

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный университет»

*Кафедра механики сплошных сред и вычислительной
техники*

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА В ПЛОСКИХ СЛОЯХ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ
ВВЕДЕНИЕ В МАГНИТНУЮ ГИДРОДИНАМИКУ

Методическое пособие к спецкурсу для магистров механика - математического факультета

Пермь 2010

УДК 532. 538.4

ББК 30.125

М 12

Автор - составитель: д. т.н. н, проф. **С.Ю. Хрипченко**

Магнитная гидродинамика в плоских слоях проводящей жидкости. Введение в магнитную гидродинамику: метод. пособие к спецкурсу для магистров механико-математического факультета/ сост. С.Ю. Хрипченко; Перм. гос. ун-т. - Пермь, 2010.— 63с.

Данное методическое пособие подготовлено для студентов университета механико-математического факультета слушающих, спецкурс «Магнитная гидродинамика в плоских слоях проводящей жидкости» и прослушавших курсы электродинамики и механики сплошных сред. Оно предназначено для подготовки студентов к освоению материала спецкурса: вводит их в основной круг понятий, знакомит с основными уравнениями и критериями, характеризующими магнитогидродинамические процессы в жидкой проводящей среде, Дается разбор классических задач магнитной гидродинамики и показываются основные направления этой науки. Пособие может быть полезно также для студентов и аспирантов других факультетов, изучающих магнитную гидродинамику. Автор будет благодарен за критические замечания и полезные советы.

УДК 532. 538.4

ББК 30.125

Печатается по решению методической комиссии механико-математического факультета Пермского государственного университета

Рецензенты: коллектив лаборатории физической гидродинамики Ин-та механики сплошных сред УрО РАН (зав. лаб. д. ф.-м. н, проф. П.Г.Фрик); доц. Перм. Гос. тех. ун-та, к.ф.-м.н. В.И.Колесниченко

© Хрипченко С.Ю., составление, 2010

Содержание

Тема 1. Магнитная гидродинамика как наука, приближение сплошной среды, электрические свойства жидкости, нерелятивистское приближение, действие на расстоянии, преобразование при переходе из одной инерциальной системы в другую, электромагнитные силы, плотность тока (закон Ома), низкочастотное приближение.	4
Тема 2. Кинематический подход, диффузия магнитного поля, скин-слой, конвекция магнитного поля, замороженность поля.	13
Тема 3. Течения проводящей жидкости в магнитном поле, магнитогидродинамические эффекты, критерии подобия.	21
Тема 4. Конвекция и диффузия, большие магнитные числа Рейнольдса ($Re_m \gg 1$), малые магнитные числа Рейнольдса ($Re_m = 1$), гидромагнит Кольма, проблема МГД-динамо.	29
Тема 5. Уравнения магнитной гидродинамики, безындукционное приближение, внешние, начальные и граничные условия	42
Тема 6. Волны Альфвена, течение жидкости между двумя параллельными поверхностями через однородное магнитное поле нормально направленное этим поверхностям (течение Куэтта, течение Гартмана).	50
Тема 7. Гидравлические характеристики течения Гартмана, МГД-канал как дроссель, генератор, расходомер, насос.	60
Список использованной литературы	67

Тема 1

Магнитная гидродинамика как наука, приближение сплошной среды, электрические свойства жидкости, нерелятивистское приближение, действие на расстоянии, электромагнитные силы, плотность тока (закон Ома), низкочастотное приближение.

Со времен Фарадея известно, что при движении среды в магнитном поле в ней возникает э.д.с., и если среда электропроводна, то при определенных условиях в ней возникает электрический ток. Электрический ток может возникнуть и в неподвижной среде, но если магнитное поле меняется со временем. С одной стороны, электрические токи, возникшие в среде, создают свое магнитное поле, искажающее внешнее, с другой - их взаимодействие с магнитным полем обуславливает возникновение объемных электромагнитных сил, влияющих на движение среды.

Таким образом, при течении жидкой проводящей среды сквозь область с магнитным полем происходит:

1. Искажение магнитного поля движущейся проводящей жидкостью.
2. В жидкости возникают объемные силы, влияющие на картину течения жидкости.

Эти два эффекта и лежат в основе науки, называемой «Магнитной гидродинамикой». Эта наука изучает явления, вызванные взаимодействием движущейся проводящей жидкости с электромагнитными полями. Движущаяся жидкость изменяет магнитное поле, а магнитное поле меняет картину течения.

Например, медный или алюминиевый лист между полюсами магнита (рис.1.1), создающего сильное магнитное поле, будет падать медленнее, чем в отсутствии магнитного поля, – так, словно он погружается в вязкую жидкость.

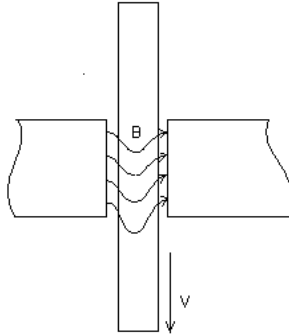


Рис.1.1

Движение проводящей пластины в магнитном поле между полюсами магнита

Этот эффект зависит от проводимости пластины, скорости ее движения и величины магнитного поля. Так, если пластина будет сверхпроводящей, то ее просто вытолкнет из области магнитного поля (пластина, падая, как бы отразится от упругой преграды). Таким образом, электромагнитные силы, обусловленные движением проводника через магнитное поле, могут быть диссипативными либо псевдоупругими.

Стимул к оформлению нового направления науки - магнитная гидродинамика - появился после разработки удобного для применения электромагнитного насоса, предназначенного для перекачивания жидкого металла, а также после установления факта, что на поведение проводящих ионизированных газов, широко распространенных во вселенной, оказывают сильное влияние магнитные поля.

В 1918 г. Лармор выдвинул гипотезу о том, что магнитное поле астрофизических объектов существует в результате действия МГД-динамо. По этой гипотезе проводящее вещество звезды действуют как ротор и статор самовозбуждающегося электрического генератора.

В период между Первой и Второй мировыми войнами астрофизики Каулинг и Ферраро начали развивать теорию магнитной гидродинамики. Экспериментаторы Гартман и Лазарус провели свои фундаментальные эксперименты по

изучению течения ртути в трубе через область однородного магнитного поля.

В 1942 г. Альфвен опубликовал работу, в которой заявил о появлении полностью самостоятельной теории магнитной гидродинамики (термин предложен Альфвеном).

К тому времени уже осознанно воспринималось действие эффектов: 1) влияние течения на магнитное поле и 2) влияние поля на течение. Во время движения жидкости (через магнитное поле) в ней возникали индуцированные токи, которые, создавая собственное магнитное поле, искажали внешнее поле так, что создавалась картина увлечения движущейся проводящей жидкостью магнитного поля. Этот эффект был назван «вмороженностью» магнитного поля. Кроме того, взаимодействие индуцированных токов с магнитным полем приводило к возникновению объемных электромагнитных сил, оказывающих влияние (например, тормозящее) на течение жидкости.

В дальнейшем последовало открытие волн Альфвена, обусловленных тем, что магнитно-силовые линии, обладающие натяжением и вмороженные в проводящую жидкость, уподобляются натянутым струнам, инерциальные свойства которых определяются инерцией жидкой среды, куда они вморожены. Вдоль магнитно-силовых линий может распространяться волна, подобно волне, распространяющейся по натянутой струне.

Во второй половине XX в. с появлением атомных технологий магнитная гидродинамика получила новый импульс. Были созданы МГД-насосы для атомных реакторов, причем в реакторах, стоящих на кораблях и подводных лодках, альтернативы МГД-насосам просто нет. Были разработаны и продолжают разрабатываться разнообразные МГД-насосы, перемешиватели, левитаторы для бестигельной плавки в металлургических технологиях.

Приближение сплошной среды в магнитной гидродинамике вводится так же, как и в «обычной» гидродинамике. Бесконечно малым объемом в магнитной гидродинамике считается такой, который во много раз меньше объема рассматриваемой области, но в то же время длина

которого много больше длины свободного пробега молекул. В этом случае для рассматриваемой среды подходят все методы дифференциального исчисления, но среда по-прежнему может считаться сплошной и ее молекулярное строение во внимание не принимается.

Электрические свойства жидкости. МГД отличается от обычной гидродинамики тем, что рассматривает поведение электропроводных жидкостей. Магнитная проницаемость таких жидкостей близка к проницаемости вакуума, поэтому жидкость напрямую не может оказывать воздействия на магнитное поле, но благодаря тому, что по жидкости может протекать электрический ток, жидкость и магнитное поле взаимно влияют друг на друга.

Нерелятивистское приближение означает, что все скорости, которые рассматриваются в задачах, много меньше скорости света. Таким образом, справедливы законы классической механики и электродинамики.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= q / \varepsilon_0, & \vec{E} &= \vec{E}_s + \vec{E}_i, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E}_i &= -\partial \vec{B} / \partial t, \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{B}, & \vec{E}_i &= -\partial \vec{A} / \partial t, & \vec{E}_s &= \nabla \varphi. \end{aligned}$$

Закон Ампера – Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{B} / \mu = \vec{j} + \varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t.$$

Условие неразрывности для электрического тока (закон Кирхгофа):

$$\operatorname{div} \vec{j} = \partial q / \partial t.$$

Действие на расстоянии. Уравнения магнитной гидродинамики написаны в дифференциальной форме, но надо помнить, что электромагнитные поля, являющиеся неотъемлемой частью МГД-явлений, определяются не только в точке. Для их описания необходимо рассматривать все электрические токи и магнитные поля как в рассматриваемой области, так и во всем пространстве, эту область окружающем.

Преобразование при переходе из одной инерциальной системы в другую. При переходе из различных инерциальных систем координат в другие часть величин, характеризующих МГД-процесс, меняется, а часть остается неизменной. Так, например, неизменны масса, время, магнитное поле, силы, в то время как скорость будет различной в разных системах. Электрическое поле также будет изменяться:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.1)$$

Так же, как и поле, меняется электрический заряд.

Возьмем операцию дивергенции от 1 и умножим обе части уравнения на ε_0 :

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}' = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} + \varepsilon_0 \operatorname{div} [\vec{v} \times \vec{B}], \quad (1.2)$$

но $\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = q$, а $\operatorname{div} [\vec{v} \times \vec{B}] = -v \operatorname{rot} \vec{B}$, так как здесь рассматривается безвихревое движение, следовательно, $\operatorname{rot} \vec{B} \equiv 0$. Таким образом, (1.2) преобразуется в

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}' = q - \varepsilon_0 v \operatorname{rot} \vec{B}. \quad (1.3)$$

Но $\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}' = q'$, а $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, отсюда $q' = q - \varepsilon_0 \mu_0 \vec{v} \cdot \vec{j}$, но $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, тогда окончательно получим:

$$q' = q - \vec{v} \cdot \vec{j} / c^2. \quad (1.4)$$

Как видно из (1.4), заряд в движущейся системе отсчета при обычных скоростях и плотностях тока практически не отличается от заряда в неподвижной системе отсчета, поэтому будем полагать, что $q' = q$.

Электромагнитные силы. Пусть в проводнике имеются частицы с зарядом p , тогда сила, действующая на одну частицу, $\vec{f}_i = p(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Сила, действующая на весь выбранный

единичный объем, будет равна: $\vec{f} = (\sum_i p_i) \vec{E} + (\sum_i p_i \vec{v}) \times \vec{B}$. Но $\sum_i p_i$ – это электрический заряд в единице объема, тогда справедливо $\sum_i p_i \vec{v} = \vec{j}$. Отсюда $\vec{f} = q\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$, а так как в проводнике нет некомпенсированных зарядов ($q=0$), то $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$.

Очевидно, что на размерах сравнимых с межмолекулярным расстоянием электрическое и магнитное поля претерпевают значительные колебания в пространстве по своему значению. В применяемых в магнитной гидродинамике выражениях $\vec{E}$ и $\vec{B}$ являются сглаженными континуальными выражениями, которые остаются постоянными в окрестности рассматриваемой точки.

