И.М.КИРКО, Г.Е.КИРКО

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД



ПЕРМЬ 1980

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
ПЕРМСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А.М. ГОРЬКОГО

И.М. КИРКО, Г.Е. КИРКО

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД

Учебное пособие по спецкурсу

Пермь 1980

538.4
К - 43

К - 43 И.М. Кирко, Г.Е. Кирко. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. Учебное пособие по спецкурсу. Пермский ун-т, 1980, 120 с.

Пособие соответствует курсу магнитной гидродинамики, читаемому для студентов специальностей "Гидродинамика" и "Теоретическая физика" на физическом факультете университетов.

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета Пермского университета

538.4
© Пермский государственный университет, 1980

Редактор Л.П. Сидорова
Технический редактор Л.Л. Савенкова
Корректор В.И. Щербинина

Подписано в печать 04.09.80. Формат 60 x 84 1/16.
Бум. тип. № 3. Печать офсетная. Усл. печ.л. 6,97.
Уч.-изд.л. 4,99. Тираж 500 экз. Заказ 024-81.
Цена 18 к.
Темплан 1980, поз. 277.

Редакционно-издательский отдел Пермского университета.
614600, Пермь, ул. Букирева, 15

СКМП ВЦ Облстатуправления. 614016. Пермь, ул. Революции, 66.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение 4
Глава I. Основы магнитной гидродинамики 5
§ I. Определение магнитной гидродинамики 5
§ 2. Уравнения магнитной гидродинамики 8
§ 3. Физическое подобие и размерность 10
§ 4. Безразмерные критерии подобия в магнитной гидродинамике 17
§ 5. Безразмерная форма уравнений магнитной гидродинамики. . .20
Глава П. Магнитогидродинамические течения проводящих жидких сред в плоских каналах 26
§ I. Решение уравнений магнитной гидродинамики для некоторых течений с прямыми линиями тока 26
§ 2. Гидравлические характеристики течения Гартмана 3I
§ 3. Режимы работы магнитогидродинамического (МГД) канала. . .33
Глава Ш. Явление обтекания тел в магнитной гидродинамике . . .37
§ I. Обтекание тел проводящей жидкостью в магнитном поле . . .37
§ 2. Пограничный слой в магнитной гидродинамике 46
§ 3. Отрыв пограничного слоя 59
Глава IУ. Турбулентность при течении жидких металлов в магнитном поле 6I
§ I. Экспериментальные и теоретические факты, положившие начало учению о турбулентности 6I
§ 2. Основные свойства и законы установившегося турбулентного движения в канале (круглой трубе) 62
§ 3. Уравнения движения в отсутствии магнитного поля (излагается по работе [7]) 69
§ 4. Полуэмпирические теории турбулентности 7I
§ 5. Статистическая теория турбулентности 76
§ 6. Неустойчивость ламинарных магнитогидродинамических течений и переход к турбулентности 8I
§ 7. Коэффициент сопротивления и распределение осредненных скоростей при турбулентном течении в каналах в магнитном поле . . .84
§ 8. Уравнение Рейнольдса в магнитном поле и полуэмпирические теории турбулентности 89
Глава У. "Вмороженность" магнитного поля 97
§ I. Явление диффузии магнитного поля 97
§ 2. Теорема Вальена I0I
§ 3. Волны Альфвена I06
§ 4. Получение сильного магнитного поля за счет движения проводящей среды I09

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие составлено для студентов университетов и высших технических учебных заведений, приступающих к изучению магнитной гидродинамики.

Оно может оказаться полезным также для аспирантов, инженеров, научных работников и преподавателей, встретившихся с вопросами магнитной гидродинамики в своей научно-исследовательской, практической и педагогической работе.

Авторы считают, что изучение магнитной гидродинамики после изучения курса электродинамики и курса механики сплошных сред или гидроаэромеханики имеет большое дидактическое значение: кроме сообщения сведений, имеющих познавательное значение для современного ученого и инженера, курс закрепляет знания в двух фундаментальных дисциплинах - механике сплошных сред и электродинамике.

Знакомство с материалом пособия является важным этапом перед изучением курса физики плазмы и инженерных аспектов магнитной гидродинамики.

Авторы будут благодарны за все критические замечания и советы.

Первая и третья главы настоящего пособия написаны И.М.Кирко, четвертая и пятая главы - Г.Е.Кирко, вторая глава написана авторами совместно.

ГЛАВА I

ОСНОВЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

§ I. Определение магнитной гидродинамики

Магнитную гидродинамику (МГД) можно определить как раздел гидродинамики, который изучает движение проводящих жидкостей в магнитном поле.

Магнитная гидродинамика является новой наукой, возникшей на границе двух сложившихся физических дисциплин - механики сплошных сред, частью которой является гидродинамика, и классической электродинамики, т.е. учения об электрических и магнитных явлениях, сформулированного в законченном виде Фарадеем и Максвеллом.

В МГД так же, как в механике сплошной среды и в электродинамике, не предполагается атомарно-молекулярное строение вещества и является достаточной гипотеза о непрерывности последнего. Сущность этой гипотезы заключается в том, что всякое материальное тело может быть разбито на "частицы", т.е. на достаточно малые области произвольной формы, непрерывно примыкающие друг к другу через любые проведенные мысленно границы раздела. Каждая частица, таким образом, окружена границами, отделяющими ее от соседних частиц, или границей раздела фаз, если она примыкает к ней. Размеры и форма частиц, на которые разбивается среда, в некоторой степени произвольны. Однако эти размеры ограничены сверху требованием однородности всех величин, характеризующих частицу, в пределах объема самой частицы. Так, например, угловая скорость вращения $\vec{\omega}$, плотность импульса $\rho\vec{v}$, плотность кинетической энергии $\frac{\rho v^2}{2}$, температура T и ее градиент $grad\,T$, плотность энтропии S, плотность тока $\vec{j}$, проводимость σ, величина индукции магнитного поля $\vec{B}$

и другие могут считаться одинаковыми в пределах всей частицы. С другой стороны, размеры частицы как части непрерывной субстанции ограничены снизу так, чтобы не было заметно молекулярное строение вещества, чтобы флуктуации параметров, вызванные тепловым движением, были заведомо ниже точности наших измерений.

Таким образом, в магнитной гидродинамике пользуется макроскопическое понятие о жидкости и газе, они рассматриваются как непрерывная материя, их молекулярная структура не учитывается. При рассмотрении процессов, связанных с воздействием магнитного и электрического полей на вещество, магнитная гидродинамика не рассматривает электронную структуру вещества, основывается на макроскопических представлениях Фарадея-Максвелла.

Существует близкая к магнитной гидродинамике отрасль науки - физика плазмы. Она находится на грани между молекулярно-кинетической теорией газов и электронной теорией вещества, изучает поведение ионизированного газа в различных условиях, в том числе и в электромагнитном поле. Предельным переходом физики плазмы является магнитная гидродинамика, которая ряд своих задач может рассматривать в магнитогидродинамическом приближении.

Можно предвидеть возникновение пограничных областей науки, аналогичных магнитной гидродинамике, действительно, между механикой сплошной среды и электродинамикой сплошной среды возникли, например, электрогидродинамика и феррогидродинамика. Электрогидродинамика рассматривает поведение диэлектрических жидкостей в электрическом поле, а феррогидродинамика - поведение ферромагнитных суспензий в магнитном

поле. Примечательно, что в ферродинамике недостаточно использование совместных уравнений гидродинамики и магнетостатики, возникла необходимость учета еще того момента количества движения, который имеет частица жидкости в связи с наличием в ней спонтанно-намагниченного вещества, т.е. использовать еще уравнение моментов, связанное с уравнениями гидродинамики и электродинамики.

Существует также пограничная область между механикой твердого деформированного тела и электромагнетизма, которую, по-видимому, можно назвать электромеханикой твердого тела. Однако классификация смежных наук - вопрос сложный, скорее, философский, мы приведем лишь схему связей магнитной гидродинамики и физики плазмы (рис.I),

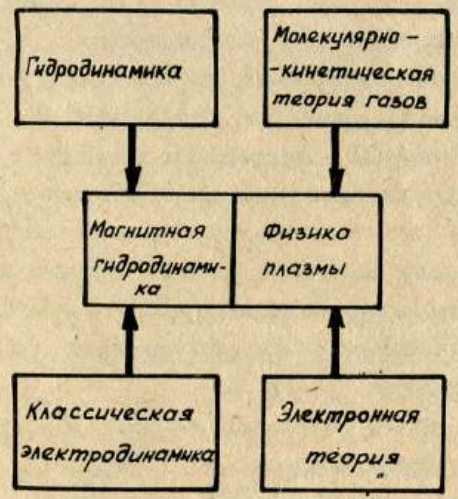


Рис 1

из которой следует, что магнитная гидродинамика возникла как результат взаимодействия двух наук – гидродинамики и классической теории электромагнитных явлений. Общей для них является гипотеза о непрерывности материи, в которой атомистическая структура материи не рассматривается.

Физика плазмы возникла как взаимодействие молекулярно-кинетической теории газов и электронной теории. Она предполагает атомистическую структуру материи.

§ 2. Уравнения магнитной гидродинамики

В соответствии с определением магнитной гидродинамики как науки систему уравнений для явлений и процессов, происходящих с жидкими металлами и электролитами при их движении в магнитном поле, необходимо рассматривать как связанную систему уравнений электродинамики и гидродинамики.

Уравнения гидродинамики мы записываем в виде уравнения Навье-Стокса (I), уравнения неразрывности (2) , уравнения переноса тепла (3) и выражения для вязкой диссипации (IO). Уравнения электродинамики представим в виде двух уравнений Максвелла (4), (5) и теоремы Гаусса для вектора магнитной индукции (6), уравнения связи между векторами индукции магнитного поля и вектором напряженности электрического поля (7). Величину магнитной проницаемости для рассматриваемых сред можно считать равной единице $(\mu = 1)$

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\right] = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta\vec{v} + \vec{f} \quad (1); \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (2);$$

$$\rho C_p\left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)T\right] = \operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T) + W_{дж} + W_{тр} \quad (3)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} \quad (4); \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5); \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad (6); \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \quad (7)$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \quad (8); \quad W_{дж} = j^2/\sigma \quad (9)$$

$$W_{тр} = 0{,}5\,\eta \sum_{i,k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 \quad (10); \quad \vec{f} = \vec{j}\times\vec{B} \quad (11)$$

Об уравнениях (гидродинамики и электродинамики) см., например: Л.Г.Лойцянский. Механика жидкости и газа; И.Е.Тамм. Основы теории электричества.

В систему уравнений магнитной гидродинамики входит еще выражение для плотности электрического тока (8) , в которое входит в нашем случае величина тока проводимости с учетом индуцированной компоненты электрического поля. Наконец, вводится выражение для джоулева тепла (9) и для объемной силы (II) , действующей на единицу объема частицы, которая входит в уравнение Навье-Стокса. Возникает своеобразная обратная связь через плотность тока, которая входит в выражение для закона Джоуля-Ленца (9) и в выражение для объемной силы (II). Причем последние используются в уравнении Навье-Стокса (I) и в уравнении теплопередачи (3). Объемная сила также зависит от напряженности электрического и магнитного полей, значения которых получают из уравнений Максвелла. В этой системе существуют также более опосредственные нелинейные связи, в частности, температура из уравнения (3) оказывает свое влияние на проводимость σ , а магнитное поле – на вязкость гетерогенного металла и т.д.

Таким образом, уравнения магнитной гидродинамики представляют собой значительно более сложную нелинейную систему уравнений, чем в отдельности взятые уравнения гидродинамики и электродинамики. Однако эти связи между системами представляют собой то качественно новое, что называется магнитной гидродинамикой и позволяет объяснить специфические для магнитной гидродинамики явления: волны Альфвена, влияние магнитного поля на турбулентность, самовозбуждение магнитного поля и т.д.

Граничные условия для рассмотренной системы уравнений будут складываться из граничных условий гидродинамики

$v_{t_1} = v_{t_2}$ (12); $v_{n_1} = v_{n_2}$ (13); $\rho_1 \frac{\partial v_{t_1}}{\partial x} = \rho_2 \frac{\partial v_{t_2}}{\partial x}$ (14)

(ось OX считаем направленной к границе раздела сред);
граничных условий для явлений теплообмена – равенство температур и потоков тепла в случае теплопроводности:

$T_1 = T_2$ (15), $\varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \varkappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}$ (16);

граничных условий для электродинамики

$E_{t_1} = E_{t_2}$ (17); $H_{t_1} = H_{t_2}$ (18), $B_{n_1} = B_{n_2}$ (19); $\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2}$ (20),

где σ – проводимость, φ – электрический потенциал. Индекс указывает на порядковый номер среды, $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности; ρ – динамическая вязкость.

§ 3. Физическое подобие и размерность [I]

Физически подобными называются такие явления общей физической природы, которые можно преобразовать (одно в другое) при помощи линейных безразмерных множителей, называемых коэффициентами подобия, причем физические величины одинаковой размерности имеют равные коэффициенты подобия. Геометрически подобные тела являются частным случаем физического подобия: все соответствующие длины имеют одинаковый коэффициент подобия. Для площадей можно установить общий коэффициент преобразования, равный квадрату линейного коэффициента. Соответственные углы у подобных фигур равны, т.е. они имеют общий коэффициент преобразования, равный единице.

Всякое физическое явление можно описать в N – мерном фазовом пространстве как некоторое многомерное тело. Если фазовое пространство, описывающее данное явление, формально разбить на подпространства одинаковой размерности – подпространства длин, подпространство времен, подпространство скоростей, магнитных индукций, плотностей токов и т.д., то физическое

подобие двух физических явлений можно рассматривать как геометрическое подобие соответствующих подпространств одинаковой размерности [2].

Какие выводы следуют из определения физического подобия? Предположим, что некоторое явление, которое мы назовем "моделью" и которое описано величинами $(x_1; x_2; \dots x_n)$, мы превратим путем подобного преобразования в другое явление одинаковой физической природы, которое назовем "натура" и которое также описано соответственными физическими величинами $(x_1'; x_2'; x_n')$. Разобьем все N физических величин на n групп одинаковой размерности и введем для каждой группы свой безразмерный коэффициент подобного преобразования κ_i, такой, чтобы $x_i' = \kappa_i x_i$. Так как коэффициент подобного преобразования является общим для всей данной группы величин с одинаковой размерностью, то оставим в каждой группе по одной физической величине и обозначим подобие как преобразование n величин разной размерности при помощи различных коэффициентов подобия

$$\{ x_1'; x_2'; \dots x_n' \} = \{ \kappa_1 x_1; \kappa_2 x_2; \dots \kappa_n x_n \}, \qquad (21)$$

I В развитии гидродинамики, особенно на первоначальном ее этапе, методы подобия и размерности имели решающее значение для исследования новых явлений. Особо важная роль этих методов в магнитной гидродинамике.

Так как владение методами физического подобия и размерности является существенно важным для физиков, инженеров, то мы специально останавливаемся на них в данном пособии.

Возникает вопрос: можем ли мы коэффициенты подобия задавать произвольно: так, как захочется нам, или так, как покажется удобным из-за случайных обстоятельств эксперимента? Здесь проявляется следующая замечательная особенность преобразования подобия: каждое преобразование подобия, т.е. преобразование значений $X_i' = k_i X_i$ может быть заменено преобразованием единиц измерения при сохранении численных значений. Представим себе, что мы от системы единиц, описывающих модель $\bar{X}_1; \bar{X}_2, \dots \bar{X}_n$, перейдем к аналогичной системе единиц с другими масштабами измерений $\bar{X}_1'; \bar{X}_2'; \dots \bar{X}_n'$ так, что численные значения величин сохранятся у модели и натуры одинаковыми. Преобразование подобия, записанное в виде равенства (21), будет заменено эквивалентным равенством

$$\{\bar{X}_1'; \bar{X}_2', \dots \bar{X}_n'\} = \left\{\frac{1}{k_1}\bar{X}_1, \frac{1}{k_2}\bar{X}_2, \dots \frac{1}{k_n}\bar{X}_n\right\}. \quad (22)$$

Теория размерности для такого преобразования единиц вводит совершенно определенные правила: все единицы, которые используются в любой системе, делятся на основные и производные.

---

2 Иногда появляется возможность описать данное физическое явление путем его подобного преобразования в явление другой физической природы. Так, задачи течения идеальной жидкости можно описать при помощи электростатического поля, если установить общий коэффициент преобразования поля скоростей v в поле электрического смещения $\mathfrak{D}$. При этом коэффициенты подобного преобразования являются размерными, они должны быть одинаковыми для величин одинаковой размерности. В этом случае говорят об аналогии физических явлений; на принципе аналогии построены все аналоговые вычислительные машины, электролитические ванны, сеточные устройства и т.д.

Основные единицы физических величин задаются произвольно, без связи друг с другом. В механике таких единиц в системе СИ три: метр, килограмм, секунда ($k=3$), в учении об электричестве добавляется ампер ($k=4$). В системе единиц CGS не вводится специальная электрическая единица и $k=3$. Размерность физической величины по отношению к величине, принятой за основную, называется показатель степени в множителе r^{α}, указывающей, во сколько раз увеличится единица измерения данной величины при увеличении единицы измерения основной величины в r раз. Так, размерность силы по отношению к массе равняется единице, а по отношению ко времени (-2). Комплекс, состоящий из всех множителей размерности, называется формулой размерности данной величины. Таким образом, формула размерности силы MLT^{-2}, вязкости $ML^{-1}T^{-1}$, магнитной постоянной $MLT^{-2}J^{-2}$, или в другой записи: $[F]=[m][\ell][t]^{-2}$; $[\eta]=[m][\ell]^{-1}[t]^{-1}$; $[\mu_0]=[m][\ell][t]^{-2}[J]^{-2}$.

Пусть в формуле (22) три первые величины будут основными и мы зададим значения коэффициентов преобразования k_1, k_2, k_3, тогда единицы измерения всех остальных $n-3$ величин должны измениться согласно их формуле размерности. Для $n \geq i > 3$ формулы размерности следует записать

$$\bar{X}_i = \bar{X}_1^{\alpha_{1i}} \bar{X}_2^{\alpha_{2i}} \bar{X}_3^{\alpha_{3i}}; \qquad \bar{X}_i' = \bar{X}_1'^{\alpha_{1i}} \bar{X}_2'^{\alpha_{2i}} \bar{X}_3'^{\alpha_{3i}}, \quad (23)$$

где $\alpha_{1i}; \alpha_{2i}; \alpha_{3i}$ – размерности величины $\bar{X}_i$ относительно основных величин $\bar{X}_1; \bar{X}_2; \bar{X}_3$. Подстановка (23) в равенство $\bar{X}_i' = \frac{1}{k_i}\bar{X}_i$ дает

$$\bar{X}_1'^{\alpha_{1i}} \bar{X}_2'^{\alpha_{2i}} \bar{X}_3'^{\alpha_{3i}} = \frac{1}{k_i} \bar{X}_1^{\alpha_{1i}} \bar{X}_2^{\alpha_{2i}} \bar{X}_3^{\alpha_{3i}}, \quad (24)$$

а подстановка в формулу (24) формулы преобразований основных единиц позволяет записать: $\bar{X}_1' = \frac{1}{k_1}\bar{X}_1$; $\bar{X}_2' = \frac{1}{k_2}\bar{X}_2$; $\bar{X}_3' = \frac{1}{k_3}\bar{X}_3$, что в итоге приводит к равенству

$$k_i = k_1^{\alpha_{1i}} k_2^{\alpha_{2i}} k_3^{\alpha_{3i}}. \quad (25)$$

Таким образом, мы доказали важнейшее правило: коэффициенты подобного преобразования должны удовлетворять соотношениям размерности.

Моделирование, или эксперимент в измененных масштабах единиц, имеет максимум K степеней свободы, т.е. только K коэффициентов подобного преобразования могут быть выбраны произвольно. Все остальные $(n-k)$ значений этих коэффициентов должны быть вычислены по формулам размерности.

Рассмотрим в качестве примера истечение струи жидкости из отверстия в дне сосуда и ее распад на отдельные капли, начиная с некоторой высоты истечения (рис. 2).

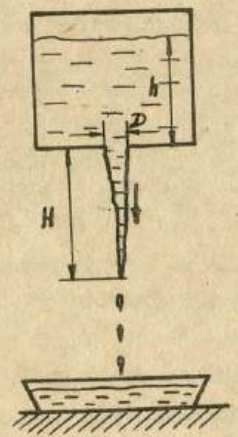


Рис. 2

Попробуем построить для данного явления физически подобную модель, используя другую жидкость. Высота H, на которой начинается распад струи на капли и частота их падения $1/T$, по-видимому, должны зависить от следующих величин: ускорения силы тяжести g, плотности жидкости ρ, поверхностного натяжения α, уровня жидкости в сосуде h, динамической вязкости η

$$H = f_H(\rho, g, h, \alpha, \eta), \qquad (26)$$

$$T = f_T(\rho, g, \eta, \alpha, h). \qquad (27)$$

Здесь T – интервал времени между двумя последовательными падениями капли в блюдце. Составим таблицу размерности для всех входящих в эти зависимости величин.

Таблица I

Наименование величины	Обозначение	Размерность			Формула коэффициента подобия
		м	кг	с	
Ускорение силы тяжести	g	I	0	-2	$K_g = K_h K_t^{-2}$
Плотность	ρ	-3	I	0	$K_\rho = K_m K_h^{-3}$
Поверхностное натяжение	α	0	I	-2	$K_\alpha = K_m K_t^{-2}$
Линейный размер	h	I	0	0	$K_h = K_h$
Время	T	0	0	I	$K_T = K_t$
Вязкость (?)	η	-I	I	-I	$K_\eta = K_m K_h^{-1} K_t^{-1}$

Если мы возьмем для модели жидкость, физические свойства которой будут отличаться от свойств натуры, например, ртуть заменим водой, то коэффициенты подобного преобразования K_ρ, K_α, будут заданы однозначно: $K_\rho = 13{,}6$; $K_\alpha = \frac{550}{72} = 7{,}63$. Если считать, что "натура" и "модель" будут расположены в условиях земной лаборатории, то $K_g = I$. Таким образом, для коэффициентов преобразования основных величин K_h; K_t; K_m получено три уравнения:

$$K_h K_t^{-2} = 1; \quad K_m K_h^{-3} = 13{,}6; \quad K_m K_t^{-2} = 7{,}63. \qquad (28)$$

Решение этой системы: $K_h = 0{,}75;\ K_\ell = 0{,}865;\ K_m = 5{,}74$. Анализ его показывает, что явления истечения и распада струи на капли будут у ртути и воды физически подобны, если обе установки будут геометрически подобны, однако, установка с ртутью будет в 0,75 раз меньше установки с водой; вес жидкости, налитой в сосуд, будет в 5,74 раз больше. Теория подобия позволяет утверждать, что распад струи на капли будет происходить у ртути на высоте в 0,75 раз меньшей, чем у воды.

Все эти соображения верны, если верно первоначальное предположение, что вязкость жидкости существенно не влияет на весь процесс. В противном случае, в таблице придется добавить шестую строку, помещенную под знаком вопроса, и замена ртути водой „прибавила" бы к системе уравнений (28) четвертое:

$$K_m K_h^{-1} K_\ell^{-1} = 1{,}55 . \qquad (29)$$

Четыре уравнения для трех переменных, вообще говоря, несовместимы и такое физическое подобие будет невозможно . Для сохранения подобия будет целесообразно отказаться от одного из условий, например, ускорения силы тяжести, т.е. провести эксперимент в специальной центрифуге.

Иногда задают вопрос, возможно ли увеличить или уменьшить число степеней свободы моделирования путем уменьшения или увеличения числа K, т.е. числа основных единиц? Например, при моделировании электромагнитных явлений переход ото системы CGS, в которой $K = 3$, к системе СИ, в которой $K = 4$, должен привести к кажущемуся увеличению числа степеней моделирования. В действительности это не так. Увеличение числа основных единиц всегда связано с появлением увеличенного числа констант природы, которые необходимо ввести одинаковыми как для натуры, так и для модели. Для электрических

и магнитных явлений такими константами являются две величины $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ ф/м – электрическая постоянная, $\mu_0 = 12{,}6 \cdot 10^{-7}$ гн/м – магнитная постоянная, в то время как в системе Гаусса таких констант только одна: $c_0 = 3 \cdot 10^{10}$ см/с – скорость света.

