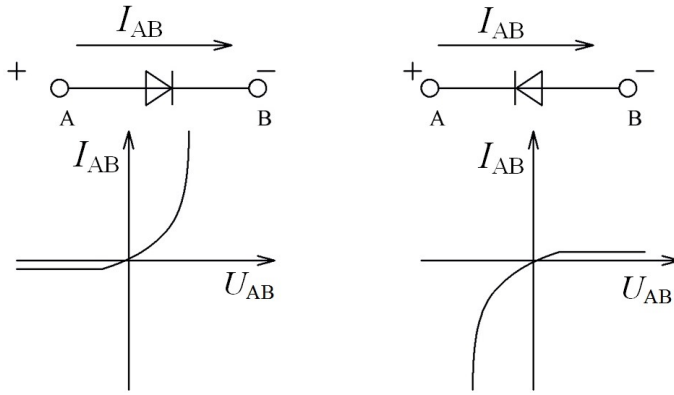


Рис. 2.6. Прямое и обратное включение диода в зависимости от условно заданного положительного направления тока и согласованной с ним полярности напряжения

диода имеет другой вид, а именно $I_{AB} \sim (1 - \exp(-U_{AB}))$. Таким образом, для диода VD1 выражение, описывающее ВАХ, будет иметь вид

$$I_{AB} = I_0[1 - \exp(-U_{VD2}\varphi_0)],$$

и напряжение соответственно будет записано в виде

$$U_{VD1} = -(\varphi_0)^{-1} \ln(1 - \frac{I_{AB}}{I_0}).$$

Результирующее напряжение

$$U_{AB} = U_{VD1} + U_{VD2} = (\varphi_0)^{-1} (\ln \left(\frac{I_0}{I_0 - I_{AB}} \right) + \ln \left(\frac{I_{AB} + I_0}{I_0} \right)),$$

$$U_{AB} = (\varphi_0)^{-1} \ln \left(\frac{I_0 + I_{AB}}{I_0 - I_{AB}} \right),$$

откуда легко выразить ВАХ анализируемой цепи:

$$I_{AB} = I_0 \frac{\exp(\varphi_0 U_{AB}) - 1}{\exp(\varphi_0 U_{AB}) + 1}.$$

Проанализируем полученный ответ. Видно, что при нулевой разности потенциалов узлов A и B ток равен нулю. Это разумно, так как в нашей ветви кроме двух пассивных элементов (диодов VD1 и VD2) ничего нет, следовательно, электрический ток может появляться только под действием внешних сторонних сил. Проанализируем случай высоких напряжений, когда $\exp(\varphi_0 U_{AB}) \gg 1$. В этом случае $I_{AB} = I_0$, что тоже разумно, ведь при таком напряжении второй диод на исходной схеме будет полностью открыт, а режим цепи будет полностью ограничиваться обратным током первого диода. В случае больших отрицательных сопротивлений $\exp(\varphi_0 U_{AB}) \rightarrow 0$ (при $U_{AB} \ll 0$) искомый ток $I_{AB} = -I_0$, т.е. опять получается правильный с точки зрения здравого смысла результат. Полученная ВАХ качественно нарисована на рис. 2.7.

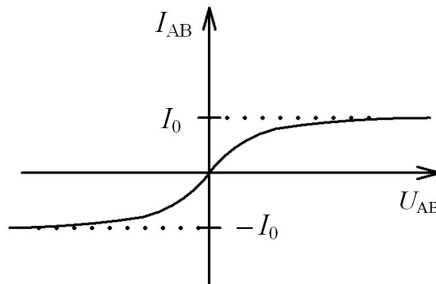


Рис. 2.7. Качественно нарисованная ВАХ цепи, изображенной на рис. 2.5

Задача № 2. Рассчитать ВАХ параллельного соединения двух включенных навстречу диодов, как показано на рис. 2.8.

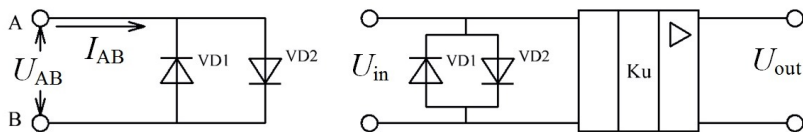


Рис. 2.8. Параллельное встречное соединение диодов (слева) и пример использования такой схемы в качестве устройства предохранения усилителя

Нам требуется найти результирующую ВАХ, т.е. определить зависимость $I_{AB} = f(U_{AB})$ для схемы, изображенной слева на рис. 2.8. На первый взгляд, задача кажется бессмысленной: ведь, как известно, диод — это устройство, призванное хорошо пропускать ток в одном направлении и блокировать прохождение тока в обратном направлении. Здесь же диоды включены так, что при любой полярности напряжения на клеммах U_{AB} будет протекать большой ток, ведь при этом один из двух диодов оказывается открытым. Тем не менее после решения задачи будет видно, что и такая схема имеет свои достоинства и область применения. В действительности эта схема используется в виде защитной цепи на входе мощных усилителей с большим коэффициентом усиления K_u , как показано на рис. 2.8 справа. Итак, наша задача — найти результирующую ВАХ, используя выражение для ВАХ диода. В анализируемой схеме диоды включены параллельно, поэтому на них действует общее напряжение U_{AB} , а токи, протекающие через них, складываются в один ток I_{AB} . Запишем выражение для тока каждого из диодов:

$$I_{VD1} = I_0[1 - \exp(-\varphi_0 U_{AB})],$$

$$I_{VD2} = I_0[\exp(\varphi_0 U_{AB}) - 1],$$

$$I_{AB} = I_{VD1} + I_{VD2}.$$

Поэтому конечное выражение имеет вид

$$I_{AB} = I_0[\exp(\varphi_0 U_{AB}) - \exp(-\varphi_0 U_{AB})] = 2I_0 \operatorname{sh}(\varphi_0 U_{AB}).$$

Изобразим полученную ВАХ на графике (см. рис. 2.9). Как

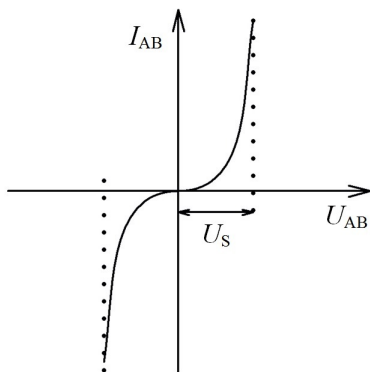


Рис. 2.9. ВАХ цепи, изображенной на рис. 2.8

видно из графика, схема из двух диодов по сути ограничивает напряжение на входе следующего каскада (например, усилительного, как показано справа на рис. 2.8) до значений от $-U_S$ до $+U_S$, где U_S — падение напряжения при прямом включении диода. Характерные значения U_S различаются для разных диодов. Например, для кремниевых диодов $U_S = (0.6 - 0.7)$ В, а для диодов Шоттки $U_S = (0.2 - 0.4)$ В.

Рассмотрим последнюю задачу на тему нелинейных цепей постоянного тока, касающуюся использования популярных устройств — светодиодов (в английской литературе обозначаются как LED — light emission diode). Как известно, для световой индикации (а иногда и для освещения) используются полупроводниковые светодиоды. Такие приборы представляют собой $p - n$ переход, изготовленный из специальных материалов, в прозрачном корпусе. При протекании прямого тока через диод каждый электрон переходит из области p (где ему приписывается некоторая энергия E_p , соответствующая зоне проводимости в p -кристалле) в область n (где ему приписывается некоторая энергия E_n , соответствующая зоне проводимости в n -кристалле), причем, как известно, $E_p > E_n$. При таком

переходе электрон излучает порцию энергии (квант электромагнитного излучения), равную $(E_p - E_n)$ в окружающее пространство, и если правильно подобрать материалы p и n кристаллов, то частота излучаемого кванта может принадлежать диапазону частот световых волн, и анализируемый диод будет излучать свет. Строго говоря, излучают все $p - n$ переходы, однако светодиоды стоят обособленно именно за счет особых материалов, позволяющих излучать свет (в основном, это легированные кристаллы арсенида галлия). Таким образом, ВАХ светодиода — это ВАХ обычного полупроводникового диода, которую можно использовать для анализа электрических схем.

И в завершение этого небольшого экскурса в теорию светодиодов поговорим о полярности питания светодиода. Часто студенты неправильно включают светодиод на схемах, что связано с непониманием смысла работы светодиода, ведь свет — это фотоны, и их число прямо пропорционально протекающему через $p - n$ переход току. Таким образом, чтобы был свет, нужен большой ток, а это возможно только при прямом включении диода. Рассмотрим следующую задачу: найти выражение для ВАХ последовательного соединения светодиода и резистора, изображенного на рис. 2.10, и рассчитать необходимое сопротивление R . Источник питания этой схемы имеет ЭДС $E = 10$ В. Для этой цели мы воспользуемся сразу обои-

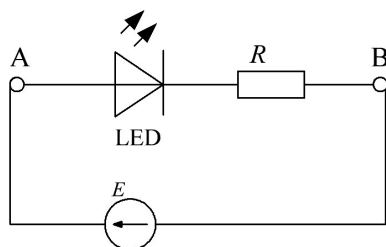


Рис. 2.10. Последовательное включение светодиода с резистором R

ми способами анализа нелинейных цепей. Сначала построим графики на плоскости (I, U) ВАХ диода (кривая 1) и ВАХ резистора (кривая 2), как показано слева на рис. 2.11.

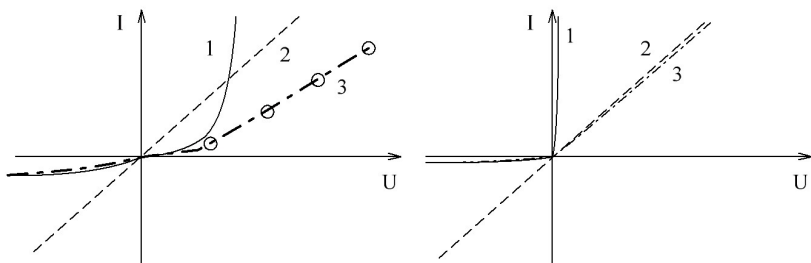


Рис. 2.11. Качественно изображенные ВАХ диода (кривая 1), резистора (кривая 2) и их последовательного соединения (кривая 3). Слева рисунок показан в "учебном" масштабе, а справа показана та же плоскость (U, I) , но в характерном масштабе задачи

Результирующая ВАХ получается по нескольким точкам, изображенным кругами на графике слева на рис. 2.11. Эти точки получены так же, как и в самой первой из рассмотренных нами в этой теме задач. Рядом справа на рис. 2.11 дана та же самая плоскость (I, U) , однако характерный масштаб по оси абсцисс соответствует масштабу анализируемой задачи, т.е. $E = 10 \text{ В}$, в то время как на рис. 2.11 слева в качестве единицы масштаба по оси абсцисс явно выбрано напряжение U_S , смысл которого объяснен в предыдущей задаче. Не следует забывать, что ток диода пропорционален экспоненте. Поэтому, как только напряжение на нем превысит U_S , диод моментально открывается и ток стремительно возрастает через него. Поэтому питать светодиод (да и вообще любой диод) непосредственно от источника ЭДС нельзя. Ток может быстро превысить максимально допустимые для диода значения.

Чтобы не быть голословными, рассмотрим для нашей задачи конкретный пример — светодиод марки КИПД 21 А1-К. Каждый прибор обладает своими паспортными характери-

стиками, которые гарантирует завод-изготовитель. Их можно посмотреть, например, здесь [7]. Среди наиболее существенных (для решения задачи) характеристик следует упомянуть прямой ток $I_f = 20$ мА и прямое напряжение $V_f = 2$ В. Эти характеристики соответствуют току, на который рассчитан светодиод, и прямое напряжение, которое падает на нем при протекании по нему этого тока. Превышение этих параметров недопустимо, т.к. это приведет к выходу диода из строя.

Получив паспортные данные, мы уже готовы решить задачу о нахождении номинала резистора R , ведь ток, который нужно задать, мы знаем — это 20 мА. Напряжение источника E делится между диодом и резистором, но мы при этом знаем, какое падает прямое напряжение на диоде — это 2 В, следовательно, напряжение на резисторе будет $(E - 2) = 8$ В, и это при том же самом токе в 20 мА. Следовательно, резистор должен иметь сопротивление 400 Ом. Еще раз отмечаем, что ток в этой схеме на рис. 2.11 определяется именно резистором, а не диодом. Запишем также аналитическое решение задачи, т.е. выражение вида

$$U_{AB} = I_{AB}R + (\varphi_0)^{-1} \ln \left(\frac{I_{AB} + I_0}{I_0} \right).$$

По сути, это и есть выражение для ВАХ нашей цепи, однако, как легко заметить, это выражение совершенно непригодно для анализа — из него невозможно извлечь хоть сколько-нибудь полезную информацию, чего не скажешь о результатах графоаналитического метода, где ясно видна суть работы цепи.

Модель полупроводникового диода "Идеальный вентиль"

В последней задаче можно было отметить следующую особенность: диод работает в открытом режиме, на нем падает напряжение U_S , и больше он на работу схемы не влияет, дальнейшее увеличение E не приводит к изменению U_S . При значительных E , например 40 В, U_S становится настолько малым в процентном отношении, что им вообще пренебрегают и

считают его равным нулю. При этом, если речь идет об обычном диоде, он используется как просто "идеальный" вентиль (подобно водопроводному крану), который имеет внутреннее сопротивление $R = 0$ Ом в открытом состоянии и бесконечно большое R при обратном смещении. Такая идеализированная модель часто используется при устном анализе схемы "в уме" в первом приближении.

Задачи для самостоятельного решения

Задача № 11. Аналитически вычислить ВАХ параллельного соединения полупроводникового диода с резистором R . Построить качественный график.

Задача № 12. Аналитически вычислить ВАХ последовательного согласного соединения двух полупроводниковых диодов. Построить качественный график. Объяснить, где можно применить подобную схему.

Задача № 13. Аналитически вычислить ВАХ параллельного согласного соединения двух полупроводниковых диодов (такое включение распространено в блоках питания, когда два маломощных диода включаются параллельно для увеличения силы тока источника). Построить качественный график.

Глава 3

Линейные цепи переменного тока

3.1. Вводные замечания

В этой главе мы не будем описывать все теоретические основы и исторические предпосылки метода комплексных амплитуд (МКА). Сознательно исключается из рассмотрения предшествующий методу комплексных амплитуд метод векторных диаграмм ввиду его ограниченности. В предлагаемой главе, как ни в какой другой, много места уделено проработке практического использования метода, чтобы углубить понимание метода у студентов, освоивших теорию на лекционных занятиях. Как и в предыдущих главах, вся теория оформлена в виде коротких замечаний. Такой вид подачи информации, во-первых, наделяет пособие функциями расширенного справочника, а во-вторых, отражает характер дополнительного материала, сопровождающего подробный лекционный курс. Математический аппарат, используемый в данной главе, — это некоторые вопросы теории функции комплексного переменного (ТФКП), ведь метод комплексных амплитуд — это операторный метод. МКА позволяет анализировать линейные электрические цепи, работающие в установившихся режимах

под воздействием гармонических сигналов.

3.2. Предварительные теоретические замечания

Замечание № 1. Элементы цепей переменного тока. Полярность напряжений в цепях переменного тока

№ 1 — 1. Источники напряжения

Источники переменного напряжения (и тока) иногда неверно трактуются студентами как приборы, которые все время меняют свою полярность на выводных клеммах. На практике дело обстоит несколько иначе: у источника переменного напряжения есть две клеммы, называемые "фаза" и "ноль" (также может использоваться обозначение "земля"), причем потенциал клеммы "ноль" является неизменным, равным 0 В, а потенциал клеммы "фаза" меняется по соответствующему гармоническому закону. Потенциал "фазы" полупериода оказывается больше потенциала "ноля", а другие полупериода — меньше. Поэтому ток во внешней цепи течет от "фазы" к "нолю", а потом обратно. Из этого объяснения следует, что меняется не "полярность" источника, а потенциал одной клеммы источника относительно потенциала другой. Важно уяснить это отличие.

Как отличие клемм источников питания проявляется на практике? В лабораторных макетах питание электрических цепей генераторами переменной ЭДС осуществляется с помощью коаксиальных кабелей, внешняя оплетка которых является "землей", а центральная жила — "фазой". Неправильное подключение генератора к нагрузке чаще всего не является чем-то критичным, однако может обернуться известными проблемами: в измерительных системах, куда генераторы входят в виде готовых модулей, неправильная коммутация аппаратуры сильно зашумляет полезный измеряемый сигнал. Также неправильное включение может привести к выходу из строя прецизионного измерительного оборудования с высоким ко-

эффицентом усиления предварительных каскадов. Сказанное предупреждение особенно критично для несимметричных схем.

Приведенные доводы нужны для постулирования следующей важной мысли: клеммы источника переменного ЭДС/тока **НЕРАВНОЗНАЧНЫ** точно так же, как и клеммы источников постоянного ЭДС/тока. Этот существенный вывод извечно упускается в учебниках по теории цепей по той причине, что теоретическая база однофазных цепей строится на примерах с одним источником переменного напряжения, а для таких задач (именно задач, а не лабораторных работ!) способ включения внешнего генератора не играет роли. Со всем иначе выглядят задачи с двумя и более источниками ЭДС в разных ветвях цепи, где местонахождение "нулевого" провода у источника имеет первостепенную важность для правильного составления уравнений. Из сказанного следует, что изображать источник переменного ЭДС на схемах нужно точно так же, как и источники постоянного ЭДС (рис. 3.1).

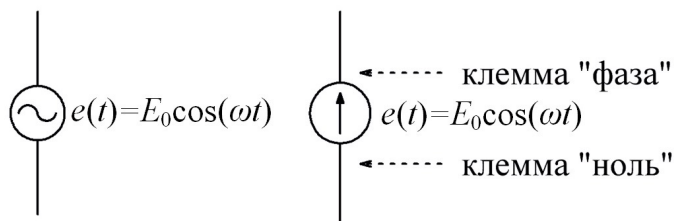


Рис. 3.1. Условные изображения источников переменной ЭДС. Справа изображен более предпочтительный вариант, так как он однозначно указывает на расположение клемм "фаза" и "ноль"

№ 1-2. Напряжение на катушке индуктивности в цепи переменного тока

Напряжение на катушке индуктивности необходимо обсудить отдельно, чтобы раз и навсегда уяснить: напряжение на катушке индуктивности U_L и ЭДС самоиндукции e_L — это

две разные по смыслу величины. Непонимание этого часто приводит к ошибкам у студентов, освоивших раздел "Электричество и магнетизм" в курсе "Общей физики" и приступивших к изучению теории цепей. В курсе "Общей физики" во всех разделах, посвященных вопросам индукции, самоиндукции и взаимоиנדукции, речь идет об ЭДС, возникающей на зажимах катушки L при изменении сцепленного с ней потока Φ магнитного поля. Численно ЭДС самоиндукции определяется с помощью закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Знак минус в этой формуле используется авторами учебных курсов по общей физике с двумя целями.