Плотность тока (закон Ома). Плотность тока в проводнике определяется по закону Ома как $\vec{j}/\sigma = \vec{E} - \vec{j} \times \vec{B}/ne$, где ne – количество свободных зарядов в единице объема проводника и величина свободного заряда. Второй член в этом выражении в правой части обусловлен эффектом Холла. Для большинства сред, которыми оперирует магнитная гидродинамика (жидкий металл), этот член очень мал в силу высокой электрической проводимости среды, богатой свободными зарядами. Если учесть, что в общем случае $\vec{E} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$, то закон Ома будет выглядеть так: $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

Низкочастотное приближение. При изменяющихся во времени электромагнитных полях, а это имеет место при взаимодействии движущейся проводящей жидкости с электромагнитным полем, происходят следующие процессы:

1. Изменение со временем электрического заряда влечет появление электрического тока: $\text{div} \vec{j} = \partial q / \partial t$.

2. Течение проводящей жидкости приводит к появлению конвективного электрического тока $\vec{j} = qv$ (здесь q – заряд в единице объема).

Вследствие отсутствия связанных зарядов токи поляризации в металле отсутствуют ($\partial P/\partial t = 0$).

3. Объемные силы, обусловленные электромагнитным взаимодействием, кроме части, определяемой взаимодействием тока с магнитным полем, имеют часть, обусловленную воздействием на заряды электрического поля $q\vec{E}$.

Рассмотрим по порядку пункты 1,2,3. Все эти дополнительные токи и силы для относительно медленных процессов малы.

Действительно:

$$1. \text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \partial\vec{E}/\partial t \Rightarrow \vec{j} = \text{rot}\vec{B}/\mu_0 - \varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t. \quad (1.5)$$

Отношение первого члена правой части выражения 5 ко второму члену по порядку величин можно записать как

$$\frac{\text{rot}\vec{B}/\mu_0}{\varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t} \approx \frac{B/\mu_0 d}{\varepsilon_0 E f}, \quad (1.6)$$

где d и f – характерные значения длины и частоты процесса.

Так как $\text{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \Rightarrow E/d \sim Bf \Rightarrow B/E \sim 1/df$, то, подставляя это в (1.6), получим:

$$\frac{\text{rot}\vec{B}/\mu_0}{\varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t} \approx \frac{B/\mu_0 d}{\varepsilon_0 E f} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 d^2 f^2}, \text{ но } 1/\varepsilon_0 \mu_0 = c^2. \text{ Таким образом,}$$

$$\frac{\text{rot}\vec{B}/\mu_0}{\varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t} \approx \frac{c^2}{d^2 f^2} \gg 1.$$

Для большинства рассматриваемых случаев это отношение много больше единицы, поэтому при обычных частотах в магнитной гидродинамике второй член крайне мал и закон Ампера записывается как $\vec{j} = \text{rot}\vec{B}/\mu_0$, а это влечет условие $\text{div}\vec{j} = 0$ (первый закон Кирхгофа).

2. Полная плотность заряда определяется уравнением $\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = q$, поэтому

$q : \varepsilon_0 E/d$, но в движущейся жидкости $E : vB$, отсюда $\varepsilon_0 E/d : \varepsilon_0 vB/d$. Таким образом, конвективный ток будет определяться так: $j_k : qv : \varepsilon_0 v^2 B/d$. Основной ток, определяемый законом Ампера, $\vec{j}_0 = \operatorname{rot} \vec{B} / \mu_0 \sim B / \mu_0 d$.

Отношение основного тока к конвективному можно записать как $\frac{\vec{j}_0}{j_k} \sim \frac{B / \mu_0 d}{\varepsilon_0 v^2 B/d} \sim \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 v^2} \sim \frac{c^2}{v^2}$. Таким образом, конвективный

электрический ток пренебрежимо мал в сравнении с основным током при обычных скоростях движения жидкости ($v = c$). Таким образом, ток в проводящей жидкости будет определяться обычным законом Ома $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

3. Рассмотрим отношение сил, обусловленных взаимодействием свободных зарядов с электрическим полем, и сил, определяемых взаимодействием электрического тока и магнитного поля: $q\vec{E} / \vec{j} \times \vec{B}$. Учтем, что

$q\vec{E} \sim \varepsilon_0 E^2/d \sim \varepsilon_0 v^2 B^2/d$ и $j \times B : B^2 / \mu_0 d$, и получим, что $\frac{q\vec{E}}{j \times B} \sim \frac{v^2}{c^2}$. Таким образом, для случая $v = c$ силами,

обусловленными взаимодействием зарядов с электрическим полем, в сравнении с электромагнитными силами, можно пренебречь.

Теперь можно записать систему уравнений, описывающих явления магнитной гидродинамики. Она будет включать уравнения электродинамики в наших приближениях:

$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ — закон Фарадея;

$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ — закон Ампера;

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ — условие отсутствия магнитных зарядов;

$\operatorname{div} \vec{j} = 0$ — первый закон Кирхгофа;

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad - \text{закон Ома}.$$

Движение жидкости будет описываться уравнением Навье – Стокса и уравнением непрерывности:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \vec{j} \times \vec{B};$$

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = -\partial \rho / \partial t.$$

Вместе с заданными граничными условиями этих уравнений для определения векторных электромагнитных полей и полей скоростей, а также скалярных полей давления в задачах магнитной гидродинамики.

Тема 2

Кинематический подход, диффузия магнитного поля, скин-слой. Конвекция магнитного поля, замороженность поля

В этой теме рассмотрим кинематическую часть общей задачи: влияние течения проводящей жидкости на магнитное поле. При этом будем считать, что течение жидкости каким-либо образом задано и не меняется ни при каких обстоятельствах.

В этом случае поведение магнитного поля будет описываться тремя линейными уравнениями электродинамики (уравнениями Максвелла в МГД-приближении):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (2.3)$$

И закон Ома представим как

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.4)$$

В принципе эти же уравнения можно использовать для обратной задачи отыскания поля скоростей по строго заданному и неизменному распределению электромагнитного поля.

Как первая, так и вторая задачи (при постоянных σ , μ_0) являются линейными уравнениями относительно магнитного поля и скорости.

Возьмем операцию rot от обеих частей уравнения (2. 4):

$$rot \vec{j} / \sigma = rot \vec{E} + rot(\vec{v} \times \vec{B}),$$

$$rot \frac{1}{\sigma \mu_0} rot \vec{B} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot(\vec{v} \times \vec{B}), \text{ так как } \sigma, \mu_0 \text{ постоянны, то}$$

$$\frac{1}{\sigma \mu_0} rot rot \vec{B} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Поскольку $div \vec{B} = 0$, получим окончательно уравнение для магнитного поля:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot(\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \vec{B}. \quad (2.5)$$

При этом надо помнить, что это уравнение справедливо, если σ , μ_0 постоянны.

Рассмотрим поведение магнитного поля в жидкой проводящей среде при различных предельных случаях.

Только диффузия

Положим, что жидкость неподвижна ($v = 0$), тогда уравнение (2.5) примет вид $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \lambda \Delta \vec{B}$. (2.6)

Это уравнение аналогично уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T . \quad (2.7)$$

Единственное отличие состоит в том, что $\vec{B}$ – вектор, а T – скаляр. В этих уравнениях α и $1/\sigma\mu_0$ – коэффициенты диффузии соответственно тепла и магнитного поля. Эти уравнения отражают тот факт, что магнитное поле и температура в среде не могут мгновенно изменить свое распределение (это изменение (диффузия) происходит с конечной скоростью). При постановке задач магнитной гидродинамики не следует допускать таких заданий магнитного поля, которые нарушали бы уравнение (2.6). Например, для решения задач о распределении магнитного поля, создаваемого электрическим током, необходимо задать нулевое значение магнитного поля на бесконечности, так как за конечное время магнитное поле от источника не может распространиться на бесконечность.

Решение уравнения (2.7) (уравнения распространения тепла) хорошо известно. Например, в случае, когда температура на плоской границе изменяется по синусоидальному закону от времени, амплитуда колебания температуры в среде убывает экспоненциально с расстоянием, причем колебания проникают в среду тем дальше (слабое затухание), чем меньше α (коэффициент диффузии). То же решение будет в случае магнитного поля, проникающего в проводящую среду.

Рассмотрим плоский случай.

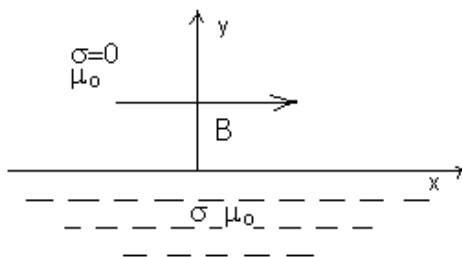


Рис.2.1

Магнитное поле над поверхностью проводящего массива

Поскольку существует процесс диффузии магнитного поля в проводящую среду, магнитное поле должно изменяться вдоль y . При этом возможен случай, когда поле по x не изменяется. $\text{div} \vec{B} = \partial B_x / \partial x + \partial B_y / \partial y = 0$, но $\partial B_x / \partial x \equiv 0$, отсюда и $\partial B_y / \partial y = 0$, поэтому $B_y = \text{const}$, но, как говорилось выше, необходимо, чтобы поле на бесконечности равнялось нулю, поэтому $B_y = 0$. Таким образом, магнитное поле в рассматриваемом случае имеет только компоненту магнитного поля, параллельную поверхности проводящего полупространства. Эта компонента из-за процесса диффузии будет меняться вдоль оси y .

Вернемся к уравнению $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \lambda \Delta \vec{B}$, где $\lambda = \frac{1}{\sigma \mu_0}$. Левый

член уравнения имеет порядок величины $\frac{B}{\tau}$, где B и τ – соответственно характерные масштабы магнитного поля и времени, за которое магнитное поле проникает в проводящую среду.

Правый член уравнения имеет порядок $\frac{B}{\sigma \mu_0 d^2}$, где d – характерное расстояние, на которое проникает магнитное поле за время τ . Отсюда

$$\frac{B}{\tau} \approx \frac{B}{\sigma \mu_0 d^2} \Rightarrow d \approx \sqrt{\tau / \sigma \mu_0}.$$

Если рассматривать магнитное поле, меняющееся во времени с некоторой частотой ν , то τ имеет смысл периода колебания поля, поэтому

$$d : \delta \approx \sqrt{1 / \sigma \mu_0 \nu}.$$

Величина δ – это длина, на которую проникает переменное магнитное поле в проводящую среду, она получила название «скин-слой».

Решим простейшую задачу. Пусть имеется проводящее полупространство с поверхностью раздела $y = 0$ (рис.2.1). Пусть магнитное поле имеет одну компоненту $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$ и колеблется с частотой $\omega = 2\pi\nu$. Таким образом, магнитное поле можно представить как $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\omega t}$. В этом случае полагаем, что на поверхности проводящего полупространства при $y=0$ $\vec{B} = \vec{B}_0$, а при $y=\infty$ $\vec{B} = 0$.