§ 4. Безразмерные критерии подобия в магнитной гидродинамике

Из соотношений предыдущего параграфа следует, что между коэффициентами подобия данной величины и коэффициентами подобия величин основных размерностей существует такая же закономерность, что и в формуле размерности. Следовательно, если величина с номером i безразмерна, то

$$K_i = K_1^{\alpha_{1i}} K_2^{\alpha_{2i}} K_3^{\alpha_{3i}} = 1; \quad \alpha_{1i} = \alpha_{2i} = \alpha_{3i} = 0 . \qquad (30)$$

Справедлив общий вывод: при физическом подобии безразмерные величины у модели и натуры должны быть равны / знак *idem*/

Размерность данной величины m можно рассматривать как некоторый вектор

$$\vec{\alpha}_m = \{\alpha_{1m};\ \alpha_{2m};\ \alpha_{3m}\} , \qquad (31)$$

координаты которого суть размерности данной величины относительно основных единиц. Несколько физических величин образуют собой комплекс

$$(K_m)^{\beta_m} (K_n)^{\beta_n} (K_\ell)^{\beta_\ell} = K, \qquad (32)$$

а его размерность может рассматриваться как линейная комбинация векторов типа

$$\beta_m \vec{\alpha}_m + \beta_n \vec{\alpha}_n + \beta_\ell \vec{\alpha}_\ell = \vec{\alpha}_K . \qquad (33)$$

Если найдется такая комбинация чисел $\beta_m; \beta_n; \beta_\ell$, из которых не все будут равны нулю, что правая часть формулы (33) станет равной нулю, то система векторов $\vec{\alpha}_m; \vec{\alpha}_n; \vec{\alpha}_\ell$ считается линейно зависимой, а коэффициент подобия

$$K = \left(\frac{X_m}{X'_m}\right)^{\beta_m} \left(\frac{X_n}{X'_n}\right)^{\beta_n} \left(\frac{X_\ell}{X'_\ell}\right)^{\beta_\ell} = 1 \qquad (34)$$

и комплекс

$$\Pi = X_m^{\beta_m} X_n^{\beta_n} X_\ell^{\beta_\ell} = X_m'^{\beta_m} X_n'^{\beta_n} X_\ell'^{\beta_\ell} = idem \qquad (35)$$

будут безразмерными и иметь одинаковые значения натуры и модели.

Безразмерные комплексы могут быть составлены из физических величин, являющихся аргументами, например, из координат, временных параметров, значений физических величин, являющихся граничными и начальными условиями, констант и значений величин, характеризующих состояние вещества. В этом случае говорят об определяющих критериях подобия, т.е. критериях, соблюдение которых при моделировании обеспечивает подобие явлений. Например, критерии подобия $Re = \frac{\rho v_0 d}{\mu}$, $M = B_0 d \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{1/2}$, составленные из констант материалов и характерных значений v_0 и B_0, будут определяющими. Критерии подобия, в которые входит хотя бы одна переменная величина, являющаяся величиной-функцией, т.е. величиной, которую мы определяем в результате эксперимента, называются неопределяющими. Неопределяющим критерием подобия, например, мы можем считать коэффициент сопротивления трубы

$$\lambda = \frac{\Delta p \cdot d}{q \, 5 v_0^2 \rho \ell} \quad , \qquad (36)$$

в который входит перепад давления Δp на трубе длиной ℓ и диаметром d. Известно, что в обычной гидродинамике существует зависимость

$$\lambda = f(Re) \quad , \qquad (37)$$

являющаяся зависимостью между определяющим критерием числом Рейнольдса Re и неопределяющим критерием подобия λ. В магнитной гидродинамике существенное значение имеет произведение σB^2, которое можно рассматривать как самостоятельную четвертую величину, не имеющую электрической размерности

$$[\sigma B^2] = \frac{кг}{м^3 \cdot с^3} \quad , \qquad (38)$$

Поэтому из величин ρ, d, ℓ, v_0 и σB_0^2 можно скомпоновать два определяющих критерия подобия Re и M. Таким образом, теория размерности дает связь

$$\lambda = f(Re, M) \, . \qquad (39)$$

В случаях, когда движение проводящих тел существенно влияет на магнитное поле, такая характерная величина, как магнитная проницаемость $\mu\mu_0$ становится необходимой. Действительно, в причинной связи – движение $\vec{v}$, ЭДС – $\vec{v} \times \vec{B}$, плотность тока – $\sigma \vec{v} \times \vec{B}$, поле $\sigma \vec{v} \times \vec{B} d$, наведенная индукция $\mu\mu_0 \sigma \vec{v} \times \vec{B} d$ – без этой величины нарушается связь явлений. Поэтому произведение $\mu\mu_0\sigma$, не имеющее основных электрических величин в своей размерности, может быть принято определяющим $[\mu\mu_0\sigma] = \frac{с}{м^2}$. Комбинация этой величины с ν/ρ дает еще один критерий подобия, называемый числом Бэтчелора:

$$\beta = \frac{\mu\mu_0\sigma\rho}{\ell} \, . \qquad (40)$$

Если рассмотреть размерность выражения, представляющего наведенную индукцию магнитного поля

$$[\mu_0\mu\sigma v d B_0] = [\mu_0][\sigma][v][d][B_0] = \left[\frac{кг \, м}{с^2 A^2}\right]\left[\frac{A^2 с^3}{м^3 кг}\right]\left[\frac{\mu}{с}\right][\mu][B_0] = [B_0] \, ,$$

то видно, что размерность комплекса, стоящего перед $[B_0]$, равна единице и его можно рассматривать как критерий подобия

$$Re_m = \mu\mu_0 \sigma v_0 d \quad , \qquad (41)$$

так называемое магнитное число Рейнольдса. Такое название этот критерий получил благодаря тому, что величина $\nu_m = \frac{1}{\sigma\mu_0}$ имеет ту же размерность, что и кинематическая вязкость $\nu = \mu/\rho$: $[\nu_m] = \frac{м^2}{с}$; $[\nu] = \frac{м^2}{с}$ и можно провести некоторую аналогию между числами

$Re = \frac{v_0 d}{\nu}$ — число Рейнольдса

$Re_m = \frac{v_0 d}{\nu_m}$ — Магнитное число Рейнольдса ,

Введенное ранее число Бэтчелора можно рассматривать как отношение этих чисел Рейнольдса

$$\beta = \frac{Re_m}{Re} = \frac{\nu}{\nu_m} = \frac{\mu\mu_0\sigma\rho}{\ell} \quad . \qquad (42)$$

Таким образом, число Бэтчелора можно также рассматривать как отношение кинематической вязкости к магнитной.

В ряде задач магнитной гидродинамики, особенно в тех случаях, когда жидкость можно считать не имеющей вязкости ν (случай идеальной жидкости) или при рассмотрении явлений развитой турбулентности, из числа величин, являющихся аргументом, исключают вязкость. Если взять отношение квадрата числа Гартмана к числу Рейнольдса, то получается новое безразмерное число, не содержащее вязкости

$$St = \frac{M^2}{Re} = \frac{B^2 d^2 \sigma}{\rho v_0 d} \quad . \qquad (43)$$

Оно получило наименование числа Стюарта.

§ 5. Безразмерная форма уравнений магнитной гидродинамики

После того как § I была записана система уравнений магнитной гидродинамики, и мы убедились, что она может быть замкнута, так как число уравнений равно числу неизвестных, и написали граничные и учли начальные условия, следует, в первую очередь, для упрощения привести систему к безразмерному виду, используя критерии подобия в качестве безразмерных переменных.

Превращение системы уравнений в безразмерный вид можно осуществить следующим приемом: введем для каждой переменной физической величины свою собственную, "лабораторную", единицу измерения, приняв для нее какую-либо величину, которая в течение данного эксперимента будет оставаться постоянной. Например, при течении в плоском канале или цилиндрической трубе за единицу длины в описании такого эксперимента целесообразно взять ширину канала или диаметр трубы d. Все линейные координаты, так же, как и все физические величины, имеющие размерность длины, мы теперь заменим относительными величинами: $\bar{x} = \frac{x}{d}$; $\bar{y} = \frac{y}{d}$; $\bar{z} = \frac{z}{d}$. Длина трубы теперь будет характеризоваться ее относительной длиной $\bar{L} = L/d$, так как величина L также имеет размерность длины.

Пусть, например, в какой-либо точке или в граничных условиях данный эксперимент будет определять характерная величина скорости v_0 (это может быть, например, скорость на центральной оси трубы или средняя скорость течения). Тогда для всех величин, имеющих размерность скорости, мы введем относительное значение $\bar{v} = v/v_0$. Применение характерной скорости v_0 позволит нам ввести характерную, относительную единицу времени T_0, равную d/v_0, а время t как переменную величину заменить относительным временем $\bar{t} = \frac{t}{T_0} = \frac{t v_0}{d}$. Таким образом, T_0 уже не является независимой характерной величиной, а определяется через скорость и линейный размер.

Из теории размерности известно, что число независимых величин, описывающих данное явление, не может быть больше, чем число основных единиц измерения K, вводимых в данной системе единиц. Например, для описания механических явлений вообще и гидродинамических, в частности $K = 3$, так как в системе СИ основными единицами являются метр (м), килограмм (кг), секунда (с). Таким образом, характерной величиной, описывающей гидродинамические явления, может быть, например, плотность жидкости, которая заведомо независима от d и v_0, так как в ее размерность $\frac{кг}{м^3}$ входит основная

единица (кг). Для единицы давления можно выбрать величину ρv_0^2, которая имеет размерность кг/м·с., и в уравнении Навье-Стокса использовать относительное давление $\bar{p} = \frac{p}{\rho v_0^2}$.

Рассмотрим, как трансформируется безразмерное уравнение по мере увеличения числа переменных физических величин в основном, размерном, уравнении. Напишем уравнение Эйлера-Лагранжа для идеальной жидкости

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p \quad .$$

Вводя безразмерные переменные $\bar{t} = \frac{t v_0}{d}$; $\bar{x} = \frac{x}{d}$; $\bar{p} = p/\rho v_0^2$ и заменяя дифференциальный оператор $\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ на оператор по безразмерным величинам $\bar{\nabla} = \left\{\frac{\partial}{\partial \bar{x}}; \frac{\partial}{\partial \bar{y}}; \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right\}$, причем $\nabla = \frac{1}{d}\bar{\nabla}$, получаем безразмерную форму уравнения, напоминающую по форме свой прототип $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\bar{\nabla})\bar{v} = -\bar{\nabla}\bar{p}$.

В том случае, если в уравнении учтем явление вязкости, то течение будет описываться уравнением Навье-Стокса

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} \quad . \qquad (44)$$

Переходя к безразмерному виду и вводя безразмерный оператор Лапласа $\Delta = \frac{1}{d^2}\bar{\Delta}$, получим безразмерную форму уравнения

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + (\bar{v}\bar{\nabla})\bar{v} = -\bar{\nabla}\bar{p} + \frac{1}{Re}\bar{\Delta}\bar{v} \quad , \qquad (45)$$

где появляется безразмерный множитель перед безразмерным оператором Лапласа, обратная величина которого, как известно, носит наименование числа Рейнольдса.

Таким образом, если число независимых констант n, при помощи которых мы однозначно определяем данное явление, меньше или равно числу K основных величин, то безразмерное уравнение, описывающее данное явление, констант не содержит. В том случае, если $n > K$, то в безразмерной форме уравнения появляются безразмерные константы. Так, например, в уравнении (45) имеются 4 константы v_0, d, ρ и η, из них можно составить одну независимую безразмерную комбинацию $(n-K = 4-3 = 1)$

Докажем это $[v_0]^\alpha [d]^\beta [\rho]^\gamma [\eta]^\delta = 1$,

$[м \cdot с^{-1}]^\alpha [м]^\beta [кг \cdot м^{-3}]^\gamma [кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-1}]^\delta = 1$,

или $м^{\alpha+\beta-3\gamma-\delta} \cdot кг^{\gamma+\delta} \, с^{-\alpha-\delta} = 1$.

Из этого соотношения можно получить систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - 3\gamma - \delta &= 0 \\ \gamma - \delta &= 0 \\ -\alpha - \delta &= 0 \end{aligned} \quad ,$$

простейшее решение которой будет соответствовать $\alpha = 1$; $\beta = 1$; $\gamma = 1$; $\delta = -1$, т.е. мы опять получим безразмерную комбинацию, называемую числом Рейнольдса $Re = \rho v d/\eta$.

Рассмотрим уравнение Навье-Стокса в системе уравнений магнитной гидродинамики $(1) \div (12)$, причем для объемной силы $\vec{f}$ запишем следующее выражение:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B} \, .$$

Здесь нами введены немеханические физические величины $\sigma, \vec{E}$ и $\vec{B}$, причем за "единицу" их измерения мы можем принять некоторые значения электрического и магнитного поля E_0 и B_0, проводимость σ считать константой. Таким образом, число констант n, при помощи которых мы будем описывать явление, теперь увеличилось до семи: $v_0, d, \rho, \eta, \sigma, E_0, B_0$, а число безразмерных комбинаций из них до трех: $n-K = 7-4 = 3$, так как число основных единиц при описании электромагнитных явлений равно четырем $(K = 4)$ – кг, м, с, А. Уравнение Навье-Стокса в безразмерной форме можно записать (безразмерность всех входящих величин не обозначается верхней чертой) следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\,grad\,p + \frac{1}{Re}\Delta\vec{v} + \frac{M^2}{Re}[[\vec{v}\vec{B}]\vec{B}] + \frac{\mathcal{N}M}{Re^2}[\vec{E} \times \vec{B}] \, .$$

При этом введены новые безразмерные комплексы: число Гартмана $M = B_0 d\left(\frac{\sigma}{\eta}\right)^{0,5}$ и число, впервые введенное одним из авторов этого пособия, $\mathcal{N} = E_0 l_0^2 \sigma^{0,5} \rho \eta^{-1,5}$.

(Число Гартмана иногда обозначают Ha).

При рассмотрении динамики магнитного поля в движущихся проводящих телах, в том числе и жидких обращаются к следующей трансформации уравнений Максвелла:

$$rot\,\vec{B} = \mu\mu_0\vec{j} \quad (a) \qquad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \quad (c), \qquad (46)$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (b) \qquad div\,\vec{B} = 0 \quad (d).$$

Возьмем оператор rot от уравнения (46a) и подставим в него последовательно уравнения (46c) и (46b):

$$rot\,rot\,\vec{B} = \sigma\mu\mu_0(rot\,\vec{E} + rot(\vec{v}\times\vec{B})) = \sigma\mu\mu_0\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + rot\,\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Преобразуем по правилам векторного анализа левую часть этого равенства и используем (46d):

$$rot\,rot\,\vec{B} = -\Delta\vec{B} + grad\,div\,\vec{B} = -\Delta\vec{B}.$$

В результате получаем

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu\mu_0}\Delta\vec{B} + rot(\vec{v}\times\vec{B}).$$

Если данное уравнение привести в безразмерную форму при помощи характерных величин, введенных до этого, то мы получим

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{Re_m}\Delta\vec{B} + rot(\vec{v}\times\vec{B}),$$

где введено новое безразмерное число – "магнитное число Рейнольдса" $Re_m = \sigma\mu\mu_0 v_0 d$,

введенное в свое время Эльзассером как аналогия гидродинамическому числу Рейнольдса.

Все магнитогидродинамические явления можно классифицировать в соответствии с относительным значением чисел Re, Re_m, M (рис. 3).

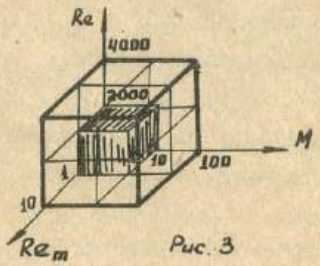


Рис. 3

описание ячеек "классификационного" куба магнитной гидродина-
ки приведено в табл. 2.

Таблица 2

Значение безразмерных координат ячейки			Порядок критериев по краю ячейки		Примечание о физических свойствах
Re	M	Re_m	β	St	
0–2000	0–10	0–1	10^{-3}	10^{-2}	Ламинарное течение в магнитном поле
2000–4000	0–10	0–1	10^{-3}	10^{-4}	Турбулентное течение в магнитном поле
2000–4000	10–100	0–1	10^{-3}	10	Движение с турбулентностью, подавленной магнитным полем
0–2000	0–10	1–10	10^{-2}	10^{-1}	Течение сильно влияет на магнитное поле; магнитное поле слабо влияет на течение
0–2000	10–100	1–10	10^{-2}	10^{1}	Течение сильно влияет на магнитное поле, но и магнитное поле полностью изменяет характер течения

ГЛАВА II

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ПРОВОДЯЩИХ ЖИДКИХ СРЕД В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ

§ I. Решение уравнений магнитной гидродинамики для некоторых течений с прямыми линиями тока

Рассмотрим плоское течение между двумя параллельными стенками, движущимися в противоположные стороны со скоростями v_0, под действием постоянного перепада давления $P = -\frac{\partial p}{\partial x}$, в присутствии поперечного магнитного поля B_0. Оно описывается следующей системой уравнений

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\right) = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta\vec{v} + \vec{j}\times\vec{B} \qquad (I)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} \quad (II), \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (III), \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad (IV);$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0 \quad (V), \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + [\vec{v}\times\vec{B}]) \quad (VI), \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \quad (VII),$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \quad (VIII)$$

и, наконец, уравнением неразрывности

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad . \qquad (IX)$$

Процессы будем считать стационарными, а это значит, что все производные по времени равны нулю. Учтем также, что течение однородное и происходит в плоскости ZX. Это эквивалентно тому, что производные от всех величин по X и по Y равны нулю. С учетом этих замечаний, проанализируем приведенные выше уравнения (рис. 4).

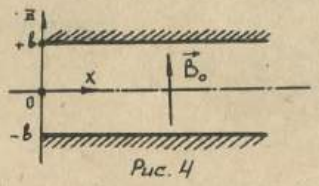


Рис. 4

В декартовой системе координат уравнение неразрывности можно записать таким образом:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Основываясь на утверждении о равенстве производных по x и y нулю, оно превращается в $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, из которого следует, что

$$v_z = const \, . \qquad (47)$$

Поскольку стенки канала не имеют ни стока, ни источников, мы должны считать, что при $z = \pm b$ v_z должно равняться нулю, но это, в свою очередь, эквивалентно с учетом формулы (I) тому, что $v_z = 0$ при любом значении z внутри канала. Равенство v_y нулю очевидно, так как мы имеем дело с плоской задачей и производная равна нулю. Выражение $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ позволяет сделать вывод, что v_x является функцией только координаты z. Таким образом, в результате рассмотрения уравнения $(\overline{IX})$ получены следующие результаты: скорость движения жидкого металла может быть представлена как $\vec{v} = \{ v_x(z);\ 0;\ 0 \}$.

Аналогичное рассмотрение уравнения $(\overline{IV})$ приводит к утверждению $\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$ или $B_x = f(z)$, $\frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$, отсюда $B_y = 0$. Тогда и $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$, т.е. $B_z = const$. При $z = \pm b$ $B_z = B_0$, где B_0 приложенное внешнее поле, следовательно, при всех значениях z координаты компонента индукции B_z постоянна. Рассмотрение уравнения $(\overline{IV})$ позволяет в нашем случае представить $\vec{B}$ как $\vec{B} = \{ B_x(z);\ 0;\ B_0 \}$.

Третья переменная величина, которая входит в уравнение (I) – напряженность электрического поля. Она входит в выражение для электромагнитной силы. Действительно,

$$\vec{j}\times\vec{B} = \{ j_y B_0;\ B_x j_x - j_x B_0;\ -B_x j_y \}.$$

но $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + [\vec{v}\times\vec{B}])$,

а $\vec{v} = \{v_x(z); 0; 0\}$; $\vec{B} = \{B_x(z); 0; B_0\}$.

Тогда $\vec{j} = \sigma\{E_x; E_y - v_x B_0; E_z\}$ и окончательно

$$\vec{j}\times\vec{B} = \sigma\{(E_0 - v_x B_0)B_0; (B_x E_z - E_x B_0); -B_x(E_0 - v_x B_0)\}.$$

Видно, что в это выражение входят все три компоненты напряженности электрического поля. Из уравнения $(\overline{V})$ получаем

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Опять-таки с учетом однородности задачи вдоль оси X (канал бесконечен) и рассмотрения плоской задачи, можно записать

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Уравнение $(\overline{VI})$ дает дополнительную информацию о поведении вектора напряженности электрического поля. Из него следует, что $rot\,\vec{E} = 0$ или $rot\,\vec{E} = \left\{\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}; \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}; \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right\} = 0$, т.е. можно сказать, что $E_x = 0$; $E_y \neq f(z)$; $E_y = const$. Если приложено внешнее электрическое поле E_0, то $E_y = E_0$. Если нет внешнего электрического поля, перпендикулярного плоскости рисунка 4, то $E_y = 0$. Компонента E_z в силу того, что производные по всем трем координатам равны нулю, тоже должна равняться некоторой постоянной и в частном случае - нулю. В дальнейшем мы будем считать, что стенки канала обладают проводимостью, равной нулю, тогда $j_z\big|_{z=\pm b} = \sigma_x E_z = 0$, отсюда и $E_z = 0$, так как $\sigma_x \neq 0$. В результате можно записать, что $\vec{E} = \{0; E_0; 0\}$:

$$\vec{E} = \{0; E_0; 0\}. \qquad (48)$$

Теперь вернемся к уравнению (I) и распишем его с учетом всех полученных данных и принятых допущений

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \sigma(E_0 - v_x B_0)B_0; \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y}_{=0} + \eta\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}_{=0}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}_{=0} - \sigma(E_0 - v_x B_0)B_x.$$

Остается всего два уравнения

$$0 = -\partial p/\partial x + \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \sigma(E_0 - v_x B_0)B_0, \qquad (49)$$

$$0 = -\partial p/\partial z - \sigma(E_0 - v_x B_0)B_x. \qquad (50)$$

Решение уравнения (49) дает возможность получить выражение для скорости v_x, а уравнение (50) описывает перераспределение давления поперек канала. Учитывая, что $\frac{\partial p}{\partial x} = P$, (49) можно переписать

$$\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - \sigma v_x B_0^2 = -\sigma E_0 B_0 - P, \qquad (49')$$

а его решение будет иметь вид

$$v_x = C_1 \exp\left(B_0 z\sqrt{\sigma\eta^{-1}}\right) + C_2 \exp\left(-z B_0\sqrt{\sigma\eta^{-1}}\right) + \frac{\sigma E_0 B_0 + P}{\sigma B_0^2}. \qquad (51)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 воспользуемся граничными условиями $z = +b$; $v_x = v_0$; $z = -b$; $v_x = -v_0$. Подставляя в них (51), получаем

$$v_0 = C_1 \exp M + C_2 \exp(-M) + U; \quad -v_0 = C_1\exp(-M) + C_2\exp M + U$$

Здесь введено обозначение $U = \frac{\sigma E_0 B_0 + P}{\sigma B_0^2}$. Решая эту систему уравнений, определяем значение C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{(v_0 - U)\exp M + (v_0 + U)\exp(-M)}{\exp 2M - \exp(-2M)}; \quad C_2 = \frac{-(v_0 + U)\exp M - (v_0 - U)\exp(-M)}{\exp 2M - \exp(-2M)},$$

где $M = B_0 b\sqrt{\sigma\eta^{-1}}$ - число Гартмана. Подставляя полученные значения произвольных постоянных в уравнение (51) и производя элементарные преобразования, получаем, что

$$v_x = v_0\frac{sh\,M\,z/b}{sh\,M} + U\left(1 - \frac{ch\,M\,z/b}{ch\,M}\right). \qquad (52)$$

Проанализируем полученное решение.

I. Пусть $U = 0$, тогда

$$v_x = v_0\frac{sh\,M\,z/b}{sh\,M}. \qquad (53)$$

Если $v_0 \neq 0$, т.е. стенки канала движутся в разные стороны, то получаем магнитогидродинамическое течение Куэтта. Эпюра скорости показана на рис. 5.

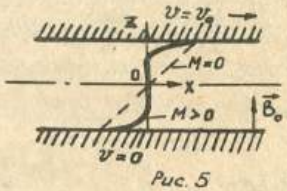


Рис. 5

ри $M \to 0$, то $sh M\frac{z}{b} \to M\frac{z}{b}$; $sh M \to M$ и $v_x = v_0 z/b$.

ледовательно, в пределе, при отсутствии магнитного поля, МГД – ение Куэтта переходит в течение Куэтта, известное из гидро- намики.

2. Пусть $v_0 = 0$ (стенки неподвижны), тогда

$$v_x = U\left(1 - \frac{ch M\, z/b}{ch M}\right) - \qquad (54)$$

ение так называемой задачи Гартмана (рис. 6).

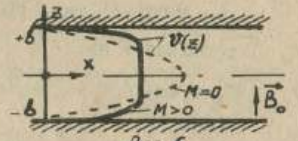


Рис. 6

ри $M \to 0$ и $E = 0$, определяем, раскладывая в ряд по $(M\frac{z}{b})$ и M гиперболический косинус соответственно, что

$$v_x = U\left[\frac{0{,}5M^2(1 - z^2b^{-2})}{1 + 0{,}5M^2}\right].$$

роизводя замену $U = P(6b^2)^{-1} = \frac{Pb^2}{M^2\eta}$, определяем в итоге, что

$$v_x = 0{,}5\frac{P}{\eta}(b^2 - z^2),$$

т.е. распределение скоростей по известному закону Пуазейля.