- В явном виде продемонстрировать правило Ленца. Согласно этому правилу ЭДС самоиндукции e_L , возникающая на зажимах катушки, стремится создать индукционный ток, который создал бы в катушке магнитное поле, противодействующее исходному изменению потока Φ . Знак минус в законе Фарадея указывает на то, что индуцированная ЭДС согласована с направлением индукционного тока. Заметьте, что ЭДС самоиндукции первична: она существует и в том случае, когда катушка индуктивности не включена ни в какую цепь и фактически никакого индукционного тока при этом через нее не протекает. ЭДС самоиндукции в конечном счете и создает падение напряжения на катушке, которое можно измерить: $U_L = -e_L$.
- Корректно записать уравнения Кирхгофа для простейших случаев. Как уже обсуждалось ранее в главе 1, посвященной расчету цепей постоянного тока, в курсе общей физики обычно принято писать уравнение для контура в виде

$$(\text{сумма падений напряжения}) = (\text{сумме действующих ЭДС}).$$

И в этом смысле ЭДС самоиндукции подразумевается писать в правой части, будто она является неким активным элементом (со сторонними силами), включенным последовательно в цепь контура вместо катушки индуктивности. Такое представление об ЭДС самоиндукции иногда оказывается полезным и в радиотехнике: например, при изучении радиоприема ЭДС высокочастотных токов, наведенных в антенне радиоприемника, усиливается за счет резонанса в первичном колебательном контуре. При этом в колебательном контуре отмечается резонанс напряжений, а не токов, именно за счет того что эквивалентный источник ЭДС оказывается включенным в контур последовательно, как и сама катушка контура [8].

С точки зрения методики решения задач подход с использованием ЭДС самоиндукции в уравнениях Кирхгофа неудовлетворителен, так как таит в себе опасность ошибки в знаке функции. Мы уже обсуждали, что знак перед напряжением/ЭДС определяется не только полярностями клемм, но и тем, в каком направлении совершать обход по контуру. Поэтому при решении задач всегда работают не с ЭДС самоиндукции, а с падением напряжения на катушке, обусловленным ЭДС самоиндукции. Формально эти величины отличаются всего лишь знаком:

$$U_L = -e_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt}.$$

Здесь использовано определение индуктивности $L = \Phi/I$ как коэффициента пропорциональности между полным потокосцеплением (в нашем случае потокосцеплением катушки) и током, протекающим через нее. Заметим, что использование U_L выгодно отличается от e_L тем, что знак U_L определяется автоматически при нахождении тока I , протекающего через ветвь с катушкой. Этот основной вывод можно сформулировать в виде главной мысли замечания № 1-1 и 1-2.

Напряжение на катушке индуктивности U_L является автоматически согласованным с током I ветви, протекающим через нее, а поэтому лучше подходит для составления уравнений Кирхгофа, чем ЭДС самоиндукции.

№ 1-3. Напряжение на конденсаторе

Напряжение U_C на конденсаторе прямо пропорционально заряду на конденсаторе q . В линейных цепях коэффициент пропорциональности между ними является константой и называется емкостью конденсатора C , $q = CU_C$. Так как электрический заряд, накапливающийся на обкладках конденсатора, может быть выражен через ток, протекающий через конденсатор $I_C = dq/dt$, то U_C имеет простой вид:

$$U_C = \frac{1}{C} \int I_C dt.$$

№ 1-4. Ограниченность "элементной базы" R , L , C в теории линейных цепей

Отдельно хотелось бы обсудить тот факт, что в пассивных электрических цепях рассматриваются только три сущности: активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C . Из этих элементов составлены все изучаемые схемы. Резонно задать вопрос, почему таких сущностей всего три. Ответ можно разбить на два дополняющих друг друга объяснения.

Объяснение № 1. Эти элементы исчерпывающе описывают все электромагнитные процессы в цепях. Действительно, электрический ток — это направленное движение заряженных частиц под действием электромагнитного поля (ЭМП), поэтому для исчерпывающего описания тока нужно описать магнитную составляющую ЭМП и электрическую составляющую ЭМП. Это достигается применением индуктивности L и емкости C цепи. В свою очередь, сопротивление R соответствует безвозвратным потерям электроэнергии в цепи. Таким образом, все стороны процесса оказываются охваченными всего тремя элементами R , L , C .

Объяснение № 2. Для указанных трех элементов закон Ома выглядит в наиболее простом (с точки зрения матема-

тики) виде: напряжение на элементе пропорционально либо току, либо производной тока, либо интегралу тока по времени. Можно было бы придумать (и изготовить) другие электрические элементы, например такой, для которого падение напряжения было бы пропорционально второй степени тока

$$U \sim I^2,$$

однако с точки зрения математики мы вышли бы за рамки линейных алгебраических и дифференциальных уравнений. Таким образом, здесь проявляется ограничение математического аппарата: расширение класса изучаемых в теории цепей объектов привело бы нас к нерешаемым уравнениям. Именно по этой причине в теории цепей принято объект любой сложности (в том числе все типы транзисторов) заменять так называемыми "схемами замещения", в которые входят сплошь линейные элементы — R , L , C и идеальные источники ЭДС/тока. Такие схемы замещения позволяют математически просто описать сложный нелинейный объект всего тремя сущностями R , L , C .

Замечание № 2. Общий вид получаемых уравнений

Рассмотрим простейшую цепь, содержащую последовательное соединение резистора R , конденсатора C и катушки индуктивности L , т.е. всех возможных пассивных элементов, которые могут входить в состав линейных цепей переменного тока (см. рис. 3.2). Полученные закономерности мы позднее обобщим на произвольную цепь, содержащую неограниченное количество элементов R , L , C . В линейных цепях переменного тока действуют те же самые законы Ома и Кирхгофа, что и в цепях постоянного тока, лишь незначительно адаптированные под случай переменных сигналов. Рассмотрим это на примере схемы на рис. 3.2. Здесь можно записать уравнение Кирхгофа для контура в следующем виде:

$$E(t) + U_C(t) + U_R(t) + U_L(t) = 0.$$

Из этой записи можно сделать вывод о том, что в цепи переменного тока выполняется закон сохранения энергии: энер-

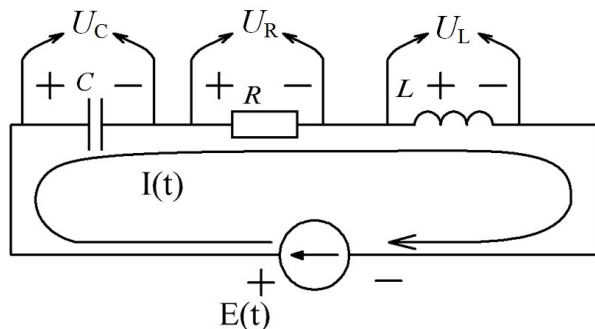


Рис. 3.2. Последовательное соединение R , L , C . Показано мгновенное распределение полярностей напряжений для произвольного момента времени

гия, генерируемая в источнике ЭДС $E(t)$, полностью потребляется и накапливается в элементах подключенной цепи. Закон Кирхгофа для контура выражает собой закон сохранения энергии. Закон сохранения энергии — абсолютно точный закон, выполняющийся в любой момент времени, поэтому мы можем мысленно зафиксировать некоторый произвольный момент времени t_0 и нарисовать мгновенное распределение токов и полярностей ЭДС и напряжений для этого момента времени, не теряя при этом общности получаемых уравнений. Токи и напряжения для произвольного момента времени обозначены на рис. 3.2. Теперь можно обойти наш контур (например, по часовой стрелке) и записать общее выражение с учетом знаков:

$$-E(t_0) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} I(t) dt + I(t_0)R + L \frac{dI(t)}{dt}. \quad (3.1)$$

Мы получили уравнение, в которое входит неизвестная нам функция тока $I(t)$. Это интегро-дифференциальное уравнение, и на сегодняшний день научному сообществу неизвестны методы решения подобных уравнений. Тем не менее, есть

возможность обойти это непреодолимое препятствие и, продифференцировав наше уравнение, получить легко решаемое неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка для искомой функции тока $I(t)$, а именно

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{E(t)}{dt}. \quad (3.2)$$

Этот тип уравнений хорошо изучен в теории дифференциальных уравнений. Решением такого уравнения является сумма двух решений (суперпозиция двух электрических процессов) — общего решения однородного уравнения (ОРОУ) I_S и частного решения неоднородного уравнения I_P (ЧРПУ):

$$I(t) = I_S(t) + I_P(t).$$

Первое (общее) решение имеет вид затухающих собственных колебаний в системе, вызванных переходным процессом в цепи вследствие коммутации источника питания. Это решение со временем быстро (экспоненциально) затухает. Второе (частное) решение имеет вид вынуждающей силы, т.е. производной $E(t)$ по времени. Это решение стабильное (не затухает с течением времени). Именно об этом решении говорят, когда анализируют установившиеся режимы в линейных электрических цепях. Подведем краткий, но важный итог, обобщив полученный результат на любую цепь, содержащую источники переменного ЭДС, резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности.

Уравнения, описывающие электрические процессы в линейных цепях, — это либо линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка, либо интегро-дифференциальные уравнения.

Замечание № 3. Общий вид получаемых решений

Рассмотрим линейную цепь, на которую воздействует гармонический сигнал $x(t)$, как показано на рис. 3.3, и проанализируем отклик $y(t)$ цепи на это воздействие. Как было сказано в предыдущем замечании, отклик системы представляет собой суперпозицию нестационарного коммутационного



Рис. 3.3. Воздействие на линейную цепь и ее отклик

процесса (экспоненциально затухает со временем) и стационарного гармонического сигнала, который имеет такой же функциональный вид, как и у входного сигнала. Основной вывод: в стационарном случае отклик линейной системы $y(t)$ имеет тот же вид, что и входной сигнал $x(t)$.

Пример: если $x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$, то $y(t)$ будет иметь тот же вид $y(t) = Y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_y)$, т.е. будет выражаться той же функциональной зависимостью косинуса с тем же периодом ω_0 . Этот примечательный факт с первого взгляда кажется не имеющим отношения к практике решения задач, однако в методе комплексных амплитуд этот факт используется как фундаментальный. В частности, можно привести такое толкование идеи метода МКА: так как решение задачи не зависит от $\omega_0 t$ исходной и искомой функции, то от этой переменной составляющей можно избавиться и сосредоточить свое внимание на тех величинах, которые представляют непосредственный интерес, а именно на амплитуде Y_0 и фазе φ_y . Избавившись от переменной составляющей $\omega_0 t$, мы можем свести задачу о цепи переменного тока к более простому случаю, аналогичному работе цепи на постоянном токе.

Замечание № 4. Построение комплекса, соответствующего сигналу. Сущность действий, выполняемых над функциями тока и напряжения в МКА

Сложность исходных уравнений, описывающих сигналы в цепях переменного тока, не позволяет применять их непосредственно к решению задач. Поэтому с целью упро-

щения исходных уравнений к ним применяют операторный метод, суть которого сводится к следующему (основополагающая идея символического метода).

Замена исходных интегро-дифференциальных уравнений на алгебраические, с помощью известных операторов интегрирования и дифференцирования для гармонических функций $\sin$ и $\cos$.

В лекционном курсе по теории электрических цепей приводятся подробные теоретические обоснования МКА, а мы сейчас лишь изложим основные идеи применяемого на практике алгоритма МКА.

- Отказ от решения задачи в области действительного переменного. Это решение мотивировано тем, что в области действительного переменного все интересующие нас величины (токи и напряжения) описываются сложными функциями вида $\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Любые алгебраические операции над этими функциями сложны, требуют громоздких математических преобразований. Именно поэтому мы из области действительных чисел (от функций действительных переменных) переходим в область комплексных чисел (к функциям комплексных переменных), где, согласно формуле Эйлера, гармонические функции синуса и косинуса будут выражены через экспоненту с мнимым показателем

$$\exp(j\varphi) = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi),$$

следовательно, сигнал вида $x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$ можно представить как действительную часть комплексной функции:

$$x(t) = \operatorname{Re}(X_0 \exp(j(\omega_0 t + \varphi_x))).$$

Функция $X_0 \exp(j(\omega_0 t + \varphi_x))$ называется комплексом исходной функции, она позволяет значительно упростить операции перемножения и отношения сигналов, ведь при

этом происходит просто сложение и вычитание показателей экспонент. В случае сложения и вычитания сигналов множитель, отвечающий за изменение функции во времени $\omega_0 t$, просто выносится за общую скобку и не мешает производить расчеты.

- Все операции интегрирования и дифференцирования заменяются алгебраическими операторами, что можно рассмотреть на примере катушки индуктивности. Известно, что напряжение на катушке индуктивности при протекании через нее переменного тока $i(t)$ имеет вид $U_L = d(Li(t))/dt$. Подставим типичное выражение гармонического сигнала $I(t) = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_i)$ и получим

$$U_L = -L\omega_0 I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_i) = L\omega_0 I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_i + \pi/2).$$

Сравним полученное выражение с "линейным" законом Ома (для резистора R):

$$U = RI_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_i).$$

Обратим внимание на различие двух последних полученных выражений. Видно, что в случае катушки индуктивности напряжение U отличается от исходного тока множителем $L\omega_0$ и фазой: напряжение опережает ток на 90 градусов. Таким образом, "сопротивление", которое оказывает катушка индуктивности проходящему через нее переменному току, можно выразить так: $Z_L = L\omega_0 j$, где $j = (-1)^{1/2}$. Последнее утверждение справедливо благодаря формуле Эйлера: ведь при $\varphi = \pi/2$ мы имеем $j = \exp(j\pi/2)$. Значит, умножение некоторой функции на j равнозначно умножению ее на $\exp(j\pi/2)$, а значит, позволяет "повернуть" фазу этой функции на 90 градусов.

Так мы заменили операцию дифференцирования функции $\cos(t\omega_0)$ (или $\sin$) умножением ее на $j\omega_0$. Аналогичным образом интегрирование гармонических функ-

ций можно заменить на умножение исходной функции на оператор $(j\omega_0)^{-1}$.

Так, используя перечисленные операторы дифференцирования и интегрирования, мы можем заменить любое интегродифференциальное уравнение на алгебраическое, после чего решить алгебраическое уравнение в комплексных переменных и перейти обратно к действительным переменным. Сказанное можно формально описать в виде алгоритма, показывающего три основных этапа решения задач методом МКА (см. рис. 3.4)

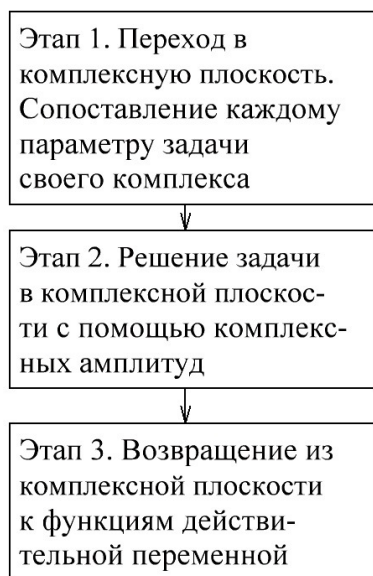


Рис. 3.4. Упрощенная последовательность решения задач методом комплексных амплитуд

Замечание № 5. Правило перехода из действительной плоскости в комплексную и обратно

Использование МКА тесно связано с преобразованием функций действительного переменного в функции комплекс-

ного переменного. Эта операция называется "построение комплекса" исходной функции. Суть этой операции — поставить в (неоднозначное!) соответствие исходной функции новую функцию в комплексной плоскости. Это неочевидное преобразование, заметим сразу, не имеет ничего общего с так называемым "аналитическим продолжением", изучаемым в курсе ТФКП. Отметим две особенности, которые вызывают у студентов много сомнений в использовании метода.

- Особенность № 1. При построении комплекса функции мы от простой функции, например $\cos(\omega t + \varphi)$, переходим к куда более сложному комплексу $\exp(j(\omega t + \varphi)) = \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)$. По сути, мы перешли от одной функции к двум линейно независимым, да еще и в комплексной плоскости. На первый взгляд, такая замена неравнозначна. Сразу возникает вопрос: "Не получаем ли мы каких-нибудь "лишних" решений и нужно ли их как-то проверять/отбрасывать?"
- Особенность № 2. В учебниках по ТОЭ часто не объясняется в исчерпывающей полноте вопрос об эквивалентности комплексов, получаемых из $\sin$ и $\cos$. Обычно рассматриваются функции только одного вида — либо $\cos(\omega t + \varphi)$, либо $\sin(\omega t + \varphi)$, и вся теория строится на этом (частном) примере. Поясним сказанное. В случае, если исходная функция, например ток в ветви цепи, имеет вид $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$, комплекс этой функции выражается формулой

$$\begin{aligned} I(t) &= \operatorname{Re}\{I_0 \exp(j(\omega t + \varphi))\} = \\ &= I_0 \operatorname{Re}\{\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

т.е. мы представляем нашу функцию как действительную часть комплекса, а если вид $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$, то комплекс получается такой же, но мы берем уже мнимую часть

$$I(t) = \operatorname{Im}\{I_0 \exp(j(\omega t + \varphi))\} =$$

$$= \operatorname{Im}\{\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)\}. \quad (3.4)$$

Итак, вопрос заключается в следующем: в двух разных случаях мы берем то мнимую, то действительную части комплекса, что зависит от принятого решения, т.е. задается вопрос: "Чем "аукнется" сделанный выбор при получении ответа к задаче?" Поставленный вопрос становится тупиковым для начинающего студента, если вспомнить, что синус и косинус можно преобразовать друг в друга сдвигом фазы на 90 градусов. Тем самым выбор между мнимой и действительной частями становится неочевидным: ведь мы ничего не меняем в исходной постановке задачи, переходя от синуса к косинусу изменением фазы, но решение от этого меняется сильно.

Ответы на поставленные вопросы кроются в курсе ТФКП. С целью напоминания приведем (в виде постулатов) цепочку рассуждений, проливающих свет на поставленные вопросы.