Поведение магнитного поля в неподвижной среде в общем случае описывается уравнением (2.6): $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \lambda \Delta \vec{B}$, однако для рассматриваемого случая оно может быть упрощено: $i\omega B e^{i\omega t} = \frac{1}{\sigma\mu_0} \Delta B e^{i\omega t}$ (2.8), где под B понимается амплитуда x составляющей магнитного поля. Будем искать решение для B в виде $B : B e^{\lambda y}$ 2.9. Подставим это выражение в (2.8) и получим характеристическое уравнение для определения λ :

$$i\omega B e^{\lambda y} = \frac{1}{\sigma\mu_0} \lambda^2 B e^{\lambda y} \Rightarrow \lambda^2 = i\omega\sigma\mu_0. \quad (2.10)$$

Решение этого уравнения будем искать, представив λ в виде суммы действительной и мнимой частей: $\lambda = \alpha + i\beta$. Таким образом, из (2.10) получим $\lambda^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2 = i\omega\sigma\mu_0$. Приравняв по отдельности действительную и мнимую части этого уравнения, получим два уравнения для определения α и β :

$$\begin{cases} \lambda^2 - \beta^2 = 0 \\ 2\alpha\beta = \omega\sigma\mu_0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\omega\sigma\mu_0/2}, \beta = \pm\sqrt{\omega\sigma\mu_0/2}.$$

Подставляя полученные α и β в (2.9) и, учитывая граничные условия, получим

$$B = B_0 e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - \beta y)}. \quad (2.11)$$

Таким образом, переменное магнитное поле уменьшается в e раз при проникновении в проводящую среду на глубину скин-слоя:

$$\delta = \sqrt{2/\omega\sigma\mu_0}. \quad (2.12)$$

Как видим, чем выше проводимость среды, тем меньше диффузия магнитного поля, и в предельном случае в сверхпроводящей среде диффузия отсутствует.

Конвекция поля

Рассмотрим случай, когда в движущейся проводящей жидкости коэффициент магнитной диффузии равен нулю, это может быть, например, при бесконечной проводимости среды. В этом случае естественно, что $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$.

Тогда уравнение для поля примет вид $\partial \vec{B} / \partial t = \text{rot} \vec{v} \times \vec{B}$. Можно сформулировать следующее утверждение:

Теорема. Магнитный поток через любой замкнутый контур, движущийся вместе с бесконечно проводящей жидкостью, постоянен.

Докажем это утверждение.

Закон Фарадея $d\Phi/dt = -\varepsilon$ можно записать как $d\Phi/dt = -\oint \vec{E} d\vec{r}$, где интегрирование проводится по неподвижному замкнутому контуру, в котором изменяется магнитный поток Φ . Допустим, что контур движется вместе с жидкостью со скоростью $\vec{v}$, в этом случае будет иметь место

дополнительный вклад в $\partial\Phi/\partial t$ за счет изменения потока в контуре при его движении.

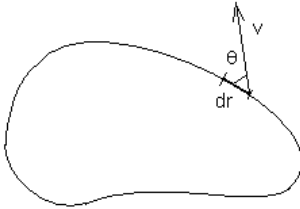


Рис.2.2
Воображаемый контур в проводящей жидкости

Элемент дуги $d\vec{r}$ при движении контура со скоростью $\vec{v}$ в единицу времени заметает площадь $vdr \sin \theta$, и это может быть записано в виде вектора, нормального этой площади $\vec{v} \times d\vec{r}$. Таким образом, пересекаемый элементом дуги магнитный поток в единицу времени будет определяться как $d\Phi = (\vec{v} \times d\vec{r}) \cdot \vec{B} \Rightarrow -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$. Таким образом, мы получили добавку к изменению магнитного потока в единицу времени, вызванную движением контура. Отсюда закон Фарадея примет вид $d\Phi/dt = -\oint (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d\vec{r}$. Но известно, что если жидкость идеально проводящая, то $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$. Отсюда $d\Phi/dt = 0$. Это значит, что в рассматриваемом контуре при его движении магнитный поток не меняется, что и требовалось доказать.

В случае идеально проводящей жидкости справедливо и другое утверждение.

В идеально проводящей жидкости все жидкие частицы, находящиеся на магнитно-силовых линиях, при движении жидкости остаются на этих линиях.

Докажем это. Имеем некий контур, движущийся с идеально проводящей жидкостью. Пусть его пронзает магнитный поток. Рассмотрим элемент жидкости, совпадающий с элементом дуги

контура. Пусть этот элемент лежит на некой магнитно-силовой линии. Если при своем движении этот элемент сойдет с магнитно-силовой линии, то он неизбежно перейдет на другую магнитно-силовую линию, а это будет означать изменение магнитного потока в контуре, что невозможно, так как противоречит предыдущей теореме.

Таким образом, эти две теоремы показывают, что идеально проводящая жидкость при своем движении переносит магнитное поле. Это явление названо «вмороженностью магнитного поля».

Исходя из сказанного, можно утверждать, что в жидкости, обладающей конечной проводимостью, имеют место два механизма:

1) диффузия магнитного поля – за него отвечает второй член в правой части уравнения (2.5) и

2) механизм конвекции (переноса) магнитного поля, определяемый первым членом правой части этого уравнения.

Тема 3

Течения проводящей жидкости в магнитном поле, магнитогидродинамические эффекты, критерии подобия

Рассмотрим ламинарное стационарное течение жидкого металла со средней скоростью V в длинной плоской прямоугольной трубе, помещенной в однородное поперечное плоскости трубы магнитное поле.

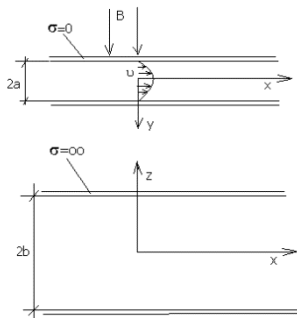


Рис.3.1

Течение проводящей жидкости в плоской трубе прямоугольного сечения, помещенной в однородное магнитное поле

При движении жидкости в трубе через область с магнитным полем возникает электрическое поле E , направленное вдоль z от $-e$ до $+e$. Плотность тока при этом определяется как $j = \sigma(E - uB)$. Для того чтобы определить распределение плотности тока в сечении трубы (канала), воспользуемся тем, что электрический ток не может замкнуться вне области сечения

канала и поэтому
$$\int_{-a}^{+a} \sigma(E - uB) dy = 0. \quad \text{Отсюда}$$

$$E = \frac{1}{2a} \left(\int_{-a}^{+a} u dy \right) B = VB. \quad \text{Здесь } V \equiv \frac{1}{2a} \left(\int_{-a}^{+a} u dy \right).$$

Таким образом, $j_{\text{инд}} = \sigma B(V - u)$. Как видно из этого выражения, если скорость жидкости в сечении канала везде одинакова, то $j_{\text{инд}} = 0$. В реальной ситуации на стенках канала выполняется так называемое условие прилипания. Действительно, из-за межмолекулярных сил молекулы жидкости прилипают к стенке канала, поэтому жидкость, касающаяся стенки, имеет скорость стенки, а если стенка неподвижна, то на ней скорость жидкости равна нулю. Таким образом, в пристеночном слое скорость жидкости меньше ее средней по сечению скорости ($u < V$) и направление индукционного тока в этой области противоположно току в центральной области

сечения канала, где скорость потока выше средней скорости ($u > V$).

Электрические токи, взаимодействуя с магнитным полем, порождают объемную силу $f_{эм} = \sigma B^2(V - u)$, тормозящую поток жидкости в ядре течения и ускоряющую ее у стенок канала. В этом случае профиль течения уплощается, градиент скорости у стенок возрастает. Силы трения при этом растут, что приводит к увеличению перепада давления, необходимого для поддержания постоянного расхода через канал. При этом суммарная электромагнитная сила в сечении канала равна нулю, так как равен нулю полный электрический ток в сечении канала. Этот комплекс явлений получил название «эффект Гартмана».

Если боковые границы канала ($z = \pm b$) соединить между собой через внешнюю электрическую цепь, то получится МГД-машина. При этом возможны два варианта:

1. Энергия подводится к МГД-каналу – в этом случае это МГД-насос.
2. Энергия отводится от МГД-канала – в этом случае это МГД-генератор, или МГД- дроссель.

В обоих случаях общий интегральный ток через сечение канала будет отличен от нуля, и в примере с генератором он будет оказывать тормозящее действие на общий поток через канал, что приводит к возрастанию перепада давления при поддержании постоянного расхода в канале.

В противоположном случае, когда энергия подводится к каналу, электромагнитные силы ускоряют поток, а перепад давления снижается и даже меняет знак.

Теперь в общих чертах (качественно) рассмотрим картину обтекания тела проводящей жидкостью в присутствии магнитного поля (рис.3.2).

Пусть тело движется в проводящей жидкости в присутствии магнитного поля B_0 со скоростью U_0 . Внешних

источников тока нет. Поэтому в неподвижной системе отсчета $E=0$ и закон Ома запишется как $j = \sigma u B_0$. Возмущением магнитного поля мы пренебрегаем. Объемная электромагнитная сила, действующая на жидкость, будет направлена противоположно движению тела.

Перейдем к системе координат, связанной с телом, при этом для сил получим выражение $f_{эм} = \sigma B^2 (U_0 - u)$. Здесь u есть скорость вдоль x в системе координат, связанной с телом.

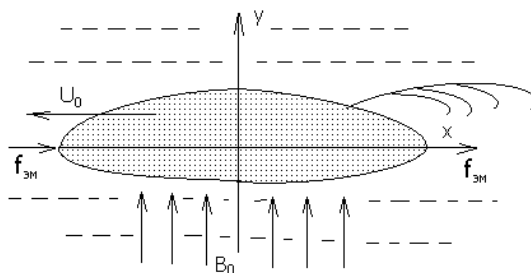


Рис.3.2

Движение тела в проводящей жидкости через область с однородным магнитным полем

Как можно видеть, сила направлена в ту же сторону, что и скорость U_0 , возрастает с приближением к телу и достигает максимума на его поверхности ($f_{эм} = \sigma B^2 U_0$). Таким образом, электромагнитная сила направлена против сил трения. Она уплотняет профиль скорости, выравнивая поток. При этом вблизи поверхности возрастает градиент скорости, что и ведет к увеличению сил трения. Кроме того, электромагнитные силы имеют проекцию, направленную нормально поверхности тела в ее лобовой и хвостовой частях, тормозят его движение (рис.3.2). Все это приводит к возрастанию коэффициента сопротивления тела.

Магнитное поле, поперечно направленное течению жидкости, затягивает отрыв пограничного слоя.

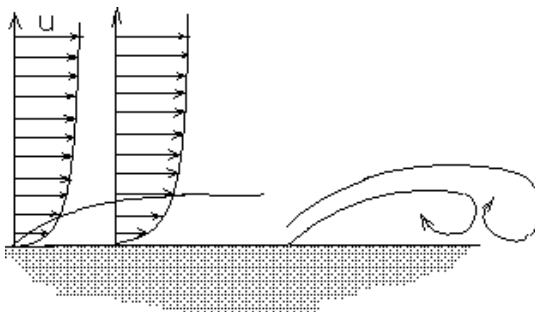


Рис.3.3

Пограничный слой у поверхности тела, движущегося в проводящей жидкости с магнитным полем

Действительно, в области отрыва имеет место возвратное течение, обуславливающее большие поперечные градиенты скорости. Магнитное поле, как говорилось выше, уплощает профиль, уменьшает толщину пограничного слоя, тем самым уменьшает градиенты скорости в основной области течения, за исключением тонкого пограничного слоя в пристеночной области. То же самое происходит в следе за телом. Магнитное поле старается выровнять скорость, и при достаточной его величине обратное течение исчезает.

Критерии подобия

Определим таким же (качественным) образом критерии подобия, характеризующие МГД-явления.

Рассмотрим элементарный прямоугольный объем жидкости, плоско перемещающийся в поперечном перемещению магнитном поле (рис.3.4).

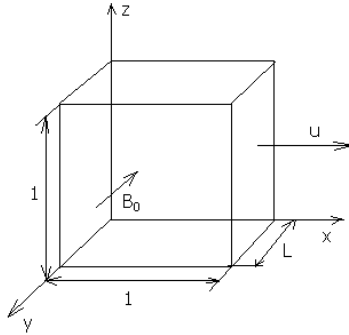


Рис.3.4

Элементарный кубический объем проводящей жидкости, перемещающейся в магнитном поле

К движущейся жидкости приложены электромагнитные и вязкие силы, а также силы инерции. Из соображений размерности для вязких сил, отнесенных к единице объема, получим выражение

$f_e = \rho \nu \Delta \vec{v} \sim \rho \nu \frac{U}{L^2}$, где, как мы помним, U и L – соответственно характерные скорость и размер.