Известный интерес представляет закон распределения магнитной индукции в канале. Из уравнения (II) с учетом, что $\vec{B} = \{B_x(z); 0; B_0\}$ и $\vec{j} = 6\{0; E_0 - v_x B_0; 0\}$, получаем

$$rot\,\vec{H} = \left\{0; \frac{\partial H_y}{\partial z}; 0\right\} = 6\{0; E_0 - v_x B_0; 0\},$$

или можно записать

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = (E_0 - v_x B_0)6\mu_0 . \qquad (55)$$

Подставляя формулу (52) в (55) и интегрируя, получаем

$$B_x = -\frac{\mu_0 P}{B_0}z + \frac{b}{M}\left[\frac{\mu_0 P}{B_0} + \mu_0 6E_0\right]\frac{sh M\frac{z}{b}}{ch M} - \frac{Re_m'}{M}\frac{B_0}{sh M}ch M\frac{z}{b} + C, \qquad (56)$$

Для определения постоянной интегрирования в случае течения Гартмана воспользуемся граничным условием $B_x = 0$ при $z = 0$, тогда, с учетом $Re_m' = 0$, получаем $C = 0$ и

$$B_x = -\frac{\mu_0 P}{B_0}z + \frac{b}{M}\left[\frac{\mu_0 P}{B_0} + \mu_0 6E_0\right]\frac{sh M\, z/b}{ch M} .$$

в случае течения Куэтта первые два слагаемых выражения (56) равны нулю, а граничные условия будут иметь такой вид: $B_x = 0$ при $z = \pm b$, тогда

$$C = \frac{Re_m'}{M}\frac{B_0}{sh M}ch M$$

и $$B_x = \frac{Re_m'}{M}B_0\frac{1}{sh M}(ch M - ch M\frac{z}{b}),$$

где $Re_m' = b v_0 \mu_0 6$ – "пристеночное" магнитное число Рейнольдса. Если $Re_m' = 0$, то из (56) получаем распределение B_x поперек канала для случая течения Гартмана (рис. 7).

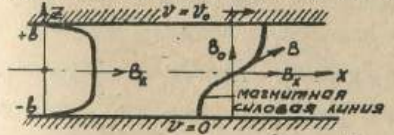


Рис. 7

Если положить равными нулю P и E_0, то из уравнения (формулы) (56) получается распределение B_x для случая течения Куэтта (рис. 8).

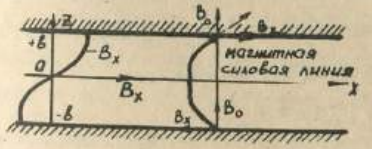


Рис. 8

§2. Гидравлические характеристики течения Гартмана

Из выражения (54) можно получить значение средней скорости в канале

$$\overline{v_{cp}} = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{+b} v_x\, dz = \frac{U}{M}(M - th M) \qquad (57)$$

и расхода, который согласно определению вычисляется как

$$Q = a\int_{-b}^{+b} v_x\, dz = \frac{2abU}{M}(M - th M), \qquad (58)$$

где a – ширина канала.

Определим коэффициент сопротивления канала на единицу его длины как

$$\lambda = \frac{2Pb}{\rho \overline{v_{cp}^2}} \qquad (59)$$

Положим $E_0 = 0$, тогда $U = \frac{P}{6B_0^2} = \frac{PB^2}{M^2\eta}$ и (57) перепишется как

$$\bar{v}_\varphi = \frac{PB^2}{M^3\eta}(M - thM). \qquad (60)$$

Условия равенства нулю напряженности электрического поля означает, что по торцам канала есть два хорошо проводящих электрода, замкнутых друг на друга. Подставляя в (59) выражение (60) получаем $\lambda = \frac{2PB}{\rho v_\varphi} \cdot \frac{M^3\eta}{PB^2(M-thM)} = 2\frac{\eta}{\rho B v_\varphi} \cdot \frac{M^3}{M-thM} = \frac{2}{Re}\frac{M^3}{M-thM}$, (61)

при этом учтено, что $Re = \rho B v_\varphi \eta^{-1}$ – число Рейнольдса.

Если теперь положить $M \to 0$, то $thM \cong M - \frac{M^3}{3}$ и

$$\lambda = \frac{2}{Re} \cdot 3 = \frac{6}{Re}. \qquad (62)$$

Если же $M \to \infty$, то $thM \to 1$ и

$$\lambda = \frac{2}{Re} M^2 = 2St, \qquad (63)$$

где $St = \frac{M^2}{Re}$ – число Стюарта.

В том случае, когда торцовые электроды не соединены друг с другом, т.е. внешняя электрическая цепь разомкнута, то $E_0 \neq 0$. В этом случае может быть наложено условие равенства нулю полного тока на единицу длины канала

$$J = \int_{-b}^{b} j_z \, dz = 0. \qquad (64)$$

Используя полученное ранее выражение для j_y, можно записать, что

$$J = 6\int_{-b}^{b}(E_y - v_x B_0)dz = 2b6E_y - B_0 6 v_\varphi \cdot 2b = 2b(6E_y - B_0 6 v_\varphi) = 0,$$

отсюда $$E_y = B_0 v_\varphi. \qquad (65)$$

Используем соотношение (65) в выражении для U и получим, что

$$U = v_\varphi + \frac{P}{6B_0^2}. \qquad (66)$$

Подставляя (66) в (57), имеем

$$\bar{v}_\varphi = \frac{1}{M}\left(v_\varphi + \frac{P}{6B^2}\right)(M - thM),$$

отсюда $$\bar{v}_\varphi = \frac{P}{6B_0^2}\,\frac{M - thM}{thM}. \qquad (67)$$

Подстановка уравнения (67) в (59) дает

$$\lambda = \frac{2M^2}{Re}\,\frac{thM}{M - thM}. \qquad (68)$$

При больших значениях числа Гартмана коэффициент сопротивления (68) переходит в

$$\lambda = \frac{2M}{Re}.$$

§ 3. Режимы работы магнитогидродинамического (МГД) канала

Будем считать, что МГД – канал включен в некоторую внешнюю гидравлическую цепь, в которой могут быть источники гидравлического давления в виде насосов, какое-то внешнее гидравлическое сопротивление. Внешняя гидравлическая цепь накладывает в нашей задаче граничные условия по оси OX для градиента давления P. В том случае, если канал играет роль магнитогидродинамического тормоза или генератора, будем считать $P > 0$, при этом предполагается, что во внешней цепи имеется некоторый гидравлический насос. Это будет соответствовать большему давлению на входе в канал по сравнению с его выходом. В случае работы канала в режиме МГД-насоса $P = -P^* < 0$, т.е. внешняя гидравлическая цепь является некоторым сопротивлением и на входе в канал давление меньше, чем на выходе.

Для того чтобы задать граничные условия для электрического поля, предположим, что к граням AB и CD канала (рис. 9)

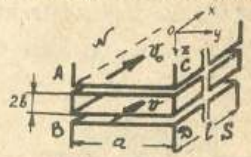


Рис. 9

подключена некоторая электрическая цепь с внешним сопротивлением R и электродвижущей силой $\mathcal{E}$, которую мы будем считать положительной, если канал будет работать в режиме магнитогидродинамического тормоза.

В этом случае $$E = \frac{\mathcal{E} - JR}{a} \qquad (69)$$

и закон Ома в дифференциальной форме можно записать следующим образом:

$$j_y = \sigma\left(\frac{\mathcal{E} - JR}{a} - v_z B_0\right). \qquad (70)$$

Интегрирование (69) дает закон Ома в интегральной форме для электрической цепи магнитогидродинамического канала. Учитывая, что $J = l\int_z^z j_y dz$ и соотношение (58) , получим

$$J\left(R + \frac{a}{2b l \sigma}\right) + \frac{B_0 Q}{2b} = \mathcal{E}, \qquad (71)$$

где $R + \frac{a}{2b l \sigma} = R_n$ – полное омическое сопротивление электрической цепи.

Вернемся к выражению (58) . Вместо U запишем его значение с учетом выражения (69) и, исключая J при помощи (71), получим, что

$$\frac{\sigma B^2}{2a b}\left[\frac{M}{M - th M} - \frac{R}{R_n}\right] Q - P = \frac{\sigma \mathcal{E} B}{a}\left(1 - \frac{R}{R_n}\right) \qquad (72)$$

– второе интегральное соотношение для МГД – канала.

Магнитогидродинамический канал можно рассматривать как пересечение трех цепей: гидравлической, электрической и магнитной. При различных режимах в этих цепях магнитогидродинамический канал будет играть роль вентиля в гидродинамической цепи и генератора в электрической, либо насоса в гидродинамической и потребителя тока в электрической. В первом случае энергия будет перекачиваться из гидравлической цепи в электрическую , во втором, наоборот, – из электрической в гидравлическую. На рис. 10

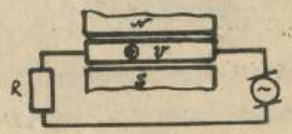


Рис. 10

приведена идеализированная электрическая схема МГД-канала.

внешней электрической цепью.

Режим вентиля или генератора. $\mathcal{E} = 0$. При $R = 0$ канал превращается в тормоз с дополнительным электромагнитным сопротивлением течению

$$\Gamma = \frac{Q}{2ab}\sigma B^2 \frac{th M}{M - th M} \qquad (73)$$

При бесконечном сопротивлении во внешней цепи $R \to \infty$ дробь $\frac{R}{R_n}$ можно положить примерно равной I и

$$P = \frac{Q}{2ab}\sigma B^2 \frac{th M}{M - th M}.$$

Канал представляет собой гидравлическое сопротивление в $\frac{M}{th M}$ раз меньше, чем в предыдущем случае. Это уже было указано при выводе формул (6I) и (68) для расчета коэффициента сопротивления канала на единицу длины. Формула (6I) соответствует случаю $R = 0$, а (68) – случаю $R = \infty$.

Из (69) и (7I) получим выражение для напряженности электрического поля, образующегося между поверхностями AB и CD

$$E = \frac{BQ}{2ab}\frac{R}{R_n} \qquad (74)$$

или $R = \infty$, то $E = \frac{BQ}{2ab}$ и разность потенциалов между поверхностями AB и CD будет равна

$$\Delta\varphi = aE = \frac{BQ}{2b} \qquad (75)$$

Величина $\Delta\varphi$ может быть измерена потенциометром. В этом случае МГД –канал работает в режиме электромагнитного расходомера.

При $\mathcal{E} = 0$ и $P > 0$ канал является генератором электрического тока, идеализированный коэффициент полезного действия которого можно вычислить

$$\eta = \frac{J^2 R}{\sigma P Q} = \frac{R(R_n - R)}{R_n^2}\left\{\frac{M}{M - th M} - \frac{R}{R_n}\right\}^{-1} \qquad (76)$$

Режим электромагнитного насоса. Положив $P^* = -P$, получаем из (72) выражение для случая $M \gg 1$

$$P^* = \left(\frac{6\gamma B}{a} - \frac{6B^2 Q}{2ab} \right)\left(1 - \frac{R}{R_n}\right). \qquad (77)$$

Член, содержащий B^2, в данном выражении имеет физический смысл индуктивного сопротивления течению, в то время как член $6\gamma B a^{-1}$ отображает движущую силу кондукционного тока. (P, Q) – характеристика такого насоса имеет вид прямой, наклон который не зависит от γ (рис.II).

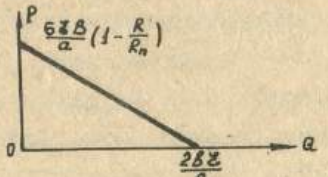


Рис. 11

Точка пересечения ее с осью ординат $(Q=0)$ определяется величиной

$$P^*_{макс} = \frac{6\gamma B}{a}\left(1 - \frac{R}{R_n}\right) .$$

Это соответствует случаю электромагнитного вентиля, когда γ и подобраны так, что компенсируют активное давление внешней системы и производительность насоса равна нулю. С осью абсцисс получается пересечение при $P^* = 0$ и

$$Q_{макс} = \frac{2B\gamma}{B} .$$

Это соответствует интересному случаю, когда насос компенсирует силу трения, возникающую в его канале. Коэффициент полезного действия в режиме $P^* \neq 0$ и $Q \neq 0$ можно вычислить как

$$\ell = \frac{\ell P^* Q}{\gamma J} = \frac{BQ}{2B\gamma}$$

В рассмотренных случаях ламинарного течения в МГД-канале от магнитной цепи не происходит передача энергии.

ГЛАВА III

ЯВЛЕНИЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

§ I. Обтекание тел проводящей жидкостью в магнитном поле

Рассмотрим стационарное обтекание тела, находящегося в однородном магнитном поле, причем поток вязкой электропроводящей жидкости будем предполагать однородным на бесконечном удалении от тела. Будем считать, что векторы скорости $\vec{U}_\infty$ и индукции $\vec{B}_\infty$ магнитного поля для невозмущенного движения образуют угол α, вектор $\vec{B}_\infty$ лежит вдоль оси OY, а вектор $\vec{U}_\infty$ – в плоскости XOY [3] (рис. I2).

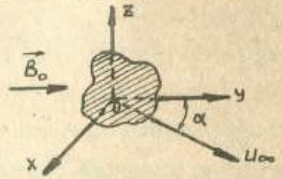


Рис. 12

Уравнение движения жидкости для этого случая в безразмерном виде можно записать при условии малости магнитного числа Рейнольдса $(Re_m \ll 1)$:

$$\nabla^2 \vec{U} + M^2(-\operatorname{grad}\varphi + \vec{U}\times\vec{i}_y)\times\vec{i}_y - Re\operatorname{grad} p = Re(\vec{U}\operatorname{grad})\vec{U} \qquad (78)$$

$$\operatorname{div}\vec{U} = 0 \qquad (79)$$

$$\nabla^2\varphi = (\operatorname{rot}\vec{U})_y , \qquad (80)$$

где введены характерная длина L, характерные скорость U_∞ и индукция магнитного поля B_∞. Для давления принята характерная величина ρU_∞^2, а для потенциала – $U_\infty B_\infty L$, $\vec{i}_y$ – единичный вектор вдоль оси OY.

Граничные условия для этой системы уравнений можно записать следующим образом:

I. Для поля скоростей

$$\vec{U}|_S = 0 \qquad \text{На поверхности тела}$$

$$\vec{U}_\infty = \{\sin\alpha;\ \cos\alpha;\ 0\} \qquad \text{на бесконечности} \qquad \Big\} \ (81)$$

2. Равенство касательных компонент электрического поля и нормальных компонент электрического тока:

$$\left.\begin{aligned}(\vec{\tau}\,\mathrm{grad})\varphi &= (\vec{\tau}\,\mathrm{grad})\varphi_i \\ (\vec{n}\,\mathrm{grad})\varphi &= \frac{\sigma_i}{\sigma}(\vec{n}\,\mathrm{grad})\varphi_i\end{aligned}\right\}, \qquad (82)$$

где $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы касательной и нормали к телу, а индекс относится к области внутри тела. Если потребовать, чтобы на большом расстоянии от тела индуцированный ток обращался в нуль, т.е.

$$\vec{j}_\infty = \sigma(-\mathrm{grad}\,\varphi + \vec{U}_\infty \times \vec{B}_0) = \sigma\left\{-\frac{\partial\varphi}{\partial x};\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y};\ -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \sin\alpha\right\} = 0$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \sin\alpha, \qquad (83)$$

то это означает существование электрического поля $\vec{E} = \{0;\ 0;\ -\sin\alpha\}$. Если обтекаемое тело имеет конечную электропроводность, то для потенциала внутри него добавляется уравнение

$$\nabla^2\varphi_i = 0, \qquad (84)$$

Система уравнений (78 + 80), (84) и граничных условий (81), (82) и (83) достаточны для описания задачи, однако ее полное общее решение отсутствует, так как она сложнее аналогичной гидродинамической задачи обтекания, также нерешенной.

Рассмотрим некоторые частные случаи, поддающиеся аналитическому решению.

Течение вдоль бесконечной плоскости (рис. 13).

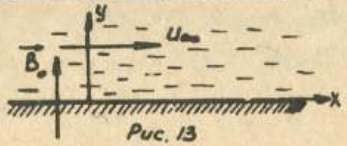


Рис. 13

Для этого случая $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 1$, внешний перепад давления отсутствует и уравнение (78) превращается в такой вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + M^2(1-U) = 0.$$

С условий $U(0) = 0;\ U(\infty) = 1$ получаем

$$U = 1 - e^{-My}.$$

Интересно, что в этой задаче нет характерного размера и в качестве характерной длины выбирается величина $\nu/\rho U_\infty$, а число Гартмана записывается в виде

$$M = \frac{B}{\rho U_\infty}\sqrt{\sigma\eta}.$$

Силу сопротивления единицы площади плоскости можно рассчитать так $F = \rho U_\infty^2 \frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{y=0} = \rho U_\infty^2 M$.

Заметим, что в обычной гидродинамике отсутствует стационарное решение такой задачи. Физически это означает, что после того как данная поверхность пришла в равномерное движение, все большие и большие массы жидкости будут приходить в движение. Возможно некоторая аналогия МГД-решения (85) с существующим решением колебательного движения бесконечной стенки в направлении, параллельном этой стенке, в вязкой жидкости (попытка создания поперечных волн в вязкой жидкости). В этом случае уравнение (78) при M=0 заменится на

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\,\mathrm{grad})\vec{U} = \bar{\eta}\,\nabla^2\vec{U}, \qquad (86)$$

где вместо Re целесообразно ввести безразмерный параметр $\bar{\eta} = \frac{\nu T}{\rho L^2}$ (T-период гармонических колебаний стенки). Если считать, что колебания стенки приводят к тому, что при $y = 0,\ \bar{U} = \cos\frac{2\pi t}{T}$, а при $y = \infty,\ \bar{U} = 0$, то $\vec{U} = \{U_x;\ 0;\ 0\}$ и второй член уравнения (86) исчезает, уравнение (86) приобретает такой вид:

$$\frac{\partial\bar{U}_x}{\partial\bar{t}} = \bar{\eta}\,\frac{\partial^2\bar{U}_x}{\partial\bar{y}^2}.$$

Его решение можно представить в виде затухающей волны попе-

речных колебаний:

$$U_x = U_0 e^{-\kappa y} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \kappa y\right),$$

где $\kappa = \sqrt{\frac{\rho}{2\mu T}}$. Примечательно, что поперечное колебательное возмущение среды затухает в e раз на длине $1/\kappa$ в 2π раз меньше, чем длина волны $\lambda = 2\pi/\kappa$.

Обтекание бесконечного цилиндра вдоль его образующей в поперечном магнитном поле

Ось X направим вдоль образующей цилиндра, ось Y – вдоль магнитного поля. Как и в предыдущем случае, линии тока прямолинейны, т.е. $U_y = U_z = 0$, градиент давления отсутствует и все величины зависят от y и z. Тогда

$$\nabla^2 U + M^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - U\right) = 0 \qquad (87)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad (88)$$

$U|_s = 0$ – на поверхности, $U = 1$ – на бесконечности.

Граничные условия для потенциала рассмотрим в двух случаях:

1/ непроводящий цилиндр $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_s = 0$,

2/ идеально проводящий цилиндр $\varphi|_s = const$.

На бесконечности в обоих случаях

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1.$$

Исключая из выражений (87), (88) потенциал φ, получаем

$$\nabla^4 U - M^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

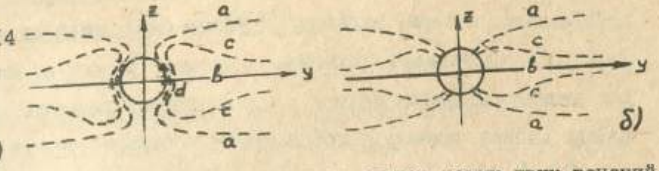
Решение этого уравнения известно в общем виде (см., например, руководство [3]). При очень больших значениях числа Гартмана M для непроводящих круговых цилиндров поле скоростей будет иметь такой вид:

$$U = 1 - \frac{1}{2\sqrt{r}} \left\{ \exp\left[-M(r-1)\cos^2\frac{\theta}{2}\right] + \exp\left[M(r-1)\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \right\},$$

а для случая проводящих круговых цилиндров

$$U = 1 - \frac{1}{2\sqrt{r}} \left\{ \cos^2\frac{\theta}{2} \exp\left[-M(r-1)\sin^2\frac{\theta}{2}\right] + \sin^2\frac{\theta}{2} \exp\left[-M(r-1)\cos^2\frac{\theta}{2}\right] \right\}$$

Рис. 14



ображены пути индуцированных токов в случае таких двух течений характерные области, на которые распадаются решения. Область – область однородного внешнего потока, в которой скорость на скорости набегающего потока $U = 1$. Область b/ – "Следы". этих областях скорость имеет порядок $U \cong 1 - \frac{1}{2\sqrt{r}}$ и $U \cong 1 - \frac{1}{\sqrt{r}}$, ответственно в непроводящем цилиндре и в проводящем. Область d/ – гартмановский слой вблизи непроводящего цилиндра и его сутствие вблизи проводящего. Последнее обстоятельство вызвано тем, что у поверхности идеально проводящего тела тангенциальные составляющие электрического тока малы.

Интересно отметить, что при отсутствии поля или в очень слабом магнитном поле течение вокруг цилиндра при таких граничных условиях осесимметрично, уравнение (78) превращается в $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = 0$ при граничных условиях $r = 1;\ U_z = 1,\ r = \infty;\ U_z = 0$ его решение имеет вид $U = \frac{1}{r^2}$.

При поперечном обтекании вязкой жидкостью бесконечного цилиндра в обычной гидродинамике решение соответствующего уравнения невозможно. Стокс дал этому факту следующее объяснение /парадокс Стокса/: "Давление, производимое цилиндром на жидкость, постоянно стремится увеличить то количество жидкости, которое цилиндр захватывает с собой, в то время как внутреннее трение жидкости на некотором расстоянии от цилиндра, наоборот, стремится уменьшить это количество жидкости. В случае цилиндра

приращение количества жидкости, увлекаемой цилиндром, посто-
но превышает потерю, вызванную трением окружающей жидкости,
количество увлекаемой жидкости постоянно растет по мере то
как цилиндр движется дальше"... В магнитной гидродинамике п
радокс Стокса снимается при достаточно больших числах Гарти
на $M \gg 1$.

Сопротивление круглого цилиндра в продольном магнит
поле на единицу длины

$$F = \frac{5\pi}{8} \eta U_\infty M,$$

а в поперечном магнитном поле

$$F = \frac{7\pi}{16} \eta U_\infty M$$

(направление магнитного поля берется относительно скорости
жидкости).

Поступательное движение шара в магнитном поле

В гидродинамике существует решение для установившег
движения шара в вязкой жидкости при малых значениях числа
Рейнольдса $Re = \frac{\rho U_0 R}{\eta} \ll 1$. Последнее условие позволяет пре-
небречь инерционным членом $Re(\vec{u}\,\mathrm{grad})\vec{u}$ в уравнении (78)
и свести дело к решению линейного уравнения распределения
скоростей и давлений. При этом для распределения давления
жидкости на поясок, проведенный под углом θ к направлен
движения, по поверхности шара получают (рис.I5)

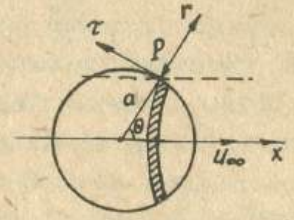


Рис. 15

$$p = -\frac{3}{2} \eta U_\infty \frac{\cos\theta}{a} + p_\infty, \qquad (89)$$

для компонента скорости в сферической системе координат

$$v_r = U_\infty \left[1 - \frac{3}{2}\frac{a}{r} + 0{,}5\left(\frac{a}{r}\right)^3\right] \cos\theta, \qquad (90)$$

$$v_\theta = -U_\infty \left[-1 - 0{,}75\frac{a}{r} - 0{,}25\left(\frac{a}{r}\right)^3\right] \sin\theta. \qquad (91)$$

я касательного напряжения на поверхности сферы

$$\tau = \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=a} = -\frac{3}{2}\eta \frac{U_\infty}{a} \sin\theta$$

роецируя τ и p на ось OX и интегрируя по поверхности, полу-
ем постоянную проекцию поверхностной силы

$$f = p\cos\theta + \tau \sin\theta = -\frac{3}{2}\eta \frac{U_\infty}{a}(\cos^2\theta + \sin^2\theta).$$

множив ее на поверхность сферы, получаем закон Стокса для силы
опротивления, возникающей при обтекании шара жидкостью

$$F = -6\pi\eta a U_\infty.$$

В магнитной гидродинамике закон сопротивления должен
ависеть от числа Гартмана. При этом величина силы сопротивле-
ия, если магнитное поле направлено под углом α к движению,
олучает две компоненты - силу сопротивления и подъемную
отклоняющую) силу, которая в магнитной гидродинамике сущест-
ует и у симметричного тела, вследствие несимметрии обтека-
ия.

Решение задачи Стокса найдено в магнитной гидродинами-
е только для двух крайних случаев: больших и малых чисел
артмана. Для $M \ll 1$ для сопротивления получено

$$\frac{F_y}{F_0} = 1 + \frac{3}{8}(1 + 0{,}5\sin^2\alpha)M + O(M^2),$$

де $F_0 = 6\eta\pi a U_\infty$ - сопротивление, вычисленное по закону
токса, а $O(M^2)$ - остаток более высокого порядка малости.