- Используемые в теории цепей источники сигналов описываются функциями $\sin$ и $\cos$, которые являются гармоническими. По определению (см. [9]), гармонические функции — это функции, которые являются непрерывными в некоторой области вместе со своими производными до 2-го порядка включительно и удовлетворяют уравнению Лапласа. Легко убедиться, что функции $\sin$ и $\cos$ удовлетворяют уравнению Лапласа и условию о непрерывности 2-х производных прямой подстановкой.
- По определению, гармонические функции (в том числе интересующие нас $\sin$ и $\cos$) являются аналитическими функциями.
- По определению, аналитические функции — это функции, для которых выполняется соотношение Коши — Римана [10]. Этот вопрос имеет исключительную важность для используемого в методе комплексных амплитуд математического аппарата, поэтому напомним, в чем состо-

ит смысл соотношений Коши — Римана. Если функция $f(x, y) = U(x, y) + jV(x, y)$ комплексного переменного $z = x + jy$ является аналитической в некоторой области, то в этой области справедливы соотношения Коши — Римана

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}.$$

Эти соотношения являются прямым следствием того, что полная производная функции $d(f(z))/dz$ комплексного переменного $z = x + jy$ не должна зависеть от характера приращения dz . С целью доказательства поиск производной осуществляется двумя путями: сначала приращение аргумента делают чисто действительным, т.е. $dz = dx$, после чего dz представляют чисто мнимым, т.е. $dz = jdy$, и приравнивают получившиеся выражения. В полученном тождестве сравниваются мнимые и действительные части, откуда и получаются условия Коши — Римана. По сути, существование производных у функции тождественно тому, что она удовлетворяет условию Коши — Римана.

Однако нас больше интересует не этот краткий экскурс в ТФКП, а важный вывод, вытекающий из него: соотношения Коши — Римана дают жесткую связь между мнимой и действительной частью аналитической функции. Таким образом, зная одну (например, мнимую) часть функции, можно всегда восстановить другую (действительную) часть функции. Перефразируя с целью упрощения толкования, можно сказать так: вся необходимая информация о функции (о той функциональной зависимости, которую она собой являет) содержится уже в одной ее части.

Объединим три постулата и сделаем важный вывод: *представление функции в методе комплексных амплитуд в*

виде мнимой или действительной части своего комплекса производится без каких-либо предпочтений, а получаемые в ходе решения задачи ответы не зависят от сделанного выбора, не содержат лишнего и не теряют нужных решений.

На практике же выбор того, как переходить из действительной плоскости в комплексную и обратно, определяется удобством, выражающимся в числе подготовительных операций: чем меньше на выбранном пути необходимых манипуляций с исходными данными задачи, тем он предпочтительней.

3.3. Метод комплексных амплитуд

Освежив в памяти теоретические основы метода комплексных амплитуд, рассмотрим, как и ранее, четкий алгоритм решения задач с пошаговой инструкцией. Для наглядности продемонстрируем работу метода на конкретной задаче.

Задача. Найти токи, действующие в ветвях электрической цепи, изображенной на схеме (см. рис. 3.5). Параметры задачи: $L_1 = 1.36$ мГ, $L_2 = 10.9$ мГ, $C_1 = 3.25$ мкФ, $C_2 = 9.46$ мкФ, $R = 65$ Ом, $E_1 = 141 \cos(\omega_0 t - 90^\circ)$ В, $E_2 = 282 \sin(\omega_0 t - 50^\circ)$ В, $f_0 = 700$ Гц.

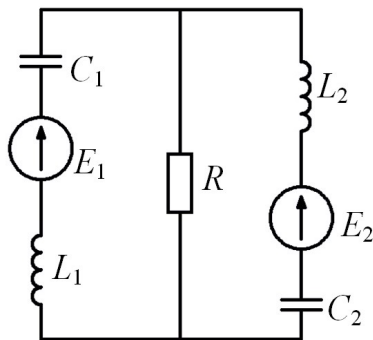


Рис. 3.5. Электрическая схема к демонстрационной задаче

Шаг № 1. Прочитав задачу, определить все имеющиеся параметры. Убедиться, что частоты электрических источников энергии совпадают. Если у разных источников энергии частоты разные, то напрямую решать задачу методом комплексных амплитуд нельзя, а нужно использовать метод наложений и решать задачу для каждого источника в отдельности, а конечный ответ представлять в виде суперпозиции сигналов от каждого из источников (с разными частотами). Если условие задачи удовлетворяет нашему требованию, то нужно выписать все параметры задачи в исходном виде (т.е. в действительной форме) и представить их в виде функций (констант) на комплексной плоскости. При необходимости вычислить угловую частоту.

Применим эту операцию к нашей задаче. В исходной схеме есть два источника переменной ЭДС. Они отличаются друг от друга амплитудой и фазой, но угловая частота у них совпадает, так как у них общая частота $f_0 = 700$ Гц. Это позволяет нам отыскать циклическую частоту с помощью калькулятора (незаменимый и поныне прибор на практических занятиях по решению задач ТОЭ):

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 4398.2297150257105 \dots$$

В теории электрических цепей принято округлять получаемые значения до сотых. Это обеспечивает высокую точность вычислений, подобно тому как принято округлять число Авогадро не до $6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹, а до $6.02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹, показывая тем самым однопроцентную точность используемого округления. Поэтому в данном случае нам следует ограничиться значением $\omega_0 = 4398.23$ рад/с.

Теперь вычисляем комплексные сопротивления элементов, входящих в схему, для чего удобно записать их в некотором порядке, как это сделано в табл. 3.1. Комплексные числа обозначаются крышкой, например $\hat{Z}$. Далее, вычисляем комплексы источников ЭДС, попутно выбирая способ перехода от функций действительной переменной к функциям комплексной переменной. Сразу сделать вывод о том, какую часть

Таблица 3.1. Преобразование сопротивлений элементов, изображенных на рис. 3.5

Элемент схемы, номинал	Комплексное сопротивление элемента
$L_1 = 1.36 \text{ мГ}$	$\widehat{Z}_{L1} = j\omega_0 L_1 = j5.98 \text{ Ом}$
$L_2 = 10.9 \text{ мГ}$	$\widehat{Z}_{L2} = j\omega_0 L_2 = j47.94 \text{ Ом}$
$C_1 = 3.25 \text{ мкФ}$	$\widehat{Z}_{C1} = 1/j\omega_0 C_1 = -j69.96 \text{ Ом}$
$C_2 = 9.46 \text{ мкФ}$	$\widehat{Z}_{C2} = 1/j\omega_0 C_2 = -j24.03 \text{ Ом}$
$R = 65 \text{ Ом}$	$\widehat{Z}_R = R = 65 \text{ Ом}$

комплексов взять за основу, нельзя, ведь $E_1 \sim \cos(\omega_0 t)$, а $E_2 \sim \sin(\omega_0 t)$, однако вид E_1 подсказывает удобное преобразование к синусоидальному виду по известным формулам приведения, что позволяет получить выражения вида

$$E_1 = 141 \sin(\omega_0 t) = \text{Im}\{141 \exp(j\omega_0 t)\},$$

$$E_2 = 282 \sin(\omega_0 t - 50^\circ) = \text{Im}\{282 \exp(j(\omega_0 t - 50^\circ))\}.$$

Так, мы естественным образом сформировали свое (ничем не навязанное) желание работать с мнимыми частями комплексных функций и при "возвращении" из комплексной плоскости в действительную выделять именно мнимую часть полученных ответов. Комплексы действующих значений напряжений E_1 и E_2 будут иметь вид

$$E_1 = 141 \exp(j0^\circ)/2^{0.5} = 99.70(\cos(0^\circ) + j \sin(0^\circ)) = 99.70.$$

$$E_2 = 282 \exp(j(-50^\circ))/2^{0.5} = 199.40(\cos(50^\circ) - j \sin(50^\circ)) = \\ = (128.17 - j152.75).$$

Шаг № 2. Составляем уравнения Кирхгофа для нашей цепи и решаем ее любым удобным методом, подобно тому как это делалось в главе 1. При этом токи, напряжения и величины

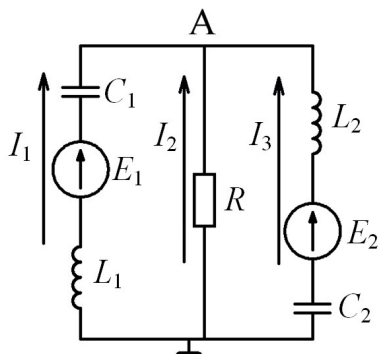


Рис. 3.6. Подготовленная схема к решению методом узловых потенциалов

элементов цепи должны быть выражены в комплексной форме согласно шагу № 1. Применим эту операцию к рассматриваемой задаче. Для этого совершенно произвольно (как и в цепях постоянного тока) направляем токи во всех ветвях и записываем получившиеся уравнения Кирхгофа. Обозначенные токи показаны на рис. 3.6. Запишем уравнения Кирхгофа для узла A и двух произвольно взятых контуров. Сначала составим систему уравнений в исходной дифференциальной форме:

$$L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} - E_1(t) + \frac{1}{C_1} \int I_1(t) dt - I_2 R = 0,$$

$$L_2 \frac{dI_3(t)}{dt} - E_2(t) + \frac{1}{C_2} \int I_3(t) dt - I_2 R = 0,$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

После чего запишем эту же систему уравнений в комплексной форме:

$$j\omega L_1 \hat{I}_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \hat{I}_1 - \hat{I}_2 R = \hat{E}_1,$$

$$j\omega L_2 \widehat{I}_3 + \frac{1}{j\omega C_2} \widehat{I}_3 - \widehat{I}_2 R = \widehat{E}_2, \quad (3.5)$$

$$\widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 + \widehat{I}_3 = 0.$$

Полученную систему уравнений можно решить методом Крамера и получить выражения для комплексных токов, однако схема в рассматриваемой задаче позволяет применить более подходящий метод узловых потенциалов. Действительно, в схеме 3 ветви и всего 2 узла. Потенциал нижнего узла обозначим за нулевой. Запишем первый закон Кирхгофа для узла A , для чего сначала запишем закон Ома для участка цепи применительно к каждой из ветвей (двигаясь слева направо согласно рис. 3.6):

$$\widehat{I}_1 \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) - \widehat{E}_1 + (\widehat{\Phi}_A - \widehat{\Phi}_0) = 0,$$

$$\widehat{I}_2 R + (\widehat{\Phi}_A - \widehat{\Phi}_0) = 0,$$

$$\widehat{I}_3 \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) - \widehat{E}_2 + (\widehat{\Phi}_A - \widehat{\Phi}_0) = 0.$$

После чего, принимая $\widehat{\Phi}_0 = 0$ В, выразим соответствующие токи и просуммируем их, как в последнем уравнении системы 3.5:

$$\frac{\widehat{E}_1 - \widehat{\Phi}_A}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} + \frac{-\widehat{\Phi}_A}{R} + \frac{\widehat{E}_2 - \widehat{\Phi}_A}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = 0.$$

Далее, легко вычислить потенциал узла $\widehat{\Phi}_A$. Для упрощения вычислений обозначим стандартным способом проводимости ветвей:

$$\widehat{G}_1 = (j5.98 - j69.96)^{-1} = j/63.98 = j15.63 \cdot 10^{-3},$$

$$\widehat{G}_2 = 1/65 = 15.38 \cdot 10^{-3},$$

$$\widehat{G}_3 = (j47.94 - j24.03)^{-1} = -j/23.91 = -j41.82 \cdot 10^{-3}.$$

Подставим эти параметры в выражение

$$\widehat{\Phi}_A = \frac{\widehat{G}_1 \widehat{E}_1 + \widehat{G}_3 \widehat{E}_2}{\widehat{G}_1 + \widehat{G}_2 + \widehat{G}_3}.$$

Произведем вычисления

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_A &= \frac{99.70 \cdot j15.63 + (128.17 - j152.75)(-j41.82)}{15.38 - j26.19} = \\ &= \frac{j1558.311 - j5360.0694 - 6388.005}{15.38 - j26.19} = \\ &= \frac{-6388.005 - j3801.7584}{15.38 - j26.19} = \frac{-7433.705 \exp(j30.76^\circ)}{30.37203 \exp(-j59.57^\circ)} = \\ &= -244.73 \exp(j90.33^\circ) = (1.409 - j244.72). \end{aligned}$$

Полученный потенциал позволяет сразу отыскать токи:

$$\begin{aligned} \widehat{I}_1 &= \widehat{G}_1(\widehat{E}_1 - \widehat{\Phi}_A) = j15.63 \cdot 10^{-3} \cdot (99.70 - 1.409 + j244.72) = \\ &= j15.63 \cdot 10^{-3}(98.291 + j244.72) = (j1.536 - 3.825) = \\ &= 4.12 \exp(-j68.12^\circ). \\ \widehat{I}_2 &= \widehat{G}_2(-\widehat{\Phi}_A) = -3.765 \exp(j90.33^\circ) = (0.0217 - j3.76). \\ \widehat{I}_3 &= \widehat{G}_3(\widehat{E}_2 - \widehat{\Phi}_A) = 6.55 \exp(-j54.03^\circ). \end{aligned}$$

Шаг № 3. Переход от комплексов к соответствующим функциям действительного переменного.

Теперь, получив все необходимые выражения в комплексной форме, можно сделать последний шаг и перейти из комплексной плоскости в плоскость действительных чисел. Для этого воспользуемся тем фактом, что мы на Шаге № 2 записывали комплексы как проекции на мнимую ось. Значит, и обратная операция должна сопровождаться проецированием на мнимую ось, а именно:

$$I_1 = Im\{4.12 \exp(-j68.12^\circ) \exp(j\omega_0 t)\} = 4.12 \sin(\omega_0 t - 68.12^\circ),$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \operatorname{Im}\{-3.765 \exp(j90.33^\circ) \exp(\omega_0 t)\} = \\
 &= -3.765 \sin(\omega_0 t + 90.33^\circ) = -3.765 \cos(\omega_0 t + 0.33^\circ), \\
 I_3 &= \operatorname{Im}\{6.55 \exp(-j54.03^\circ) \exp(\omega_0 t)\} = 6.55 \sin(\omega_0 t - 54.03^\circ).
 \end{aligned}$$

Осталось сделать еще одну операцию. Дело в том, что амплитуды вычисленных токов — это не амплитуды, а действующие значения этих токов (обратите внимание на то, *как* на Шаге № 1 осуществлялся переход к комплексам). Всегда обращайтесь на то, с амплитудными или действующими значениями ведутся вычисления. Запишем полученные функции:

$$\begin{aligned}
 I_1(t) &= 2^{0.5} 4.12 \sin(\omega_0 t - 68.12^\circ) = 5.83 \sin(\omega_0 t - 68.12^\circ) \text{ A}, \\
 I_2(t) &= 2^{0.5} (-3.765 \cos(\omega_0 t + 0.33^\circ)) = -5.32 \cos(\omega_0 t + 0.33^\circ) \text{ A}, \\
 I_3(t) &= 2^{0.5} 6.55 \sin(\omega_0 t - 54.03^\circ) = 9.26 \sin(\omega_0 t - 54.03^\circ) \text{ A}.
 \end{aligned}$$

Задача решена.

Решим еще одну задачу с применением метода комплексных амплитуд, но уже без дополнительных комментариев. Дана схема, изображенная на рис. 3.7. Параметры за-

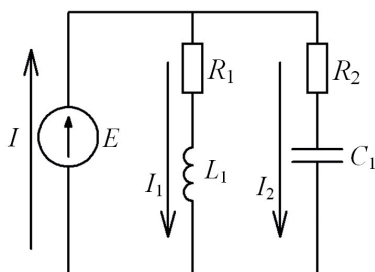


Рис. 3.7. Электрическая схема к задаче

дачи: $L = 50$ мГ, $C = 20$ мкФ, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 200$ Ом, действующее значение напряжения гармонического источника питания составляет 100 В, частота колебаний источника $f_0 = 50$ Гц. Найти ток в цепи источника переменной ЭДС.

Сделаем небольшое замечание, касающееся особенности задачи. По условию задачи нам не задана начальная фаза колебаний, генерируемых источником ЭДС, т.е. по условиям задачи мы вольны произвольно выбрать, во-первых, функцию $\sin$ или $\cos$, а во-вторых, начальную фазу колебаний источника. Для удобства выберем начальную фазу, равную нулю, и косинусоидальную форму сигнала, т.е.

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t),$$

где E_0 — амплитудное значение напряжения, равное $2^{0.5}100$ В = 141.42 В, а ω_0 — циклическая частота сигнала, равная $50 \cdot 2\pi = 314.16$ рад/с.

Дальнейшее решение задачи не требует никаких специфических методов, ведь ток в ветви источника равен сумме токов в соседних двух ветвях, которые можно найти прямым вычислением из условий задачи. Для этого воспользуемся все тем же алгоритмом, начав с перехода от функций действительного переменного к своим комплексам:

$$\begin{aligned}\widehat{Z_L} &= j\omega_0 L = j314.16 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} = j15.71 \text{ Ом.} \\ \widehat{Z_C} &= 1/(j\omega_0 C) = -j/(314.16 \cdot 20 \cdot 10^{-6}) \text{ Ом} = \\ &= -j159.15 \text{ Ом.}\end{aligned}$$

$$E(t) = \operatorname{Re}\{141.42 \exp(j\omega_0 t)\}, \quad \widehat{E} = 141.42 \text{ В.}$$

$$\widehat{Z_{R1}} = 100 \text{ Ом}, \quad \widehat{Z_{R2}} = 200 \text{ Ом.}$$

Следующий шаг — составление уравнений Кирхгофа и Ома для участков цепи:

$$\begin{aligned}\widehat{I} &= \widehat{I_1} + \widehat{I_2}, \\ \widehat{I_1} &= \frac{\widehat{E}}{\widehat{Z_{R1}} + \widehat{Z_L}}, \\ \widehat{I_2} &= \frac{\widehat{E}}{\widehat{Z_{R2}} + \widehat{Z_C}}.\end{aligned}$$

Далее, вычисляем в комплексном виде токи в ветвях

$$\widehat{I_1} = \frac{141.42}{100 + j15.71} = \frac{141.42}{101.23 \exp(j8.93^\circ)} = 1.397 \exp(-j8.93^\circ)$$

$$\begin{aligned}
&= 1.397(\cos(8.93^\circ) - j \sin(8.93^\circ)) = (1.38 - j0.217). \\
\hat{I}_2 &= \frac{141.42}{200 - j159.15} = \frac{141.42}{255.59 \exp(-j38.51^\circ)} = \\
&= 0.5533 \exp(j38.51^\circ) = 0.5533(\cos(38.51^\circ) + j \sin(38.51^\circ)) = \\
&= (0.433 + j0.344)
\end{aligned}$$

и находим искомый ток

$$\hat{I} = (1.813 + j0.127) = 1.82 \exp(j4.00^\circ) \text{ А.}$$

Окончательный ответ можно получить из комплексной амплитуды $\hat{I}$, совершив обратный переход из комплексной плоскости в действительную, отыскав проекцию на действительную ось:

$$I(t) = 1.82 \cos(\omega_0 t + 4^\circ) \text{ А.}$$

Задача решена.