Силы инерции $f_{ин} = \rho(\vec{v} \nabla) \vec{v} \sim \rho \frac{U^2}{L}$.

Электромагнитные силы $f_{эм} : \sigma B_0^2 U$, где B_0 – характерное значение магнитного поля.

Используя эти оценки, получим критерии, характеризующие соотношения между этими силами.

1. Отношение электромагнитных сил к вязким

$$\frac{f_{эм}}{f_e} = \frac{\sigma B_0^2 \cancel{U} L^2}{\rho \nu \cancel{U}} = \frac{B_0^2 L^2 \sigma}{\rho \nu} \quad - \quad \text{выражение, равное}$$

квадратному корню из этого соотношения, получило название «числа Гартмана»: $Ha \equiv M = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$.

2. Отношение электромагнитных сил к силам инерции $\frac{f_{эм}}{f_{ин}} = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho U^2} = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho U}$ — это соотношение названо

«числом Стюарта»: $N = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho U}$, $Ha^2 = N Re$.

3. Кроме силового воздействия важной характеристикой является величина воздействия движущейся проводящей среды на магнитное поле посредством магнитного поля индуцированных в движущейся среде электрических токов. Порядок величины плотности индуцированных в движущейся проводящей жидкости токов определяется выражением $j : \sigma B_0 U$.

Используем уравнение $rot B = \mu_0 j$. Левая часть этого уравнения имеет порядок $rot B : \frac{\Delta B}{L}$, правая часть имеет порядок $\mu_0 j : \mu_0 \sigma B_0 U$, таким образом, $\frac{\Delta B}{L} = \mu_0 \sigma B_0 U$. Из этого выражения видно, что $\frac{\Delta B}{B_0} = \mu_0 \sigma L U$.

Этот параметр получил название «магнитное число Рейнольдса», и он имеет смысл отношения индуцированного движением магнитного поля к величине первоначального поля:

$Re_m = \frac{LU}{\lambda_m}$, где $\lambda_m = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$. Аналогия с обычным числом

Рейнольдса очевидна. Величину λ_m называют магнитной вязкостью.

Критериев Re , Re_m , Ha , N в задачах о течении проводящей жидкости через магнитное поле вполне хватает для описания явлений и получения путем их комбинаций других критериев подобия.

Разделив число Стюарта на магнитное число Рейнольдса, получим число Альфвена $\frac{N}{Re_m} = Al = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho U^2}$, имеющее смысл

отношения магнитной энергии в единице объема $w = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$ к

кинетической энергии единицы объема жидкости $w_{кин} = \frac{\rho U^2}{2}$.

Разделив Re_m на Re , получим число Бэтчелора $Bt = \mu_0 \sigma \nu$, или, как его еще называют, магнитное число Прандтля. Это число характеризует физические свойства среды и является отношением кинематической вязкости среды к ее магнитной вязкости.

Можно видеть, что даже при простейшем изотермическом течении, когда имеется только три определяющих критерия подобия, моделировать МГД-явления в проводящей среде с помощью другой проводящей среды крайне сложно. Это происходит в результате того, что для соблюдения подобия необходимо совпадение всех трех критериев подобия, что в обычных лабораторных условиях практически невыполнимо.

Тема 4

Конвекция и диффузия. Большие магнитные числа Рейнольдса ($Re_m \gg 1$). Малые магнитные числа Рейнольдса ($Re_m = 1$).

Гидромагнит Кольма. Проблема МГД-динамо

Введение безразмерных критериев позволяет оценивать соотношение процессов диффузии и конвекции в МГД-процессах.

Нет особого смысла говорить только о большой и малой проводимости среды, так как только проводимость среды не определяет характера МГД-процесса. И только безразмерные параметры, показывающие соотношение между физическими величинами, характеризующими процесс, могут дать представление о преобладании того или иного эффекта в каждом конкретном случае.

В магнитной гидродинамике возможна ситуация, когда конвекция магнитного поля может преобладать над его диффузией, и степень этого преобладания определяется магнитным числом Рейнольдса.

Большие магнитные числа Рейнольдса ($Re_m \gg 1$).

Если $Re_m \gg 1$, то процесс конвекции магнитного поля преобладает над диффузией. Это может иметь место при большой проводимости среды, или при больших характерных размерах течения, или при больших его скоростях, а также от совместного действия этих факторов:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = Re_m \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{B} + \Delta \vec{B}. \quad (4.1)$$

Причем индуцированное движением жидкости магнитное поле преобладает над исходным полем. Суперпозиция индуцированного поля с исходным дает эффект переноса поля. При этом возможно появление магнитных пограничных слоев вблизи источника магнитного поля в остальной области, справедливо приближение идеально проводящей среды.

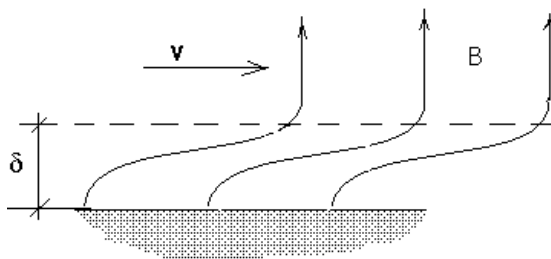


Рис.4.1

Магнитный пограничный слой у твердой поверхности в движущейся сквозь магнитное поле проводящей жидкости

Магнитный пограничный слой - это проявление видоизмененного скин-эффекта. Если магнитное число Прандтля (как в жидких металлах) мало, магнитное поле диффундирует гораздо быстрее, чем завихренность в жидкости, поэтому вязкий пограничный слой много меньше, чем магнитный. Это обстоятельство позволяет упростить задачу, считая жидкость идеальной в области магнитного пограничного слоя.

В области с масштабом длины δ , где члены в уравнении (2.5), отвечающие за конвекцию ($rot\vec{v} \times \vec{B} \sim \frac{vB}{\delta}$) и за диффузию ($\frac{1}{\sigma\mu_0} \Delta\vec{B} \sim \frac{B}{\sigma\mu_0\delta^2}$), сравнимы. Можно написать равенство $\frac{vB}{\delta} = \frac{B}{\sigma\mu_0\delta^2}$. Из этого выражения легко получается масштаб длины, на котором процессы диффузии и конвекции сравнимы между собой: $\delta = \frac{1}{\sigma\mu_0 v}$. Это и есть, по сути, толщина магнитного погранслоя.

В случае, когда интересующий нас процесс имеет масштаб порядка $d \gg \delta$, магнитное число Рейнольдса, определенное через d , будет много больше единицы ($Re_m \gg 1$); процессы, связанные с диффузией и диссипацией, будут сравнимы между

собой только в области магнитного пограничного слоя. Вне этого слоя процессами диффузии можно пренебречь и определяющими становятся только процессы конвекции магнитного поля. В этой области жидкость ведет как идеально проводящая; при этом вторым членом в правой части уравнения (4.1) можно пренебречь и можно считать, что $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$. Это так называемое приближение больших магнитных чисел Рейнольдса.

Вспомним выражение для характерного размера диффузии магнитного поля, полученного при рассмотрении вопросов второй темы: $\delta^* = \sqrt{\tau / \sigma \mu_0}$. В нашем случае за характерное время задачи $\tau = d / v$ магнитное поле диффундирует на глубину $\delta^* = \sqrt{d / \sigma \mu_0 v}$. Эта величина много меньше размеров задачи $\delta^* = d$, если $Re_m \gg 1$ ($Re_m = v d \sigma \mu_0$). Таким образом, процессами диффузии магнитного поля можно пренебречь и уравнение (4.1) для магнитного поля примет вид:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = Re_m \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{B}.$$

Малые магнитные числа Рейнольдса ($Re_m = 1$)

Это другой экстремальный случай, когда процессы диффузии доминируют и движение проводящей среды практически не оказывает влияния на приложенное магнитное поле. Поле в среде диффундирует к тому виду, который был бы в неподвижной среде. В этом случае конвективный член в уравнении (4.1) становится пренебрежимо мал и уравнение

приобретает следующий вид: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \Delta \vec{B}$.

Гидромагнит Кольма

Как мы выяснили, хорошо проводящая жидкость при своем движении может переносить магнитное поле, увлекая его за

собой. Рассмотрим конкретный пример, в котором реализуется это явление.

Пусть у нас есть сходящееся к центру от периферии течение. На периферии бесконечно протяженной цилиндрической области жидкость появляется и, радиально стекая, пропадает на оси цилиндра. В объеме присутствует однородное магнитное поле, направленное вдоль оси цилиндрической области.

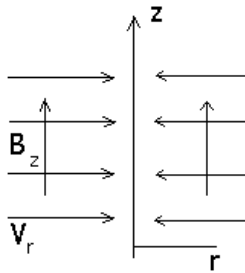


Рис.4.2

Принципиальная схема радиального течения жидкости в гидромагните Кольма

Задача стационарна и имеет аксиальную симметрию
 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$; $\vec{v} = \{v_r, 0, 0\}$; $\vec{B} = \{0, 0, B_z\}$; $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. Запишем

уравнение (4.1) в цилиндрической системе координат с учетом симметрии течения.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r B_z)}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \quad \text{где} \quad \text{Re}_m = v_0 R_{\text{вн}} \sigma \mu_0, \quad v_0 -$$

скорость на внешней границе области.

Так как жидкость в задаче несжимаема, то безразмерная скорость $v_r = 1/r$. Отсюда

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \Rightarrow B_z = \frac{1}{\text{Re}_m} r \frac{\partial B_z}{\partial r} \Rightarrow \frac{\text{Re}_m}{r} = \frac{1}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r}$$

$$-\text{Re}_m \int_{R_{\text{вн}}}^r \frac{1}{r} dr = \int_{B_0}^B \frac{1}{B} dB \Rightarrow \text{Re}_m \ln \frac{r}{R_{\text{вн}}} = \ln \frac{B}{B_0} \Rightarrow \ln \left(\frac{r}{R_{\text{вн}}} \right)^{\text{Re}_m} = \ln \frac{B}{B_0}.$$

Окончательно получим $B = B_0 \left(\frac{R_{\text{вн}}}{r} \right)^{\text{Re}_m}$. Как видим,

сходящийся поток проводящей жидкости усиливает магнитное поле, стягивая его от периферии к центру, причем степень усиления зависит от величины магнитного числа Рейнольдса, характеризующего течение проводящей жидкости в рассматриваемом случае.

Принцип усиления магнитного поля сходящимся течением проводящей жидкости используется в современной технике для получения сильных магнитных полей взрывными генераторами. При этом берется толстостенная медная труба, помещается в аксиальное магнитное поле от внешнего источника, после чего по периферии трубы осуществляется взрыв, который радиально схлопывает трубу. Магнитное поле в этом случае на короткое время усиливается многократно в центре трубы. Необходимо отметить, что рассмотренный процесс - это процесс усиления изначально существующего поля и при его отсутствии никакого поля такое течение производить не будет.

Проблема МГД-динамо

В современной магнитной гидродинамике существует одна крупная до конца, не решенная фундаментальная проблема, - это происхождение и существование магнитного поля астрофизических объектов. В свое время было выдвинуто предположение, что магнитное поле звезд и других астрофизических объектов существует благодаря МГД-явлениям в проводящей жидкой среде, которая составляет основу, или ядро, астрофизического объекта. Причем даже межзвездный газ из-за своей ионизации, являющийся слабым проводником вследствие больших астрономических расстояний, может существенно взаимодействовать с магнитным полем.

Одно из первых и простейших объяснений существования магнитного поля звезд основывалось на оценке времени диффузии магнитного поля из недр звезды (через проводящую плазму) к ее поверхности.

Так, например, проводимость сильно разогретой звездной плазмы порядка $10^8 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$, и для Солнца это время по оценке

$$\delta = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma \mu_0}} \Rightarrow \tau = \sigma \mu_0 \delta^2 : 10^{10} \text{ лет.}$$

Таким образом, выдвигалось предположение, что магнитное поле звезд - это реликтовое поле, которое до настоящего времени диффундирует из недр звезд.