Для вычисления подъемной силы получаем:

$$\frac{F_y}{F_0} = \frac{3}{32} M \sin 2\alpha + O(M^2).$$

Интересно отметить, что величина подъемной силы пропор-
циональна числу Гартмана, её максимальное значение при угле α.

При больших значениях числа Гартмана и угле α, равном нулю, задачу о стоксовом течении решили пермские ученые Г.З.Гершуни (Пермский университет), Е.М.Жуховицкий (Пермский педагогический институт). Решая уравнение типа (78) при условии, что $grad\,\varphi=0$, были получены решения для скорости и давления на сфере, являющиеся обобщением аналогичных решений Стокса (89), (90) и (91). Запишем их в размерной форме

$$\vec{U} = U_\infty\left[\exp(Mr\cos\theta)\nabla\varphi_1 + \exp(-Mr\cos\theta)\nabla\varphi_2 + \vec{i}_y\right],$$

$$p = \frac{M}{Re}\left[\exp(Mr\cos\theta)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \exp(-Mr\cos\theta)\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right] + p_\infty,$$

где для $M \gg 1$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2Mr}(1+\cos\theta),$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2Mr}(1-\cos\theta).$$

Для силы сопротивления было получено выражение

$$\frac{F_y}{F_0} = \frac{4}{9}M.$$

Вращательное движение шара в магнитном поле

Рассмотрим еще одну задачу МГД-взаимодействия движущегося тела с проводящей жидкостью – задачу о вращении шара в вязкой проводящей жидкости при наличии однородного магнитного поля, направленного вдоль оси вращения шара. Она решена и для непроводящего и для проводящего шара.

Решения сделаны в "стоксовом приближении", т.е. при условии, когда инерционными членами в уравнении (78) можно пренебречь.

Известный интерес для нашего дальнейшего изложения представляет вращение проводящего шара в вязкой проводящей среде. В этом случае вращающийся шар играет роль ротора своеобразной динамо-машины. Между экваториальной областью шара и его

Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Обтекание шара проводящей жидкости в сисильном магнитном поле. – ЖТФ, 1960, т.xxx, вып.8.

полюсами возникает разность потенциалов, приводящая к появлению двух симметричных полоидальных токов $\vec{j}$ (рис. 16).

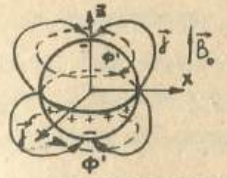


Рис. 16

Последние в свою очередь создают два кольцевых магнитных потока Φ' противоположного направления.

При вращении возникает момент сил сопротивления, который в случае слабых магнитных полей может быть представлен состоящим из двух частей: момента вязких сил, приложенных к поверхности шара L_1 и момента объемных сил L_2, действующих со стороны поля на токи, текущие в шаре

$$L_1 = L_0\left[1 + \frac{1}{15}M^2 - \frac{1}{24}M^3 + \frac{37+22\lambda}{525(3+2\lambda)}M^4 + \dots\right], \qquad (92)$$

$$L_2 = L_0\left[\frac{\lambda}{3+2\lambda}\cdot\frac{M^2}{15} - \frac{8\lambda(1+\lambda)}{(3+2\lambda)^2}\frac{M^4}{525} + \dots\right], \qquad (93)$$

где $L_0 = -8\pi\rho\omega R^5$ – тормозящий момент в отсутствии поля, а $\lambda = \frac{\sigma_i}{\sigma}$ – отношение электропроводности шара к электропроводности окружающей жидкости.

Полный тормозящий момент равен

$$L = L_0\left[1 + \frac{(1+\lambda)}{3+2\lambda}\frac{M^2}{5} - \frac{M^3}{24} + \frac{37+44\lambda+12\lambda^2}{175(3+2\lambda)^2}M^4 + \dots\right].$$

Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Вращение шара в вязкой проводящей жидкости в магнитном поле при больших числах Рейнольдса. ЖТФ, т.XXXIУ, в.2, 1964, С. 336–339; Круминь Ю.К. Медленное вращение шара в вязкой проводящей жидкости в магнитном поле. Изв. АН Латв. ССР, 1958, 2,

Расчеты показывают, что в сильном магнитном поле ($M \gg 1$) все процессы протекают в тонком слое, примыкающем к поверхности шара, который можно рассматривать как пограничный слой, толщина которого имеет порядок $\frac{R}{M}$, т.е. в сильном магнитном поле вращающийся шар в меньшей степени возмущает окружающую жидкость. Полный момент сил сопротивления в этом случае можно представить как

$$L = L_0 \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{\lambda M}{6+\lambda M}\right) \frac{M}{6} . \qquad (94)$$

Интересно, что эта формула верна и при больших значениях числа Рейнольдса, чего нельзя сказать о формулах (92, 93) Это объясняется тем, что условием для "стоксова приближения" здесь будет неравенство $\frac{Re}{M} \ll 1$, а не $Re \ll 1$. Действительно, если принять толщину пограничного слоя $\delta \sim \frac{R}{M}$ /см. следующий параграф/, то порядок величин инерционного члена в уравнении Навье-Стокса равен

$$\rho |(\vec{v}\nabla)\vec{v}| \sim \frac{\rho v^2}{\delta} = \frac{\rho v^2 M}{R} ,$$

а члена, описывающего силы вязкости, –

$$|\eta \Delta \vec{v}| \sim \frac{\rho \vec{v}}{\delta^2} \sim \frac{\rho \omega R M^2}{R^2} .$$

Отношение этих объемных сил даст условие, о котором говорилось выше, $\frac{\rho v^2 M}{R} : \frac{\rho \omega M^2}{R} = \frac{Re}{M} \ll 1$.

§ 2. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Понятие о пограничном слое

При течении жидкости вблизи поверхности твердого тела (около стенок трубы, при обтекании корпуса корабля или самолета) основными явлениями, определяющими рассеяние энергии, следует считать явление прилипания жидкости к стенкам твердого тела и явление вязкости в жидкости. Точные реше-

ния задачи о течении вязкой жидкости вблизи твердого тела (обтекание пластины, шара, начального участка трубы и т.д.) позволяют сделать энергетические оценки. При этом оказывается, что при течениях жидкостей с достаточно малой вязкостью основной расход энергии происходит в сравнительно малом пространстве, примыкающем к поверхности твердого тела, там, где наблюдаются наибольшие градиенты скорости и, следовательно, наибольшие силы вязкости. Это пространство названо <u>пограничным слоем</u> или слоем трения.

Понятие пограничного слоя позволило Прандтлю предложить метод описания многих гидродинамических задач при помощи следующей гипотезы: в пределах пограничного слоя, прилегающего к поверхности твердого тела, движение жидкости описывается при помощи упрощенного уравнения Навье-Стокса, учитывающего вязкость жидкости. Вне этого слоя жидкость рассматривается как идеальная и потери энергии в ней не учитываются. Уравнение Навье-Стокса для пограничного слоя в данном упрощении получили наименование уравнений Прандтля. В этом пособии будет дан его вывод с учетом взаимодействия текущей жидкости с электромагнитным полем.

Теоретическое и экспериментальное изучение явлений пограничного слоя, особенно вокруг так называемых плохообтекаемых тел (шар, цилиндр, пластина и т.д.) показало, что предположения Прандтля о малости градиента давления поперек течения в пограничном слое верны только лишь в пределах области устойчивости пограничного слоя. Начиная с определенной точки наблюдаются явления <u>отрыва</u> пограничного слоя, приводящие к образованию специфической <u>застойной зоны</u> за кормой обтекаемого тела и системы вихрей в следе за этим телом в виде

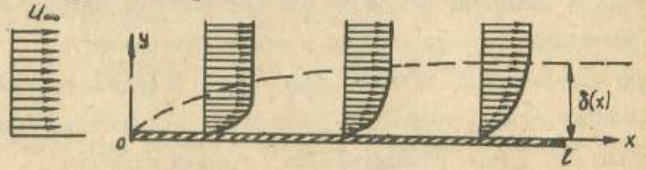
"дорожки Кармана". Особенно интересные трансформации этих я-
ний наблюдаются при наложении магнитного поля.

Наконец, явления, сходные с явлениями пограничного
протекают на границе между двумя текущими с разной скоростью
жидкостями, например, на границе так называемой затопленной
струи.

Понятие о пограничном слое распространяется также
случай турбулентных течений.

Приложение метода теории размерности к оценке толщины пограничного слоя

Пусть однородный поток вязкой жидкости обтекает пластину
длиной l, расположенную вдоль течения. Тогда эпюру скорост
течений вокруг пластины можно представить схематически так,
как изображено на рис. I7а.



Обозначим скорость течения жидкости на достаточном удалени
от пластины через U, а толщину пограничного слоя-через δ
причем будем считать ее функцией координаты x - расстояния
от начала пластины. В пограничном слое частицы натекающей
жидкости будут испытывать торможение, причем их ускорение
при стационарном течении будет определяться отношением U к
величине, имеющей размерность времени пробега вдоль пласти-
ны l/U. Таким образом, на единицу объема частицы жидкос-
ти в пограничном слое придется сила инерции $\rho U/(l/U) \sim \frac{\rho U^2}{l}$
Эта сила по порядку величины должна равняться силе

ния, приходящейся на единицу объема. Однако сила трения
ет определяться второй производной скоростей поперек плас-
и вязкостью: $\mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \sim \mu \frac{U}{\delta^2}$. Равенство полученных
чин, имеющих одинаковую размерность,

$[\mu] \cdot \frac{[U]}{[\delta^2]} = кг/м^2с^2$; $[\rho][U^2][l^{-1}] = кг/м^2с^2$

воляют оценить толщину пограничного слоя на конце пластины

$$\delta \sim \sqrt{\frac{l\eta}{\rho U}} . \qquad (95)$$

Если ввести понятие об относительной толщине пограничн-
о слоя, то из уравнения (95) следует, что

$$\delta^* = \delta/l \sim 1/\sqrt{Re} , \qquad (96)$$

относительная толщина вязкого пограничного слоя пропор-
циональна корню квадратному из числа Рейнольдса.

Произведем аналогичные оценки для течения проводящей
кости вокруг пластины, находящейся в поперечном магнитном
е, движущемся со всей массой жидкости. В этом случае жид-
сть будет увлекаться в пограничном слое силами электромаг-
тного взаимодействия, представляющими собой произведение
отности тока $j \sim \sigma U B$ и индукции поля B, т.е. $\sigma U B^2$,
репятствовать этому будет сила трения $\mu \frac{U}{\delta^2}$, имеющая
т же порядок. Из равенства

$$\sigma U B^2 \sim \mu \frac{U}{\delta^2} \qquad (97)$$

получаем для толщины пограничного слоя выражение

$$\delta \sim \frac{1}{B}\sqrt{\frac{\eta}{l\sigma}}$$

$$\delta^* = \frac{1}{M} . \qquad (98)$$

ким образом, порядок величины относительной толщины погранич-
го слоя в поперечном магнитном поле равен обратному числ У
ртмана, У которого характерный размер взят тот же, что и
в относительной толщины. Представляет интерес независимость

размерной величины пограничного слоя от линейного масштаба, т.е. , начиная с некоторого расстояния от переднего края, МГД-пограничнй слой остается постоянным (рис. I7б).

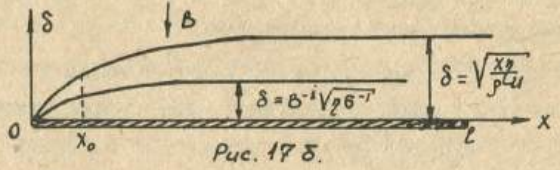


Рис. 17 б.

Из рис. I7б видно, что существует область $0 < x < x_0$ около реднего края пластины, в пределах которой МГД-пограничный совпадает с обычным вязким слоем.

Метод размерности позволяет нам оценить величину этой области x_0 , приравняв силы инерции $\frac{\rho U^2}{x_0}$ силам электромагнитного взаимодействия $\sigma U B^2$.

Разделив значения обеих сил друг на друга, получим для условия начального участка

$$\frac{\sigma B^2 x_0}{\rho U} = \frac{M^2}{Re} = St \approx 1, \qquad (9$$

т.е. начальный участок течения, в котором происходит установление магнитогидродинамического пограничного слоя оценивается равенством числа Стюарта единице. К этому же выводу можно придти, анализируя решения, приведенные в § I второй главы. Течения Пуазейля и Куэтта в обычной гидродинамике нельзя рассматривать используя понятие о пограничном слое, так как вязкие силы играют существенную роль во всем сечении потока, однако при наложении достаточно большого поперечного магнитного поля, такого, при котором $M \gg 1$, течение может быть разбито на три области – две пограничные, толщиной порядка b/M , и центральную, в которой можно считать течение близким к однородному (рис. I8).

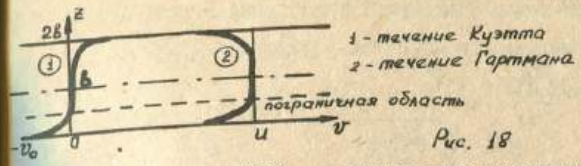


Рис. 18

роизведем в уравнении (52) преобразование координат так, тобы начало отсчета оказалось на нижней стенке канала, огда $z \to z - b$ и закон распределения скоростей запишется

$$v_x = v_0 \frac{sh M\frac{z-b}{b}}{sh M} + U\left(1 - \frac{ch M\frac{z-b}{b}}{ch M}\right). \qquad (100)$$

ри $M \gg 1$ данное выражение может быть упрощено

$$v_x = -v_0 e^{-M\frac{z}{b}} + U\left(1 - e^{-M\frac{z}{b}}\right).$$

ри $U = 0$ $v_x = -v_0 e^{-Mz/b}$ – течение Гартмана, а при $v_0 = 0$, $= U(1 - e^{-Mz/b})$ – течение Куэтта.

Назовем толщиной пограничного слоя $z = \delta$ координату, ри которой "дефект скорости" составляет $1/e$ часть от значения корости на бесконечности, тогда

$$1/e = \frac{U - U(1 - e^{-M\delta/b})}{U}$$

$$\delta = \frac{b}{M} \quad .$$

Метод размерности позволяет оценить величину пограничного слоя в том частном случае, когда магнитное поле направлено по асательной к пластине, а электромагнитные силы образуются счет взаимодействия последнего с электрическим током, правленным перпендикулярно к пластине и вызванным внешним лектрическим полем $\vec{E}$ (рис. I9).

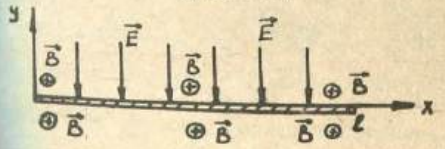


Рис. 19

Пластина обтекается проводящей жидкостью. В этом случае толщина пограничного слоя оценится равенством

$$\sigma EB \sim \rho \frac{U}{\delta^2}$$

и

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu U}{\sigma EB}} \qquad (101)$$

Если использовать ранее введенное безразмерное число

$$N = \frac{\rho l_0^2 \sigma^{1/2}}{\rho^{3/2}} E ,$$

пропорциональное напряженности электрического поля, то для относительной толщины пограничного слоя будет справедливо соотношение

$$\delta^* = \sqrt{\frac{Re}{MN}} ,$$

характерной особенностью которого является так же, как и в уравнениях (98) (102), независимость толщины МГД-пограничного слоя от размерного параметра длины, т.е. расстояния от начала пластины.

Уравнение Прандтля для магнитной гидродинамики

Пусть на достаточно тонкое цилиндрическое тело "набегает" однородный поток жидкости, течение которого мы будем рассматривать, применяя гипотезу Прандтля, т.е., как вязкое в достаточно тонком пограничном слое, примыкающем к поверхности тела, и как потенциальное течение идеальной жидкости вне данного слоя. Если пренебрегать кривизной поверхности обтекаемого тела и координату X откладывать по ней вдоль течения (рис. 20),

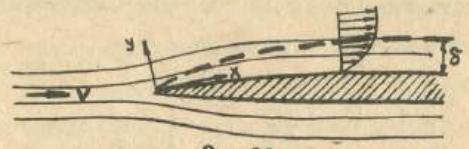


Рис. 20

а координату y – нормально к поверхности, то уравнение

...е-Стокса в безразмерной форме запишется для плоского ...ения в пограничном слое как

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{M_y^2}{Re}(1 - v_x) + \frac{M_x N_y}{Re^2} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) , \qquad (103)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{M_x M_y}{Re}(1 - v_x) - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right), \qquad (104)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 . \qquad (105)$$

...терии $M_x = B_x l \sqrt{\sigma \rho^{-1}}$, $M_y = B_y l \sqrt{\sigma \rho^{-1}}$, $N_y = \frac{\rho l^2 \sigma^{0.5}}{\rho^{3/2}} E_y$ запи... для компонентов поля вдоль оси OX и OY соответственно, ...безразмерной скоростью подразумевается ее отношение к ... скорости натекания однородного потока, под безразмер... временем – отношение Ut/l, а под безразмерным ...лением – величина $P/\rho U^2$.

Как уже говорилось, эти уравнения отличаются от урав... плоского течения в обычной гидродинамике тем, что в ...нение (103) введен безразмерный член $\frac{M_y^2}{Re}(1 - v_x)$, опи... сопротивление, вызванное взаимодействием индукцион... токов $\sigma B_y^2 (U - v_x)$, т.е. движением жидкости относитель... магнитного поля, связанного с набегающим потоком, ско... движения которого U. Отличие еще заключается в том, ...в (103) введен безразмерный член $M_x N_y / Re^2$, вызван... взаимодействием приложенного электрического поля и то... σE_y с продольным магнитным полем B_x, т.е. $\sigma E_y B_x$, ...наконец, предложенные уравнения отличаются еще тем, что ...уравнении (104) появляется член, описывающий взаимодействие ...укционных токов $\sigma B_y (U - v_x)$ и продольного поля B_x, ...торый в безразмерной форме записывается как $\frac{M_x M_y}{Re}(1 - v_x)$.

Следуя Прандтлю , распространим систему уравнений (I03–I05) на стационарное течение в тонком пограничном слое толщиной δ вблизи поверхности твердого обтекаемого тела. Произведем оценки порядка величины отдельных безразмерных членов этой системы уравнений. Будем считать, что на границе пограничного слоя, где он переходит в потенциальное течение, скорость равняется U , которую в дальнейшем будем считать характерной. Поэтому мы можем считать, что первый член уравнения неразрывности (I05) будет иметь порядок I, так как безразмерные $\partial v_x \sim 1$ и $\partial x \sim 1$. Координата ∂y не может быть больше относительной толщины пограничного слоя $\delta^* = \delta/\ell$, которая является величиной малой, поэтому ∂v_y по порядку величины совпадает с величиной δ . Это обстоятельство позволяет считать в уравнении (I04) все члены, содержащие скорость, бесконечно малыми порядка δ . Уравнение (I04) превращается в уравнение для определения градиента давления.

С другой стороны, все члены уравнения (I03), стоящие слева, могут быть оценены для случая стационарного обтекания по порядку величины следующим образом:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} \sim 0;\quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim 1;\quad v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim 1;\quad \frac{\partial p}{\partial x} \sim 1;\quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim 1;\quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta}$$

Если $M_x = 0;\ N_y = 0$, то равенство порядков величин левой и правой части уравнения (I03) приводит

$$1 \sim \frac{1}{Re}\,\frac{1}{\delta^2}$$

или

$$\delta \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}\ ,$$

т.е. к уже известной ширине пограничного слоя в гидродинамике.

При $N_y = 0$ и $M_x = 0$, т.е. в случае отсутствия прило-

го электрического поля, но при наличии магнитного поля перечного к пластине получаем

$$\frac{M_y^2}{Re} \sim \frac{1}{Re}\cdot\frac{1}{\delta^2}\ ,$$

ак как отличные от бесконечно малых величины правой части ажке должны иметь общий порядок величины. В этом случае для еличины относительного пограничного слоя получаем оценку

$$\delta \sim \frac{1}{M_y}\ ,$$

.е. толщина пограничного слоя обратно пропорциональна числу артмана, и, наконец, в случае достаточно больших электрических полей и малых чисел Стюарта $M_y^2/Re \ll 1$ необходимо запи-ать

$$\frac{M_x N_y}{Re^2} \sim \frac{1}{Re\,\delta^2}\ .$$

Отсюда $\delta \sim (Re\, M_x^{-1} N_y^{-1})^{0,5}$ толщина пограничного слоя при течении в скрещенных электрическом и магнитном полях.

Таким образом, система уравнений магнитной гидродинамики, аналогичная системе уравнений Прандтля для пограничного слоя, будет иметь вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{M_y^2}{Re} v_x + \frac{M_y N_y}{Re^2} \qquad (I06)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{M_x M_y}{Re} v_x \quad (107);\quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \qquad (I08)$$

граничными условиями $v_x(x,0) = v_y(x,0) = 0;\ v_x(x,\infty) = U_\infty(x),\ v_x(0,y) = U_0(y)$ причем $U_0(0) = U_\infty(0)$, то означает направленный вдоль оси OX поток жидкости с заранее заданной эпюрой вдали от пластины. Величину N , или в размерных обозначениях компоненту электрического поля вдоль оси OZ , можно определить либо из условия обращения в нуль электрического тока на бесконечности /при обтекании тела/, либо из условия замыкания внешней электрической цепи,

например, равенства суммарного тока заданному /при течении в канале/

Из уравнения (I07) следует, что продольная компонента магнитного поля, входящая в M_x, не влияет на распределение скоростей, а лишь определяет поперечный градиент давления. Следовательно, если магнитное поле не ортогонально к поверхности тела, то в достаточно сильных магнитных полях поперечный градиент давления может быть существенным. Здесь можно ожидать новые МГД-эффекты в виде сжатия пограничного слоя или образования подъемной силы.

Однако в дальнейшем изложении будем считать этот эффект малым и считать продольный градиент давления зависящим только от X и уравнения (I06) и (I08) решать независимо от (I07).

В магнитной гидродинамике явление пограничного слоя имеет значительно больше разнообразных вариантов, чем в обычной гидродинамике, так как используются новые параметры M_y, N_y

Течение вдоль пластины

При обтекании плоской полубесконечной пластины однородным потоком в однородном поле $U_\infty = const$; $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, причем величина электрического тока на бесконечности обращается в нуль, можно записать $N_y = M_y Re$. Уравнения (I06 + I08) приобретают более простой вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + St(1 - v_x) \qquad (I)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \qquad (I)$$

при граничных условиях $v_x(x,0) = v_y(x,0) = 0$; $v_x(x,\infty) = 1$

$v_x(0,y) = U_0(y)$, $U_0(\infty) = 1$.

...сь в качестве характерного размера принята величина ν/U_∞, ...качестве характерной скорости – U_∞. Как безразмер-...определяющий критерий здесь введено число Стюарта

$St = \frac{\sigma H_y^2 \nu}{\rho U_\infty^2} = \frac{M_y^2}{Re}$; ν – кинематическая вязкость.

...мы введем функцию тока Ψ как $v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$; $v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, ...уравнения (I09) и (II0) принимают вид

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + St\left(1 - \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = 0, \qquad (III)$$

...граничных условиях

$$\Psi(x,0) = \frac{\partial \Psi(x,0)}{\partial y} = 0, \qquad (II2)$$

$$\frac{\partial \Psi(x,\infty)}{\partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial \Psi(0,y)}{\partial y} = U_0(y).$$

...ить эту задачу при произвольном значении числа Стюарта $St(x)$ не удается [I]. Рассмотрим частные случаи.

Постоянное магнитное поле при $St \ll 1$. Из курса ...родинамики [2] известно автомодельное решение Блазиуса, ...рое получается для уравнений (III) и (II2) при $St = 0$, ...тем введения переменной $\zeta = y/\sqrt{x}$ в виде автомодельной ...кции $\Psi = f_0(\zeta)$ и решения уравнения

$$2f_0''' + f_0 f_0'' = 0$$

...граничными условиями

$$f_0(0) = f_0'(0) = 0; \quad f_0'(\infty) = 1.$$

...и наложенном слабом магнитном поле функцию тока Ψ мож... представить, согласно В.Россоу, в виде разложения в ряд ...томодельным функциям

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} [St_x]^n f_n\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right), \qquad (II3)$$

где первый член, не зависящий от поля, будет представлять собой функцию f_0 из решения Блазиуса, St_x – число Стварта, вычисленное по текущей длине пластины. Для последующих двух членов разложения уравнения (II3) после подстановки в (111) получаются дифференциальные уравнения

$$2f_1''' + f_0 f_1'' - 2f_0' f_1' + 3f_0'' f_1 = f_0' - 1 \quad ,$$

$$2f_2''' + f_0 f_2'' - 4f_0 f_2' + 5f_0'' f_2 = 2f_1'^2 + 2f_1' - 3f_1 f_1'' \quad , \qquad (11$$

с граничными условиями для всех $n \geq 1$: $f_n(0) = f_n'(0) = f_n'(\infty) = 0$

Уравнения (II4) решаются численным интегрированием. На рис. 2I

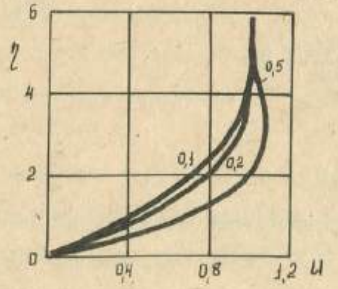


Рис. 21

показаны профили скорости, вычисленные по двум и трем членам ря (II3) для трех значений St_x = 0,I; 0,2; 0,5. На нем видно увеличен "наполненности" профиля скорости по мере возрастания магнитного поля. Для местного сопротивления пластины, которое может быть в числено как $c_x = 2\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}$ получается результат

$$c_x = \frac{1}{x^{0,5}}\left[0,664 + 2,293\, St_x - 2,768\,(St_x)^2\right],$$

а для полного коэффициента сопротивления в соответствии с определением $C_x = \int_0^x c_x\, dx$ получаем

$$C_x = \frac{1,328}{x^{0,5}}\left[1 + 1,151\, St_x - 0,834\,(St_x)^2\right].$$

Выражения для c_x и C_x достаточно точны лишь для значений $St_x \leq 0,2$.