3.4. Связанные индуктивности

Тема со связанными индуктивностями — одна из самых сложных, потому что анализ подобных цепей всегда сопровождается анализом магнитных потоков, создаваемых катушками, и их влиянием друг на друга. Разберемся со всеми тонкостями применения катушек индуктивности. Начнем изучение вопроса, двигаясь от простого к сложному.

Замечание № 1. Направление поля в катушке, согласование потока магнитного поля с направлением тока в катушке

Как известно, ток, протекающий через катушку, создает в ней магнитное поле. Направление поля в катушке зависит не только от направления тока в цепи, но и от того, как намотана катушка. На рис. 3.8 приведено несколько рисунков с целью напомнить о том, как находить ориентацию вектора магнитной индукции B (и, соответственно, направление потока этого вектора) по направлению тока в проводе катушки. Следует обратить внимание на тонкий момент: направление потока в катушке зависит не только от того, как катушка подключена к схеме (т.е. какими клеммами А, Б она включена в цепь), но

и от того, как она намотана. На рис. 3.8 показаны два случая, когда катушки имеют абсолютно идентичное включение: они подключены к клеммам А, Б так, что ток во внешней цепи I_1 течет в одном и том же направлении: от клеммы А к клемме Б.

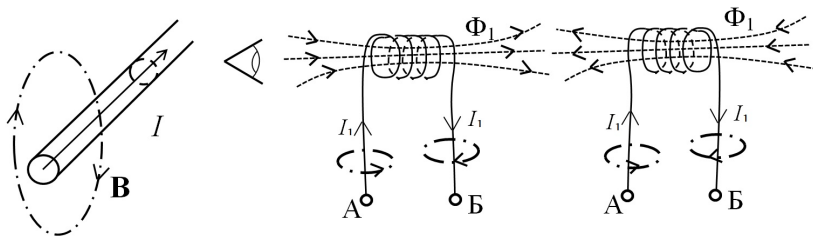


Рис. 3.8. Направление магнитного поля вокруг провода с током I (слева) согласовано правилом буравчика; поток вектора магнитной индукции Φ_1 при протекании тока I_1 через катушку с намоткой по часовой стрелке (в центре); при протекании того же тока I_1 через катушку с намоткой против часовой стрелки (справа). Катушки раздельные, между ними нет магнитной связи

При этом силовые линии магнитного поля, окружающие провод с током возле самих клемм, имеют одно и то же направление, но поле внутри катушки меняется на противоположное, если всего-навсего сменить направление намотки провода.

Чтобы избежать путаницы, рассмотрим далее магнитосвязанные катушки, т.е. такие катушки, в которых действует некоторое общее магнитное поле, обуславливающее перекрестные дополнительные магнитные потоки Φ_{12} и Φ_{21} . Поток с индексом "12" — это поток, который создается в катушке № 1 катушкой № 2. Пояснительная схема приведена на рис. 3.9. В данном случае каждую из катушек пронизывает дополнительный поток магнитного поля от соседней катушки. Причем, как легко догадаться, возможно представить себе две противоположные ситуации, когда магнитный поток

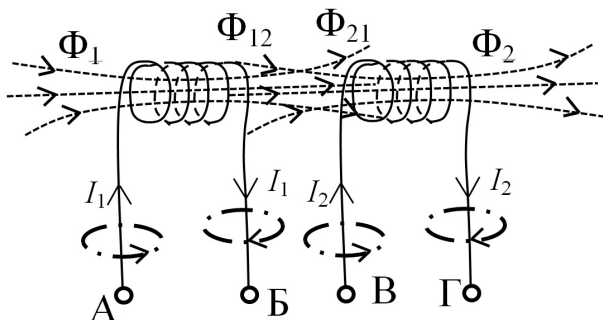


Рис. 3.9. Две встречно включенные магнитосвязанные катушки

соседней катушки совпадает по направлению с собственным магнитным потоком и когда эти магнитные потоки оказываются противоположными. Рассмотрим на примере катушки № 1, в чем выражаются обе ситуации.

Ситуация № 1. Собственный магнитный поток Φ_1 складывается с магнитным потоком от соседней катушки Φ_{12} .

Тогда напряжение на катушке № 1, которое можно будет измерить на клеммах А и Б, будет равно

$$\begin{aligned}
 U_{L1} &= -e_{L1} = - \left(-\frac{d\Phi}{dt} \right) \\
 &= - \left(-\frac{d(\Phi_1 + \Phi_{12})}{dt} \right) = L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{d\Phi_{12}}{dt} = \\
 &= L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь учтено, что падение напряжения на катушке обусловлено действующей в ней ЭДС индукции, причем в данном случае ЭДС индукции представляет собой суперпозицию двух индуцированных ЭДС: первая — это ЭДС самоиндукции, а вторая — ЭДС взаимной индукции. Величина второй ЭДС пропорциональна коэффициенту взаимной индукции M и производной второго тока, что логично, ведь именно ток в катушке № 2 индуцирует ЭДС взаимной индукции в катушке № 1.

Ситуация № 2. Собственный магнитный поток Φ_1 и магнитный поток от соседней катушки Φ_{12} противоположно направлены.

Тогда напряжение на катушке № 1, которое можно будет измерить на клеммах А и Б, будет равно

$$\begin{aligned} U_{L1} &= -e_{L1} = - \left(- \frac{d\Phi}{dt} \right) \\ &= - \left(- \frac{d(\Phi_1 - \Phi_{12})}{dt} \right) = L_1 \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = \\ &= L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь мы получили выражение, в котором второе слагаемое имеет обратный знак в сравнении с предыдущим случаем.

Наличие двух типов магнитосвязанных цепей привело к недопустимым разночтениям в учебной литературе, посвященной теории цепей. Например, в учебнике [11, с. 23] напряжение на магнитосвязанных катушках всегда пишется в виде (3.6). В указанном учебнике это сделано с целью формализовать запись уравнений Кирхгофа, но это, как видно из детальных рассмотрений физики процессов, невозможно сделать. С другой стороны, в учебных курсах, посвященных изучению теории колебаний, всегда используется только выражение вида (3.7). Это связано с тем, что в теории колебаний изучаются системы со многими степенями свободы, где чаще всего магнитная связь действует в изолированных друг от друга контурах. В таких цепях между контурами действует трансформаторная связь, для которой справедлива запись именно в виде (3.7) (подробное объяснение приведено ниже в задаче "воздушный трансформатор"). В более узкоспециализированных учебниках по теории цепей, например [12], делается следующая оговорка: ЭДС взаимной индукции всегда пишут со знаком минус, т.е. как для трансформаторной связи в (3.7),

но "считают, что коэффициент M может быть либо положительным (при согласном направлении потоков самоиндукции и взаимоиנדукции), либо отрицательным (при встречном направлении потоков)" [12, с. 49]. Подобное вольное обращение со знаком M очень опасно, так как кроет в себе большую вероятность совершения ошибок при решении задач. Далее мы всегда будем считать M положительным числом (или равным нулю в случае несвязанных катушек индуктивности). Знак перед ЭДС взаимоиנדукции всегда будем определять, подробно анализируя схемы.

Отсюда можно сделать существенный вывод: *описание магнитосвязанных контуров невозможно формализовать, т.е. невозможно придумать безошибочный универсальный способ записи уравнений для таких цепей.*

У нас не получится так, как, например, в главе 1 при записи уравнений Кирхгофа, произвольно направить токи, формально записать уравнения и получить правильный ответ, ведь теперь знак функции будет зависеть от того, как собрана конкретная магнитосвязанная цепь. При этом выбор знака ЭДС взаимоиנדукции нужно делать непосредственно в ходе задачи, анализируя конкретную постановку задачи и конкретные уравнения.

Приведем примеры, которые продемонстрируют все возможные варианты использования магнитосвязанных цепей, благо их немного.

Пример № 1. Воздушный трансформатор.

Рассмотрим пример цепи, где применена простая модель трансформатора – две индуктивно связанные катушки, с помощью которых электрическая энергия передается (трансформируется) из одной цепи в другую, как показано на рис. 3.10. Для наглядности цепь подразделяется на две части по признаку источника и потребителя электроэнергии. Цепь слева является источником электроэнергии, например бытовая электросеть, а справа изображена пассивная цепь, являющаяся потребителем электроэнергии, например нагреватель-

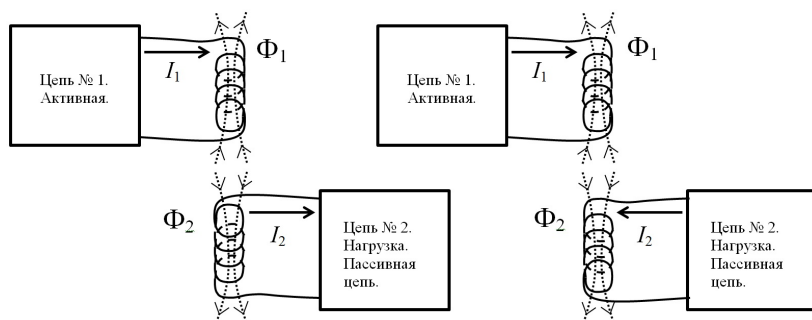


Рис. 3.10. Трансформаторная связь двух цепей. Направления магнитного потока определяются правилом Ленца и не зависят от способа (согласного или встречного) включения катушек. Направление тока во вторичной обмотке, напротив, зависит от способа включения катушек

ный элемент.

Как известно, трансформатор представляет собой две индуктивно связанные катушки L_1 , L_2 , магнитная связь которых равна коэффициенту взаимоиנדукции M . Допустим, что нам известно направление тока в первичной катушке трансформатора I_1 , как показано на рис. 3.10. Можно ли сказать, куда потечет ток во вторичной катушке L_2 ? Да, это можно сделать сразу, следуя простым соображениям. Индукционный ток I_2 во вторичной катушке появляется под действием ЭДС взаимоиנדукции, направление которой определяется правилом Ленца, а именно вторичная катушка будет создавать такой поток магнитного поля Φ_2 , который всегда будет направлен противоположно исходному потоку Φ_1 , причем неважно, как ориентированы катушки друг относительно друга — согласно или встречно. Вид включения катушек, определяемый направлением намотки катушек друг относительно друга, отразится на направлении тока во вторичной цепи, но никак не на направлении магнитного потока, определяемого правилом Ленца (см. рис. 3.10).

Приведем пример задачи на электрическую цепь с трансформаторной связью. Дана электрическая схема, изображенная на рис. 3.11. Найти величину тока в первом (левом) контуре. Параметры задачи: $E = 90 \cos(314t + \pi/6)$ В, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $L_1 = 2$ мГ, $L_2 = 2$ мГ, $M = 2$ мГ, $C_1 = 0.15$ мкФ.

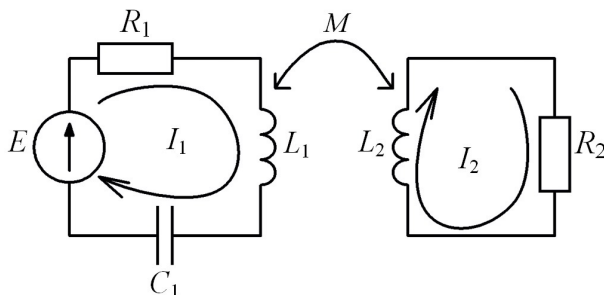


Рис. 3.11. Трансформаторная связь двух контуров

Проанализируем схему сначала в общих чертах. Вообще говоря, представленная схема является сложной колебательной системой, ведь два отдельных контура соответствуют двум степеням свободы этой системы [13]. Действительно, схема описывается двумя независимыми обобщенными координатами — токами I_1 и I_2 (можно было бы взять и другие обобщенные координаты, например электрические заряды, протекающие в контурах q_1 и q_2). Следовательно, в обоих контурах цепи одновременно существуют колебания с двумя различными частотами ω_1 и ω_2 , и применение метода комплексных амплитуд уже некорректно. В таком случае приходится применять методы более сложные, чем мы использовали до сих пор, например, решать систему уравнений Лагранжа. Однако в нашем случае положение спасает тот факт, что второй (правый) контур не является колебательной системой в полном смысле этого слова, ведь будучи изолированным контуром, он не способен реализовать в себе колебательный режим. Упро-

щая мысль, можно сказать, что второй контур не является колебательным, так как в нем отсутствует емкость. Нарисуем направление токов в контурах и запишем уравнения Кирхгофа. На рис. 3.11 направление намотки катушек не указано намеренно, так как в данной задаче это не имеет никакого значения. Судя по направлению токов, катушки расположены согласно. Уравнение Кирхгофа для первого контура

$$I_1 R + L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_1} \int I_1 dt = E(t),$$

$$I_2 R + L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} = 0.$$

Построим комплекс, соответствующий источнику питания:

$$E(t) = \operatorname{Re}\{90 \exp[j(314t + \pi/6)]\}.$$

Тогда на комплексной плоскости с исходными параметрами задачи будут сопоставляться следующие значения:

$$\widehat{E} = 90 \exp(j30^\circ) \text{ В}, \quad \widehat{Z}_{L1} = j\omega_0 L_1 = 314 \cdot 2 \cdot 10^{-3} j \text{ Ом} \\ = 0.628j \text{ Ом}, \quad \widehat{Z}_{L2} = j\omega_0 L_2 = 314 \cdot 2 \cdot 10^{-3} j \text{ Ом} = 0.628j \text{ Ом}, \\ \widehat{Z}_{C1} = (j\omega_0 C_1)^{-1} = 1/(314 \cdot 0.15 \cdot 10^{-6} j) \text{ Ом} = -j2.12 \text{ Ом}.$$

Используем наши значения для записи уравнений Кирхгофа:

$$\widehat{I}_1(R_1 + j\omega_0 L_1 - \frac{j}{\omega_0 C_1}) - j\omega_0 M \widehat{I}_2 = \widehat{E},$$

$$\widehat{I}_2(R_2 + j\omega_0 L_2) - j\omega_0 M \widehat{I}_1 = 0.$$

Выразим из второго уравнения $\widehat{I}_2$ и подставим в первое уравнение:

$$\widehat{I}_1 \left(R_1 + j\omega_0 L_1 + \frac{\omega_0^2 M^2}{R_2 + j\omega_0 L_2} - \frac{j}{\omega_0 C_1} \right) = \widehat{E}.$$

После чего легко вычислить ток $\widehat{I}_2$, подставив комплексные числа, соответствующие параметрам задачи:

$$\widehat{I}_1 = \frac{90 \exp(j30^\circ)}{10 + j0.628 + 0.126 - j0.0264 - j2.12} = \frac{90 \exp(j30^\circ)}{1.126 - j1.1584} =$$

$$= 55.73 \exp(j75.81^\circ).$$

Произведя все вычисления, можно записать окончательный ответ

$$I_1(t) = 55.73 \cos(314t + 75.81^\circ) \text{ A.}$$

Задача решена.

Рассмотрим теперь другую задачу, где направление включения катушек играет существенную роль. Чтобы различать согласное и встречное направления включения катушек, к их обозначениям на схеме добавляют указатели "начала" катушки — маркеры в виде закрашенного круга возле одной из клемм катушки. Можно сказать, что "начало" катушки — понятие абсолютно неопределенное, поэтому его дополняют соглашением вида "пространственная ориентация магнитного потока самоиндукции совпадает по направлению с протекающим через катушку током". Это означает, что если ток внутри катушки протекает от клеммы с маркером ко второй клемме, то и магнитный поток самоиндукции направлен так же. При этом, если катушки в разных частях схемы имеют индуктивную связь, необходимо смотреть, куда направлен ток в обеих катушках.

На рис. 3.12 изображены оба случая согласного и встречного включения катушек. При согласном включении (слева на рис. 3.12) токи протекают внутри катушек одинаково — от маркера к свободной клемме, причем через катушку L_1 протекает ток I_1 , а через катушку L_2 соответственно ток I_2 . При таком включении магнитный поток самоиндукции Φ_1 и магнитный поток самоиндукции Φ_2 обеих катушек направлен в одном направлении. Благодаря магнитной связи части этих потоков воздействуют на соседнюю катушку. Так как потоки совпадают, напряжения на катушках будут соответственно

$$U_{L1} = -e_{L1} = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt},$$

$$U_{L2} = -e_{L2} = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}.$$

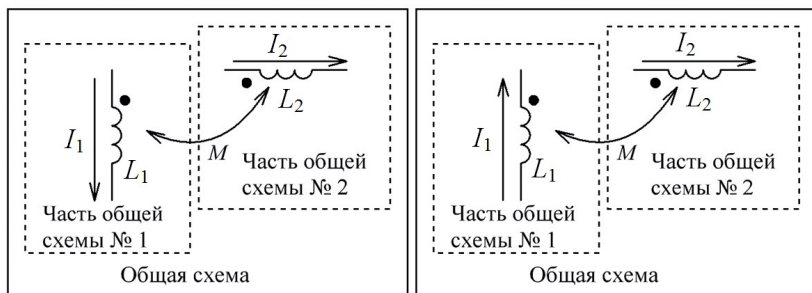


Рис. 3.12. Согласное (слева) и встречное (справа) включение индуктивно связанных катушек. Катушки включены в разные контуры, но входят при этом в одну и ту же электрическую цепь (токи I_1 , I_2 имеют одну и ту же частоту)

Соответственно при встречном включении (справа на рис. 3.12) токи в катушках текут в разные стороны: в первой катушке ток течет к маркеру, а во второй — от маркера. Напряжения на катушках согласованы с направлением соответствующих токов:

$$U_{L1} = -e_{L1} = L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt},$$

$$U_{L2} = -e_{L2} = L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}.$$

Заметим, что в указанном смысле согласное и встречное включение катушек имеет весьма произвольный характер, ведь все зависит от того, как мы нарисуем в схеме первоначальное распределение токов, а эта операция делается произвольно. Тем не менее в конечном счете правильность знаков гарантируется автоматически, если мы не отступаем от оговоренных правил от начала до конца задачи.

Пример решения задачи со связанными индуктивностями.