Однако в настоящее время преобладает мнение, что магнитное поле астрофизических объектов не является реликтовым, это следствие процессов самогенерации магнитного поля в результате специфического течения проводящей жидкости, вызванного термогравитационной конвекцией. То, что в технике существуют электрические машины, в которых реализуется процесс самогенерации магнитного поля, значения не имеет, поскольку такие машины изготавливаются с применением проводов с электрической изоляцией. При помощи проводов электрическому току навязывают геометрию протекания, что позволяет получить эффект самогенерации магнитного поля.

В природных объектах проводов с изоляцией нет, а электрическая проводимость жидкой среды однородна и изотропна, поэтому должна реализовываться такая ситуация, при которой течение специфической топологии реализовывало бы процесс самогенерации магнитного поля.

Основное уравнение, описывающее магнитное поле в проводящей среде (в стационарном случае), $\text{Re}_m \text{rot} \vec{v} \times \vec{B} + \Delta \vec{B} = 0$. Предположим, что найдено некоторое распределение $\vec{v}$, которое допускается этим уравнением относительно $\vec{B}$ и удовлетворяет граничным условиям. При этом допустимы лишь некоторые значения Re_m . Удвоение величины

Re_m нарушает уравнение. Очевидно, что величина Re_m может принимать одно из возможных в ряду собственных значений, соответствующих допустимому распределению скорости. Если отклониться от этих значений в большую или меньшую сторону, это может привести к нарастанию или затуханию магнитного поля. Магнитное число Рейнольдса Re_m играет роль критерия самовозбуждения в процессе генерации магнитного поля жидкой проводящей средой, а сам процесс получил название «МГД-динамо».

Сам процесс зависит от величины Re_m , но само уравнение однородно относительно $\vec{B}$, поэтому эффект МГД-динамо не зависит от величины $\vec{B}$.

Таким образом, для реализации эффекта МГД-динамо необходимо создать течение жидкости с достаточной электрической проводимостью и скоростью, а также специфической топологией. Это чрезвычайно сложная задача, потому что, как было показано в предыдущем материале, не только течение оказывает влияние на магнитное поле, но и магнитное поле оказывает влияние на течение проводящей жидкости. Поэтому для упрощения задачи по исследованию возможности реализации эффекта МГД-динамо в настоящее время исследуют варианты так называемого кинематического МГД-динамо. В этом случае считают заданной конфигурацию течения проводящей жидкости и исследуют возможность возбуждения этим течением магнитного поля.

Какой же вид течения проводящей жидкости реализует эффект МГД-динамо? **Каулинг**, теоретически исследовав этот вопрос, доказал **теорему**, которая сформулирована так:

Любое осесимметричное течение проводящей жидкости не может возбудить осесимметричное магнитное поле.

Таким образом, течение, подобно течению в гидромагните Кольма, способно только усиливать магнитное поле, но реализовать эффект МГД-динамо не в состоянии.

Как видим, движения, способные генерировать магнитное поле, не обладает простой топологией. Попробуем на простом

примере показать особенности течения способного генерировать магнитное поле.

Прежде всего, для возникновения эффекта необходимо, чтобы течение характеризовалось достаточно большим магнитным числом Рейнольдса, чтобы конвективный перенос магнитного поля был существенен.

Представим, что в результате малой флуктуации в жидкой проводящей среде возникло магнитное поле (рис.4.3).

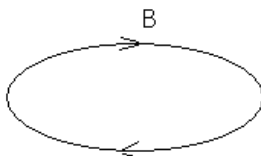


Рис.4.3

Если в жидкости присутствует дифференциальное течение, то оно перекрутит петлю (рис.4.4).

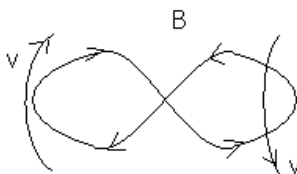


Рис.4.4

Наряду с этим течением должно быть сдвиговое, которое сложит эту восьмерку вдвое (рис.4.5).

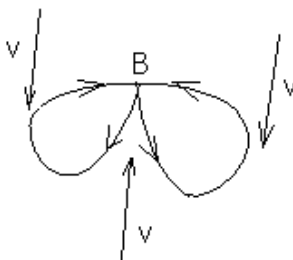


Рис.4.5

Кроме процессов конвекции магнитного поля, приводящих к указанным деформациям магнитно-силовых линий поля, в жидкости должны быть процессы диффузии. В результате диффузии рассасывается место перекрутки силовых линий и мы получим две расположенные рядом петли магнитного поля (рис.4.6). Таким образом, произошло увеличение числа магнитно- силовых линий, что говорит о наличии процесса генерации магнитного поля в рассматриваемом случае.



Рис.4.6

Таким образом, для реализации эффекта МГД-динамо необходимо:

1. **Чтобы магнитное число Рейнольдса, характеризующее процесс, было выше некоторого критического значения.**
2. **Чтобы течение проводящей жидкости сочетало в себе дифференциальное вращение и сдвиговые течения.**

В настоящее время существует много кинематических моделей МГД-динамо. Простейшей моделью является так называемая модель Пономаренко (рис.4.7).

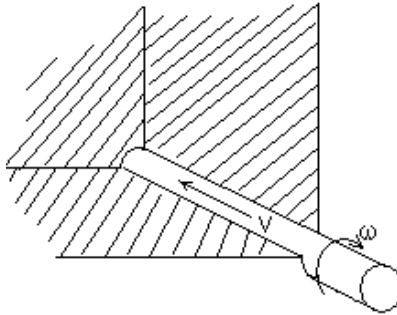


Рис.4.7

Кинематическая модель МГД-динамо Пономаренко

В этой модели рассматривается возможность генерации магнитного поля ввинчивающимся в неподвижную проводящую среду проводящим бесконечным цилиндром. Было показано, что в этом случае при магнитных числах Рейнольдса, определяемых через диаметр цилиндра и превышающих 17, возможна генерация магнитного поля.

Похожая ситуация была реализована в эксперименте поставленном в Институте физики в г. Саласпилс (Латвия). Экспериментальная установка представляла собой прямую трубу (рис.4.8), в которой специальным винтом, приводимым во вращение электродвигателем мощностью несколько сот киловатт, прокачивался закрученный поток жидкого натрия. В конце трубы при помощи продольных перегородок закрученность потока ликвидировалась, и жидкий натрий, поднимаясь между внешними стенками трубы и стенками внешнего кожуха, подавался к началу трубы, где он засасывался в трубу, и цикл повторялся.

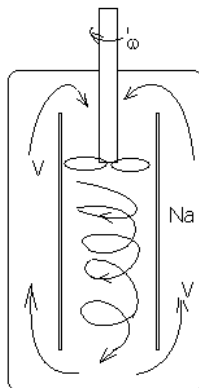


Рис.4.8

Схема установки в Институте физики в Саласпилсе (Латвия) по реализации МГД-динамо

В эксперименте латвийских физиков был зарегистрирован динамо-эффект, но магнитное число Рейнольдса, при котором началась генерация магнитного поля, было выше полученного в модели Пономаренко. Течение другой топологии реализовывалось в эксперименте немецких ученых в Карлсруэ, где также был зарегистрирован динамо-эффект. Экспериментальные работы по исследованию МГД-динамо ведутся также во Франции и США, но в этих странах эффекта МГД-динамо пока получено не было. Объединяет эти эксперименты их большая энерго и металлоемкость и как следствие - большая денежная стоимость. Более дешевый способ экспериментальной реализации МГД-динамо был разработан учеными Пермского института механики сплошных сред УрО РАН. Было предложено создавать динамо-эффект в импульсном режиме (рис.4.9). Для этого жидкий натрий раскручивается в торе с толстыми медными стенками, и по достижении необходимой скорости тор резко тормозится. При этом жидкий натрий, накопив в достаточном количестве кинетическую энергию, продолжает движение внутри тора и, налетая на специальные лопатки дивертора, закручивается вокруг продольной оси,

создавая на короткое время условия для генерации магнитного поля.

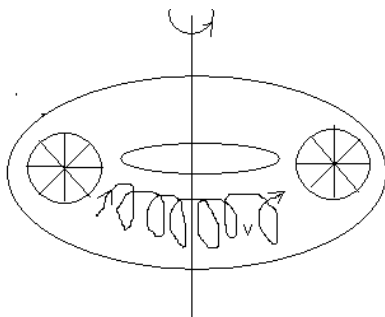


Рис.4.9

Схема установки по реализации импульсного МГД-динамо в Институте механики сплошных сред УрО РАН (Пермь)

Вследствие того, что накапливать кинетическую энергию можно (достаточно долго) раскручивая тор, энергопотребление, а следовательно, и цена этой установки значительно меньше, чем в других экспериментах.

Тема 5

Уравнения магнитной гидродинамики. Безындукционное приближение. Внешние, начальные и граничные условия

Система уравнений, описывающих изотермическое движение электропроводящей жидкости под действием электромагнитного поля, состоит из уравнений Навье -- Стокса, содержащих член, отвечающий за электромагнитное воздействие, уравнения непрерывности, уравнений Максвелла и закона Ома для движущихся сред. Вместо уравнений Максвелла и закона Ома может быть использовано уравнение (2.5) для магнитного поля. Применительно к жидкому металлу из всех сил электромагнитного происхождения, как было показано ранее,

существенны лишь те, которые являются результатом взаимодействия электрического тока проводимости и магнитного поля.

Для жидких металлов справедливо, что $\mu = \mu_0$ и что их электрическая проводимость однородна и изотропна. Будем рассматривать только те гидродинамические процессы, скорости которых много меньше скорости света $v = c$. Таким образом, система уравнений магнитной гидродинамики будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{j} \times \vec{B}, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{j} = \sigma [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}], \end{array} \right. \quad (5.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{j} = 0; \quad \text{div} \vec{B} = 0; \quad \text{div} \vec{v} = 0. \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Для того чтобы привести эти уравнения к безразмерному виду, выберем в качестве масштаба длины, скорости и индукции магнитного поля L, v_0, B_0 . Тогда масштабом плотности электрического тока исходя из уравнения (5.3) будет выражение $B_0 / L \mu_0$. Если нет внешних источников тока, масштабом для $\vec{E}$ будет $v_0 B_0$, масштабом времени -- L/v_0 , масштабом давления - ρv_0^2 . Используя эти масштабы, получим уравнения (5.1--5.5) в безразмерном виде.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} + Al \vec{j} \times \vec{B}, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{array} \right. \quad (5.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \end{array} \right. \quad (5.8)$$

$$\vec{j} = \text{Re}_m [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}], \quad (5.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{j} = 0; \quad \text{div} \vec{B} = 0; \quad \text{div} \vec{v} = 0. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Как уже говорилось выше уравнения (5.7--5.9) можно объединить в одно:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} \vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta \vec{B}.$$

Как говорилось ранее, существуют задачи (случай $\text{Re}_m = 1$), когда обратным влиянием течения на внешнее поле можно пренебречь. Это называется *безындукционным приближением*.

При безындукционном приближении пренебрегают влиянием течения на магнитное поле, но учитывают индуцированные (течением жидкости через магнитное поле) электрические токи.

Таким образом, объемная электромагнитная сила в уравнении (5.1) при безындукционном приближении будет определяться выражением

$$\vec{f} = Al(\vec{j} \times \vec{B}). \quad (5.11)$$

. В случае, когда нет внешних источников электрического тока, а токи возникают вследствие движения жидкости через магнитное поле, силы будут определяться как

$$\vec{f} = N(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B} . \quad (5.12)$$

За характерное значение магнитного поля можно выбрать максимальное значение магнитного поля в рассматриваемой задаче.