§3. Отрыв пограничного слоя

На внешней границе пограничного слоя продольная скорость v_x переходит в скорость U внешнего обтекания. Если в уравнении (I07) считать $M_x = 0$, т.е. $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, то можно положить, что в пограничном слое в поперечном направлении вдоль оси OY давление не меняется, но $\frac{\partial p}{\partial x}$ будет изменяться. В обычной гидродинамике $M_y = 0$ и $\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} < 0$, тогда $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$, т.е. давление в пограничном слое возрастает вдоль течения. Возрастание сопровождается увеличением толщины пограничного слоя и уменьшением градиента скорости . На рис. 22 а

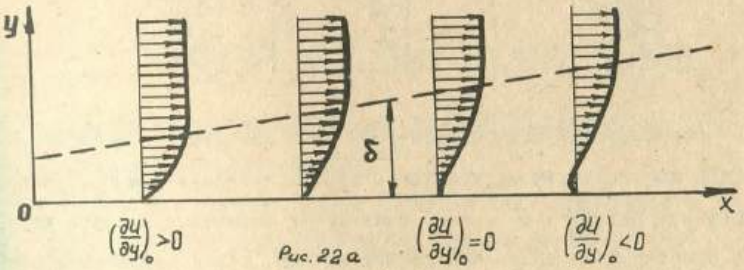


Рис. 22 а

показано изменение эпюры скорости v_x по мере роста толщины пограничного слоя δ . В точке X_0 при $y = 0$ на эпюре появляется точка перегиба, при которой $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ и устойчивость течения нарушается. При дальнейшем развитии пограничного слоя появляется область $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} < 0$, т.е. область обратного течения жидкости и образования вихрей. При этом нарушается ламинарный характер течения и его стационарность. Особенно отчетливо явление отрыва пограничного слоя наблюдается за кормой обтекаемых конечных тел. Действительно, в этих местах в связи с уменьшением U – скорости обтекания, должно наблюдаться увеличение давления согласно уравнению Бернулли

$$p + 0,5\rho U^2 = const .$$

Возрастание давления вдоль обтекаемого тела приводит к смещению

точки X_o на рис. 22 а влево, в сторону меньших X_o.

Магнитное поле может оказать стабилизирующее воздействие на граничный слой. Эпюры скоростей под действием магнитного поля при $M_x = 0$ меняются так, что, начиная с некоторого значения координаты X, течение в пограничном слое стабилизируется (рис. 22

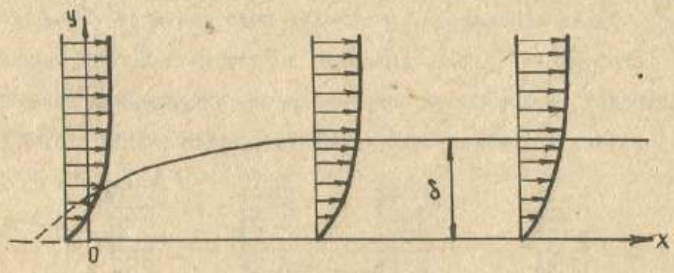


Рис. 22

Особенностью МГД-пограничного слоя является возможность, благодаря дополнительному уравнению (107), создать при $M_x M_y > 0$ условия, при которых $\frac{\partial p}{\partial y} > 0$, т.е. появляется возможность снять давление в пристеночном слое оно станет меньше, чем в окружающем пространстве. Тем самым эффект возрастания давления "за кормой" может быть скомпенсирован электромагнитными явлениями. На рис. 23

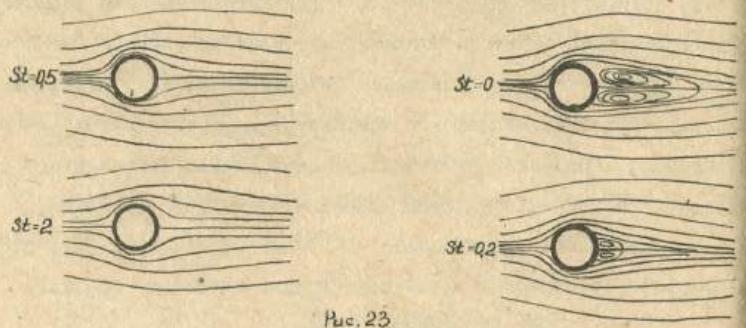


Рис. 23

изображено обтекание цилиндра в поперечном магнитном поле при

40 и различных числах Стюарта $St = \frac{M^2}{Re}$, изменяющихся от 0 до Картины линий тока получены путем численного решения уравнений нитной гидродинамики. Видно исчезновение явлений отрыва и вихобразования "за кормой" цилиндра уже при $St \approx 0{,}5$.

явление отрыва пограничного слоя является одной из причин, инирующих переход от ламинарного течения к турбулентному, которобудет посвящена следующая глава.

ГЛАВА IУ

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§1. Экспериментальные и теоретические факты, положившие начало учению о турбулентности

Впервые уравнения движения вязкой жидкости были даны Навье в 22 году [4]. Он ввел в уравнения Эйлера добавочные члены для ета напряжений, возникающих при деформации. Зависимость между формацией и возникающими напряжениями была исследована Коши, ассоном и Сан-Венаном. Г.Стокс [5], наконец, доказал, что для ределения других напряжений, кроме всестороннего давления, неависимо от направления, достаточно гипотезы о линейной зависимосэтих напряжений от скорости деформации, причем коэффициенты опорциональности зависят от свойств жидкости. Результаты теоретических вычислений хорошо совпали с опытными данными для тех слуев, когда и расчет и опыт проводились для труб незначительного аметра и малой скорости движения. С другой стороны, результаты ретического расчета решительно расходятся с данными опыта при ределении сопротивления, которое испытывают тела больших разров, движущиеся с большой скоростью в жидкости, или же сопротивния при движении жидкости в трубах большого диаметра с большой

скоростью.

Стокс предположил, что это расхождение объясняется присутст-
ем вихревых течений, которые изменяют характер потока. В 1883
ду О.Рейнольдс ставит опыт с окрашенными струйками в потоке [6]
в котором наблюдает переход от ламинарного течения к турбулент-
му. И, как следствие этого, выводит критерий [7] , который хар-
теризует поток, и вводит его критическое значение, соответству-
щее смене режимов течения. Следующим толчком к возникновению п-
блемы турбулентности явилось противоречие между теоретическим
казалось вполне строгим - выводом закона сопротивления в кругл
трубе на основе выражения для вязкости, данного еще Ньютоном,
эмпирическим законом сопротивления, установленным многочислен-
ми измерениями для обычных, не слишком малых, размеров и скорос-
Противоречие выходило далеко за пределы возможных ошибок измер-
ний: первый закон - Пуазейля - давал сопротивление, пропорцион-
ное первой степени скорости; второй закон - Шези - приводил к
квадрату скорости.

§2 Основные свойства и законы установившегося турбулентного движения в канале (круглой трубе)

I. Законы распределения скоростей для гладкой и шероховатой труб

Если жидкость втекает в трубу с круглым поперечным сечением
из большого резервуара, то на протяжении некоторого участка тр
бы, начиная от входа в нее, образуется входное течение, в кото
распределение скоростей по поперечному сечению изменяется по м
ре удаления от входа. Длина входного участка трубы в случае ла
минарного движения может быть оценена из соотношения

$$l_{вх} = 0{,}03\, d\, Re,$$

где Re - число Рейнольдса, d - диаметр трубы.
ля ламинарного движения $l_{вх}$ колеблется от 150 до 300 калибров,
случае турбулентного течения длина входного участка много мень-
е и равна, по данным Никурадзе [8], 25-40 диаметрам трубы. Таким
бразом, все, что будет излагаться ниже, относится к области тру-
, находящейся на расстоянии, большем 40 диаметров от входа в нее
Одним из первых понятий, с которым мы сталкиваемся в теории
урбулентности, является понятие о пути перемешивания масс жидкос-
, введенное Л.Прандтлем [9], который рассматривал движущуюся
идкость как совокупность слоев, между которыми при их движении
различными скоростями может происходить обмен некоторыми масса-
и жидкости, которые проходят путь l, пока не столкнутся и не пе-
емешаются с другой частью потока. В результате такого переноса
асс жидкости в слои с большей скоростью движения попадают все
ремя массы, проникающие из слоев, движущихся медленнее. Такой же
процесс наблюдается и в обратном направлении - перенос масс из
более медленных слоев в быстрые. Другими словами, взаимное дей-
ствие слоев друг на друга такое же, как если бы между ними суще-
ствовало взаимное трение.

Обозначим, следуя Прандтлю [9], через U скорость потока, а
через y - координату в направлении, перпендекулярном к скорости
потока, в котором эта скорость изменяется. Разность скоростей
двух слоев, отстоящих друг от друга на расстоянии l, может быть
представлена в первом приближении как $l\, dU/dy$. Для того чтобы
определить значение силы трения между слоями, надо знать отнесен-
ную к единице времени массу перемешивающейся жидкости. Отнеся ее
к единице площади, мы можем выразить ее произведением ρ - плот-
ности жидкости - на скорость v' перемешивания, т.е.

$$\tau = \rho v' l\, dU/dy. \qquad (115)$$

Но при исследовании турбулентного перемешивания масс можно принять v' за количество того же порядка, что и $l\,du/dy$. Тогда выражение (II5) для касательного напряжения можно записать как

$$\tau = \rho (l\, du/dy)^2. \qquad (II6)$$

Для области потока, ограниченного более или менее гладкими стенками, в которой отсутствует заметное влияние как вязкости жидкости, так и шероховатости стенок, Прандтль предположил, что l пропорциональна расстоянию y от стенки

$$l = \varkappa y, \qquad (II7)$$

где $\varkappa$ – числовой коэффициент, полученный из эксперимента, $\varkappa = 0,$

Возвращаясь к гипотезе Прандтля, из уравнения (II6) с учетом (II7) легко получить закон распределения скоростей

$$u = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\,(2{,}5 \ln y + C) \qquad (II8)$$

Величину $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ обозначают через v_* и называют скоростью касательного напряжения или динамической скоростью. Для течения в гладких трубах с учетом вязкости выражение (II8) принимает вид [9]:

$$u = v_* \left(5{,}75 \lg \frac{y v_*}{\nu} + 5{,}5\right) \qquad (II9)$$

Для шероховатых труб с полным проявлением шероховатости было получено выражение [8]:

$$u = v_* \left(5{,}75 \lg \frac{y}{\Delta} + 8{,}5\right), \qquad I20$$

где Δ – высота шероховатости.

На рис. 24 приведено распределение скоростей в гладких и шероховатых трубах при определенном значении числа Рейнольдса (графики построены по данным Никурадзе [8]).

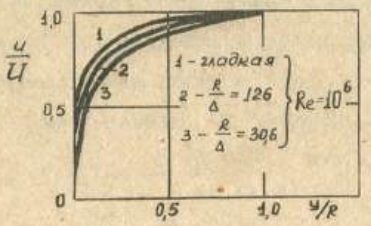


Рис. 24

При выводе приведенных выше формул довольствуются так называемой двухслойной схемой турбулентного течения: вязкий подслой и турбулентное ядро. Иногда вместо названия "вязкий подслой" употребляется также выражение "ламинарный подслой", поскольку предполагалось, что движение в пределах этого подслоя является ламинарным. Однако непосредственное ультрамикроскопическое наблюдение движения частиц, взвешенных в жидкости около стенки [I0], подкрепленные затем и данными тонких термоанемометрических измерений [II ÷ I3], показали, что, хотя профиль средней скорости внутри рассматриваемого подслоя и совпадает с профилем скорости безнапорного плоскопараллельного течения /линейный профиль скорости/, течение в нем все же не является ламинарным, а сопровождается заметными турбулентными пульсациями. Как показывает сравнение с экспериментом [I4], такой двухслойной схемой можно пользоваться при рассмотрении гидродинамических проблем. При изучении же, например, вопросов тепломассопередачи более правильным является еще рассмотрение переходного слоя между вязким подслоем и турбулентным ядром так, как сделано в работе [I5].

Толщину вязкого подслоя и переходного слоя можно оценить, пользуясь следующими соотношениями, сравнивающими вязкое и турбулентное трение между собой. При $\frac{y v_*}{\nu} < 5$ – чисто вязкое трение. Отсюда следует, что для гладкой стенки толщина вязкого подслоя равна $\delta_{лам} \approx 5\,\frac{\nu}{v_*}$.

При $5 < \frac{y v_*}{\nu} < 70$ – вязко-турбулентное трение. Из этого выражения получаем максимальную величину для толщины переходного слоя:

$$\delta_{перех} \approx 70\,\frac{\nu}{v_*}.$$

Пользуясь соотношениями (II9) и (I20), очень просто вычислить максимальную скорость потока. Действительно, достаточно поло-

жить $y=r_o$, где r_o – радиус трубы, и тогда выражения (II9) и (I20) примут вид:

$$U_{max} = v_* \left(5{,}75 \lg \frac{v_* r_o}{\nu} + 5{,}5\right), \qquad (II9$$

$$U_{max} = v_* \left(5{,}75 \lg \frac{r_o}{\Delta} + 8{,}5\right). \qquad (I20$$

Введем понятие "дефекта скоростей" как $\frac{U_{max} - U}{v_*}$.

Если использовать выражения (II9) и (II9^I), а также (I20) и (I20^I), то легко получить, что в обоих рассматриваемых случаях

$$\frac{U_{max} - U}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{r_o}{y}. \qquad (I21$$

На рис. 25

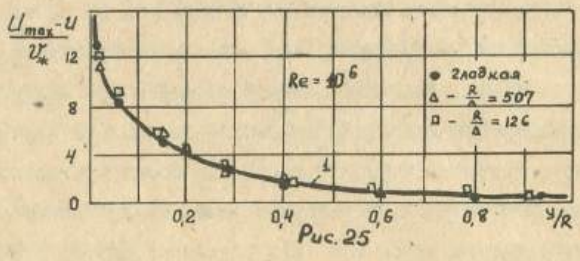


Рис. 25

дано сравнение закона (I21) /кривая I/ с измерениями в гладких и шероховатых трубах.

2. Законы сопротивления для гладких и шероховатых труб

Связь между перепадом давления и расходом можно записать в виде

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{\lambda}{d} \cdot \rho \frac{\bar{U}^2}{2}, \qquad (I2$$

где $d=2r$ – диаметр трубы, λ – коэффициент сопротивления. Выражение для касательного сопротивления τ можно получить из условия равенства сил давления и сопротивления, действу

их на цилиндрический слой жидкости с радиусом r.

$$-\pi r^2 \frac{dp}{dx} = \tau \cdot 2\pi r$$

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{2\tau}{r} = \frac{2\rho v_*^2}{r}. \qquad (I23)$$

равнивая (I22) и (I23), получаем

$$v_*^2 = \frac{\lambda}{8} \bar{U}^2. \qquad (I24)$$

Блазиус [I6] впервые критически рассмотрел накопившийся к тому времени экспериментальный материал и для коэффициента сопротивления для гладких труб получил эмпирическую формулу

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{(\bar{U} d \nu^{-1})^{0{,}25}} = \frac{0{,}3164}{Re^{0{,}25}}, \qquad (I25)$$

где $\frac{\bar{U} d}{\nu} = Re$ – число Рейнольдса, составленное для диаметра трубы и средней скорости течения. Напомним для сравнения, что при ламинарном течении

$$\lambda_1 = \frac{64}{Re}, \qquad (I26)$$

где Re также составлено для диаметра трубы и средней скорости течения. Используя формулы (II9), (II9^I) и I2I), получаем из выражения (I24) для гладких труб:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (Re \sqrt{\lambda}) - 0{,}8. \qquad (I27)$$

В этом выражении коэффициенты округлены в соответствии с многочисленными экспериментальными данными Стэнтона и Пэнделла, Омбека, Нуссельта, Якоба и Эрка, Шиллера и Германа, Никурадзе [I4]. Формула (I27) дает в неявном виде связь между λ и Re. Никурадзе [8] предложил пользоваться следующей явной зависимостью

$$\lambda = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{Re^{0{,}237}}. \qquad (I28)$$

На рис. 26 приведены экспериментальные данные, иллюстрирующие

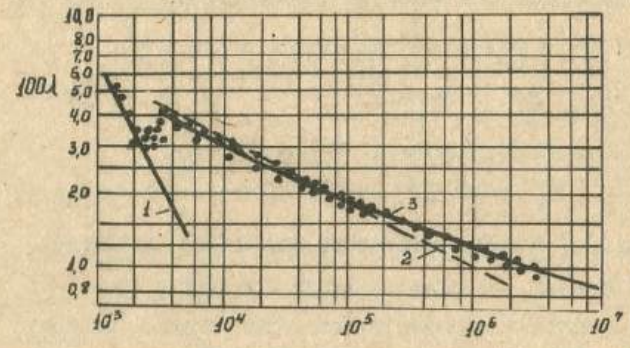


Рис. 26

закон сопротивления для течения в гладкой трубе. Кривая I – закон сопротивления при ламинарном течении, формула (I26), кривая 2 – при турбулентном течении, формула (I25) по-Блазиусу; кривая 3 – при турбулентном течении, формула (I27) по-Прандтлю. На рис. 27 приведен закон сопротивления для шероховатых труб.

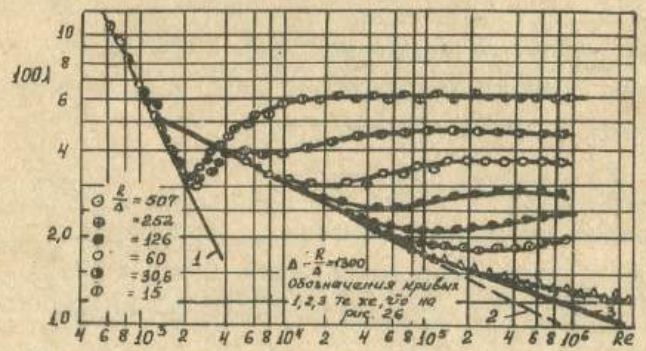


Рис. 27

Используя выражения (I20), (I20'), (I2I) и (I24), получаем, что в этом случае можно выразить как $\lambda = (2{,}0 \lg \frac{r}{\Delta} + 1{,}68)^{-2}$ или

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}0 \lg\left(\frac{r}{\Delta}\right) + 1{,}68 \qquad (I29$$

второе слагаемое, исходя из экспериментальных данных, лучше брать равным I,74. Тогда окончательно для режима с полным проявлением шероховатости имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}0 \lg\left(\frac{r}{\Delta}\right) + 1{,}74 \quad . \qquad (I30)$$

3. Уравнения движения в отсутствии магнитного поля

/излагается по работе [I7] /

В турбулентном движении, даже если полагать, что среда непрерывна /континуум, где проведено осреднение по всем молекулярным движениям/, все равно приходится иметь дело с турбулентными пульсациями, наложенными на среднее движение. Однако разделение на среднее движение и турбулентные пульсации вызывает принципиальные трудности, особенно в случае атмосферной турбулентности, потому что оно зависит главным образом от масштаба турбулентности. В каждом наблюдении мы можем измерить некоторые величины, если они достаточно велики. Мы не учитываем или игнорируем все другие величины, которые в применяемом масштабе малы. Как только масштаб турбулентности выбран, мы можем записать, например, для компоненты мгновенной скорости

$$U_i = \overline{U_i} + U_i' \quad , \qquad (I3I)$$

где U_i есть i – компонента мгновенной скорости жидкости; $\overline{U_i}$ есть i – компонента средней скорости и U_i' – компонента турбулентности пульсирующей скорости.

В теории турбулентного потока обычно допускается, что мгновенные компоненты скорости удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса. Подставляя выражения для мгновенных скоростей (I3I) в уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости и рассматривая средние значения этих уравнений в соответствии

с правилами осреднения Рейнольдса

$$R_1:\ \overline{f+g} = \bar{f}+\bar{g}$$
$$R_2:\ \overline{cf} = c\cdot\bar{f}\ (c=const)$$
$$R_3:\ \overline{fg} = \bar{f}\cdot\bar{g}$$
$$R_4:\ \overline{\lim f_n} = \lim \bar{f}_n$$

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f\,dt$$

/ f_n функциональная последовательность / и как следствие

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}\ ,$$

где $\overline{f'g'}$ – момент корреляции между случайными величинами f и g, получаем следующие уравнения для турбулентного потока несжимаемой жидкости /уравнения Рейнольдса/:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=0$$

$$\rho\left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right]=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\mu\nabla^2\bar{u}+\frac{\partial(-\rho\overline{u'^2})}{\partial x}+\frac{\partial(-\rho\overline{u'v'})}{\partial y}+\frac{\partial(-\rho\overline{u'w'})}{\partial z}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right]=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}+\mu\nabla^2\bar{v}+\frac{\partial(-\rho\overline{u'v'})}{\partial x}+\frac{\partial(-\rho\overline{v'^2})}{\partial y}+\frac{\partial(-\rho\overline{v'w'})}{\partial z}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\bar{w}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right]=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}+\mu\nabla^2\bar{w}+\frac{\partial(-\rho\overline{u'w'})}{\partial x}+\frac{\partial(-\rho\overline{v'w'})}{\partial y}+\frac{\partial(-\rho\overline{w'^2})}{\partial z}$$

где u, v, w являются соответственно x, y, z компонентами скорости, $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, черта обозначает среднее значение, а штрих – турбулентную пульсацию. Дополнительные члены в уравнениях Навье–Стокса соответствуют напряжениям Рейнольдса.

Для несжимаемой жидкости эти вихревые или турбулентные напряжения образуют тензор второго ранга

$$\begin{vmatrix} -\rho\overline{u'^2} & -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{u'w'} \\ -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{v'^2} & -\rho\overline{v'w'} \\ -\rho\overline{u'w'} & -\rho\overline{v'w'} & -\rho\overline{w'^2} \end{vmatrix}.$$

Они характеризуют скорость переноса количества движения через соответствующие поверхности в результате наличия в потоке турбулентных пульсаций скорости.

Уравнения Рейнольдса правильно описывают турбулентный ток. Однако имеется только четыре уравнения для 10 неизвест- – среднего давления, трех компонент средней скорости и шес- напряжений Рейнольдса. Это и составляет одну из основных удностей теоретического исследования турбулентного потока. авнения Рейнольдса подробно изучались для простейшего типа рбулентности – изотропной турбулентности [18]. Однако и в остейшем случае не представляется возможным решить задачу ностью, ибо число уравнений меньше числа неизвестных. Что сается распределения средней скорости и температуры пол- стью развитых турбулентных потоков, то здесь имеется ряд луэмпирических теорий, которые мы и рассмотрим в следующем раграфе.

§ 4. Полуэмпирические теории турбулентности

Уравнения Рейнольдса позволяют сделать вывод о наличии пределенных связей между различными статистическими характеристиками турбулентности, но они не могут быть решены в бычном смысле этого слова. Таким образом, при выборе решений авнений Рейнольдса, имеющих физический смысл, какие-то функ- ии, описывающие турбулентность, обязательно должны быть за- ны независимо от этих уравнений.

В некоторых случаях вид таких уравнений может быть йден / с точностью до небольшого числа эмпирически опреде- яемых констант/ исходя из соображений размерности; чаще, нако, использование соображений размерности все равно приво- т к соотношениям, содержащим неизвестные функции, которые ходится затем находить по данным экспериментам.

Теории турбулентности, использующие наряду со строгими уравнениями гидромеханики также некоторые дополнительные связи, найденные чисто эмпирически по данным экспериментов или же введенные с помощью качественных рассуждений наглядно-физического характера и затем проверенные на опыте, называются полуэмпирическими теориями. Они сыграли важную роль в развитии наших представлений о турбулентных течениях и некоторые из них до сих пор продолжают широко использоваться.

Ниже мы изложим основные представления полуэмпирических теорий, предложенных Буссинеском [I9], Прандтлем [9,20], Тэйлором [2I,22], Карманом [23].

I. Буссинеск [I9] ввел коэффициент турбулентного обмена такой, что

$$\tau = -\rho\overline{u'v'} = \rho\varepsilon\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = A_\tau\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \quad , \qquad (I3$$

где $A_\tau = \rho\varepsilon$ – коэффициент турбулентного обмена.