Задача. Составить в общем виде в дифференциальной

и комплексной форме уравнения Кирхгофа для цепи, изображенной на рис. 3.13. Решение этой задачи, как и ранее, про-

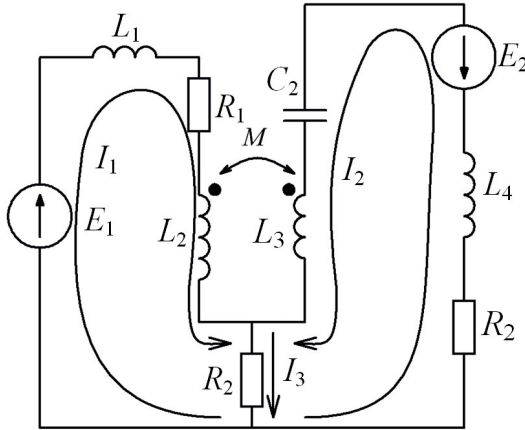


Рис. 3.13. Электрическая цепь с магнитосвязанными контурами

изводим по знакомым шагам: произвольно направляем токи в каждой из ветвей. В данной схеме всего 3 ветви с токами I_1 , I_2 , I_3 и два независимых контура. Следовательно, можно записать три независимых уравнения. Первое — по 1-му закону Кирхгофа для любой из клемм резистора R_3 :

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$

и два других для каждого из контуров:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + I_1 R_1 + L_2 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} + I_3 R_3 - E_1(t) = 0,$$

$$L_4 \frac{dI_2}{dt} + E_2(t) + I_2 R_2 + L_3 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + I_3 R_3 + \frac{1}{C_2} \int I_2 dt = 0.$$

При этом контур слева на схеме обходился по часовой стрелке, а справа — против часовой. Знак перед слагаемыми, описывающими взаимную индукцию катушек L_2 , L_3 , взят с плюсом,

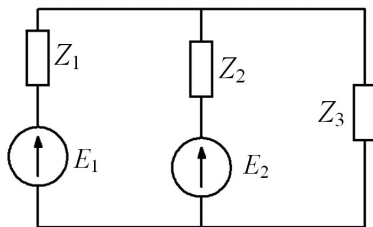


Рис. 3.14. К задаче № 14

так как токи I_1 , I_2 в обоих случаях протекают внутри соответствующих катушек от маркера к свободной клемме. Преобразуем полученные уравнения к комплексному представлению:

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 - \hat{I}_3 = 0,$$

$$j\omega_0 L_1 \hat{I}_1 + \hat{I}_1 R_1 + j\omega_0 L_2 \hat{I}_1 + j\omega_0 M \hat{I}_2 + \hat{I}_3 R_3 = \hat{E}_1,$$

$$\hat{I}_2 R_2 + j\omega_0 L_4 \hat{I}_2 + \frac{1}{j\omega_0 C_2} \hat{I}_2 + j\omega_0 L_3 \hat{I}_2 + j\omega_0 M \hat{I}_1 + \hat{I}_3 R_3 = -\hat{E}_2.$$

Полученную систему уравнений легко решить любым подходящим методом.

Задача решена.

Для успешного усвоения материала по главе предлагаем решить следующие задачи.

Задача № 14. Определить все токи на изображенной схеме, если $\widehat{Z}_1 = \widehat{Z}_2 = (50 + j30)$ Ом, $\widehat{Z}_3 = 100$ Ом, $\widehat{E}_1 = 100$ В, $\widehat{E}_2 = 100 \exp(-j30^\circ)$ В.

Задача № 15. Для каждой из цепей a , b , c рассчитать токи и найти потенциалы узловых точек. Под Z_C понимается реактивное сопротивление $\frac{1}{\omega C}$, источники ЭДС и тока имеют одинаковую начальную фазу и одинаковую циклическую частоту, поэтому на схемах показаны только их амплитудные значения.

Задача № 16. Для каждой из частей схем, приведенных на рис. 3.16, расположенных левее штриховой линии ab , найти

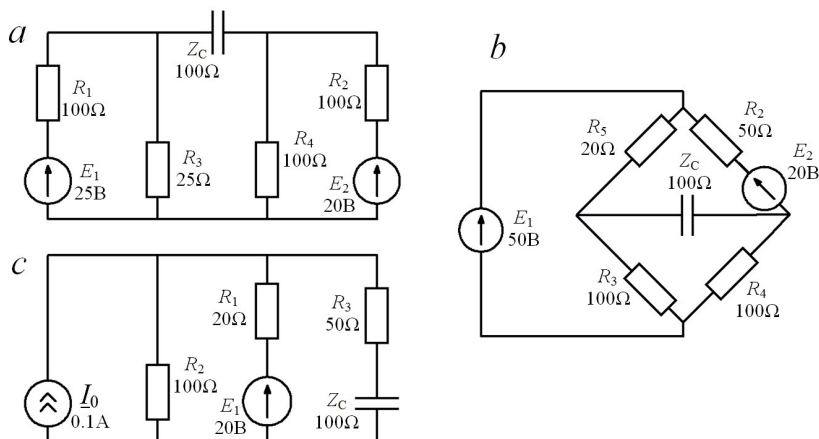


Рис. 3.15. К задаче № 15

ЭДС эквивалентного источника и его внутреннее сопротивление, определить ток в ветви нагрузки, расположенной правее линии ab . Частота источника равна f .

Задача № 17. Подобрать емкость C так, чтобы в цепи схемы на рис. 3.17 (А) при угловой частоте $\omega = 5 \cdot 10^5$ рад/с был резонанс напряжений. Параметры цепи: $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 100$ Ом, $L_1 = 0.1$ мГн, $L_2 = 0.2$ мГн, $M = 0.1$ мГн. При найденной емкости найти токи в ветвях, если $E = 75$ мВ.

Задача № 18. При какой емкости C , включенной в цепь (рис. 3.17 (В)), будет резонанс токов на частоте $f = 10^4$ Гц? Параметры цепи: $L_1 = 318$ мкГн, $L_2 = 159$ мкГн, $M = 124$ мкГн. Вычислить токи, если $E = 40$ мВ.

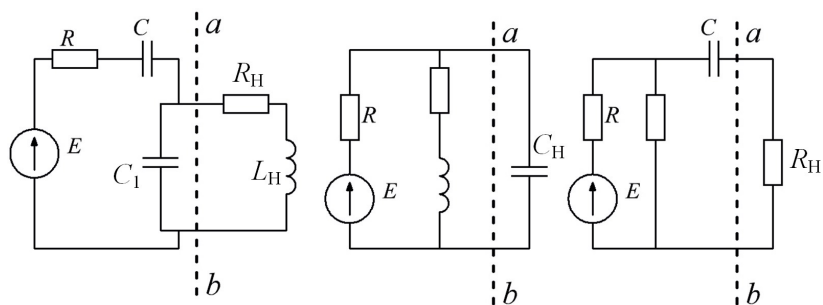


Рис. 3.16. К задаче № 16

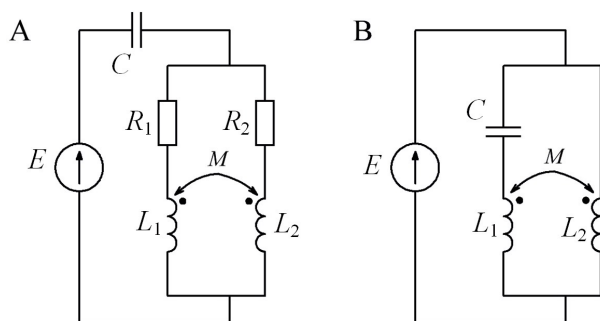


Рис. 3.17. К задачам № 17, 18

Глава 4

Пассивные электрические фильтры

4.1. Однозвенные фильтры

В предыдущей главе мы изучили метод комплексных амплитуд, позволяющий анализировать установившиеся режимы работы электрических цепей переменного тока. Эта глава является прямым продолжением предыдущей и обособлена лишь в той связи, что посвящена узкоспециализированным схемам, способным изменять спектр исходного сигнала, — электрическим фильтрам. Формально фильтр представляет собой четырехполюсник, способный изменить спектр входного сигнала $x(t)$ до спектра выходного сигнала $y(t)$ (см. рис. 4.1). Однако изменения подобного рода не могут привести к появлению в выходном спектре гармоник, которых не было в спектре входного сигнала, т.е. пассивный электрический фильтр способен лишь по-другому перераспределить электромагнитную энергию входного сигнала между существующими гармониками. В лекционном курсе описывается классификация фильтров по характеру изменения спектра — ФНЧ, ФВЧ, режекторный, гребенчатый и т.д., поэтому мы не будем на этом останавливаться. Сделаем по сложившей-

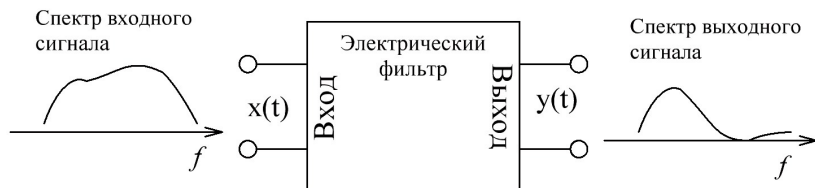


Рис. 4.1. Принцип работы электрического фильтра

ся традиции несколько предварительных замечаний, касающихся специфических особенностей изучаемой темы, чтобы перейти к решению задач.

Замечание № 1. Новая постановка задачи анализа электрической цепи

В предыдущих главах мы изучали цепи переменного и постоянного тока, а интересовавшие нас вопросы можно было свести к следующей формулировке: "Какие токи и напряжения действуют в анализируемой цепи в установившемся режиме?" Во всех задачах целью было "найти напряжение на резисторе" или "определить ток, протекающий через конденсатор". В текущей главе значительно меняется акцент в постановке задачи. Основной вопрос, на который мы будем искать ответ, формулируется так: "Как анализируемая цепь изменяет спектр произвольного входного сигнала?" Столь всеобъемлющий вопрос подразумевает подобающий универсальный ответ, который охватывал бы всевозможный диапазон входных значений: входной сигнал может иметь произвольную амплитуду и произвольную частоту.

В лекционном курсе показывается, что в качестве универсальной характеристики анализируемой цепи удобно использовать комплексный коэффициент передачи $\widehat{K(\omega)}$

$$\widehat{K(\omega)} = \frac{\widehat{U_{out}(\omega)}}{\widehat{U_{in}(\omega)}}, \quad (4.1)$$

где U_{in} и U_{out} — входное и выходное напряжение фильтра со-

ответственно. Удобство использования подобной характеристики состоит в ее безразмерном виде: она не зависит от того, какая амплитуда сигнала действует на входе, ведь выходной сигнал при этом изменяется пропорционально. Такая универсальность позволяет избавиться от многочисленных характеристических кривых и обобщить некоторый частный результат на общий характер поведения цепи.

Определенный в (4.1) комплексный коэффициент передачи несет в себе значительно больше информации, чем может показаться на первый взгляд. Это возможно благодаря тому, что функция (4.1) является комплексной и может быть представлена в обобщенном показательном виде

$$\widehat{K(\omega)} = |K(\omega)| \exp(j \arg[K(\omega)]) .$$

При этом выделяются две независимые части информации: модуль комплексного коэффициента передачи является частотной зависимостью отношения амплитуд сигналов, а аргумент функции несет информацию о фазовом соотношении сигналов на входе и выходе фильтра. Именно по этому признаку различают амплитудно-частотную (АЧХ) и фазо-частотную (ФЧХ) характеристики.

Таким образом, анализ электрических фильтров сводится к поиску их АЧХ и ФЧХ.

Замечание № 2. Фазовые соотношения сигналов. Общее замечание о применении комплексных чисел для описания физических величин (электрических токов и напряжений, в частности)

Исторически (см. рис. 4.2) методы анализа электрических цепей можно подразделить на три основных класса, сменяющих друг друга по мере совершенствования математического аппарата у студента. Вначале (старшие классы средней школы, первый курс вуза) студент оперирует функциями действительного переменного вида $X \cos(\omega t)$. Операции с подобными функциями производятся с помощью формул приведения, известных из курса геометрии. Значительно боль-

ших успехов в изучении физики (например, в разделе "Оптика" курса "Общей физики") удастся добиться с применением векторной алгебры. Суть второго метода сводится к тому, чтобы сопоставить каждой гармонической функции $X \cos(\omega t)$ свой изображающий вектор $\mathbf{X}$, вращающийся на плоскости с циклической частотой ω . Если для произвольного момента времени изобразить на одной плоскости все действующие в цепи сигналы в виде соответствующих изображающих векторов, то можно значительно упростить вычисления, ведь операции над гармоническими функциями заменяются более простыми операциями над проекциями векторов. Тем не менее векторный способ тоже имеет свои недостатки: требуется рисовать векторы, геометрически точно изображать углы между ними. Этих трудностей можно избежать, если каждый изображающий вектор отложить от начала координат на комплексной плоскости и сопоставить каждому такому изображаемому радиус-вектору точку на комплексной плоскости, соответствующей концу вектора. Этим самым мы заменяем операции над изображающими векторами операциями над соответствующими комплексными числами, т.е. мы значительно упростили исходную задачу. Еще раз подчеркиваем: появление ком-

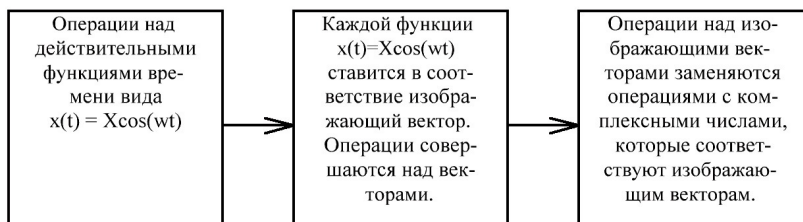


Рис. 4.2. Методы анализа цепей переменного тока

плексных величин в физике является следствием того, что мы применяем более совершенный математический аппарат для работы с векторами. Никаких мнимых, т.е. $(-1)^{0.5}$, электрических зарядов и прочих физических величин, например

импульсов, в природе не существует. Если в физической литературе встречается некоторая физическая величина в комплексном виде, то это следует воспринимать как информацию о фазовом соотношении величин, входящих в состав более сложной функции. Например, в разделе "Электричество и магнетизм" встречается величина, называемая магнитной восприимчивостью вещества χ (речь об изотропном веществе, т.к. для анизотропных веществ χ является тензором), равная отношению намагниченности вещества M к напряженности магнитного поля внутри вещества H :

$$\chi = \frac{M}{H}. \quad (4.2)$$

Однако в курсе электродинамики эта же величина везде обозначается в комплексном виде:

$$\hat{\chi} = \frac{\hat{M}}{\hat{H}} = Re(\hat{\chi}) + jIm(\hat{\chi}). \quad (4.3)$$

Разумеется, никакой мнимой восприимчивости в природе не существует. Дело в том, что запись вида (4.2) сделана для квазиравновесного процесса намагничивания, когда вектор намагниченности вещества является коллинеарным вектору магнитного поля (для изотропных веществ). В случае (4.3) речь идет о неравновесном процессе намагничивания: магнитное поле H меняется в веществе слишком быстро, и вектор M уже не успевает повернуться за вектором H , т.е. между ними образуется некоторый сдвиг фаз. Именно это и имеется в виду, когда записывают (4.3).

Приведем пример типовой задачи на анализ работы фильтров.

Определить АЧХ, ФЧХ цепи, указанной на рис. 4.3 слева. Предлагаемая схема является примером однозвенного фильтра, анализ которого является наиболее простым. Однако чтобы не загромождать учебное пособие многочисленными простыми примерами, приведем сразу универсальный подход

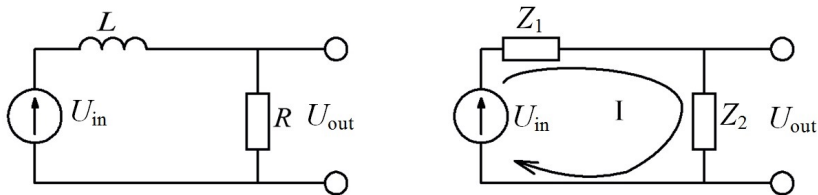


Рис. 4.3. Простейший фильтр низкой частоты (слева) и универсальная схема замещения фильтров всех типов делителем напряжения (справа)

к решению подобных задач, а именно представим нашу схему в виде делителя напряжения, как показано на рис. 4.3 справа. Такое "обезличивание" схемы, в которой вместо конкретных элементов стоят некоторые комплексные сопротивления Z_1 , Z_2 , позволяет значительно сократить время на анализ. Итак, решим задачу в общем виде, т.е. найдем АЧХ и ФЧХ делителя напряжения, для чего вычислим в общем виде комплексный коэффициент передачи

$$\begin{aligned}\widehat{U_{out}} &= \widehat{I Z_2}, \\ \widehat{I} &= \frac{\widehat{U_{in}}}{\widehat{Z_1} + \widehat{Z_2}}, \\ \widehat{K(\omega)} &= \frac{\widehat{U_{out}}}{\widehat{U_{in}}} = \frac{\widehat{Z_2}}{\widehat{Z_1} + \widehat{Z_2}} = \frac{1}{1 + \widehat{Z_1}/\widehat{Z_2}}.\end{aligned}$$

Мы получили универсальную формулу для делителя напряжения. Подставим параметры нашей исходной задачи $\widehat{Z_1} = j\omega L$, $\widehat{Z_2} = R$ и получим АЧХ нашего фильтра:

$$\begin{aligned}|\widehat{K(\omega)}| &= \sqrt{\widehat{K(\omega)} \cdot \widehat{K(\omega)}^*} = \sqrt{\frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}} \cdot \frac{1}{1 - j\omega \frac{L}{R}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_f^2}}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

АЧХ по определению представляет собой модуль комплексного коэффициента передачи. Легче всего подходить к вычислению модуля так, как показано выше — вычисляя корень квадратный из произведения $K(\omega)$ на комплексно-сопряженную величину $K(\omega)^*$. При этом комплексно-сопряженную величину легко составить по формальному правилу: сменить знак перед мнимой частью на противоположный. Другой, более привычный по курсу ТФКП, способ отыскания модуля комплексной величины $z = x + jy$ по "теореме Пифагора"

$$|z| = \sqrt{[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

является менее предпочтительным, т.к. требует больших затрат по времени: надо выделять отдельно действительную часть, отдельно мнимую, возводить их в квадрат. В продемонстрированном выше способе эти операции делаются автоматически.

Отметим также еще одну особенность в выражении (4.4). АЧХ фильтра содержит параметры задачи L , R не по отдельности, а в виде комбинации L/R . Размерность такой комбинации - "секунда", поэтому L/R можно отождествить с некоторой постоянной времени фильтра τ_f . Эта постоянная времени определяет, какие переменные токи (с каким периодом) могут проходить через фильтр без ослабления, а какие будут подавляться фильтром. Нарисуем полученное в (4.4) выражение в виде графика на рис. 4.4. АЧХ всегда лежит в пределах 1-го квадранта, ведь модуль всегда больше нуля и частота колебаний может быть тоже только положительной. Определим ФЧХ исследуемого фильтра:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg \left(\widehat{K(\omega)} \right) = \arctg \left(\frac{Im \left(\widehat{K(\omega)} \right)}{Re \left(\widehat{K(\omega)} \right)} \right) = \\ &= \arctg \left(\frac{-\omega \frac{L}{R}}{1} \right) = -\arctg(\omega \tau_f). \end{aligned}$$

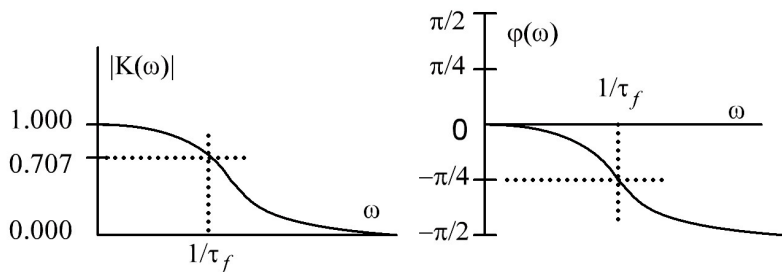


Рис. 4.4. АЧХ и ФЧХ цепи, изображенной на рис. 4.3

Изобразим полученную фазовую зависимость на том же рис. 4.4.