В случае $Re_m = 1$ отпадает необходимость в отыскании искажения (вызванного движением жидкости) магнитного поля, но также упрощается задача о нахождении распределения электрического поля. Если магнитное поле слабо меняется во времени, то $rot \vec{E} \approx 0$ и $\vec{E} = -\nabla \varphi$. Наложив условие $div \vec{j} = 0$ на $\vec{j} = Re_m[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0]$, получим $\Delta \varphi = div[\vec{v} \times \vec{B}_0]$. Поскольку нет внешних источников электрического тока, то $rot \vec{B}_0 = 0$, и отсюда $\Delta \varphi = \vec{B}_0 rot \vec{v}$.

Таким образом, (при $Re_m = 1$) систему МГД-уравнений можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \vec{v} + N(-\nabla \varphi + \vec{v} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0, \\ \Delta \varphi = \vec{B}_0 rot \vec{v}. \end{cases}$$

Внешние условия

Особенностью задач магнитной гидродинамики является тот факт, что при постановке граничных условий для описания решения в рассматриваемой области нельзя ограничиваться только одной этой областью. Магнитное поле, являющееся неотъемлемой частью рассматриваемого процесса, выходит за границы области, и для его описания необходимо находить решение для магнитного поля также и вне области задачи или применять какие - либо допущения и приближения. Одним из основных аспектов при рассмотрении внешних условий является описание условий замыкания цепи электрических токов и магнитно - силовых линий поля. Электрические цепи и магнитно - силовые линии должны образовывать замкнутые контуры (либо в жидкости, либо вне ее области). До тех пор, пока эта проблема

адекватно не решена, невозможно поставить и решить любую МГД-задачу.

В качестве поясняющего примера рассмотрим случай, когда по проводящей жидкости в плоской трубе продольно протекает электрический ток.

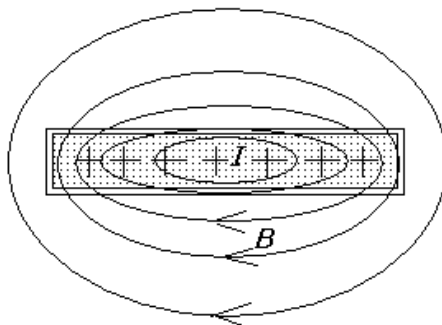


Рис.5.1

Магнитное поле электрического тока, текущего через плоскую трубу с проводящей жидкостью

В случае, когда рядом с каналом нет ферромагнитных тел, необходимо принимать во внимание не только внешнее поле, которое считается заданным, но и поле от электрического тока, текущего по жидкому металлу в трубе, величина которого находится из отдельной электродинамической задачи для областей внутри трубы и вне ее. Однако в некоторых случаях задачу можно существенно упростить, например, если плоская труба находится в тонкой щели между ферромагнитными массивами, а магнитное поле создается только электрическим током, текущим вдоль трубы. В этом случае для нахождения магнитного поля уже не требуется решать задачу о распределении магнитного поля во всем бесконечном пространстве. Вследствие очень высокой магнитной проницаемости ферромагнитных массивов, намного превосходящей магнитную проницаемость пространства щели и трубы, задача может быть существенно упрощена и магнитное поле с достаточным приближением можно находить, используя

так называемый закон полного тока:
$$\oint_L \frac{\vec{B}}{\mu} dl = \int_S \vec{j} ds.$$

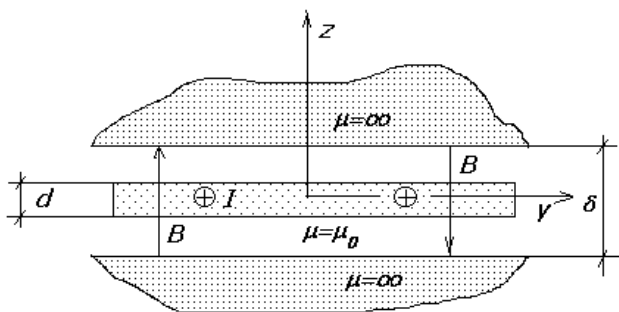


Рис.5.2

Магнитное поле электрического тока, протекающего по проводнику, помещенному в зазор между двумя ферромагнитными массивами

При таком подходе полагается, что магнитное поле имеет только одну компоненту, неизменную вдоль толщины зазора.

Действительно, $\text{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$, из чего следует,

что B_z не зависит от z . Однако в этом случае возникает противоречие. В канале, где присутствует электрический ток, справедливо уравнение $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, с другой стороны в зазоре вне канала, где тока нет, $\text{rot} \vec{B} = 0$. Но если поле неизменно в обоих случаях, такое положение противоречиво. Это противоречие вызвано тем, что мы (в своем приближении) отбросили малые компоненты поля B_x и B_y .

Для того чтобы снять противоречие и сохранить приближение, уравнение (5.3) ($\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$) изменяют на

$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \frac{d}{\delta} \vec{j}$, полагая, что электрический ток как бы равномерно размазан по всей высоте щели между ферромагнитными массивами (этому есть более строгое доказательство, но его мы коснемся позднее).

Начальные условия

В стационарных задачах, где рассматриваются установившиеся процессы, нет необходимости рассматривать начальные условия. Если же имеется нестационарная задача или решение стационарной задачи находится через установление процесса, тогда необходимо задавать начальные условия. Для этого нужно охарактеризовать начальное распределение основных переменных $\vec{v}$, $\vec{B}$ и состояние жидкой среды. Ток определяется через $\text{rot}\vec{B}$, а электрическое поле -- через закон Ома. Поскольку в законе Ампера мы пренебрегаем токами смещения $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, нет необходимости независимо характеризовать поле $\vec{E}$.

Граничные условия

Практически невозможно дать все варианты граничных условий, поэтому остановимся на наиболее часто встречающихся. Более подробно о граничных условиях для жидкой среды, для магнитного и электрического полей говорится в курсах гидромеханики и электродинамики. Примем следующие обозначения: n -- нормаль к границе; s -- выделенное направление по касательной к границе; Δ -- скачок некоторой величины в направлении n при переходе через границу или поверхность раздела.

Граничные условия для скорости. Нормальная и касательная компоненты скорости вязкой жидкости на границе при дозвуковых скоростях равны скорости границы. Если граница жидкости свободна и не соприкасается с другой средой или стенкой, или если жидкость невязкая, или невязкой является жидкость, с которой она соприкасается, то на касательную составляющую скорости не налагается никаких ограничений. На этой границе в этом случае скорость может претерпевать разрыв. Если соприкасающиеся жидкости вязкие, то скорость разрыва не терпит, кроме того, на границе раздела двух сред выполняется

условие равенства касательных напряжений: $\eta_1 \frac{\partial v_{s_1}}{\partial n} = \eta_2 \frac{\partial v_{s_2}}{\partial n}$.

Граничные условия для магнитного поля. Нормальная компонента магнитного поля непрерывна на границе раздела двух сред: $B_{n_1} = B_{n_2}$.

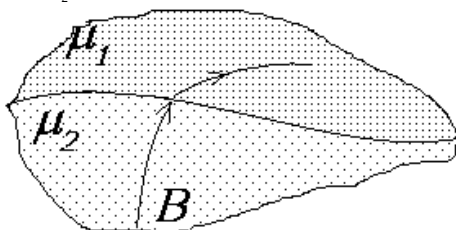


Рис.5.3

Магнитное поле на границе двух сред

Тангенциальная составляющая индукции магнитного поля на границе раздела двух сред с разной магнитной проницаемостью терпит разрыв: $\frac{B_{s_1}}{\mu_1} = \frac{B_{s_2}}{\mu_2}$. Разрыв может иметь место в случае

наличия токового слоя на границе раздела.

Граничные условия для электрического поля. Нормальная компонента электрического поля на границе раздела двух сред с разной проводимостью терпит разрыв, в то время как касательная составляющая поля непрерывна:

$$\sigma_1 E_{n_1} = \sigma_2 E_{n_2}, \quad E_{s_1} = E_{s_2} \text{ (рис.5.4.)}$$

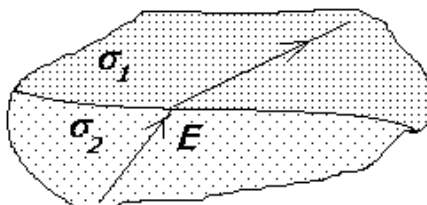


Рис.5.4

Электрическое поле на границе двух сред

Граничные условия для электрического тока. Условия для плотности электрического тока проистекают из условий для электрического поля:

$$j_{n_1} = j_{n_2}, \quad \frac{j_{s_1}}{\sigma_1} = \frac{j_{s_2}}{\sigma_2}.$$

Контактное сопротивление. При контакте жидких проводников с твердыми на границе раздела имеется контактное сопротивление. Это сопротивление особенно существенно в случае, когда жидкий проводник не смачивает твердый. Это сопротивление (τ) измеряется в [Ом · м²]

Скачок касательной составляющей электрического поля при переходе через слой с контактным сопротивлением будет определяться выражением

$$E_1 - E_2 = \frac{\partial(\tau j_n)}{\partial s}.$$

Скачок электрического потенциала на границе будет равен $\Delta\varphi = -\tau j_n$.

Тема 6

Волны Альфвена. Течение жидкости между двумя параллельными поверхностями через однородное магнитное поле, нормально направленное этим поверхностям (течение Куэтта, течение Гартмана)

Волны Альфвена

Рассмотрим идеальную проводящую жидкость, помещенную в магнитное поле. Пусть магнитное поле будет однородным и будет иметь только одну компоненту ($\vec{B}_0 = \{B_0; 0; 0\}$). На это поле наложим поперечное ему возмущение ($\vec{b} = \{0; b(x, t); 0\}$). Таким образом, результирующее поле будет суперпозицией $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$. Если проводимость жидкой среды достаточно велика, то, как было

показано выше, справедливо уравнение $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} \vec{v} \times \vec{B}$ (6.1.a) и,

учитывая, что $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$, получим

$$\frac{\partial b}{\partial t} = B_0 \frac{\partial v}{\partial x} . \quad (6.1)$$

Здесь принято допущение, что поле заморожено, поэтому если мы имеем возмущение магнитного поля вдоль оси y , то его может вызвать только перемещение жидкости в том же направлении ($\vec{v} = \{0; v(x, t); 0\}$).

Уравнение Навье - Стокса для идеальной несжимаемой жидкости в предположении малости $\dot{v}$ будет иметь вид

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{j} \times \vec{B} .$$

Принимая во внимание, что $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ получим $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{b} \times \vec{B}$ или для нашего случая:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} B_0 \frac{\partial b}{\partial x} . \quad (6.2)$$

Продифференцируем уравнение (6.1) по t , а (6.2) по x и, подставляя одно в другое, получим $\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$. (6.3)

Продифференцируем уравнение 6.1. по x , а 6.2. по t и подставляя одно в другое, получим $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. (6.4)

Уравнение (6.3) и (6.4) описывают распространение волны возмущения b и v со скоростью a , где $a = B_0 \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \rho}}$.

Решением уравнений (6.1) и (6.2) будут являться выражения:

$$b = b_0 e^{i\omega(t-x/a)}; \quad v = v_0 e^{i\omega(t-x/a)}.$$

При этом из (6.1) и (6.2) получим связь между b и v :

$$b = -v \sqrt{\mu_0 \rho}.$$

Волна распространяется в направлении магнитного поля B_0 , при этом возмущения направлены перпендикулярно распространению волны. Надо отметить, что возмущения скорости и магнитного поля сонаправлены. Это имеет простое истолкование. При явлении вмороженности перемещение жидкости в поперечном полю направлении ведет к изгибанию магнитно-силовых линий, а вследствие того, что магнитно-силовые линии стремятся сократиться и оттолкнуться друг от друга, они ведут себя подобно упругим струнам, по которым и распространяется волна возмущения.

Затухание магнитогидродинамических волн определяется главным образом наличием омического сопротивления. При этом вместо уравнения (6.1) будем использовать полное уравнение $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \vec{B}$.