Относительно изменения ε также необходимо ввести какие-то предположения. Вообще говоря, оказалось довольно трудно строить предположения относительно ε в большинстве задач с потоком жидкости, таких, например, как поток в трубе, где ε зависит от формы поперечного сечения трубы [I7]. Однако для некоторых частных задач, например, задачи атмосферной турбулентности или перемешивания струй, для ε можно ввести простое выражение. В этих случаях теория Буссинеска находит успешное применение.

II. Полуэмпирическая теория Прандтля

На этой теории мы подробно остановились при выводе универсального закона скоростей в канале. Пользуясь знаме-

нитой формулой Прандтля (II5), мы полагали, что путь перемешивания является функцией пространственных координат. Например, в случае потока вдоль гладкой плоской пластины к хорошим результатам приводит предположение, что путь перемешивания пропорционален расстоянию по нормали от пластины. В свободном турбулентном потоке – в струях или волнах – путь перемешивания обычно предполагается пропорциональным ширине зоны перемешивания. Константу пропорциональности в этих случаях можно определить только по экспериментальным данным. Последнее и является причиной того, что эти теории называются полуэмпирическими или феноменологическими.

Из сопоставления формул (II5) и (I3I) следует, что коэффициент турбулентного обмена равен

$$A_\tau = \rho l^2\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \quad ,$$

а кажущаяся кинематическая вязкость равна

$$\varepsilon = l^2\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \quad .$$

Теория пути перемешивания была усовершенствована в ряде аспектов. Это было необходимо потому, что по формуле $\varepsilon = l^2\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|$ кажущаяся турбулентная вязкость должна быть равна нулю в точках, где $\frac{d\bar{u}}{dy} = 0$, т.е. в точках с максимумом и минимумом скорости. Между тем это, безусловно, неверно, так как в действительности турбулентный обмен в точке, например, с максимумом скорости, т.е. в середине канала, не исчезает. Для устранения такого недостатка Л.Прандтль предложил считать кажущуюся кинематическую вязкость вблизи точки с максимумом скорости, где $\frac{d\bar{u}}{dy}$ сильно изменяется, пропорциональной не $\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|$, а среднему статистическому от $\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|$, составленному для небольшой окрестности рассматриваемой точки, т.е.

пропорциональной величине $\sqrt{\overline{\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2}}$, где верхняя черта означает осреднение в пространстве. Эту осредненную по пространству величину можно представить также в виде

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^2 + l_1^2\left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^2} \quad ,$$

где l_1 означает новую величину, которая, подобно длине l, может быть определена также только путем эксперимента. Приняв такую гипотезу, мы получим для кажущейся кинематической вязкости формулу

$$\varepsilon = l^2\sqrt{\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^2 + l_1^2\left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^2} \quad ,$$

а для кажущегося касательного напряжения –

$$\tau = \rho l^2 \frac{d\bar{u}}{dy}\sqrt{\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^2 + l_1^2\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}\right)^2} \quad ,$$

Наличие корня в этой формуле делает ее очень неудобной для практических расчетов.

Ш. Теория переноса завихренности, предложенная Тэйлором

Тэйлор указал, что использованные Прандтлем допущения о постоянстве количества движения в процессе турбулентного перемешивания не подтверждаются никакими физическими факторами. Он предложил использовать теорему о сохранении завихренности или сохранении момента количества движения в качестве исходного пункта для построения более адекватной модели механизма турбулентного потока. На этой основе он построил теорию переноса завихренности.

Рассмотрим случай двумерного потока, в среднем параллельного и установившегося, состояние которого описывается уравнением

$$u = \bar{u}(y) + u'; \quad v = v'; \quad \omega = \omega' \quad .$$

Если пренебречь вязкостным членом, то уравнение Рейнольдса можно записать

$$\frac{dp}{dx} = -\rho\overline{v'\omega'} \quad ,$$

где ω' означает пульсацию завихренности. Среднее значение завихренности $\bar{\omega} = -\frac{d\bar{u}}{dy}$. Если предполагается, что переносимой величиной является завихренность, то получим

$$\frac{dp}{dx} = -\rho|v'|l\frac{d\omega'}{dy} = \rho|v'|l\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \quad .$$

Это уравнение дает тот же результат, что и формула Прандтля, только в том случае, когда длина перемешивания не зависит от y и $|v'| = l\frac{d\bar{u}}{dy}$.

Результаты применения теории переноса завихренности лучше совпадают с экспериментом.

IУ. Гипотеза подобия турбулентных пульсаций, предложенная Карманом

Карман пытался найти соотношение между турбулентными касательными напряжениями и распределением средней скорости, которое не зависит от какой-либо из специальных моделей. Он использовал следующие предположения:

а/ турбулентный механизм не зависит от вязкости, за исключением области непосредственно вблизи стенки;

б/ локальные модели потоков в окрестности каждой точки статистически подобны и отличаются только масштабами времени и длины. Это и есть гипотеза подобия.

Второе предположение означает, что существует постоянная корреляция между различными компонентами пульсаций скорости. Исходя из этих предположений, Карман нашел, что для параллельного в среднем потока 1) $|u'| \sim |v'| \sim l\frac{d\bar{u}}{dy}$,

2) $\tau = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2$; 3) $l = \varkappa \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \left(\left|\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right|\right)^{-1}$.

Из приведенных соотношений следует, что касательное напряжение в параллельном двумерном среднем потоке можно записать таким образом:

$$\tau = \varkappa^2 \rho \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^4 \cdot \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^{-2} .$$

Это известная формула касательных напряжений, полученная Карманом.

§ 5. Статистическая теория турбулентности

Полуэмпирические теории турбулентности оказались очень ценным оружием для решения ряда важных практических задач, однако, принимаемые в этих теориях гипотезы, часто не имеют надежного физического обоснования и мало что дает для понимания физического механизма турбулентности. Полуэмпирические теории строятся на основе аналогии между турбулентным и молекулярными хаосами. Например, интенсивность турбулентности – аналог средней скорости движения молекул [24]. В последнее время предпринимается ряд попыток связать между собой некоторые величины, характерные для полуэмпирических и статистических теорий. Так, в работе [25] предпринята попытка сопоставления "пути смешения" и интегрального масштаба турбулентности.

Скорость, давление и другие характеристики турбулентного потока распределены в пространстве и изменяются во времени неупорядоченно. Это послужило основанием для создания статистической теории турбулентности, позволившей раскрыть некоторые особенности внутренней структуры турбулентности.

Одним из основателей современной статистической теории турбулентности являются Фридман и Келлер. В 1924 году на Международном конгрессе по прикладной механике в Дельфте Фридман выступил с докладом "Дифференциальные уравнения для турбулентного движения сжимаемой жидкости" [26], в котором впервые были высказаны основные идеи статистического описания кинематической структуры турбулентного потока. В 1925 году была опубликована работа Келлера "Об установлении системы характеристик атмосферной турбулентности", в которой было подробно изложено фундаментальное положение теории Фридмана и Келлера, заключающееся в описании кинематической структуры турбулентности при помощи корреляции между компонентами скоростей в двух различных точках потока. Эти корреляции, названные Фридманом "моментами связи", и являются статистическими характеристиками кинематической структуры турбулентного потока.

Если взять две точки потока $M(x_1; x_2; x_3)$, $M'(x_1'; x_2'; x_3')$, действительные скорости которых обозначим соответственно через $V(v_1; v_2; v_3)$ и $V'(v_1'; v_2'; v_3')$, то момент связи $B_{ij} = \overline{v_i v_j'}$ будет представлять собой тензор, состоящий из девяти величин

$$B_{ij} = \begin{Vmatrix} \overline{v_1 v_1'} & \overline{v_1 v_2'} & \overline{v_1 v_3'} \\ \overline{v_2 v_1'} & \overline{v_2 v_2'} & \overline{v_2 v_3'} \\ \overline{v_3 v_1'} & \overline{v_3 v_2'} & \overline{v_3 v_3'} \end{Vmatrix}$$

и зависящий от переменных – координат точек M и M'.

Изучение этого тензора и всех его компонентов дало бы подлинное представление о кинематической структуре турбулентного потока. Но так как турбулентный поток очень сложен и изучение структуры его в общем виде представляет большие математические трудности, то идеи Фридмана–Келлера были применены к изучению простой схемы однородного, изотропного турбулентного потока.

Можно полагать, что в малых объемах жидкости, удаленных от ориентирующего влияния границ потока, турбулентность однородна и изотропна. А.Н. Колмогоров [27-31] предложил рассматривать внутреннюю структуру развитой турбулентности не на как однородную и изотропную в целом, а как локально-однородную и локально-изотропную. Так как рассматриваются относительные скорости жидких элементов внутри малых объемов жидкости, то вместо скоростей $\vec{V}$ в точке M и $\vec{V}'$ в точке M' Колмогоров рассматривает разность скоростей $\vec{V}'-\vec{V}$, которая описывает скорость в точке M' относительно скорости в точке M. Поэтому вместо моментов связи, введенных Фридманом и Келлером, в качестве характеристик локальной структуры турбулентности рассматриваются величины

$$D_{ij} = \overline{(v_i'-v_i)(v_j'-v_j)},$$

называемые структурными функциями.

В основе метода, дающего возможность изучить структурные функции, лежит общая концепция Колмогорова, согласно которой турбулентный поток / т.е. поток с большим числом Рейнольдса/ представляет собой совокупность наложенных друг на друга и на осредненное движение вихрей /возмущений/ различных масштабов.

Самые крупные вихри /вихри I-го порядка/ получаются вследствие неустойчивости осредненного движения. Масштабы L этих вихрей имеют порядок длины пути перемешивания и соизмеримы с линейными размерами потока. Движение их в свою очередь также неустойчиво и они распадаются на более мелкие вихри, вихри 2-го порядка, которые, в свою очередь порождают вихри 3-го порядка и т.д. Такой процесс последовательного измельчения турбулентных возмущений ограничен

мельчайшими вихрями, которые уже устойчивы из-за того, что их число Рейнольдса мало. Так как при больших числах Рейнольдса влияние молекулярной вязкости очень мало, а при малых – велико, то при изучении движений больших вихрей вязкостью можно пренебречь, при движении же малых вихрей учет молекулярной вязкости необходим.

Очевидно, максимальный масштаб вихрей определяется размерами рассматриваемого потока, а минимальный – вязкостью жидкости. Весь "спектр масштабов" вихрей заключен между этими пределами.

С энергетической точки зрения механизм турбулентности представляется в следующем виде: крупномасштабные турбулентные возмущения поддерживаются благодаря поглощению ими энергии осредненного движения. Эта энергия передается последовательно практически без рассеяния по каскаду измельчающихся вихрей вплоть до наиболее мелких. Движение в них будет ламинарным, и вся переданная им механическая энергия, благодаря вязкости, диссипируется в теплоту.

В историческом плане можно назвать двух предшественников А.Н.Колмогорова – Льюиса Ричардсона [32,33]и Дж.Тэйлора [34]. Соответствующая физическая картина развитой турбулентности хорошо передается английскими рифмованными строчками, принадлежащими Ричардсону

Big whorls have little whorls
Which feed on their velocity
Little whorls have smaller whorls.
And so on unte viscosity

/Крупные завихрения рождают мелкие завихрения, питающиеся за счет их скорости, мелкие завихрения рождают еще меньшие за-

вихрения, и так далее до начала действия вязкости/.

Ричардсон высказал эти общие соображения лишь в качественной форме и не сделал из них никаких выводов, формулируемых на точном языке математики.

Для установления общих закономерностей А.Н.Колмогоров, а в дальнейшем Обухов [35]и др. уже широко пользуются методом размерности. Для применения этого метода необходимо прежде всего определить, от каких основных величин зависит локальная структура потока. В силу принятой локальной изотропности турбулентного движения в состав этих величин не войдут ни средняя скорость, ни линейные размеры потока, ни характеристики крупномасштабной турбулентности. Останутся две величины, которые будут определять локальную структуру турбулентного потока: среднее значение диссипации энергии за единицу времени, приходящееся на единицу массы жидкости, характеризующее интенсивность потока энергии (ε) и кинематический коэффициент вязкости жидкости (ν) . Применяя метод размерности, можно найти выражение для так называемого внутреннего масштаба турбулентности ℓ , являющегося основной характеристикой локальной структуры турбулентности,

$$\ell = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{0,25} .$$

Обычно рассматривают два предельных случая:

- случай турбулентных движений, масштаб которых r существенно больше внутреннего масштаба ℓ ;
- случай турбулентных движений, масштаб которых r существенно меньше ℓ .

В первом случае вязкостью ν можно пренебречь, а во втором случае движение ламинарно и учет влияния вязкости ν необходим.

§ 6. Неустойчивость ламинарных магнитогидродинамических течений и переход к турбулентности

Самые простые соображения приводят к тому, что в магнитном поле должна повышаться устойчивость течения проводящих жидкостей. Действительно, любая флуктуация скорости некоторого элемента жидкости сопровождается появлением индуцированного электрического тока, на который, согласно принципа Ленца, действует сила, направленная против движения данного элемента относительно потока. Отсюда и следует, что магнитное поле препятствует развитию возмущений, повышает устойчивость течения, а уже существующую турбулентность подавляет. Это было математически доказано еще в 1954-1955 гг. методами линейной теории гидродинамической устойчивости для двух наиболее характерных случаев – течения в продольном поле /Стюарт[36]/ и течения в поперечном поле /Локк [37]/. Но, с другой стороны, магнитное поле может взаимодействовать и с осредненным стационарным течением. При этом влияние на устойчивость происходит через посредство изменения профиля осредненной скорости течения /так называемый эффект Гартмана/. Это влияние может оказаться намного существеннее, чем непосредственное воздействие на возмущения, причем изменение профиля осредненной скорости может приводить не только к повышению, но и к понижению устойчивости, как, например, при воздействии поперечного магнитного поля на течение Куэтта [3].

Термин "подавление" турбулентности отражает факт некоторого уменьшения при небольших числах Гартмана коэффициента сопротивления λ турбулентного потока, достижения им определенного критического значения и последующего его возраста-

ния уже в соответствии с ламинарным законом сопротивления. На основании рассмотрения поведения λ были введены различные "критические" параметры, определяющие смену режимов течения. Наиболее распространенным из них является параметр $(M/Re)_к$.

В настоящее время установлено, что при достижении значения $\left(\frac{M}{Re}\right)_к \geq 4 \cdot 10^{-3}$ коэффициент сопротивления подчиняется ламинарному закону. Это число принимают за некоторый верхний предел [38 ÷ 41].

Изучение локальных флуктуационных характеристик потока показало, что ламинаризованное состояние течения вообще нельзя отождествлять с действительно ламинарным движением. Оказалось, что даже при закритических по сопротивлению значениях критерия M/Re на всей длине экспериментального участка сохраняется очень высокий уровень пульсаций скорости [38]. В связи с этим возникает вопрос, какой структурой должен обладать турбулентный поток, чтобы противостоять воздействию магнитного поля? Ответ на этот вопрос был дан в работе Цинобера и Кита [42], в которой указывалось на то, что поле стремится подавлять главным образом компоненты вихрей, ось которых перпендикулярна полю, и не оказывать никакого влияния на возмущения, ось которых параллельна магнитным силовым линиям. Вероятно, в какой-то степени возможна также переориентация части вихрей в положение, при котором поле на них не оказывает воздействия, т.е. турбулентность в магнитном поле трансформируется в систему двумерных возмущений, на которое поле совершенно не действует и которые рассеиваются только вязкими силами. Подобная ситуация характеризуется так называемой двумерной турбулентностью в потоке [42].

Двумерная турбулентность привлекает в настоящее время внимание исследователей в связи с тем, что этот вид движения характерен для ряда астрофизических и геофизических объектов: атмосферы, фотосферы Солнца, океанических течений и т.д. Изучать эти потоки в натуре очень трудно, однако в настоящее время существует мнение, что в магнитной гидродинамике такая возможность появляется. Предполагается также, что двумерная турбулентность магнитогидродинамического потока позволит осуществить режим генерации магнитного поля, т.е. осуществить те условия, которые могут иметь место, например, в ядре Земли.

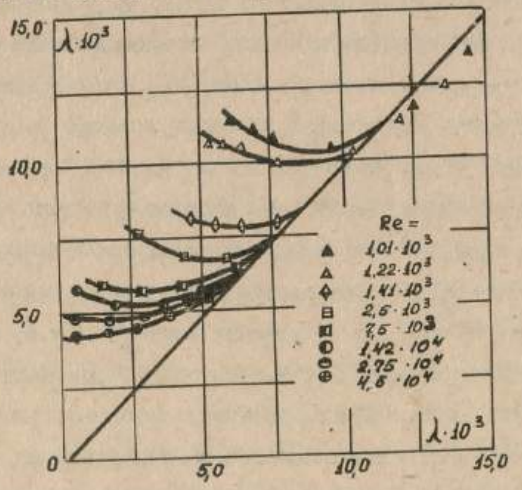
Все сказанное ранее позволяет, таким образом, сделать вывод о том, что наложение магнитного поля на турбулентный поток приводит к тому, что происходит сложное и многообразное преобразование всех магнитогидродинамических параметров течения. По всей вероятности, при увеличении числа M, т.е. наложении на поток очень сильного магнитного поля, должны быть обнаружены еще более сложные преобразования в потоке.

В заключение этого параграфа необходимо отметить, что при качественном описании влияния магнитного поля принято говорить о "подавлении" турбулентности. Однако это слово относительно правильно отражает действительность, если ход явлений протекает таким образом, что на турбулентное течение проводящей жидкости накладывается постепенно возрастающее магнитное поле. Если же есть стационарный поток в магнитном поле, то в данном случае правильнее говорить о том, что магнитное поле не дает возможности турбулентности развиваться.

§7. Коэффициент сопротивления и распределение осредненных скоростей при турбулентном течении в каналах в магнитном поле [38]

I. Плоский гладкий непроводящий канал в поперечном магнитном поле /течение Гартмана /

На рис. 28 приведены экспериментальные данные о коэффициенте



сопротивления при плоскопараллельном течении в гладкой трубе в поперечном магнитном поле в сопоставлении с теорией для ламинарного течения. Точки, группирующиеся вокруг биссектрисы координатного угла, можно считать соответствующими ламинарному режиму течения. Соответственно отклонение точек от этой прямой указывает на начало турбулентности. Из графика видно, что при сверхдостаточно больших значениях Re / и соответственно больших значениях M / ламинарный режим наступает при постоянном значении $\lambda = 0{,}008$. Значение $\left(\frac{M}{Re}\right)_к$ при этом оказывается равным $4 \cdot 10^{-3}$. Величина $\frac{Re_к}{M}$ при наложении поперечного магнитного поля изменяется

в зависимости от величины отношения $\beta = b/a$ / отношения сторон канала /. Из графика видно, что в случае движения в плоском канале ($\beta \gg 1$) переход наблюдается при соотношении $\frac{Re_к}{M} \approx 225$, а при $\beta \to 0$; $\frac{Re_к}{M} \cong 130$ (рис. 29).

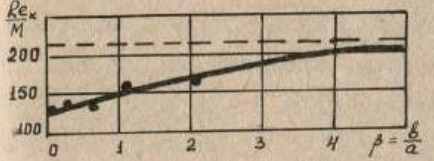


Рис. 29

Возвращаясь к рис. 28, следует заметить, что по мере увеличения индукции магнитного поля коэффициент сопротивления вначале убывает, а затем, достигнув минимума, растет и становится очень близким к значению, соответствующему ламинарному значению. Такое поведение характерно для широкого диапазона чисел Рейнольдса. При $Re > 3 \cdot 10^4$ наблюдается практически монотонный рост λ с увеличением величины индукции магнитного поля или, что то же самое, числа Гартмана M. Закон сопротивления при этом аппроксимируется простой зависимостью $\lambda = \lambda_0(1 + 1{,}95\,St)$, где St - число Стюарта (рис. 30).

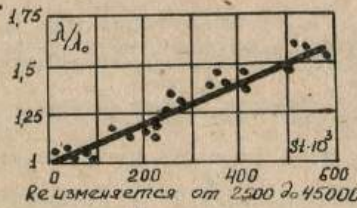


Рис. 30

Зависимость только от St объясняется качественно тем, что движение жидкого металла в большинстве практических случаев можно считать развито-турбулентным. А это означает, что в этих потоках электромагнитные силы должны конкурировать с силами инерции. Отношение же этих сил есть не что иное, как число Стюарта St.

Здесь уместно обратить внимание на то, что в работах, посвященных вопросу исследования устойчивости течения в магнитном поле, изучался переход от турбулентного режима движения к ламинарному, несмотря на то, что теория малых колебаний рассматривает потерю устойчивости ламинарного течения и переход его в турбулентное. В магнитной гидродинамике такая несогласованность обусловлена техническими трудностями получения ламинарного течения до входа в магнитное поле. Однако была предпринята попытка в работах А.В.Тананаева, В.П.Бочининского и Ю.П.Черняева выяснить влияние входных условий на переход в магнитном поле [39]. В результате оказалось, что отношение $\frac{Re_к}{M}$, которое используется для осреднения режима течения, зависит от условий входа в магнитное поле /ламинарное или турбулентное течение/ и от абсолютных значений чисел M и Re. В том случае, когда изучался переход от ламинарного течения к турбулентному, значение $Re_к/M$ оказывалось равным 330, а при переходе от турбулентного к ламинарному $\frac{Re_к}{M} = 250$.

2. Осесимметричное и плоское течение в продольном поле

Течения в продольном поле отличаются от течения в поперечном прежде всего тем, что здесь нет взаимодействия осредненного течения с магнитным полем и при ламинарном течении профиль скорости тот же, что при течении вне поля. Продольное поле непосредственно воздействует лишь на поперечные компоненты пульсации скорости, которые имеют значительно меньшую амплитуду, чем продольная компонента, на которую продольное поле может оказать лишь косвенное воздействие [3].

Эффект "подавления" турбулентности в описываемом случае проявляется в чистом виде и в ламинаризованном режиме коэффициент сопротивления должен подчиняться закону Пуазейля $\lambda = \frac{16}{Re}$. Характер зависимости $\lambda = f(M, Re)$ приведен на рис. 31.

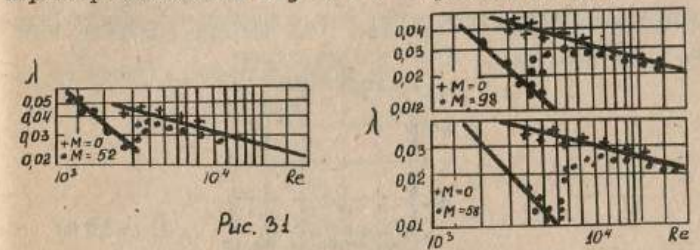


Рис. 31

Если при заданном M постепенно увеличивать Re, то до определенного критического значения Re коэффициент λ, действительно, следует закону Пуазейля. Нарушение ламинарного закона сопротивления при $Re_к$ имеет кризисный характер, после чего следует плавный переход функции λ в турбулентный закон Блазиуса.

Необходимым условием для выхода λ на закон Пуазейля является достаточная длина участка стабилизации в магнитном поле. С.А.Регирер показал, что его длина возрастает в магнитном поле с увеличением числа Гартмана [3].

Величина критического числа Рейнольдса, характеризующего переход от одного режима течения к другому, может быть оценена как [3]

$$Re_к = 30M .$$

Меньшее стабилизирующее влияние продольного поля по сравнению с действием поперечного поля хорошо прослеживается на рис. 32.



Рис. 32

3. Профили скорости

При течении проводящей жидкости в поперечном магнитном поле по каналу с непроводящими стенками и достаточно больших M эпюра скоростей уплощается, т.е. наблюдается эффект Гартмана [3,39]/рис. 33а/.

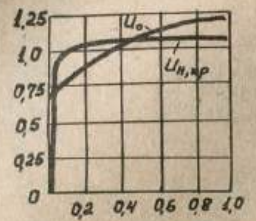


Рис. 33 а)

При малых числах Гартмана, когда эффект подавления турбулентности преобладает над эффектом Гартмана, эти эпюры должны вытягиваться и приближаться к параболическим /рис. 33б/.

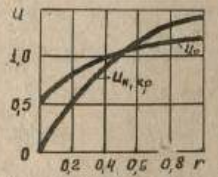


Рис. 33 б)

Измерения профиля скорости в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, выполненные Г.Г.Брановером, А.В.Танаевым, А.Б. Цинобером и др. показали, что всегда, когда имеет место градиент магнитного поля и электрический ток направлен вдоль течения жидкости [43] , появляется характерный М-образный вид профиля скорости /рис. 34/.

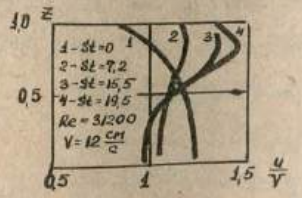
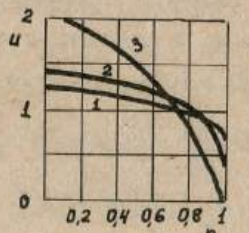


Рис. 34

В этом случае при достаточно большом числе M практически весь расход жидкости Q сосредоточен в слое толщиной $\sim M^{-0,5}$ около стенок, параллельных полю.