Приведем другой пример, демонстрирующий универсальность выбранного подхода с использованием схемы делителя напряжения.

Определить АЧХ, ФЧХ цепи Вина, изображенной на рис. 4.5. Анализ этой цепи можно сразу начать с известного

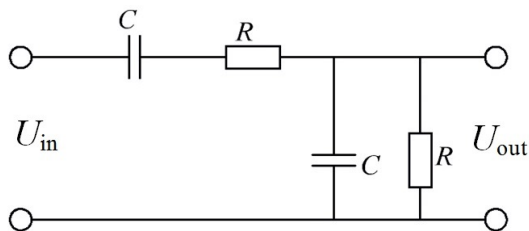


Рис. 4.5. Цепь Вина

выражения для коэффициента передачи делителя напряжения, ведь в качестве Z_1 в этой схеме выступает последовательное соединение конденсатора C и резистора R , а в качестве Z_2 — параллельное соединение идентичных элементов.

Поэтому сразу запишем выражение для комплексного коэффициента передачи:

$$\widehat{Z}_1 = R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1+j\omega\tau}{j\omega C}, \quad \frac{1}{\widehat{Z}_2} = j\omega C + \frac{1}{R} = \frac{1+j\omega\tau}{R},$$

$$\widehat{K}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\widehat{Z}_1}{\widehat{Z}_2}} = \frac{1}{1 + \frac{(1+j\omega\tau)^2}{j\omega\tau}} = \frac{1}{3 + j\omega\tau + \frac{1}{j\omega\tau}} =$$

$$= \frac{1}{3 + j\left(\omega\tau - \frac{1}{\omega\tau}\right)}.$$

Здесь, подобно комбинации L/R , вводится в обращение новая постоянная времени, равная произведению RC . Размерность у этой комбинации совпадает с размерностью времени. Смысл новой постоянной времени подобен рассмотренному ранее: он определяет некую условную границу раздела между колебаниями, которые пропускаются фильтром, и колебаниями, которые задерживаются фильтром. В разных фильтрах (ФНЧ, ФВЧ, избирательные фильтры и т.п.) эта постоянная времени будет разграничивать сплошной спектр всевозможных колебаний на соответствующие полосы пропускания.

Из полученного коэффициента передачи выделим АЧХ и ФЧХ:

$$\left| \widehat{K}(\omega) \right| = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\omega\tau - \frac{1}{\omega\tau} \right)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{-\left(\omega\tau - \frac{1}{\omega\tau} \right)}{3} \right).$$

Задача решена.

4.2. Многозвенные пассивные фильтры

Анализ многозвенных цепей имеет незначительное, но важное отличие от анализа однозвенных цепей, поэтому было принято решение выделить указанную тему в отдельный

подраздел. Чтобы не вдаваться в общее теоретическое описание проблемы, сразу покажем на практике удобный подход к решению таких задач.

Задача. Найти комплексный коэффициент передачи трехзвенной RC -цепи, изображенной на рис. 4.6. Найти частоту входного сигнала, при которой сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями равен 180 градусам. Рассматриваемая многозвенная цепь сложна тем, что непо-

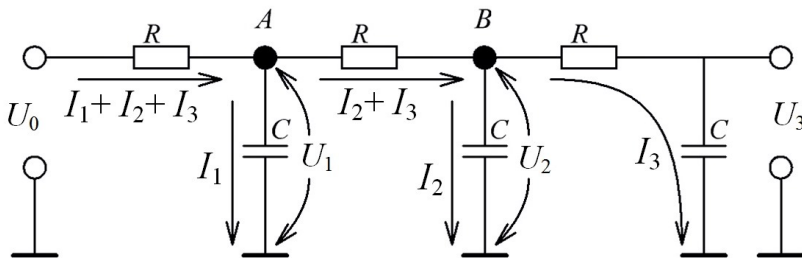


Рис. 4.6. Трехзвенная RC -цепь

средственно применить к ней формулу делителя напряжения невозможно, ведь цепь разветвленная, и к ней придется многократно применять операцию эквивалентных преобразований, чтобы получить готовый ответ. Гораздо проще оказывается последовательно выражать напряжения в каждом звене цепи через напряжение на соседнем звене, т.е. ввести в рассмотрение промежуточные напряжения U_1 , U_2 , выразить их через выходное напряжение U_3 и тем самым связать входное напряжение U_0 с выходным напряжением.

Итак, начнем продвигаться от выхода схемы к ее входу, для чего выразим сначала U_2 через U_3 . Для этого заметим, что U_2 — это напряжение на соответствующем конденсаторе, равное, в свою очередь (по второму закону Кирхгофа), напряжению на последнем RC -звене, т.е.

$$\widehat{U}_2 = \widehat{I}_3 \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) = \frac{\widehat{U}_3}{1/j\omega C} \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) = \widehat{U}_3 (1 + j\omega\tau),$$

$$\widehat{I}_3 = \widehat{U}_3 j\omega C,$$

$$\widehat{I}_2 = \frac{\widehat{U}_2}{1/j\omega C} = \widehat{U}_3 j\omega C (1 + j\omega\tau).$$

Здесь использовано то же самое обозначение для той же самой постоянной времени, что и в предыдущей задаче. Полученные выражения позволяют продвинуться дальше к входным клеммам цепи и написать аналогичные выражения для следующего вспомогательного напряжения U_1 :

$$\begin{aligned}\widehat{U}_1 &= (\widehat{I}_2 + \widehat{I}_3)R + \widehat{U}_2 = \widehat{U}_3(1 + j\omega\tau) + R\widehat{U}_3(j\omega C + j\omega C(1 + j\omega\tau)) = \\ &= \widehat{U}_3(1 + j\omega\tau) + \widehat{U}_3 j\omega\tau + \widehat{U}_3 j\omega\tau(1 + j\omega\tau) = \\ &= \widehat{U}_3 [1 + j\omega\tau + j\omega\tau + j\omega\tau - \omega^2\tau^2] = \widehat{U}_3 [1 + 3j\omega\tau - \omega^2\tau^2], \\ \widehat{I}_1 &= \frac{\widehat{U}_1}{1/j\omega C} = \widehat{U}_3 j\omega C [1 + 3j\omega\tau - \omega^2\tau^2].\end{aligned}$$

Осталось найти последнее напряжение U_0 , являющееся входным напряжением, чтобы получить комплексный коэффициент передачи:

$$\begin{aligned}\widehat{U}_0 &= (\widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 + \widehat{I}_3)R + \widehat{U}_1 = R\{\widehat{U}_3 j\omega C (1 + 3j\omega\tau - \omega^2\tau^2) + \\ &+ \widehat{U}_3 j\omega C(1 + j\omega\tau) + \widehat{U}_3 j\omega C\} + \widehat{U}_3 (1 + 3j\omega\tau - \omega^2\tau^2) = \\ &= \widehat{U}_3 \{(1 - 5\omega^2\tau^2) + j(6\omega\tau - \omega^3\tau^3)\}, \\ \widehat{K}(\omega) &= \frac{\widehat{U}_3}{\widehat{U}_0} = \frac{1}{\{(1 - 5\omega^2\tau^2) + j(6\omega\tau - \omega^3\tau^3)\}}.\end{aligned}$$

Полученный коэффициент передачи имеет сложный вид, однако для поиска ответа это не имеет принципиального значения, так как постановка задачи наталкивает на очевидные легкие выводы. Действительно, нам необходимо найти такую

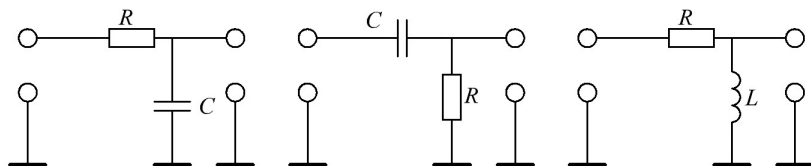


Рис. 4.7. К задаче № 19

частоту ω_0 , при которой $\arg(\widehat{K(\omega)}) = 180^\circ$. Это условие соответствует тому, что мнимая часть $\widehat{K(\omega)}$ должна обращаться в ноль, т.е.

$$\text{Im}(\widehat{K(\omega_0)}) = \frac{\omega_0 \tau (\omega_0^2 \tau^2 - 6)}{(1 - 5\omega_0^2 \tau^2)^2 + (6\omega_0 \tau - \omega_0^3 \tau^3)^2} = 0,$$

$$\omega_{01} = 0, \omega_{02} = \frac{\sqrt{6}}{\tau},$$

$$K(\omega_{02}) = \frac{1}{29}.$$

Это условие, как показано, выполняется при нескольких частотах: при $\omega_{01} = 0$ рад/с (постоянный ток) и при $\omega_{02} = \sqrt{6}/\tau$. Первый вариант отбрасываем, т.к. нас интересует переменный ток. Коэффициент передачи на частоте ω_{02} становится чисто действительным, равным $1/29$.

Задача решена.

Задачи для самостоятельного решения

Задача № 19. Определить АЧХ, ФЧХ цепей, изображенных на рис. 4.7. Построить качественные графики АЧХ, ФЧХ.

Задача № 20. Найти условие неискаженной передачи сигнала через цепь, изображенную на рис. 4.8.

Задача № 21. Найти АЧХ, ФЧХ двухзвенных цепей, изображенных на рис. 4.9. Построить качественные графики АЧХ, ФЧХ.

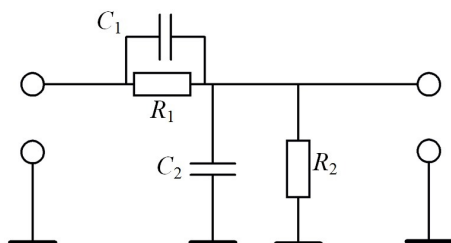


Рис. 4.8. К задаче № 20

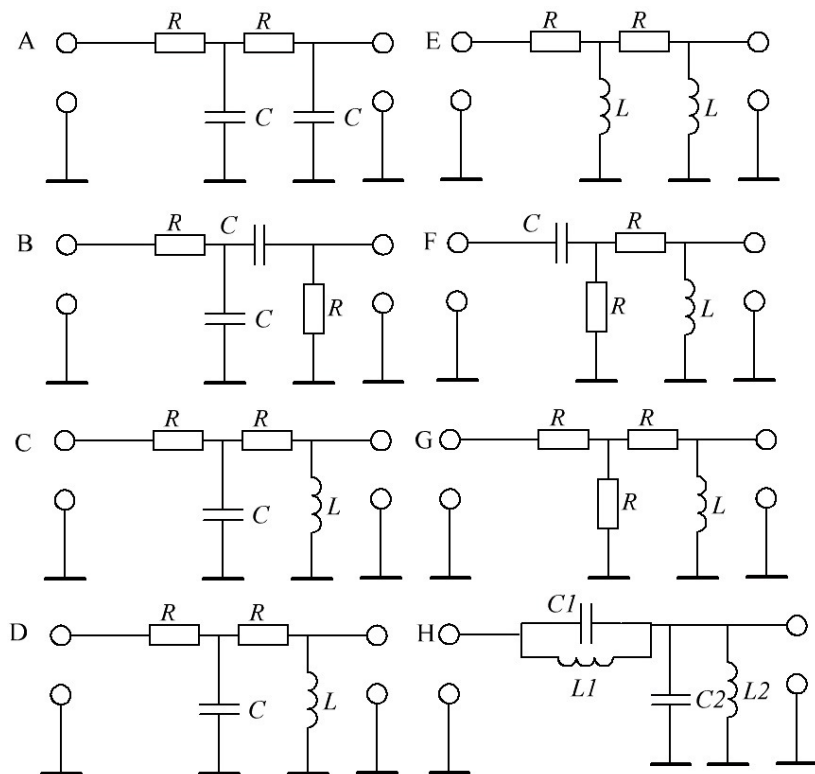


Рис. 4.9. К задаче № 21

Глава 5

Основы транзисторной схемотехники

5.1. Вводные замечания

Предлагаемая последняя глава является наиболее специфической из всех, входящих в пособие, так как содержит в себе больше физических соображений, чем математических идей. С точки зрения математики эта глава примитивна: в ней не используются ни методы ТФКП, ни даже матричные методы. Основное препятствие в использовании математических методов заключается в том, что транзистор – ярко выраженный представитель нелинейных полупроводниковых приборов. Наиболее удачная математическая модель транзистора (модель Эберса – Мола) отдаленно напоминает модель полупроводникового диода: ток коллектора экспоненциально зависит от напряжения между базой и эмиттером. Поэтому схемы с биполярным транзистором – это нелинейные схемы. Во второй главе пособия уже описаны методы расчета нелинейных цепей, и формально транзисторную схемотехнику можно было бы анализировать теми же методами. Однако цепи с транзисторами имеют свои специфические особенности, а именно

- Транзисторные схемы рассчитываются как по постоян-

ному, так и по переменному электрическому току, поэтому материала главы № 2 этого пособия недостаточно.

- Транзисторные схемы очень сложны, а поэтому требуют упрощенных математических моделей. Схемы с транзисторами могут содержать десятки нелинейных элементов одновременно. Такие схемы невозможно быстро анализировать, поэтому на практике используют не строгие математические модели или графические ВАХ приборов, а небольшой «набор правил», описывающий сложное поведение транзистора. Эти правила имеют следующий вид: «Если напряжение на базе такое-то, то транзистор находится в таком-то режиме, а значит, через него течет такой-то ток. . . ». Надо понимать, что описательный подход – это не стремление к примитивизму, а вынужденная мера, приводящая к резкому упрощению математических уравнений. Достигаемые упрощения настолько существенны, что позволяют объяснять работу некоторых электрических цепей «на пальцах», и это, безусловно, положительно сказывается на массовом радиолюбительстве: нередко случается встретить человека с весьма ограниченными математическими познаниями, превосходно разбирающегося в схемах транзисторных радиоприемников и телевизоров.

Вывод: Расчет транзисторных схем ведется неразрывно с привлечением физических соображений о режимах работы транзистора. Физические рассуждения позволяют заменить математическое решение, и определить значительную часть неизвестных токов и напряжений в схеме.

Следуя сделанному выводу, опишем основные режимы работы транзистора. Для дополнительной важной информации настоятельно рекомендуется изучить соответствующую главу в [14]. В предлагаемом пособии везде будут рассмотрены схемы с использованием транзистора с полярностью $n-p-n$. Для адаптации материала к транзистору $p-n-p$ необходимо

поменять полярности источников питания.

Три основных режима работы биполярного транзистора

Транзистор, включенный в электрическую схему, может находиться только в одном из трех состояний:

- первое состояние — режим отсечки (транзистор закрыт и через него течет минимально возможный в рассматриваемой схеме ток);
- второе состояние — режим насыщения (транзистор открыт и через него течет максимально возможный ток);
- и третье состояние, являющееся промежуточным по отношению к первым двум, — состояние активного режима (через транзистор течет управляемый ток и транзистор усиливает входящий сигнал по мощности). Разберем подробнее режимы работы транзистора, для чего на рис. 5.1 изображены все токи и напряжения, характеризующие работу транзистора.

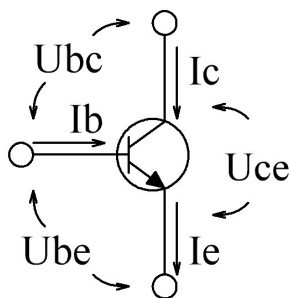


Рис. 5.1. Токи, протекающие через транзистор под действием приложенных к нему напряжений. Полярности напряжений понятны исходя из направления токов

Режим отсечки

Название "отсечка" подразумевает, что транзистор, к которому подключается нагрузка, в режиме отсечки резко

уменьшает ток, протекающий через нагрузку и, соответственно, через себя. Такое запирающее транзистора условно отсекает ток, поступающий в нагрузку.

Режим характеризуется тем, что $p - n$ переход "база — эмиттер" является закрытым, и ток через него протекает только очень ограниченный. Закрытый переход означает, что напряжение $U_{be} < 0.6$ В (точно так же, как и для обычного диода). При этом через транзистор протекают маленькие токи коллектора ("collector") I_c , базы ("base") I_b и, следовательно, эмиттера ("emitter") I_e

$$I_e = I_c + I_b \approx 0.$$

Такой ток соответствует по порядку малости тепловому току запятого диода. Например, для популярного отечественного транзистора КТ315 такой ток составляет 1 мкА, а для распространенного маломощного транзистора Fairchild 2N5484 всего лишь 1 нА. Такой большой разброс по характеристикам не должен смущать: при разработке конкретной электрической схемы всегда можно свериться со справочником, а на этапе обучения достаточно пользоваться фактом, что обратный ток коллектора — это малая величина, не превышающая 1 мкА.

Режим насыщения

Этот режим в некотором смысле противоположен режиму отсечки: транзистор открыт в том смысле, что почти не оказывает никакого сопротивления току коллектора, который почти беспрепятственно протекает внутри транзистора к эмиттеру. Под насыщением понимается предельная ситуация, когда транзистор отдает в нагрузку максимально возможный ток. Величина этого тока, конечно, определяется не столько транзистором, сколько схемой, в которую он включен. Чтобы вычислить величину этого тока в конкретной схеме достаточно мысленно замкнуть клеммы коллектора и эмиттера, исключив тем самым транзистор из исходной схемы. Это можно сделать для мысленного эксперимента в первом приближении. На практике, конечно, напряжение U_{ce} даже при

полностью открытом транзисторе не может опускаться ниже $0.2 - 0.4$ В.

Итак, на языке токов и напряжений ситуация выглядит следующим образом. Напряжение на $p-n$ переходе $U_{be} \approx 0.6$ В (напряжение на открытом диоде), $U_{ce} \approx 0.2$ В, ток эмиттера $I_e = I_c$ (т.е. током базы можно пренебречь как по абсолютной величине, так и по смыслу, ведь никакой функциональной зависимости I_e от тока базы I_b в этом режиме нет).