Таким образом, в нашем случае справедливо

$$\frac{\partial b}{\partial t} = B_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\sigma \mu_0} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}.$$

Следовательно, уравнение (6.3) может быть заменено на

$$\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{1}{\sigma \mu_0} \frac{\partial^3 b}{\partial z^2 \partial t}. \quad (6.5)$$

В случае задания периодического возмущения решение этого уравнения будет $b = b_0 e^{-k_2 x} \cos(\omega t - k_1 z)$,

$$k_1 = \frac{\omega}{a} \sqrt{(1 + \sqrt{1 + \gamma^2})0,5(1 + \gamma^2)^{-1}},$$

где

$$k_2 = \frac{\omega}{a} \sqrt{(\sqrt{1 + \gamma^2} - 1)0,5(1 + \gamma^2)^{-1}}, \quad \gamma = \frac{\omega}{a^2 \sigma \mu_0}.$$

Величина k_2^{-1} будет характеризовать глубину проникновения МГД-волны. В случае $\gamma \gg 1$ выражение для коэффициента затухания преобразуется в $k_2 = \sqrt{(0,5\sigma\mu_0\omega)^{-1}}$. Это выражение тождественно выражению для толщины скин-слоя переменного магнитного поля в проводящем массиве.

Течение жидкости между двумя параллельными поверхностями через однородное магнитное поле, нормально направленное этим поверхностям

Рассмотрим плоское течение вязкой проводящей жидкости между двумя параллельными стенками, движущимися в противоположных направлениях со скоростями $\pm v$.

В канале имеется перепад давления, обусловленный градиентом давления $P \equiv \frac{\partial p}{\partial x}$. Нормально плоскости слоя

наложено однородное магнитное поле B_0 . Такое течение в общем виде описывается уравнениями магнитной гидродинамики (5.6) – (5.11)

Будем рассматривать стационарный процесс. Таким образом, члены уравнений, содержащие производную по времени, заноуляются. Будем рассматривать только однородное течение, направленное вдоль x (рис.6.1).

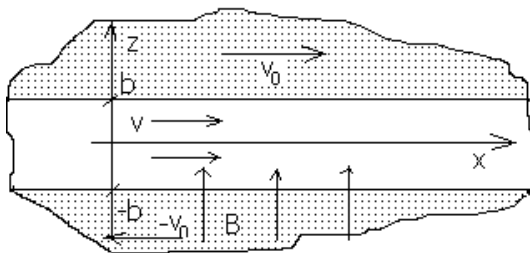


Рис.6.1

Течение жидкости между двумя параллельными поверхностями через однородное магнитное поле

Так как $\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y} = 0$, а $\text{div} \vec{v} = 0$, то $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ и $v_z = \text{const}$. На

верхней и нижней стенках $v_z = 0$, значит, $v_z = 0$ везде в слое.

Таким образом, однородное течение имеет параллельные линии тока, в нашем случае направленные по оси x . Очевидно, что при этом скорость будет функцией только поперечной координаты z . Таким образом, $\vec{v} = \{v_x(z), 0, 0\}$.

Аналогично уравнение $\text{div} \vec{B} = 0$ приводит к тому, что $B_y = 0$, $B_x = B_x(z)$, $B_z = \text{const}$, таким образом, $\vec{B} = \{B_x(z), 0, B_0\}$. Третья переменная величина, которая входит в уравнения, это напряженность электрического поля. Электрическое поле входит в выражение для электромагнитной силы. Действительно, $\vec{j} \times \vec{B} = \{j_y B_0, j_z B_x - j_x B_0, -j_y B_x\}$, из закона Ома $\vec{j} = \sigma[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$, но, учитывая, что $\vec{v} = \{v_x(z), 0, 0\}$, а $\vec{B} = \{B_x(z), 0, B_0\}$, получим $\vec{j} = \sigma\{E_x, E_y - v_x B_0, E_z\}$, тогда $\vec{j} \times \vec{B} = \sigma\{(E_0 - v_x B_0)B_0, (E_z B_x - E_x B_0), -B_x(E_0 - v_x B_0)\}$. Если нет внешнего источника электрического поля (тока), то $E_x = E_y = E_z = 0$. В нашем случае внешним полем от внешнего

источника является $E_y = E_0$. Таким образом, $\vec{E} = \{0, E_0, 0\}$ и уравнение (5.1) упрощается:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \sigma(E_0 - v_x B_0) B_0, \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}, \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \sigma(E_0 - v_x B_0) B_x. \end{cases}$$

После очевидных упрощений остается всего два уравнения:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \sigma(E_0 - v_x B_0) B_0, \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \sigma(E_0 - v_x B_0) B_x. \end{cases}$$

Обозначим $\frac{\partial p}{\partial x} \equiv P$, тогда $\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - \sigma v_x B_0^2 = -\sigma E_0 B_0 - P$;

решение этого уравнения имеет вид

$$v_x = C_1 \exp\{B_0 z \sqrt{\sigma/\eta}\} + C_2 \exp\{-B_0 z \sqrt{\sigma/\eta}\} + \frac{\sigma E_0 B_0 + P}{\sigma B_0^2}.$$

Для определения C_1 и C_2 воспользуемся граничными условиями. При $z = \pm b$ $v = \pm v_0$. Таким образом,

$$C_1 = \frac{(v_0 - U) \exp\{M\} + (v_0 + U) \exp\{-M\}}{\exp\{2M\} + \exp\{-2M\}};$$

$$C_2 = \frac{-(v_0 + U) \exp\{M\} - (v_0 - U) \exp\{-M\}}{\exp\{2M\} + \exp\{-2M\}}.$$

$$\text{Здесь } U = \frac{\sigma E_0 B_0 + P}{\sigma B_0^2}, \quad M = B_0 b \sqrt{\sigma/\eta}.$$

Подставляя эти значения в решение и получим

$$v_x = v_0 \frac{shM z/b}{shM} + U(1 - \frac{chM z/b}{chM}).$$

Рассмотрим частные случаи.

Течение Куэтта

Пусть перепад давления отсутствует ($P=0$) и нет внешнего электрического поля ($E_0 = 0$), тогда $U = 0$ и $v_x = v_0 \frac{shM z/b}{shM}$.

В этом случае единственной причиной движения жидкости являются движущиеся стенки (рис.6.2).

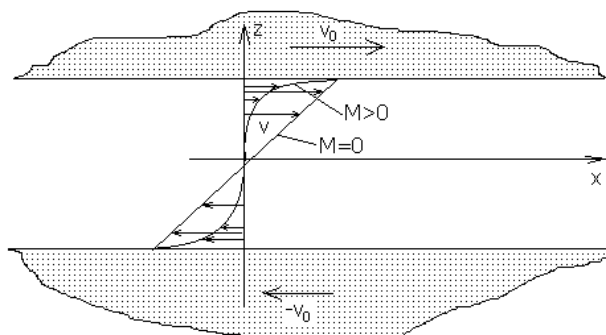


Рис.6.2
Течение Куэтта

В случае, когда магнитное поле отсутствует ($M=0$), мы имеем течение Куэтта.

$M \rightarrow 0$, тогда $shM z/b \rightarrow M z/b$; $shM \rightarrow M$, тогда $v_x \Rightarrow v_0 z/b$.

Когда магнитное поле велико ($M \gg 1$), течение концентрируется у стенок в узких погранслоях, при этом ядро течения практически неподвижно.

Течение Гартмана

Это течение, которое экспериментально исследовал и получил аналитическое решение Гартман. Такое течение получается, если скорость движения верхней нижней границы равна нулю ($v_0 = 0$). Тогда

$$v_x = U \left(1 - \frac{chM z/b}{chM} \right). \quad \text{При } M > 0 \text{ и дальнейшем возрастании}$$

магнитного поля профиль течения уплощается и появляются выраженные пограничные слои у верхней и нижней стенок (рис.6.3).

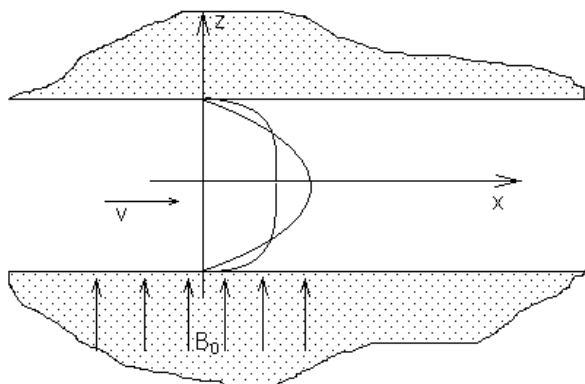


Рис.6.3
Течение Гартмана

При уменьшении магнитного поля ($M \rightarrow 0$ и $E=0$)

$$v_x = U \left[\frac{0,5M^2(1 - z^2b^{-2})}{1 + 0,5M^2} \right], \text{ учитывая, что } U \equiv \frac{Pb^2}{M^2\eta}, \text{ получим,}$$

что профиль скорости будет аналогичен профилю течения

$$\text{Пуазейля } v_x = 0,5 \frac{P}{\eta} (b^2 - z^2).$$

Перейдем к распределению магнитного поля при течениях Гартмана и Куэтта.

Из уравнения $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ с учетом того, что $\vec{B} = \{B_x(z), 0, B_0\}$ и $\vec{j} = \sigma\{0, (E_0 - v_x B_0), 0\}$, получим $\text{rot} \vec{B} = \{0, \frac{\partial B_x}{\partial z}, 0\} = \sigma \mu_0 \{0, E_0 - v_x B_0, 0\}$, отсюда

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \sigma \mu_0 (E_0 - v_x B_0). \quad \text{Подставим в это уравнение}$$

$v_x = v_0 \frac{shM z/b}{shM} + U(1 - \frac{chM z/b}{chM})$ и проинтегрируем по z , после чего получим

$$B_x = -\frac{\mu_0 P}{B_0} z + \frac{b}{M} \left[\frac{\mu_0 P}{B_0} + \mu_0 \sigma E_0 \right] \frac{shM z/b}{chM} - \frac{Re_m B_0}{M shM} chM z/b + C.$$

Это общее выражение для B_x для общего случая. Для определения C в случае течения Гартмана используем граничные условия $B_x = 0$ при $z = 0$, тогда, учитывая, что $B_x = 0$ при $Re_m = 0$, получим, что $C = 0$. Таким образом,

$$B_x = -\frac{\mu_0 P}{B_0} z + \frac{b}{M} \left[\frac{\mu_0 P}{B_0} + \mu_0 \sigma E_0 \right] \frac{shM z/b}{chM} - \frac{Re_m B_0}{M shM} chM z/b.$$

Распределение магнитного поля в случае течения Гартмана представлено на рис.6.4.

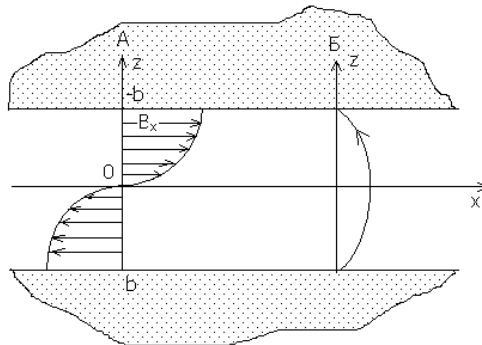


Рис.6.4

Распределение магнитного поля при течении Гартмана:

А - распределение B_x компоненты поля в канале; Б - магнитно-силовая линия в канале

В случае течения Куэтта $B_x = 0$ при $z = \pm b$, тогда

$$C = \frac{\text{Re}_m}{M} \frac{B_0}{shM} chM$$

$$\text{и } B_x = \frac{\text{Re}_m}{M} \frac{B_0}{shM} (chM - chM z/b), \text{ где } \text{Re}_m = bv_0 \mu_0 \sigma$$

(рис.6.5).