При течении жидкости в трубе в продольном магнитном поле профили скорости вытягиваются, но все же сильно отличаются от профиля Пуазейля /рис. 35/.



1 – $M = 0$
2 – $M = 154$
3 – профиль Пуазейля

Рис. 35

§8. Уравнение Рейнольдса в магнитном поле и полуэмпирические теории турбулентности

Следуя работе [3], для вывода основных уравнений турбулентного течения воспользуемся уравнением (I) в безразмерном виде

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\,\mathrm{grad}\,\vec{u}) = -\mathrm{grad}\,p + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{u} + St(-\mathrm{grad}\,\varphi + \vec{u}\times\vec{B}_0)\vec{B}_0 \quad (132)$$

$$\nabla^2\varphi = \vec{B}_0\,\mathrm{rot}\,\vec{u}$$

Перепишем уравнение (I32) в проекциях на оси координат, учитывая, что $\mathrm{grad}\,\varphi$ представляет собой вектор напряженности электрического поля, как

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + St(\varepsilon_{irs}e_r b_s + b_i b_s u_s - b_s b_s u_i),$$

где e_r – компонента вектора напряженности электрического поля, а ε_{irs} – единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Представим теперь проекции скорости и электрического поля, а также давления в виде суммы осредненных по времени величин и пульсационных добавок

$$u_i = U_i + u_i' \; ; \quad e_r = E_r + e_r' ; \quad p = P + p' \; . \qquad (I34)$$

Так как мы рассматриваем случай $Re_m \ll 1$, то можно пренебречь пульсацией индукции магнитного поля по сравнению с осредненным ее значением. Подставив (I34) в (I33), получаем

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} + u_\kappa \frac{\partial u_i}{\partial x_\kappa} + u_\kappa' \frac{\partial u_i}{\partial x_\kappa} + u_\kappa \frac{\partial u_i'}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial}{\partial x_\kappa} u_i' u_\kappa' = -\frac{\partial P}{\partial x_i} -$$

$$- \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\kappa \partial x_\kappa} + \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_\kappa \partial x_\kappa}\right) + St\left[\varepsilon_{irs}(E_r + e_r')b_s + (u_s + u_s')b_\kappa b_\kappa - (u_i + u_i')b_s b_s\right]. \qquad (I35)$$

Осредним все члены уравнения (I35) по времени. Тогда получим

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + u_\kappa \frac{\partial U_i}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \overline{u_i' u_\kappa'} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_\kappa \partial x_\kappa} + St\left[\varepsilon_{irs} E_r b_s + b_i b_s u_s - b_s b_s U_i\right]. \qquad (I36)$$

Уравнение (I36) представляет собой обобщенное уравнение Рейнольдса для изотермического течения несжимаемой жидкости при $Re_m \ll 1$.

Получим далее уравнение пульсационной энергии. Для этого вычтем из (I35) уравнение (I36):

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_\kappa' \frac{\partial u_i}{\partial x_\kappa} + u_\kappa \frac{\partial u_i'}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(u_i' u_\kappa' - \overline{u_i' u_\kappa'}\right) = \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_\kappa \partial x_\kappa} +$$

$$+ \varepsilon_{irs} St\, e_r' b_s + St\, u_s' b_i b_s - St\, u_i' b_s b_s \; . \qquad (I37)$$

Умножая уравнение (I37) для u_i' на u_j', а для u_j' на u_i' и затем складывая и осредняя их, получим уравнения баланса вторых моментов пульсаций скоростей

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i' u_j'} + \overline{u_\kappa' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_\kappa} + \overline{u_\kappa' u_i'} \frac{\partial u_j}{\partial x_\kappa} + U_\kappa \frac{\partial u_i' u_j'}{\partial x_\kappa} = -\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\overline{u_i' u_j' u_\kappa'} -$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{(p' u_j')} + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{(p' u_i')}\right] + \overline{p'\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\kappa \partial x_\kappa}\overline{u_i' u_j'} - 2\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_\kappa}\frac{\partial u_j'}{\partial x_\kappa}}\right) +$$

$$+ St\left(\varepsilon_{irs} b_s \overline{e_r' u_j'} + \varepsilon_{jrs} b_s \overline{e_r' u_i'} + b_i b_s \overline{u_s' u_j'} + b_j b_s \overline{u_s' u_i'} - 2 b_s b_s \overline{u_i' u_j'}\right) \qquad (I38)$$

При $i = j$ получается искомое уравнение баланса энергии пульсационного движения

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U_\kappa \frac{\partial q}{\partial x_\kappa} = -\overline{u_i' u_\kappa'} \frac{\partial U_i}{\partial x_\kappa} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\overline{(p' + q) u_\kappa'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 q}{\partial x_\kappa \partial x_\kappa} - \frac{1}{Re}\overline{\frac{\partial u_i' \partial u_i'}{\partial x_\kappa \partial x_\kappa}} +$$

$$+ St\left(\varepsilon_{irs} b_s \overline{e_r' u_i'} + b_i b_s \overline{u_s' u_i'} - 2 b_s b_s q\right), \qquad (I39)$$

где $q = \dfrac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$.

Члены в левой части этого уравнения выражают полное изменение пульсационной энергии в единицу времени. Физический смысл членов в правой части следующий: первый член описывает энергию, отбираемую пульсационным движением от осредненного, а последующие члены – турбулентную и вязкую диффузию пульсационной энергии и вязкую и джоулеву диссипацию этой энергии.

Для случая плоского течения с параллельными линиями тока в присутствии поперечного магнитного поля магнитогидродинамическое уравнение Рейнольдса (I36) будет иметь довольно простой вид:

$$\frac{1}{Re}\frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{d}{dy}(\overline{uv}) + \frac{\lambda}{2} + \frac{M^2}{Re}(1 - U) = 0 \; , \qquad (I40)$$

где U – безразмерная, отнесенная к средней по сечению, скорость; u, v – соответственно продольная и поперечная компоненты пульсации скорости. Это уравнение отличается от уравнения Навье–Стокса для такого же течения наличием члена $\frac{d}{dy}(\overline{uv})$, где среднюю величину произведения uv обычно называют турбулентным трением. Граничные условия для решения уравнения (I40) следующие: $U|_{y=0} = 0$; $\left.\dfrac{dU}{dy}\right|_{y=0} = 0$, где $\dfrac{\lambda}{2}$, как и прежде, обозначает – $\dfrac{dp}{dx}$. Для его определения из уравнения (I40) введем интегральное условие постоянства расхода $\int_0^1 U dy = 1$.

Для того чтобы решить уравнение (I40), необходимо принять какую-то гипотезу о виде члена, описывающего турбулентное трение – это задача так называемых полуэмпирических теорий, которые в настоящее время пока разработаны для следующих трех случаев [40]:

I. Для плоско-параллельного течения в поперечном поле;

2. Для плоско-параллельного течения в продольном поле,

3. Для осесимметричного течения в продольном поле.

В большой степени "повезло" плоскопараллельному течению в поперечном поле /см. уравнение (I40)/, так как, если для второго члена, выражающего градиент напряжения турбулентного трения, принять какое-либо из выражений, используемых в общей гидродинамике, то очевидно, что при малых M, как и при $M=0$, уравнение должно давать удовлетворительные результаты. В случае очень больших значений числа Гартмана в ядре потока член $M^2(1-U)$ на несколько порядков больше членов, учитывающих как вязкое, так и турбулентное трение, а при приближении к стенке, где вязкое трение существенно, турбулентное трение и при отсутствии поля резко убывает. Значит, остается область промежуточных значений M, в которой вид формулы для $\overline{uv}$ существенен.

Для случая течения в продольном магнитном поле такого анализа провести не удается, так как член $M^2(1-U)$ не входит в уравнение движения и гипотеза о поведении $\overline{uv}$ в магнитном поле приобретает решающее значение.

Существует несколько вариантов полуэмпирических теорий турбулентных течений в трубах в присутствии магнитного поля. Их можно подразделить на следующие три группы:

I. Теории, использующие уравнения Рейнольдса, записанные для случая магнитной гидродинамики, в которых турбулентные напряжения выражаются либо по формулам, заимствованным из общей гидродинамики, либо по модифицированным формулам, учитывающим влияние магнитного поля.

2. Теории, основанные на уравнениях вторых моментов пульсаций скорости, в которых часть членов выражается полуэмпирически.

3. Теории, основанные на анализе размерности, интегральных соотношениях и т.д.

В настоящем пособии мы не будем рассматривать все существующие полуэмпирические теории, а остановимся на рассмотрении универсальной полуэмпирической теории Г.Г. Брановера, которая по приведенной выше градации подходит ко всем трем группам. Изложение этой теории мы будем давать, основываясь на работе [44].

Центральной идеей рассматриваемой теории является утверждение о том, что влияние магнитного поля на турбулентность может быть в первом приближении учтено, если поставить в зависимость от поля величину пути смешения l, которая появляется в формуле Прандтля для турбулентного трения

$$\overline{uv} = -l^2 \left|\frac{du}{dy}\right| \frac{du}{dy} \quad . \qquad (I4I)$$

По Брановеру

$$l = \frac{l_0}{1 + \chi (St\, l_0)^{1.5}} \quad , \qquad (I42)$$

где χ – безразмерная константа, l_0 – путь смешения в отсутствии магнитного поля, St – число Стюарта.

Для l_0 могут быть выбраны формулы из полуэмпирических теорий для турбулентного течения в отсутствии магнитного поля.

Дополнительного разъяснения заслуживает появление члена $(St\,l_0)^{1.5}$. Путь смешения, согласно Прандтлю, представляет собой характерную длину в явлениях турбулентного переноса импульса и соответствует по порядку величины низкочастотной энергосодержащей части спектра масштабов турбулентных возмущений. Магнитное поле сильнее всего воздействует именно на низкочастотную часть спектра. Из анализа размерностей было получено, что так называемый "внешний" масштаб турбулентности l_e, т.е. такой самый крупный масштаб, существование которого еще допускается электромагнитными силами, может быть выражен как

$$l_e \leq \frac{L}{St^{1.5}} \quad , \qquad (143)$$

где L – размер основного течения. В соответствии с приведенными выше соображениями о месте пути смешения в спектре масштабов в случае течения в магнитном поле естественно предположить, что

$$l \approx l_e \quad . \qquad (144)$$

Необходимо отметить также, что формула (143) получена из соотношений, справедливых для однородной и изотропной турбулентности. Турбулентность же при течении в трубах неоднородна и анизотропна. Чтобы остаться в рамках представления об однородной и изотропной турбулентности, предполагается, что течение будет происходить в таком магнитном поле, в котором еще сохраняется свойство локальной изотропности. Далее, по Брановеру, разбиваем поток в трубе на слои, параллельные стенкам и имеющие толщину kl, где $k \leq 1$. Допуская, что в пределах каждого такого слоя турбулентность близка к однородной, формула (143) с учетом (144) может быть представлена как

$$l \sim (St\,l)^{-3/2} \quad .$$

Для дальнейшего упрощения в знаменателе правой части заменяется l на l_0. Это последнее упрощение и приводит в конечном

итоге к формуле (142).

Такой выбор формулы для пути смешения в магнитном поле позволяет решить в конкретных случаях уравнения движения, получать осредненный профиль скорости и коэффициент сопротивления. Возможно также решение системы уравнений баланса вторых моментов пульсаций, из которого уже можно получить интенсивность пульсаций по всем трем осям координат и вторые моменты пульсаций.

Однако необходимо отметить, что, кроме выбора формулы для пути смешения, при решении уравнений баланса вторых моментов пульсаций скорости делается еще ряд допущений, таких, как пренебрежение членами, выражающими вязкую и турбулентную диффузию, замена членов, выражающих диссипацию и обмен между компонентами по трем осям координат, полуэмпирическими формулами, предложенными в общей гидродинамике Ротта

$$\frac{2}{Re}\,\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} = \frac{C_1}{Re\,l^2}\,\overline{u_i' u_j'} + \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{c}{l}\,q^{3/2} \quad ,$$

$$p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right) = \kappa\frac{q^{1/2}}{l}\left(\overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3}\delta_{ij}q\right) \quad ,$$

где p' – пульсация давления; c, c_1, κ – численные постоянные, δ_{ij} – символ Кронекера.

Еще одно допущение, которое делается, относится к пульсации электрического поля e_r' / см. формулы (138), (139)/.

Ковнер и Левин [64] приняли, что

$$e_r' = -\rho\,\varepsilon_r\,e_m\,u_e'\,b_m, \qquad (145)$$

где $0 \leq \rho \leq 1$.

При этом электромагнитный член в правой части уравнения (139) запишется следующим образом:

$$St\,\alpha\left(b_i b_s\,\overline{u_i' u_s'} - 2 b_s b_s q\right) \quad ,$$

где $\alpha = 1 - \beta$.

В допущении (I45) предполагается, что возникает электрическое поле, являющееся вторичным результатом индукционных токов, пропорциональных вектору $\vec{U}\times\vec{\ell}$. Направление обоих полей, естественно, должно быть противоположным, а напряженность поля разделенных зарядов во всяком случае не больше напряженности индуцированного поля.

С учетом перечисленных выше допущений в ряде случаев удается решить уравнение (I40). Причем получаются результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом.

В настоящее время специалисты [45] считают, что для более надежного исследования вопроса о направлении потока энергии по спектру необходимы измерения уже третьих моментов пульсаций скорости.

Г Л А В А У

"ВМОРОЖЕННОСТЬ" МАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ I. Явление диффузии магнитного поля

Движение любой проводящей среды с некоторой скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле $\vec{B}$ приводит к изменению последнего во времени, которое, исходя из уравнений Максвелла, можно в безразмерной форме записать как

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{1}{Re_m}\Delta\vec{B}+rot[\vec{v}\vec{B}] \quad , \qquad (I46)$$

где $Re_m=\mu\mu_0\sigma v L_0$ – магнитное число Рейнольдса.

Первый член этого уравнения называют диффузионным, а второй – конвективным /или ротационным/ по аналогии с членами уравнения для вихря в несжимаемой жидкости с постоянной кинематической вязкостью.

Пусть скорость движения мала, т.е. такая, что $Re_m \ll 1$, тогда уравнение (I46) превращается в уравнение "диффузии" магнитного поля

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{1}{Re_m}\Delta\vec{B} \quad . \qquad (I47)$$

Рассмотрим в качестве примера диффузию магнитного поля в проводящее полупространство. Ограничимся плоским одномерным случаем. Система координат ориентируется таким образом, чтобы оси y, z лежали на поверхности, а ось X была направлена в проводник так, что $\vec{H}=(0;0;H_z)$. Для удобства описания в дальнейшем к размерной форме уравнения (I47)

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{1}{\sigma\mu_0}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad . \qquad (I48)$$

Решение этого диффузионного уравнения при граничных условиях

$$H_z(0,t)=\begin{cases}0 & \text{для } -\infty<t<0\\ H_0(t) & 0\le t<\infty\end{cases}$$

совместно с начальным условием

$$H_z(x,0) = 0 \qquad \text{для } 0 < x < \infty \qquad (I49)$$

имеет вид

$$H_z(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0,5x\sqrt{t(\sigma\mu_0)^{-1}}}^{\infty} H_0\left(t - \frac{\sigma\mu_0 x^2}{4\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2} d\lambda \,. \qquad (I50)$$

Конкретизируя изменение магнитного поля на границе полупространства, рассмотрим следующие три случая:

I. Пусть граничные условия заданы в виде ступенчатой функции

$$H_z(0,t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0 \\ H_0(\text{const}) & \text{для } t \geq 0 \end{cases} , \qquad (I51)$$

а начальное условие в виде (I49), тогда с помощью функции ошибок решение (I50) можно записать как

$$H_z(x,t) = H_0(1 - \operatorname{erf} U) \,, \qquad (I52)$$

где $U = 0{,}5x\sqrt{t(\sigma\mu_0)^{-1}}$.

Использование этого решения для реальных физических задач требует некоторой осторожности [46], так как граничное условие в виде идеализированной ступенчатой функции приводит к бесконечно высокой температуре на поверхности проводника.

2. Решение уравнения (I48) при непрерывном граничном условии

$$H_z(0,t) = H_0 e^{t/\tau}; \quad -\infty < t < \infty \qquad (I53)$$

следует искать в виде $f(x)e^{t/\tau}$, причем функция $f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f\sigma\mu_0}{\tau} \,. \qquad (I54)$$

Тогда общее решение будет иметь вид

$$H_z(x,t) = H_0 e^{t/\tau}\left(A_1 e^{-x/x_0} + A_2 e^{x/x_0}\right) , \qquad (I55)$$

где $x_0 = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma\mu_0}}$.

Единственно физически приемлемым решением в нашем случае является

$$H_z(x,t) = H_0 \exp\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{x_0}\right) \,. \qquad (I56)$$

Решение такого вида полезно для оценки диффузии поля в задачах, связанных с рассмотрением устройств и экспериментов, использующих принцип сжатия магнитного потока.

3. Случай, который часто встречается на практике, представлен граничным условием

$$H_z(0,t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0 \\ H_0 \sin \omega t & \text{для } t \geq 0 \end{cases} , \qquad (I57)$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Для установившихся колебаний решение уравнения (148) будет иметь вид

$$H_z(x,t) = H_0 e^{-x/\delta} \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \,, \qquad (I58)$$

где – "классическая" толщина скин-слоя

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \,. \qquad (I59)$$

С возрастанием величины функция, описывающая магнитное поле внутри проводника в заданный момент времени, быстро уменьшается до очень малых значений.

На практике полагают, что проникновение поля в проводник ограничивается характеристической глубиной δ . Определение δ обычно связывают с уменьшением амплитуды определенной физической величины в e раз, как это делается для обычной толщины токового скин-слоя, который и назван в нашем случае "классическим" / см. формулу (I59) /. При рассмотрении процессов диффузии магнитного поля вводят понятие "толщины скин-слоя магнитного потока". Следуя работе [46], обозначим ее через δ_φ .

Причем $$\delta_\varphi = \frac{1}{H_z(0,t)} \int_0^\infty H_z(x,t)\,dx .$$

В табл. 3 приведены значения δ_φ для случаев, описанных в данном параграфе.

Таблица 3

Поле на границе	Временной интервал	Толщина скин-слоя магнитного потока
H_0 (const)	$(0, t)$	$1{,}128\sqrt{t(6\mu_0)^{-1}}$
$H_0 e^{t/\tau}$	—	$\sqrt{\tau(6\mu_0)^{-1}}$
$H_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$	$(0, \frac{T}{4})$	$0{,}88\sqrt{T(4\mu_0 6)^{-1}}$
	$(0, \frac{T}{2})$	$0{,}57\sqrt{T(2\mu_0 6)^{-1}}$
	$(0, T)$	$0{,}203\sqrt{T(6\mu_0)^{-1}}$

Время "диффузии" τ можно оценить из соотношения, полученного независимо Каулингом [47] и Гуревичем и Лебединским [48]:

$$\tau = 6\mu\mu_0 L_0^2 , \qquad (160)$$

где L_0 – длина порядка размеров области, занимаемой полем.

Так, время затухания магнитного поля в медном теле с линейными размерами $\sim$ I м составляет примерно 70 с., если же рассматривать диффузию магнитного поля в ферромагнитных средах, когда магнитная проницаемость среды не равна единице, то это же время затухания может достигать уже часов. Для космических объектов τ очень велико. Если принять, что ядро Земли состоит из расплавленного железа, то время затухания земного поля по одним оценкам составит I5000 лет [49], а по другим – 10^5 лет [50]. Время затухания магнитного поля в солнечных пятнах – не менее 300 лет, а магнитного поля Солнца – 10^{10} лет [49].

Воспользовавшись выражением (I60), магнитное число Рейнольдса можно записать как

$$Re_m = \frac{\tau}{t_0} , \qquad (161)$$

где t_0 – характерное время, под которым можно подразумевать время наблюдения процесса.

Такое определение Re_m, наряду со многими другими, интерпретирующими его или через квадрат отношения характерного размера тела к глубине диффузии магнитного поля [5I], или как отношение индуцированного магнитного поля к приложенному [52], не противоречит определению Re_m, вытекающему из уравнения (I46), а именно – через отношение диффузионного члена к конвективному. Следует, правда, заметить, что интерпретация Re_m через отношение индуцированного магнитного поля к приложенному не является справедливой для случая $Re_m \gg 1$, так как отпадает необходимость введения понятия "приложенного" поля в силу того, что оно будет переноситься в совершенно "неузнаваемом" виде [52], тогда как интерпретация магнитного числа Рейнольдса в виде уравнения (I6I) или в виде, предлагаемом в работе [5I], будет пригодна для этого случая. Поясним это на примере: медная болванка пролетает с достаточно большой скоростью $\vec{v}$ через магнитное поле $\vec{B}_0$. Естественно, что при этом в ней возникают индукционные токи, создающие магнитное поле $\vec{B}_i$, противодействующее $\vec{B}_0$. Причем очевидно, что $\vec{B}_i = \vec{B}_0$, так как $\vec{v}$ достаточно велика. Исходя из этого, мы должны были бы считать, что Re_m для этого случая равно I, тогда как это процесс с $Re_m \gg 1$.

§ 2. Теория Валена

Возвращаясь к уравнению (I46), рассмотрим второй возможный предельный случай. Пусть нас интересует изменение поля за время, значительно меньше времени затухания τ, тогда из уравнения (I6I) следует, что $Re_m \gg 1$. В этом случае первым слагаемым уравнения (I46) можно пренебречь, и изменение магнитного

поля записать как

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot[\vec{v}\times\vec{B}] \quad . \qquad (I62)$$

Это уравнение является условием постоянства магнитного потока, пронизывающего контур, каждая точка которого движется с локальной скоростью $\vec{v}$. Действительно, при движении элемент контура $d\vec{l}$ "заметает" площадку $d\vec{s} = d\vec{l}\times\vec{v}\,dt$. Изменение магнитного потока $d\Phi$ через нее за время dt будет складываться из изменения магнитного потока во времени $d\Phi'$

$$d\Phi' = dt \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} \qquad (I63)$$

и изменения магнитного потока $d\Phi''$, вызванного перемещением контура в область с другой плотностью потока $\vec{B}$

$$d\Phi'' = dt \oint (d\vec{l}\times\vec{v})\vec{B} \quad . \qquad (I64)$$

Таким образом, можно записать, что

$$d\Phi = d\Phi' + d\Phi'' = dt \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} + dt \oint (d\vec{l}\times\vec{v})\vec{B}$$

или

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} + \oint (\vec{B}\times\vec{v})d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} - \oint (\vec{v}\times\vec{B})d\vec{l}. \qquad (I65)$$

Используя теорему Стокса, последнее выражение можно переписать как

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} - \int_S rot[\vec{v}\times\vec{B}]d\vec{s} = \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - rot[\vec{v}\times\vec{B}]\right)d\vec{s}. \qquad (I66)$$

Но поскольку речь идет о процессах с $Re_m \gg 1$, то, учитывая уравнение (I62), из выражения (I66) получаем

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad , \qquad (I67)$$

т.е. магнитный поток через любой проводящий контур с большими размерами, при которых диффузия магнитного поля мала, не изменяется в течение практически бесконечного интервала времени / "вмороженность" магнитного поля в среду /.

Физически условие "вмороженности" означает, что при движении среды поперек магнитного поля в ней индуцируются токи, поле которых, складываясь с первоначальным, так изменяет его, что силовые линии смещаются вслед за средой.

Поясним это явление примером из геофизики, предложенным Эльзассером [53]. Представим, что внутри хорошо проводящего сферического слоя вращается сфера. Между обеими частями обеспечивается хороший контакт. Эта модель в некоторой степени отражает условие в ядре Земли, поскольку там имеет место неоднородное вращение. В результате вращения внутренней сферы, в силу "вмороженности" магнитного поля, магнитные силовые линии будут увлекаться и закручиваться, что приведет к преобразованию полоидального поля в тороидальное /рис. 36/.

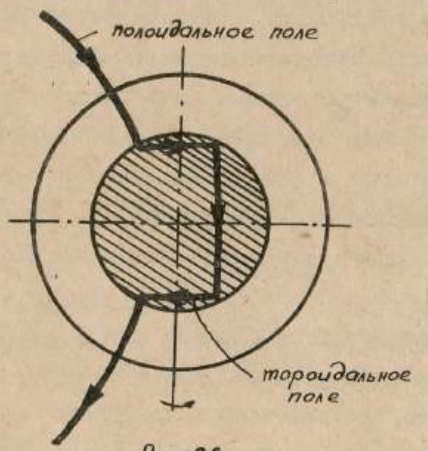


Рис. 36

Явление "вмороженности" магнитного поля проявляется и в случае покоящейся среды, относительно которой изменяется во времени магнитное поле с достаточно большой частотой. Так, взаимодействие высокочастотного магнитного поля с металлом приводит к возникновению в последнем вихревых токов, поле которых и вытесняет внешнее поле из занимаемого металлом пространства. Благодаря силовому взаимодействию вихревых токов и поля можно осуществить явление левитации, или взвешивания жидкого и твердого металла в земных условиях.