Активный режим

Этот режим характеризуется промежуточным состоянием между режимом отсечки и режимом насыщения. В этом режиме транзистор способен усиливать сигналы, т.е. создавать в цепи коллектора или эмиттера масштабную копию тока базы, как показано на рис. 5.2:

$$I_c = \beta I_b,$$

где β — коэффициент усиления транзистора по току. На рис. 5.2 показано, что коллектор транзистора соединен с плюсовой клеммой источника питания U_S , который управляется транзистором для создания усиленной копии входного сигнала. Величина β имеет большой разброс и для транзисторов

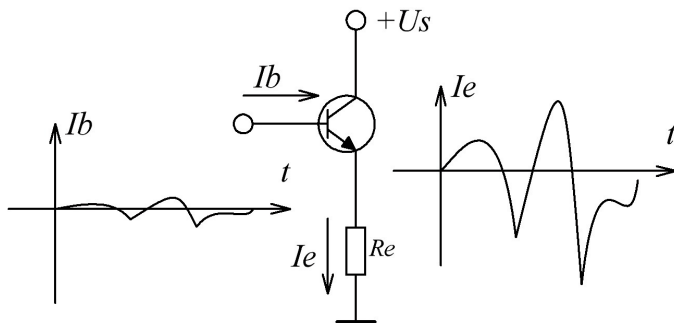


Рис. 5.2. Усиление тока базы транзистором в активном режиме

одной марки может принимать различные значения. Напри-

мер, для уже упомянутого транзистора КТ315Б β варьируется от 50 до 350. Такой разброс обусловлен тем, что характеристики полупроводниковых приборов очень чувствительны к процентному содержанию легирующих примесей — незначительные отличия примесей в полупроводниковых кристаллах приводят к сильнейшему разбросу значений коэффициента усиления (ведь β , по сути, характеризует чувствительность транзистора).

На языке токов и напряжений активный режим характеризуется тем, что напряжение на $p-n$ переходе $U_{be} \approx 0.6$ В (напряжение на открытом диоде), $U_{ce} > 0.2$ В (зависит от электрической схемы включения), ток эмиттера I_e

$$I_e = I_c + I_b = \beta I_b + I_b = (\beta + 1)I_b \approx \beta I_b$$

пропорционален току базы, что и объясняет усилительные свойства транзистора.

Все рассмотренные режимы работы используются в электрических схемах, причем первые два режима реализуются в современной схемотехнике значительно чаще, чем последний. Связано это с тем, что транзисторы, входящие в состав цифровых схем, работают в ключевом режиме, характеризующемся лишь двумя состояниями транзистора: открыт/закрыт, что соответствует логическим значениям "ноль" и "единица". Широкое распространение транзисторных ключей продиктовано удобством их использования: малые токи утечки, высокая скорость переключения между состояниями. Активный режим работы транзисторов (биполярных, полевых) используется в дискретной аналоговой схемотехнике для решения вспомогательных задач: межкаскадные "развязки" на основе повторителей; мощные ключи и силовая электроника; источники тока для питания микросхем, выходные каскады источников питания.

Рассмотрим далее несколько задач на расчет электрических схем на основе транзисторной схемотехники.

5.2. Транзисторный ключ

Назначение схемы транзисторного ключа — это коммутация электрических цепей, или, выражаясь более упрощённо и конкретно, электронное подключение нагрузки к источнику питания. На рис. 5.3 приведен пример схемы с использованием транзисторного ключа. На этой схеме в качестве полезной нагрузки выступает автомобильная лампа накаливания La мощностью 60 Вт, которую необходимо дистанционно включать в цепь питания автомобиля, изображённую условно в виде батареи U_S с напряжением 13.2 В. Внутренним сопротивлением батареи пренебрегаем. Нам необходимо рассчитать резистор в цепи базы, — единственный элемент, влияющий на работу цепи, а также подобрать подходящую для данной цепи марку транзистора.

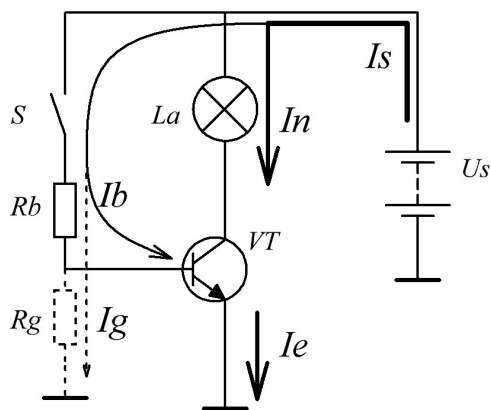


Рис. 5.3. Транзистор в качестве электронного ключа. Толщина линий, изображающих токи, символизирует величину соответствующих токов. Пунктиром изображены элементы, которые можно упустить при первичном знакомстве со схемой

Проанализируем работу схемы при двух положениях ключа S . Если ключ выключен, напряжение на базе тран-

зистора отсутствует, т.е. напряжение

$$U_{be} = 0 \text{ В},$$

и транзистор закрыт. Ток базы I_b не течет. При этом транзистор пребывает в режиме отсечки и через него протекает лишь незначительный тепловой ток коллектора $I_c = I_{c0} \approx 1 \text{ мкА}$. Лампа при этом не включена, ведь ток нагрузки $I_n = I_c$ близок к нулю.

Если мы замыкаем ключ S , то в цепь базы начнет поступать ток I_b от внешнего источника питания U_S . Здесь уместно вспомнить задачу из главы 2 настоящего пособия, в которой рассматривалось последовательное соединение резистора с диодом, ведь резистор R_b является, по сути, включенным последовательно с $p-n$ переходом "база — эмиттер" транзистора VT . Как было нами установлено, ток, протекающий через диод, ограничивается резистором: на диоде падает напряжение порядка 0.6 В, после чего диод открывается и не оказывает дополнительного сопротивления протекающему току, поэтому можно сразу записать выражение для R_b :

$$R_b = \frac{U_S - 0.6 \text{ В}}{I_b}.$$

Ток базы определяется из следующих соображений. При включении лампы транзистор должен полностью открыться, т.е. перейти в режим насыщения. В этом случае между клеммами транзистора коллектор — эмиттер будет падение напряжения, примерно равное 0.2 В, и на лампе будет действовать напряжение, равное $(U_S - 0.2 \text{ В}) = 12 \text{ В}$. Мощность лампы L составляет 60 Вт, значит, во включенном состоянии через нее протекает ток силой 5 А. Чтобы обеспечить такой ток в нагрузке, необходимо открыть транзистор достаточным током базы

$$I_b \geq \frac{I_c}{\beta_{\min}} = \frac{I_n}{\beta_{\min}}.$$

Здесь используется $\beta_{\min}$ — минимальный коэффициент усиления транзистора, указываемый в паспортных данных. Это де-

лается специально, чтобы сделать схему наиболее универсальной. Если бы мы взяли максимальное или среднее значение β из паспорта транзистора VT , то для транзистора с меньшим коэффициентом усиления ток базы оказался бы слишком маленьким, неспособным открыть транзистор до режима насыщения. Выбрать транзистор для этой задачи можно по следующим параметрам:

- максимальное напряжение U_{ce} должно превышать напряжение питания U_S ,
- максимальный ток коллектора I_c должен превышать максимальный ток нагрузки (причем для питания ламп необходимо учитывать запас, который должен быть значительным, ведь в начальный момент времени, когда лампа холодная, ее сопротивление достаточно маленькое, и пусковой ток может существенно превышать номинальный).

Видно, что среди важных параметров перечислены мощностные характеристики, что дает нам основание выбирать VT в справочнике среди транзисторов большой мощности. При реальной разработке схемы нужно учитывать, конечно, большое количество параметров — вес, стоимость транзистора, его эксплуатационные характеристики (влажность, давление) и т.п., однако для нас сейчас эти показатели не играют существенной роли. По этой причине обратим внимание только на технические характеристики и остановимся, например, на $n - p - n$ транзисторе 2Т716Б со следующими характеристиками: I_c максимальное = 10 А, U_{ce} максимальное = 80 В, U_{ce} насыщения ≤ 2 В, $\beta_{min} = 750$. При таких параметрах можно рассчитать R_b :

$$I_b = 5A/750 = 6.67 \text{ мА}, R_b = (13.2 - 0.6)V/6.67 \text{ мА} = 1.89 \text{ кОм}.$$

Дополнительные замечания по расчету транзисторных ключей

Анализируя выключенное состояние транзисторного

ключа в начальный момент времени, мы предположили, что потенциал базы транзистора равен нулю, однако на практике ситуация может отличаться от предполагаемой. На транзистор воздействуют внешние электростатические заряды и электромагнитные поля, способные изменить электрический потенциал базы и вызвать произвольное открытие ключа. Чтобы этого не происходило, введем в схему дополнительный резистор R_g , с помощью которого (при разомкнутом ключе S) потенциал базы выравнивается до потенциала земли, т.е. становится равным потенциалу эмиттера. Объясним, как выбрать номинал резистора R_g : этот резистор должен быть таким, чтобы при замкнутом ключе S через него протекал как можно меньший ток, т.е. чтобы выполнялось условие

$$I(R_g) \ll I_e. \quad (5.1)$$

Смысл этого условия заключается в том, чтобы не вносить сколько-нибудь существенных потерь энергии в схему. (Зачем тратить лишнюю электроэнергию батареи U_S на ненужные тепловые потери в резисторе R_g ?) При этом напряжение на резисторе R_g нам известно — оно равно напряжению U_{be} , которое равно приблизительно 0.6 В. Ток базы мы тоже знаем — он составляет 6.67 мА. Согласно условию (5.1), $I(R_g)$ не должно превышать 0.667 мА, т.к. знак "много меньше" в радиоэлектронике следует понимать как "меньше на порядок". Таким образом, $R + g \geq 0.6V/0.667 \text{ мА} = 900 \text{ Ом}$. Достаточно взять $R_g = 1 \text{ кОм}$.

Задача решена.

Замечание о реактивной нагрузке

Если в качестве нагрузки вместо активного сопротивления (лампы накаливания) включена индуктивная нагрузка (например, вытягивающее реле), то необходимо предохранять транзистор от выхода из строя, подключив диод параллельно нагрузке, пропускающий большой ток самоиндукции через себя, а не через транзистор. Это важно, так как максимально допустимое U_{ce} имеет, как правило, небольшое значение

(несколько десятков вольт), например, у КТ315Б предельное напряжение U_{ce} составляет всего 20 В.

5.3. Активный режим работы транзистора

Рассмотрим некоторые важные схемы, использующие активный режим работы транзистора: эмиттерный повторитель (усилитель с общим коллектором), простейшие источники тока на основе биполярных транзисторов, усилитель с общим эмиттером.

Мы переходим к иному типу задач, в которых используются несколько новых идей, специфичных именно для активного режима работы транзистора. Оформим эти идеи, как и в предыдущих главах пособия, в виде небольших замечаний.

Замечание № 1. Расчет транзисторных схем по постоянному и переменному току, понятие о рабочей точке

Рассмотрим схему на рис. 5.2, где изображен транзистор, усиливающий входной сигнал. Изучив предыдущий параграф, посвященный транзисторному ключу, сделаем следующее справедливое замечание: транзистор будет усиливать входной сигнал только в том случае, если он находится в активном режиме. Действительно, если транзистор находится в режиме отсечки, то через него будет протекать только мизерный ток I_{c0} , а не усиленный ток I_c . Если же транзистор насыщен и через него протекает максимально допустимый ток, то опять же сигнал на выходе транзистора никак не будет повторять по форме входной сигнал, и усиливаться входной сигнал опять же не будет. Значит, перед тем как подавать на вход транзистора входной переменный сигнал, надо убедиться в том, что схема включения транзистора обеспечивает его функционирование именно в активном режиме. Задача расчета транзисторных схем распадается на две независимые задачи. Первая задача подразумевает расчет схемы по постоянному току, чтобы обеспечить работу транзистора в активном

режиме. Эта задача решается при исключенном входном сигнале. Вторая задача подразумевает расчет элементов схемы по переменному току, когда на входе схемы действует переменное входное напряжение.

Для первой цели в схеме всегда присутствует цепь, называемая цепью смещения. Назначение цепи смещения — "сместить" точку на ВАХ транзистора, характеризующую его работу, из области отсечки в область активного режима даже при отсутствии входного сигнала. Такую операцию (смещение транзистора) называют также определением рабочей точки транзистора.

Замечание № 2. Ток покоя транзистора

Формально задача смещения заключается в том, чтобы "открыть" транзистор, т.е. пропускать постоянный ток через транзистор даже при отсутствии входного сигнала. Такой ток называется током покоя, который определяется схемой включения транзистора. Поясним это на примере рис. 5.4. Мы уже

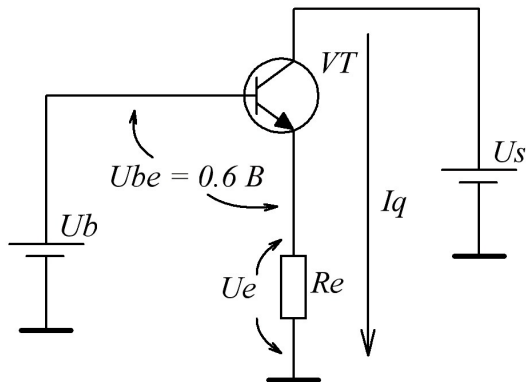


Рис. 5.4. Схема, поясняющая автоматическое установление тока покоя в схеме со смещением

обсуждали выше, что открыть транзистор можно напряжением U_{be} , приложенным между базой и эмиттером (равное для кремниевых транзисторов примерно 0.6 B). Как только

мы подаем достаточное напряжение смещения U_b , транзистор открывается и через него начинает протекать ток. Величина этого тока определяется не только напряжением U_b , а всей схемой включения транзистора. Ток I_q , который будет протекать через транзистор в установившемся режиме, будет определяться условием $U_{be} = 0.6 \text{ В}$, причем вспомним, что

$$U_{be} = U_b - U_e = U_b - U_e = U_b - I_q R_e.$$

Таким образом, ток покоя устанавливается в схеме автоматически согласно схеме включения транзистора: он определяется напряжением смещения и резистором в цепи эмиттера. Автоматическое установление тока происходит благодаря тому, что рассмотренная цепь имеет в себе отрицательную обратную связь в виде резистора R_e . Представим себе, что ток I_q слегка увеличился (например, из-за изменения температуры транзистора) по отношению к своему изначальному значению. Что произойдет в этом случае? Возросший ток I_q , протекая по резистору R_e , увеличит напряжение на этом резисторе, т.е. возрастет U_e . Следовательно, напряжение U_{be} начнет уменьшаться, что вызовет "закрывание" транзистора, а следовательно, уменьшение тока I_q . Таким образом, возрастание тока I_q тут же привело к его уменьшению — это и есть автоматическая стабилизация. То же самое будет происходить и при уменьшении тока I_q — транзистор при этом начнет открываться, что приведет к увеличению тока покоя.

После того как мы ознакомились с понятием тока покоя, нужно сделать важную ремарку, которая всегда упускается из всех учебников по радиоэлектронике.

Ток покоя транзистора инженер выбирает самолично на первом этапе разработки схемы.

В рассмотренной выше схеме ток покоя был как бы заранее определен составителем схемы, а мы лишь вычисляли его силу. На практике при разработке транзисторных схем ток покоя — это независимая величина, которую разработчик должен определить сам, исходя из постановки задачи. Определить ток покоя значит решить 50 % задачи. Именно ток

покоя определяет все остальные элементы схемы, составляющие т.н. "обвязку" транзистора.

Исходя из чего разработчик может выбрать величину тока покоя? На этот счет нельзя дать предельно четких рекомендаций, однако есть два соображения, позволяющие безошибочно определить силу I_q .

- I_q может быть навязан условиями задачи. Представьте, например, следующую задачу: необходимо рассчитать схему стабилизированного источника тока силой 3 мА, у которого нагрузка включена в цепь коллектора. Ток, который протекает через нагрузку, — это и есть I_q . Следовательно, $I_q = 3$ мА.
- I_q можно определить исходя из разумных соображений о допустимых режимах работы транзистора. Рассмотрим для наглядности диапазон токов, полностью описывающий всевозможные режимы работы транзистора, изображенный на рис. 5.5. Для наглядности шкала токов приведена в логарифмическом масштабе. Допустимый диапазон ограничен двумя значениями, упомянутыми ранее в задаче о транзисторном ключе. Это значения теплового

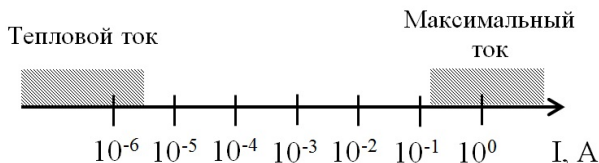


Рис. 5.5. Диапазон значений, которые может принимать ток коллектора, ограниченный значением I_{co} и I_c , максимальным для транзисторов малой и средней мощности

тока I_{ok} коллектора, с одной стороны, и значение максимально допустимого тока коллектора, с другой стороны. Первый ток имеет порядок $10^{-9} - 10^{-6}$ А, а максимальный ток ограничен примерно 10^{-1} А (например, для

КТ315 I_c максимальный = 100 мА). Поэтому выбор тока покоя определяется следующим компромиссом. С одной стороны, ток покоя должен быть много больше теплового тока, так как в противном случае усиливаемый сигнал не будет усиливаться, а, наоборот, станет сильно зашумленным. С другой стороны, ток покоя должен быть много меньше своего максимально допустимого значения, так как большой ток покоя означает большие потери электроэнергии (в некотором смысле ток покоя не выполняет "полезной" работы, ведь он не усиливает входной сигнал). Посмотрев на рис. 5.5, можно уверенно сказать, что значения силы тока I_q , удовлетворяющие этим двум противоречивым требованиям, лежат где-то в диапазоне $10^{-4} - 10^{-2}$ А. На практике часто можно встретить I_q равным 1 мА, и этот факт является не просто совпадением, а закономерным следствием приведенного выше объяснения.

Итак, рассмотрим пример расчета нескольких схем: эмиттерного повторителя и источника тока на основе транзистора. Оформим, как и прежде, наше решение в виде алгоритма.

Задача. Рассчитать схему эмиттерного повторителя на базе транзистора КТ315Б ($\beta = 50...350$), изображенную на рис. 5.6. Напряжение питания $U_S = 12$ В. Схема должна усиливать по мощности сигналы с частотой от 1 кГц и выше.

Шаг № 1. Выбор тока покоя.

Исходя из того, что анализируемая схема не содержит явных указаний на то, каким должен быть ток покоя, мы должны сами определить его значение. Сделаем это согласно параметрам транзистора КТ315Б: его тепловой ток равен 1 мкА, а максимально допустимый ток коллектора 100 мА. Следовательно, ток покоя в 0.5 мА будет приемлемым для этого транзистора.

Шаг № 2. Выбор резистора в цепи эмиттера.