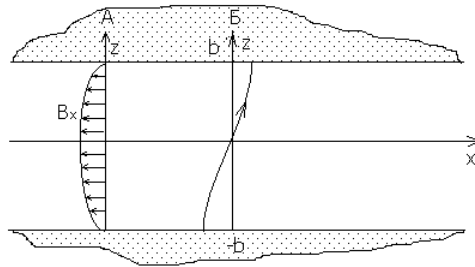


Рис.6.5

Распределение магнитного поля при течении Куэтта:

А - распределение B_x компоненты поля в канале; Б – магнитно-силовая линия в канале

Тема 7

Гидравлические характеристики течения Гартмана.

МГД-канал как дроссель, генератор, расходомер, насос

Возьмем течение Гартмана $(v_x = U(1 - \frac{chM z/b}{chM}))$,

рассмотренное ранее, и получим выражение для средней скорости в канале:

$$\bar{v}_{cp} = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b v_x dz = \frac{U}{M} (M - thM). \text{ Расход жидкости через}$$

канал при таком течении будет определяться выражением

$$Q = a \int_{-b}^b v_x dz = 2ba \frac{U}{M} (M - thM), \text{ где } a - \text{ ширина канала.}$$

Вычислим коэффициент гидравлического сопротивления

$$\text{определяемого стандартно, как } \lambda = \frac{2Pb}{\rho \bar{v}_{cp}^2}. \quad (7.1)$$

$$\text{Положим, что } E_0 = 0, \text{ тогда } U \equiv \frac{Pb^2}{M^2 \eta}. \text{ Таким образом,}$$

$$\bar{v}_{cp} = \frac{Pb^2}{M^3 \eta} (M - thM). \quad (7.2)$$

Условие $E_0 = 0$ означает, что на боковых сторонах канала имеются хорошо проводящие электроды и они замкнуты между собой (рис.7.1).

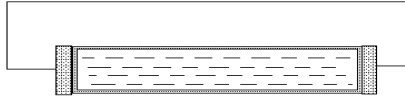


Рис.7.1
Схема МГД-канала

Подставляя (7.2) в (7.1), получим

$$\lambda = \frac{2Pb}{\rho \bar{v}_{cp}} \cdot \frac{M^3 \eta}{Pb^2 (M - thM)} = 2 \frac{\eta}{\rho \bar{v}_{cp} b} \frac{M^3}{(M - thM)} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{M^3}{(M - thM)},$$

здесь $\text{Re} = \rho \bar{v}_{cp} b / \eta$.

Если $M \rightarrow 0$, то $thM \rightarrow M - M^3/3$ и $\lambda = 6/\text{Re}$.

Если $M \rightarrow \infty$ то $thM \rightarrow 1$ и $\lambda = \frac{2M^2}{\text{Re}} = 2St$,

где $St = \frac{M^2}{Re}$ - число Стюарта.

В случае, когда торцевые электроды не замкнуты, $E_0 \neq 0$.

В этом случае может быть использовано условие равенства нулю полного тока на единицу длины канала: $I = \int_{-b}^b j_z dz = 0$.

$$I = \sigma \int_{-b}^b (E_y - v_x B_0) dz = 2b\sigma E_y - \bar{v}_{cp} B_0 2b\sigma = 2b\sigma (E_y - \bar{v}_{cp} B_0) = 0,$$

отсюда $E_y = \bar{v}_{cp} B_0$.

Подставив это равенство в выражение для U , получим $U = \bar{v}_{cp} + P/\sigma B_0^2$. Таким образом,

$$\bar{v}_{cp} = \frac{1}{M} (\bar{v}_{cp} + P/\sigma B_0^2) (M - thM) \Rightarrow \bar{v}_{cp} = \frac{P}{\sigma B_0^2} \frac{M - thM}{thM},$$

$$\text{отсюда } \lambda = \frac{2M^2}{Re} \frac{thM}{M - thM}.$$

При больших числах M ($M \gg 1$) $\lambda \rightarrow \frac{2M}{Re}$.

Режимы работы МГД-канала

Пусть рассматриваемый нами МГД-канал (рис.7.2) включен в некоторую внешнюю гидравлическую цепь, в которую может быть включен также либо насос, принудительно прокачивающий жидкость по цепи, либо гидравлическое сопротивление (в случае если МГД-канал выступает в роли насоса).

В случае, когда канал является гидравлическим сопротивлением (дросселем), во внешней цепи включен насос, который создает давление на входе канала большее, чем на выходе ($P > 0$).

В случае, когда канал является насосом, внешняя цепь будет являться гидравлическим сопротивлением и на выходе канала давление будет в этом случае выше, чем на входе ($P < 0$).

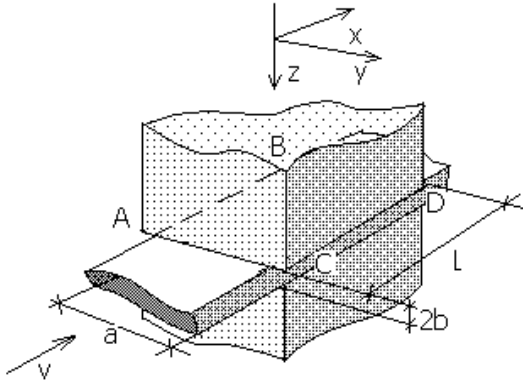


Рис.7.2
МГД-канал между полюсами магнита

Предположим, что к граням канала AB и CD подключена электрическая цепь с внешним сопротивлением R и электродвижущей силой ε , которая будет положительна в случае работы канала в режиме МГД-дресселя (тормоза). В этом случае из закона Ома для полной цепи имеем

$$E_y = \frac{\varepsilon - IR}{a} . \quad (7.3)$$

Запишем закон Ома в дифференциальной форме:

$$j_y = \sigma \left(\frac{\varepsilon - IR}{a} - v_x B_0 \right) . \quad (7.4)$$

$$I = l \int_{-b}^b j_y dz = l \sigma \int_{-b}^b \left(\frac{\varepsilon - IR}{a} - v_x B_0 \right) dz = \frac{2bl\varepsilon}{a} - \frac{2bl\sigma}{a} RI - l\sigma B_0 \int_{-b}^b v_x dz ,$$

$$\text{но } \int_{-b}^b v_x dz \equiv \frac{Q}{a} ,$$

$$\text{тогда } I = \frac{2bl\varepsilon}{a} - \frac{2bl\sigma}{a} RI - l\sigma B_0 \frac{Q}{a} \text{ и}$$

$$\varepsilon = I \left(\frac{a}{2bl\sigma} + R \right) + \frac{B_0 Q}{2b} . \quad (7.5)$$

Здесь $\frac{a}{2bl\sigma} + R = R_n$ - полное омическое сопротивление внешней цепи и канала.

Возьмем к выражению для расхода

$$Q = a \int_{-b}^b v_x dz = \frac{2ab}{M} U (M - thM) . \text{ Подставим в него выражение}$$

для U : $U = \frac{\sigma E_0 B_0 + P}{\sigma B_0^2}$. Запишем его с учетом (7.3), подставив в него значение I из (7.5):

$$\frac{\sigma B_0^2}{2ab} \left[\frac{M}{M - thM} - \frac{R}{R_n} \right] Q - P = \frac{\sigma \varepsilon B_0}{a} \left(1 - \frac{R}{R_n} \right) . \quad (7.6)$$

МГД-канал, рассматриваемый нами, объединяет в себе гидравлическую, электрическую и магнитную цепи (рис.7.3) и при различных режимах он будет играть различную роль и различным образом взаимодействовать с этими цепями.

- 1) роль дросселя в гидродинамической цепи и генератора (расходомера) в электрической;
- 2) роль насоса в гидродинамической цепи и потребителя электрической мощности в электрической.

Случай 1. Энергия перекачивается из гидравлической цепи в электрическую.

Случай 2. Энергия перекачивается из электрической цепи в гидравлическую.

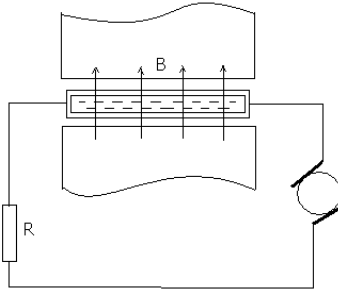


Рис.7.3
Схема простейшей МГД-машины

Режим работы генератора

При $\varepsilon=0$ и $R=0$ канал превращается в дроссель (тормоз) с дополнительным сопротивлением:

$$P_1 = \frac{Q\sigma B_0^2}{2ab} \frac{M}{M - thM} = \frac{Q\eta}{2ab^2} \frac{M^2}{M - thM}.$$

При $R \rightarrow \infty$ $R/R_n \rightarrow 1$ и

$$P'_1 = \frac{Q\sigma B_0^2}{2ab} \frac{thM}{M - thM} = \frac{Q\eta}{2ab^2} \frac{MthM}{M - thM}.$$

В этом случае гидравлическое сопротивление канала в $\frac{M}{thM}$ меньше, чем в случае $\varepsilon=0$ и $R=0$: ($\frac{P_1}{P'_1} = \frac{M}{thM}$). Подставляя

(7.5) в (7.3), получим выражение для напряженности электрического поля между гранями канала АВ и CD:

$$E = \frac{B_0 Q}{2ba} \frac{R}{R_n}. \text{ Если } R=0, \text{ то разность потенциалов между АВ и CD}$$

отсутствует.

Если $R \rightarrow \infty$, то $E = \frac{B_0 Q}{2ab}$, а $\Delta\varphi = aE = \frac{B_0 Q}{2b}$. В этом случае МГД-канал выступает в роли расходомера.

При $\varepsilon = 0$, $P > 0$ канал является генератором электрического тока. КПД такого генератора равен

$$\eta = \frac{I^2 R}{IPQ} = \frac{R(R_n - R)}{R_n^2} \left\{ \frac{M}{M - thM} - \frac{R}{R_n} \right\}^{-1}.$$

Режим МГД-насоса

В случае, когда МГД-канал играет роль насоса ($P = -P$), тогда из (7.6) для случая $M \gg 1$ получим

$$P = \left(\frac{\sigma \varepsilon B_0}{a} - \frac{Q \sigma B_0^2}{2ab} \right) \left(1 - \frac{R}{R_n} \right). \quad \text{Член } \frac{Q \sigma B_0^2}{2ab} \text{ отвечает за}$$

торможение магнитным полем проводящей жидкости, текущей через канал, а член $\frac{\sigma \varepsilon B_0}{a}$ отвечает за электромагнитные силы,

вызванные взаимодействием подводимого электрического тока с наложенным на канал магнитным полем.

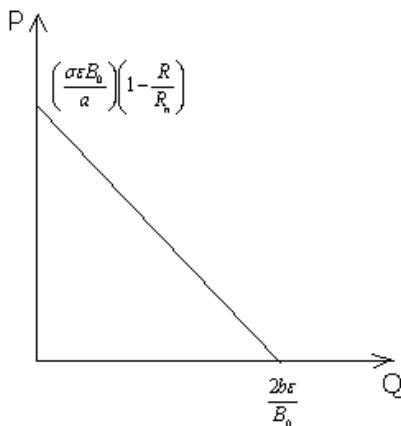


Рис.7.4

Напорно-расходная характеристика МГД-насоса

Важной характеристикой любого насоса является зависимость производимого насосом расхода от перепада давления, который преодолевает насос (так называемая P/Q характеристика (рис.7.4)).

Коэффициент полезного действия такого насоса будет равен

$$\eta = \frac{IPQ}{\varepsilon I} .$$

Список использованной литературы

1. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики/ пер. с англ. Н.Т.Пашенко; под ред.и с предисл. Г.А. Любимова М.: Мир, 1967. 320 с.
2. Брановер Г.Г., Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука, 1970. 379 с.
3. Гельфгат Ю.М., Лиелаусис О.А., Щербинин Э.В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил. Рига.: Зинатне, 1976. 246 с.
4. И.М.Кирко, Г.Е.Кирко Магнитная гидродинамика несжимаемых сред/ Перм.гос. ун-т им. г.Пермь 1980. 120с.