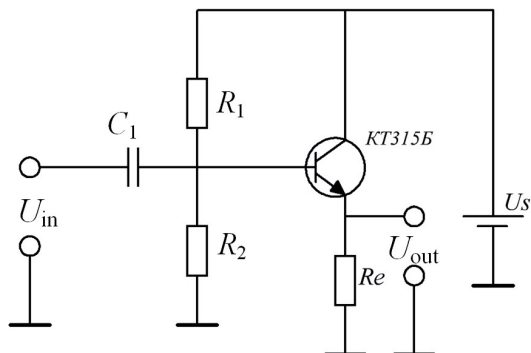


Рис. 5.6. Схема эмиттерного повторителя с резистивным делителем в качестве цепи смещения

Выбор резистора должен быть сделан так, чтобы выходное напряжение было максимально симметричным, т.е. чтобы у выходного сигнала не обрезалась ни нижняя, ни верхняя полуволна. Это достижимо только в том случае, если при отсутствии входного сигнала $U_{out} = 0.5 \cdot U_S$. Следовательно,

$$I_q R_e = 0.5 \cdot U_S = 6 \text{ В}, R_e = 6 \text{ В} / 0.5 \text{ мА} = 1.2 \text{ кОм}.$$

Шаг № 3. Определение цепи смещения.

Цепь смещения должна обеспечивать такое напряжение на базе, чтобы $U_{be} = 0.6 \text{ В}$. Напряжение на эмиттере мы уже знаем — это напряжение на резисторе R_e , равное 6 В. Значит, напряжение на базе должно быть 6.6 В. Следовательно, напряжение на резисторе R_2 тоже должно быть 6.6 В, что дает возможность определить отношение напряжений на резисторах R_1 и R_2 :

$$\frac{U(R_1)}{U(R_2)} = \frac{12 - 6.6}{6.6} = \frac{5.4}{6.6}.$$

Это первое уравнение, которое необходимо нам для отыскания двух неизвестных величин R_1 и R_2 . Второе уравнение мы составим, воспользовавшись методом эквивалентного генератора, примененного к делителю напряжения, собранного на резисторах R_1 , R_2 подобно тому, как это сделано на рис. 1.20

в главе 1. Соответствующее преобразование, относящееся к изучаемой схеме, продублировано на рис. 5.7, где от исходной схемы оставлены лишь важные для насущного вопроса элементы. В этой схеме транзистор представляет собой некото-

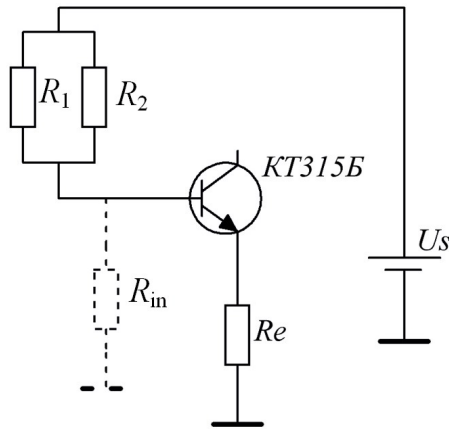


Рис. 5.7. К определению резисторов в цепи делителя

рый элемент, обладающий входным сопротивлением. Это сопротивление обозначено как R_{in} . В теоретическом курсе показывается, что оно равно $R_e\beta$. Схема на рис. 5.7 представляет собой, по сути, схему из двух элементов — некоторый резистор R_{in} подключен к источнику напряжения с ЭДС, равной U_S , и внутренним сопротивлением, равным параллельному соединению резисторов R_1 и R_2 . Чтобы эффективно использовать источник ЭДС, нужно, чтобы нагрузка была много больше внутреннего сопротивления этого источника, следовательно

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \ll \beta R_e.$$

В этом выражении, как и ранее, знак "много меньше" надо заменять на его математический эквивалент — "в 10 раз меньше", а для выполнения этого условия при любом значении β

нужно брать его минимальное значение. Суммируя сказанное, получим два уравнения для отыскания R_1 и R_2 :

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\beta R_e}{10} = 5R_e = 6 \cdot 10^3,$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{5.4}{6.6}.$$

Из этой системы уравнений находим $R_1 = 10.91$ кОм, $R_2 = 13.33$ кОм. На этом задача о расчете транзисторной схемы по постоянному току является решенной. Переходим к последнему шагу, определяющему расчет схемы по переменному току.

Шаг № 4. Определяем величину конденсатора C_1 .

Конденсатор на входе нашей усилительной схемы использован с целью ее изоляции по постоянному току от источника сигнала. Вообще говоря, конденсатор для схожей цели C_2 необходимо было бы поставить и на выходе схемы, но мы сознательно упустили его с целью упрощения схемы.

Из анализа, проведенного на шаге № 3, очевидным является тот факт, что сопротивления R_1 , R_2 и R_{in} соединены параллельно, и конденсатор C_1 образует с ними фильтр высоких частот, изображенный на рис. 5.8. Параллельное сопро-

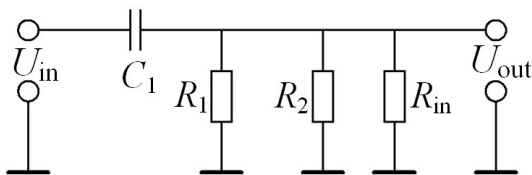


Рис. 5.8. Фильтр высоких частот, действующий на входе схемы с общим эмиттером

тивление трех резисторов заменяем эквивалентным сопротивлением $G_{eq} = G_1 + G_2 + G_{in} = (10.91 \text{ кОм})^{-1} + (13.33 \text{ кОм})^{-1} + (60 \text{ кОм})^{-1} = 0.183 \cdot 10^{-3} \text{ См}$, а $R_{eq} = 5.45$ кОм. Комплексный коэффициент передачи фильтра на рис. 5.8 и его модуль

имеют вид

$$K(\omega) = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{1}{1 - \frac{j}{\omega\tau}},$$

$$|K(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}}}.$$

Из этого выражения легко определить постоянную времени τ , характеризующую работу фильтра. Эта постоянная времени должна удовлетворять условию задачи: частоты выше 1 кГц должны пропускаться фильтром. Если предположить, что частота $f_0 = 1$ кГц является частотой среза фильтра (т.е. модуль коэффициента передачи на этой частоте составляет 0.707 от максимального значения, равного 1), то легко определить искомую емкость по условию

$$|K(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}}},$$

$$\tau = R_{eq}C_1 = \frac{1}{\omega_0}.$$

Следовательно, $C_1 = 1/(6280R_{eq}) = 0.029$ мкФ. Для того чтобы схема пропускала частоты вблизи 1 кГц с меньшим затуханием, можно взять конденсатор большей емкости, например 0.1 мкФ.

Рассмотрим схему по переменному току, не вдаваясь в теоретические вопросы транзисторной схемотехники: эта схема усиливает сигнал по мощности за счет усиления сигнала по току. Напряжение на эмиттере U_e повторяет входное напряжение (U_b) по форме, но ток эмиттера I_e значительно превышает ток базы: $I_e = I_c + I_b = (\beta + 1)I_b$, и для нашей схемы это усиление будет превышать 50. Следовательно, такая схема способна значительно усилить входной сигнал по мощности.

Входное сопротивление схемы определяется ФВЧ, изображенным на рис. 5.8, и имеет комплексный характер, однако для частот, превышающих частоту среза фильтра, сопротивление имеет резистивный характер и равняется примерно 5.5 кОм. Выходное сопротивление схемы со стороны эмиттера (этот вопрос подробно изложен в теоретических пособиях) составляет R_e/β и для нашего случая не превышает 24 Ом. Таким образом, схема прекрасно согласует входное и выходное напряжение, являясь хорошей нагрузкой (с большим сопротивлением) для предыдущего каскада и хорошим источником ЭДС (с малым внутренним сопротивлением) для последующего каскада. Задача решена.

Рассмотрим следующую задачу без подробностей, присущих предыдущей задаче.

Разработать схему источника питания на основе биполярного транзистора КТ315 и стабилитрона марки 2С124Д1 в цепи смещения. Ток источника составляет 2 мА. Напряжение питания $U_S = 9$ В. Анализ этой схемы заключается в том,

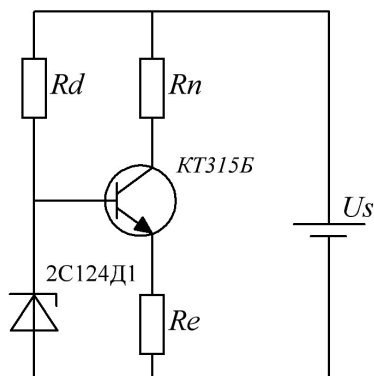


Рис. 5.9. Источник стабилизированного тока на основе схемы эмиттерного повторителя

чтобы

- определить неизвестные параметры R_e и R_d ,

- определить диапазон нагрузки R_n , которую можно подключать к такой схеме.

Определим неизвестные параметры из следующей цепочки рассуждений. Ток покоя транзистора нам известен — это ток, которым нужно питать нагрузку — резистор R_n . Ток покоя равен 2 мА.

Следовательно, нам надо поставить в цепь эмиттера такое сопротивление R_e , чтобы $U_e = R_e I_q$ было бы ровно на 0.6 В ниже напряжения на базе, т.е. напряжения пробоя стабилитрона 2С124Д1. Согласно справочнику напряжение пробоя такого стабилитрона составляет 2.4 В. Значит, напряжение U_e должно быть $(2.4 - 0.6) \text{ В} = 1.8 \text{ В}$. Зная ток покоя, сразу определяем $R_e = 1.8 \text{ В} / 2 \text{ мА} = 0.9 \text{ кОм}$.

Определим сопротивление в цепи делителя R_d . Это сопротивление, по сути, ограничивает ток, протекающий через стабилитрон. Ток делителя должен быть много больше тока базы. Это утверждение основано на рассуждениях предыдущей задачи, где мы говорили о малости параллельного сопротивления резисторов в цепи делителя в сравнении со входным сопротивлением транзистора со стороны базы. (Приведем для убедительности предыдущую задачу, где последовательно соединенные резисторы R_1 и R_2 пропускают через себя ток примерно 0.49 мА, а ток базы (при среднем для транзисторов данной марки $\beta = 200$) составляет менее 0.03 мА.) Таким образом, в нашей схеме резистор R_d должен определить ток, который был бы много больше тока базы транзистора. Минимально допустимый ток базы составляет $I_b = I_q / \beta_{\min} = 2 \text{ мА} / 50 = 0.04 \text{ мА}$. Значит, ток делителя I_d должен быть 0.4 мА, следовательно, $U(R_d) = U_S - U(VD) = 9 \text{ В} - 2.4 \text{ В} = 6.6 \text{ В}$, и $R_d = U(R_d) / I_d = 6.6 \text{ В} / 0.4 \text{ мА} = 16.5 \text{ кОм}$.

Теперь определим диапазон значений, который может принимать нагрузка R_n . Смысл этой операции заключается в том, чтобы не выйти за ограничения схемы. Если мы рассмотрим контур, содержащий R_n , транзистор, R_e и источник питания, то сразу заметим, что напряжение источника питания

(при изменении R_n) перераспределяется между напряжением U_{ce} и напряжением на нагрузке (напряжение на R_e является постоянным):

$$U_{ce} + U(R_n) = U_S - U(R_e).$$

Если мы будем увеличивать R_n , то напряжение на переходе "коллектор — эмиттер" транзистора в некоторый момент достигнет своего минимально допустимого значения (для КТ315Б это напряжение составляет согласно справочнику 0.4 В), после чего ток через нагрузку отклонится от заданного значения в 2 мА. Итак, найдем максимально допустимую нагрузку: $R_n^* = (9 \text{ В} - (2 \text{ мА} \cdot 0.9 \text{ кОм}) - 0.4 \text{ В}) / 2 \text{ мА} = 3.4 \text{ кОм}$. Таким образом, нагрузка может изменяться в диапазоне 0...3400 Ом, и через нее при этом будет протекать стабилизированный ток 2 мА.

Задача решена.

Рассмотрим последний тип задач на тему транзисторной схемотехники, посвященный усилителям с общим эмиттером. Задача. Рассчитать схему усилителя, изображенную на рис. 5.10. Транзистор КТ315Б, $U_S = 15 \text{ В}$, требуемый коэффициент усиления по напряжению равен 10. Схема должна усиливать сигналы с частотами, превышающими 50 Гц. Задача в общих чертах напоминает задачу об усилителе с общим коллектором, но имеет одну особенность, связанную со способностью этой схемы усиливать сигнал по мощности не только за счет тока, но и за счет напряжения.

Итак, первым делом определим ток покоя этой схемы. Сделаем выбор в пользу 1 мА, так как это значение нас полностью устраивает по всем параметрам задачи.

Напряжение на резисторе R_n даже при отсутствии входного сигнала должно составлять половину напряжения питания, чтобы выходной сигнал схемы был максимально симметричен, следовательно, $R_n = 0.5U_S / I_n = 7.5 \text{ кОм}$.

Определим R_e . Из теоретического курса по радиоэлектронике известно, что модуль коэффициента усиления такой

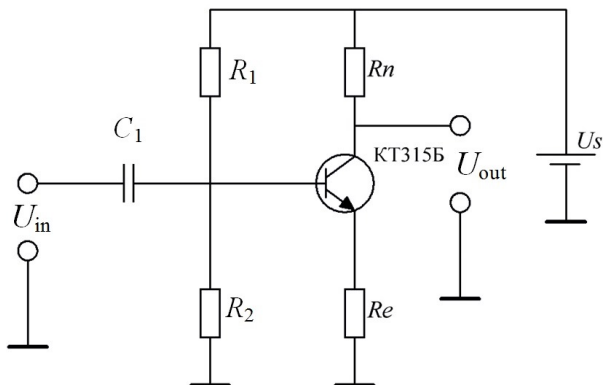


Рис. 5.10. Усилитель с общим эмиттером

схемы равен отношению R_n/R_e . По условию задачи он равен 10, следовательно, $R_e = 0.75$ кОм. Значит, при отсутствии входного сигнала ток покоя, протекающий через резистор R_e , создаст на нем напряжение $U_e = 0.75$ В. Это напряжение показывает нам, каким должно быть напряжение на базе транзистора: $U_b = U(R_2) = U_e + 0.6 \text{ В} = 1.35 \text{ В}$. Составим систему уравнений, чтобы определить резисторы R_1 , R_2 в цепи делителя точно так же, как мы это делали в предыдущих задачах:

$$\frac{R_1}{R_1} = \frac{U_S - U_b}{U_b} = \frac{13.65}{1.35},$$

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\beta_{min} R_e}{10}.$$

Из этой системы легко определить $R_1 = 41.67$ кОм, $R_2 = 4.12$ кОм. Следующий параметр задачи, который необходимо определить, — это конденсатор C_1 . Его величину находим аналогично тому, как это делалось в предыдущих задачах. Сначала находим эквивалентное активное входное сопротивление схемы: $R_{eq} = 3.4$ кОм, после чего $C_1 = 1/(6.28 \cdot 50 \text{ Гц} \cdot R_{eq}) = 0.93$ мкФ. Чтобы уверенно пропустить частоту 50 Гц, возьмем

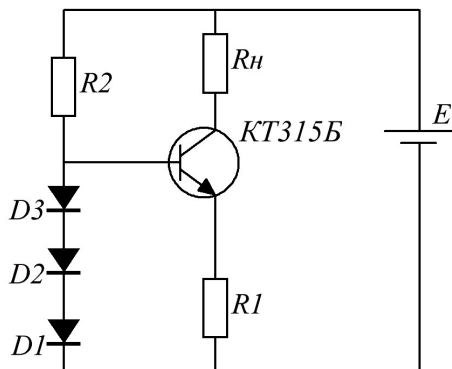


Рис. 5.11. К задаче № 23

конденсатор, близкий, но превышающий по номиналу полученную величину, например 2.2 мкФ.

Задача решена.

Задачи для самостоятельного решения

Задача № 22. Разработайте эмиттерный повторитель с источниками напряжения ± 15 В для диапазона звуковых частот (20 Гц — 20 кГц). Ток покоя равен 5 мА, на выходе имеется емкостная связь. В качестве цепи смещения используйте резистивный делитель.

Задача № 23. Рассчитать элементы источника тока, изображенного на рис. 5.11. В качестве диодов $D1 - D3$ использованы кремниевые диоды, источник питания имеет ЭДС 9 В. Источник тока должен питать сопротивление нагрузки током 3 мА. Рассчитать диапазон допустимых величин сопротивления нагрузки.

Задача № 24. В схеме имеются два стабилизированных источника напряжения +5 В и +15 В. Разработайте схему источника тока на основе транзистора $n-p-n$ типа, которая бы обеспечивала ток +5 мА. В качестве источника напряжения для базы используйте источник +5 В. Чему равен рабочий диапазон нагрузки в такой схеме?

Задача № 25. Разработайте усилитель с общим эмиттером. Цепь смещения состоит из резистивного делителя, напряжение питания составляет $+15\text{ В}$, требуемый коэффициент усиления -15 . Марка используемого транзистора КТ315Б.

Задача № 26. Разработайте транзисторный ключ, управляющий включением ленты из 10 светодиодов, включенных параллельно. Подобрать подходящий по номиналу источник питания и марку транзистора. Параметры светодиода указаны в главе 2

Литература

1. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. М.: Высшая школа, 1982. 488 с.
2. Бессонов Л. А., Демидова И. Г., Заруди М. Е. и др. Сборник задач по теоретическим основам электротехники. М.: Высшая школа, 1988. 543 с.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Наука ФИЗМАТЛИТ, 1999. 294 с.
4. Иродов И. Е. Основные законы электромагнетизма. М.: Высшая школа, 1991. 289 с.
5. Зернов Н. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей. М.—Л.: Энергия, 1965. 892 с.
6. Кисельман Б. А. Метод узловых потенциалов [Электронный ресурс]. URL: <http://www.youtube.com/watch?v=afDKvvWnrZM> (дата обращения: 26.11.2013).
7. Каталог продукции ООО "ТрансЛед" [Электронный ресурс]. URL: www.transled.ru/products (дата обращения: 26.11.2013).
8. Жеребцов И. П. Радиотехника. Л.: Связьиздат, 1953. 436 с.

9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 799 с.
10. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука ФИЗМАТЛИТ, 1974. 319 с.
11. Бонч-Бруевич А. М. Радиоэлектроника в экспериментальной физике. М.: Наука, 1966. 768 с.
12. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи. Т. 1. М.: Высшая школа, 1978. 528 с.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Наука ФИЗМАТЛИТ, 2001. 220 с.
14. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники. М.: Мир, 1998. 698 с.

Учебное издание

Иванов Алексей Сергеевич

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

Методы решения задач

Учебно-методическое пособие

Редактор *М. А. Шемякина*

Корректор *Н. А. Антонова*

Подписано в печать 29.11.2013. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 8,84. Тираж 100 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел
Пермского государственного национального
исследовательского университета
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Типография
Пермского государственного национального
исследовательского университета
614990, Пермь, ул. Букирева, 15