Явление "вмороженности" магнитных силовых линий не является, как мы видели, специфически магнитогидродинамическим. Оно связано с глубиной диффузии магнитного поля, которая может быть малой не только в описанных выше условиях, но и в статических условиях при взаимодействии твердых тел.

В масштабах земной лаборатории такое явление наблюдалось в опыте В.К.Аркадьева и П.Л.Капицы, в котором магнит "парит" над вогнутой чашкой сверхпроводящего вещества при температуре жидкого гелия[51]. При приближении магнита к поверхности сверхпроводника изменение магнитного потока вызывает возникновение незатухающих индукционных токов в сверхпроводнике, взаимодействие которых с магнитным полем постоянного магнита приводит к возникновению силы отталкивания между поверхностью сверхпроводника и магнитом.

Состояние "вмороженности" магнитного поля в жидкий идеальный проводник приводит к тому, что всякое движение, растягивающее силовые линии, которые мыслятся движущимися вместе с жидкостью, усиливает поле. Это утверждение обычно называют теоремой Валена, которая в формулировке [52] может быть записана в следующем виде:

" В идеальном проводнике все жидкие частицы, первоначально находившиеся на магнитной силовой линии, продолжают оставаться на ней".

Докажем ее. С этой целью вернемся к уравнению (I62) и, пользуясь представлениями векторного анализа, запишем

$$rot(\vec{v}\times\vec{B}) = (\vec{B}\nabla)\vec{v} - (\vec{v}\nabla)\vec{B} - \vec{B}\,div\,\vec{B} \quad . \qquad (I68)$$

С другой стороны, из уравнения неразрывности

$$div(\rho\vec{v}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (I69)$$

имеем

$$div(\rho\vec{v}) = \rho\,div\,\vec{v} + \vec{v}\,grad\rho = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad , \qquad (I70)$$

отсюда

$$div\,\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\vec{v}\,grad\rho}{\rho} \quad , \qquad (I71)$$

Подставляя это выражение в уравнение (I69), получаем

$$rot(\vec{v}\times\vec{B}) = (\vec{B}\nabla)\vec{v} - (\vec{v}\nabla)\vec{B} - \vec{B}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\vec{v}}{\rho}\nabla\rho\right) = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \qquad (I72)$$

Разделим обе части этого уравнения на ρ и, перенося все члены уравнения, кроме первого, в правую часть, получаем

$$\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\nabla\right)\vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \frac{\vec{B}}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}(\vec{v}\nabla)\vec{B} - \frac{\vec{B}}{\rho^2}\vec{v}\nabla\rho$$

или

$$\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\nabla\right)\vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{B}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}(\vec{v}\nabla)\vec{B} + \vec{B}(\vec{v}\nabla)\frac{1}{\rho}. \qquad (I73)$$

Первые два члена этого выражения справа являются частной производной по времени от $\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\right)$, тогда как два последних члена представляют собой результат приложения дифференциального оператора $(\vec{v}\nabla)$ к величине $\vec{B}/\rho$, поэтому уравнение (I73) можно переписать как

$$\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\nabla\right)\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\right) \quad . \qquad (I74)$$

Рассмотрим теперь достаточно малый элемент l линии движущихся частиц жидкости, представляющий собой расстояние

между двумя частицами жидкости. Растяжение этого элемента, можно представить себе как движение его концов с различными скоростями, т.е.

$$(\vec{l}\nabla)\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt} \qquad (I75)$$

Если сравнить это уравнение с уравнением (I74), то видно, что они аналогичны. Мы рассматриваем состояние "вмороженности" магнитного поля, которое характеризуется тем, что частицы вещества как бы жестко "скреплены" с магнитной силовой линией. Это представление дает возможность заключить, что

$$l \sim \frac{B}{\rho} \qquad . \qquad (I76)$$

Таким образом, магнитная гидродинамика позволяет как бы ввести меру длины магнитной силовой линии. Если предположить, что $\rho = const$, то движение, растягивающее силовые линии, усиливает поле. Реализация этого факта в физическом эксперименте и технике будет рассмотрена в последнем параграфе настоящей главы.

§ 3. Волны Альфвена

Рассмотрим проводящую идеальную жидкость, помещенную в однородное магнитное поле $\vec{H_0}=\{H_0; 0; 0\}$, на которое накладывается малое поперечное возмущение $\vec{h} = \{0; h(x,t); 0\}$. Суммарное поле, действующее на среду, будет представлять собой суперпозицию $\vec{H_0}$ и $\vec{h}$, т.е. $\vec{H} = \vec{H_0} + \vec{h}$.

Если теперь принять, что магнитное поле "вморожено" в среду, то можно записать, что

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = rot[\vec{v} \times \vec{H}] \qquad , \qquad (I77)$$

или с учетом $\vec{H} = \vec{H_0} + \vec{h}$ получаем скалярное уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v}{\partial x} \qquad . \qquad (I78)$$

При этом учитываем, что $\vec{v} = \{0; v(x,t); 0\}$ и пренебрегаем членами второго порядка малости. Из уравнения Навье–Стокса, записанного для идеальной жидкости, с учетом отсутствия сжатия, т.е. $\nabla p = 0$ и малости $\vec{v}$, что приводит к возможности пренебречь членом $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$, получаем

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{j} \times \vec{B}, \qquad (I79)$$

но $\vec{B} = \mu_0(\vec{H_0} + \vec{h})$, $rot\vec{H} = \vec{j}$, причем $rot\vec{H} = rot(\vec{H_0} + \vec{h}) = rot\vec{h}$, поэтому (I79) можно переписать как

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = (rot\vec{h}) \times \vec{B}$$

или, раскрывая, получаем

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu_0 H_0 \frac{\partial h}{\partial x} \qquad . \qquad (I80)$$

Дифференцируя уравнение (I78) по t, а (I80) по x, а потом наоборот, получаем волновые уравнения для v и h:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (a) \qquad , \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (б), \qquad (I81)$$

где $a = H_0\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}$ – скорость распространения магнитогидродинамических волн.

Решения уравнений (I81) для волны, распространяющейся в положительном направлении вдоль оси X, имеют вид:

$$h = h_0 e^{j\omega(t-\frac{x}{a})}, \quad v = v_0 e^{j\omega(t-\frac{x}{a})},$$

причем из (I78) или (I80) получается соотношение

$$h = -\, v \cdot \sqrt{\rho \cdot \mu_0^{-1}} \qquad .$$

Для волны, распространяющейся в противоположном направлении, правая часть равенства (I80) имеет противоположный знак. Таким образом, магнитогидродинамические волны являются попереч-

ными волнами. Возмущения, передающиеся при помощи магнитогидродинамического механизма, имеют поперечное к полю направление и представляют собой возмущения поля и скорости, лежащие в одной плоскости. Этот факт имеет простое наглядное истолкование [54]. В связи с тем, что мы рассматриваем состояние "вмороженности" магнитного поля, поперечное смещение частиц жидкости приводит к их искревлению и тем самым к растяжению и, в некоторых, местах, сгущению. Но характер действующих в магнитном поле сил, выражаемых максвелловским тензором напряжений, который описан в первой главе настоящего пособия, таков, как если бы магнитные силовые линии стремились сокращаться и в то же время отталкиваться друг от друга. Поэтому при их искривлении возникают "квазиупругие" силы, стремящиеся вновь выпрямить их, что и приводит к возникновению колебаний.

Затухание магнитогидродинамических волн определяется главным образом наличием электрического сопротивления среды. При этом уравнение (I78) должно быть заменено уравнением, следующим из уравнения

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta\vec{B} + rot[\vec{v}\times\vec{B}] \quad ,$$

т.е. вместо уравнения (I78) должно быть теперь записано уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = H_0\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\sigma\mu_0}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad (I82)$$

И соответственно уравнение (I8I а) примет вид

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{\sigma\mu_0}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2\partial t} \quad . \qquad (I83)$$

В случае периодического возмущения решение уравнения (I83) можно представить в виде [5I]:

$$h = h_0\, e^{-\kappa_2 x}\cos(\omega t - \kappa_1 z), \qquad (I84)$$

где

$$\kappa_1 = \frac{\omega}{a}\sqrt{(1+\sqrt{1+\gamma^2})\,[2(1+\gamma^2)]^{-1}} \quad ,$$

$$\kappa_2 = \frac{\omega}{a}\sqrt{[\sqrt{1+\gamma^2}-1]\,0{,}5\,(1+\gamma^2)^{-1}} \quad ,$$

$$\gamma = \omega\,(\sigma\mu_0 a^2)^{-1} \quad .$$

Величина κ_2^{-1} будет характеризовать глубину проникновения магнитогидродинамической волны – магнитогидродинамический поверхностный эффект. В случае, когда $\gamma \gg 1$, выражение для коэффициента затухания волны не зависит от напряженности магнитного поля H и равняется

$$\kappa_2 = \sqrt{0{,}5\,\sigma\mu_0\omega} \quad ,$$

т.е. коэффициенту затухания при электромагнитном поверхностном эффекте.

§ 4. Получение сильного магнитного поля за счет движения проводящей среды

Явление "вмороженности" поля и вытекающая из него возможность усиления магнитного поля находят свое применение не только при теоретическом рассмотрении тех или иных вопросов, связанных, например, с проблемами происхождения магнитного поля звезд, Солнца и Земли, но и в техническом воплощении мечты человека о получении сильных и сверхсильных магнитных полей.

Факт сохранения магнитного потока при сжатии был использован Гуревичем [55] и независимо от него Местелом и Спитцером [56] для объяснения происхождения магнитного поля звезд. Они исходили из того, что звезды образуются из газа, в котором имеется слабое поле. При сжатии газа в звезду это поле значительно усиливается.

В лабораторных условиях усиление магнитного поля за счет движения среды может быть достигнуто одним из перечисленных ниже методов:

I. Магнитный поток окружается проводящей оболочкой, которую быстро сжимают, увеличивая индукцию поля по сравнению с первоначальной во много раз.

2. Проводящая среда, движущаяся внутри некоторого объема, содержащего магнитный поток, создает индукционные токи, поле которых усиливает первоначальное магнитное поле $\vec{B}_0$.

Рассмотрим эти пути в их конкретной реализации.

I. Метод взрыва

Первое сообщение о возможности усиления магнитного поля и получении сверхсильных магнитных полей путем быстрого сжатия проводящих оболочек или контуров появилось в [1957 году, [57].

Из явления "вмороженности" сразу следует постоянство магнитного потока. Если теперь предположить, что находящаяся во внешнем однородном поле $\vec{B}_0$ сфера из проводящего материала подвергнута всестороннему интенсивному сжатию так, что линейные размеры внутренней полости уменьшились в n раз в течение времени t_0 , то можно записать

$$B B_0^{-1} = (r_0/r_к)^2 = n^2 \quad , \qquad (I85)$$

где r_0 – начальное значение внутреннего радиуса сферы, а $r_к$ и B -конечные значения поля и радиуса сферы.

Подобные рассуждения справедливы не только для сферических оболочек, но и для любых массивных контуров, например, для тора.

Равномерное интенсивное всестороннее сжатие сферы или направленное внутрь сжатие массивного контура вполне осуществимо при помощи кумулятивного взрыва. Так, если при помощи взрыва внутрь в течение долей секунды сжать полную медную сферу так, чтобы ее внутренний диаметр сократился , например, в I5 раз, то магнитное поле сферы, согласно уравнению (I85) увеличится в 225 раз. Максимальная величина индукции магнитного поля, полученная при помощи взрыва равна 2I00 теслам [58]. В работе [59] описывается эксперимент по получению поля с индукцией I430 тесл. Время существования этого поля составляло 2 – 3 мксек.

Мнение о том, что в методе взрыва нет предельного значения достижимого магнитного поля, было опровергнуто более поздними работами [60,6I] , где исследовались те эффекты, которые ограничивают возможность метода усиления магнитного поля внутри проводящей оболочки, сжимаемой направленным взрывом.

Перечислим некоторые из них. Во-первых, необходимо учитывать, что из-за конечной проводимости оболочки часть магнитного потока за время сжатия диффундирует сквозь стенку наружу. Скорость диффузии поля увеличивается из-за уменьшения проводимости стенок в результате повышения их температуры. Нагрев стенок может также привести к выплескиванию и испарению металла. Во-вторых, кинетическая энергия оболочки полностью переходит в энергию магнитного поля только в том случае, когда время прохождения звуковой волны поперек оболочки велико по сравнению со временем сжатия [6I]. Это утверждение становится очевидным если учесть, что сжатие потока должно произойти прежде, чем разрушится оболочка.

В самых благоприятных случаях удается 10% энергии, выделяющейся при взрыве, преобразовать в электромагнитную. В-третьих, по мере сжатия оболочки, магнитное давление быстро растет и останавливает оболочку в некоторый момент времени, и, формально говоря, должны возникать затухающие из-за омических потерь колебания оболочки. В реальных конструкциях эти колебания невозможны в силу нарушения симметрии и падения давления продуктов взрыва. Однако существует ряд конструкций, которые используют это явление для обеспечения более длительного роста поля с некоторым плоским максимальным участком кривой временной зависимости индукции, для этого разработана методика возвратного движения стенок проводящего цилиндра. И, наконец, необходимо помнить, что с помощью так называемой взрывной техники можно получить поля с индукцией выше 1000 тл на время около 2 мксек, но при этом, конечно, и катушка, и экспериментальный образец разрушаются при первом же импульсе. Для систематических, фундаментальных исследований необходимо, чтобы время существования поля было по возможности большим и чтобы легко было повторить опыт в сильном магнитном поле, без дополнительной затраты средств и времени. В зависимости от стоящих перед исследователем задач этого добиваются различными способами (рис. 37).

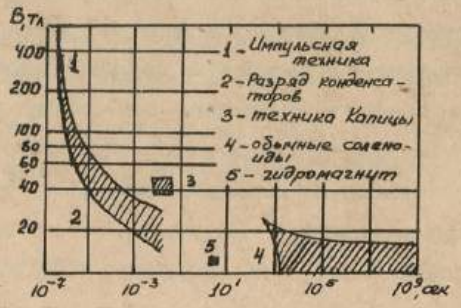


Рис. 37.

2. Гидромагнит Кольма [62,63].

В аксиальном магнитном поле $\vec{B}_0$ радиально движется жидкий металл / рис. 38/.

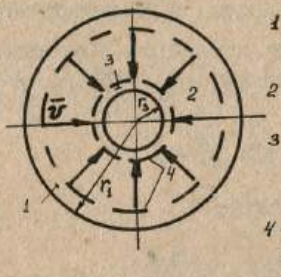


Рис. 38

При этом возникает индукционный ток, магнитное поле которого совпадает по направлению с магнитным полем возбуждения. В результате, в рабочем объеме гидромагнита возникает магнитное поле, напряженность которого зависит от скорости движения жидкости, ее электропроводности, размеров самого гидромагнита и величины поля возбуждения.

Экспериментально удалось увеличить поле в электромагните со средним внешним диаметром 6,25 см и внутренним - 2,5 см на 1,9 кэ при поле возбуждения 64 кэ, создаваемом соленоидом Биттера с внутренним диаметром 10 см. В качестве рабочего тела использовался сплав натрий-калий, который под давлением газообразного азота из баллонов на 120 атм подавался внутрь гидромагнита. Гидромагнит работал в импульсном режиме при длительности импульса около 0,5 сек. Индуцированное магнитное поле измерялось пробной катушкой, находящейся в центре гидромагнита.

Для простоты описания физических процессов, происходящих в гидромагните, предположим, что он состоит из бесконечно длинных труб, жидкость несжимаема и что ее течение происходит только в радиальном направлении.

В цилиндрической системе координат, ось z которой совпадает с осью гидромагнита, осевая и азимутальная составляющие скорости жидкости равны нулю, в установившемся режиме процессы в гидромагните будут описываться уравнениями:

$$v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{\rho}[\vec{j}\times\vec{B}] \qquad (I86)$$

$$-\frac{1}{\rho r}\frac{dp}{dv} = 0 \qquad (I87)$$

$$rot\vec{H} = \vec{j} \qquad (I88)$$

$$\vec{j} = \sigma\{\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]\}. \qquad (I89)$$

Очевидно, что в рассматриваемом нами случае $\vec{E} = 0$, тогда (I89) перепишется как

$$\vec{j} = \sigma[\vec{v}\times\vec{B}] \quad . \qquad (I89')$$

На основе уравнения неразрывности потока $div\,\vec{v} = 0$ и в силу радиальной направленности его движения выражение для $\vec{v}$ должно иметь вид:

$$v = f/r \quad .$$

Закон изменения магнитной индукции $\vec{B}$ в гидромагните определяется исходя из уравнений (I88) и (I89'). Учитывая, что $\vec{v} = \{-v; 0; 0\}$, получаем $j = \sigma v B$. Подставляя это выражение в (I88) и полагая, что $\mu = 1$, получаем, используя граничные условия: $H = H_0$ при $r = r_1$, что

$$B = B_0(r_1/r)^{Re_m}. \qquad (I90)$$

Зная закон распределения магнитной индукции внутри гидромагнита, а также выражение для скорости движения жидкости в зависимости от радиуса $v = f/r$, можно уравнение (I86) переписать следующим образом:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho\frac{f^2}{r^3} + \frac{\sigma f}{r}B_0^2(r_1/r)^{2Re_m} + \zeta\frac{2f^2}{r^3} \qquad (I91)$$

где ζ – вязкость. При этом принято, что $\vec{j} = \{0; j; 0\}$, а $\vec{B} = \{0; 0; B\}$

Интегрирование (I91) с граничными условиями: $p = p_0$ при $r = r_1$ дает

$$p = p_0 - 0{,}5(\rho f^2 + \zeta f)(r^{-2} - r_1^{-2}) - \frac{\sigma f B_0^2}{2Re_m}\left[(r_1/r)^{2Re_m} - 1\right].$$

Рассмотренный гидромагнит Кольма может быть эффектным устройством для получения сильных магнитных полей только при условии сохранения постоянным первоначального магнитного потока, т.е. соблюдения условия "вмороженности" магнитного поля.

Литература

I. Цинобер А.Б. МГД-обтекание тел. - Рига; Зинатне,I970.

2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука,I974.

3. Брановер,Г.Г., Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред, - М.: Наука, I970.

4. Navier Memoires de l'Académie, v.VI ,I822.

5. Stokes G. Cambridge Philoslphical Transactions, I845,

6. Reynolds O. On the Dynamical Theory of Incompessible Viscous Fluids a the Determination of the Criterion.- Phylosophical Transactions of the Royal Society. I895.

7. Reynolds O. Philosophical Tranactions of the Roy. Soc,I883.

8. Nikuradse I. Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren, Forschungsheft 356 (Beilage zu "Forschung auf dem Gebiete des Ingenier Wesens2, I932) .

9. Прандтль Л. Результаты работ последнего времени по изучению турбулентности. В сб.: Проблемы турбулентности. - М.; Л.: ОНТИ, I936.

I0. Фейдх А., Тоуненд Х. Исследование турбулентного течения при помощи микроскопа. В сб.: Проблемы турбулентности. -М.; Л.: ОНТИ, I936.

II. Laufer I. Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel.- Nat. Advis.Com.Aeronaut.Rep., I95I, I033.

I2. Laufer I. The structure of turbulence in fully developed pipe flow.- Nat. Advis. Com.Aeronaut. Rep. II74, I954.

I3. Klebanoff P.S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient.- Nat. Advis. Com. Aeronaut. Rep. I247, I955.

I4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.-М.: Наука, I970.

I5. Карман Т. Некоторые вопросы теории турбулентности.- В сб.: Проблемы турбулентности.- М.; Л.: ОНТИ, I936.

I6. Blasius H. Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten.- Forschung Arb. Ing. -Wes., v.I3I, I9I3.

I7. Бай Ши-и. Турбулентное течение жидкостей и газов.- М.: Иностранная литература, I962.

I8.Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. - М.: Иностранная литература, I955.

I9. Boussinesq T. Théorie de l'ecoulement tourbillant.- Mem. Pre. par. div. Sav., XXIII.- Paris, I877.

20. Prandtl L. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, Zs. angew. Math. Mech., v. 5, I925, 2.

2I. Taylor G. Eddy motion in the atmosphere.- Phil. Trans. Roy. Soc., v. A2I5, I9I5.

22. Тейлор К. О переносе вихрей и тепла при турбулентном движении жидкостей. В сб.: Проблемы турбулентности.- М.; Л.: ОНТИ, I936.

23. Карман Т. Механическое подобие и турбулентность.- В сб.: Проблемы турбулентности. - М.; Л.: ОНТИ, I936

24. Хинце И.О. Турбулентность. Ее механизм и теория.-М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, I963.

25. Акатнов Н.И. О линейных масштабах турбулентности в полу-

эмпирической теории.- Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. I974, №3.

26. Keller L., Fridman A. Differenzialgleichungen für die turbulente Bewegung einer inkompreasible Flussigkeit.- Proc. I-st Int. Congr. Appl. Mech., I924.

27. Колмогоров А.Н. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.- Math. Ann. v. I04, I93I. Русский перевод см.: Успехи математических наук, I938, вып.5.

28. Kolmogorov A. Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse.- Math. Ann., v. I08, I933.

29. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.- ДАН СССР, т.30, I94I, №4.

30. Колмогоров А.Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности.- ДАН СССР, т.32, I94I, №I.

3I. Колмогоров А.Н. Уравнение турбулентного движения несжимаемой жидкости.- Изв. АН СССР, сер.физ., т.6, I942, №I,2.

32. Richardson L. Weather prediction by memerical process.- Cambridg, Univ. Press., I922.

33. Richardson L. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph.- Proc. Roy. Soc., v. A IIO, I926, 756.

34. Taylor G. Statistical theory of turbulence, I-III, Proc. Roy. Soc., v. A I5I, I935, §74.

35. Обухов А.М. О распределении энергии вспектре турбулентного потока.- Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., I94I,№4-5.

36. Stuart J. Proc. Roy. Soc., v. A 22I, I954.

37. Look R. Proc. Roy. Soc., v. A 233, I955.

38. Гельфгат Ю.М., Лиелаусис О.А., Щербинин Э.В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил.- Рига: Знание, I976.

39. Тананаев А.В. Гидравлика МГД-машин.- М.: Атомиздат, I970.

40. Брановер Г.Г. Турбулентные течения в трубах.-Рига.:Зинатне, I967.

41. Лиелаусис О.А. Гидродинамика жидкометаллических МГД-устройств.- Рига: Зинатне, I967.

42. Кит Л.Г., Цинобер А.Б. О возможности создания и исследования двумерной турбулентности в сильном магнитном поле.- Магнитная гидродинамика, I97I, №3.

43. Кит Л.Г., Петерсон Д.Е., Платниекс И.А., Цинобер А.Б. Исследование влияния пространственных концевых эффектов на МГД-течение в канале с непроводящими стенками.- Магнитная гидродинамика, I970, №4.

44. Брановер Г.Г. О построении единой полуэмпирической теории турбулентных течений в трубах, находящихся в магнитном поле.- Магнитная гидродинамика, I968, №3.

45. Цинобер А.Б. Магнитогидродинамическая турбулентность.- Магнитная гидродинамика, I975, №I.

46. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля.- М.: Мир, I972.

47. Cowling T. Monthly Notices of RAS, v.I06, I946.

48. Гуревич Л.Э., Лебединский А.И. Магнитное поле солнечных пятен.- ДАН СССР, т.49, I945, №2.

49. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. - М.: Иностранная литература, I959.

50. Хайд Р. Гидродинамика земного ядра.- В кн.: Физика и химия Земли.- М.: Иностранная литература, I958.

5I. Кирко И.М. Жидкий металл в электромагнитном поле.-М.: Энергия, I964.

52. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики.- М.: Мир, 1967.

53. Рикитаки Т. Электромагнетизм и внутреннее строение Земли.- Л.:Недра, 1968.

54. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.- М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1959.

55. Пикельнер С.Б. Основы космической электродинамики.-М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961.

56. Mestel L., Spitzer L. Monthly Notices of RAS, v. 116, 1956.

57. Терлецкий Я.П. Получение сверхсильных магнитных полей путем быстрого сжатия проводящих оболочек.- ЖТ ЖЭТФ, т.32, 1957, №2, с.387

58. Сахаров А.Д., Людаев Р.З., Смирнов Е.И., Плющев Ю.И., Павловский А.И., Чернышев В.К., Феоктистова Е.А., Жаринов Е.И., Зысин Ю.А. Магнитная кумуляция.- ДАН СССР, т.165, 1965, №1.

59. Fowler C., Carn W., Caird R. J. Appl. Phys., v. 31, 1960, 3 .

60. Калиткин Н.Н., Царева Л.С. - Магнитная гидродинамика, 1969, №3 .

61. Lehner G., Linhart J., Somon J. Nucl. Fusion, v.4, 1964, 4.

62. Kolm H.H. Quart. Progr. Rept. Solid State Res. Lincoln Lab. Mass. Instr. Technol., July, 45, 1960.

63. Kolm H.H., Mawardi O.K. J. Appl. Phys., v. 32, 1961, 7.

64. Ковнер Д.С., Левин В.Б. О турбулентном течении электропроводной жидкости в трубе в продольном магнитном поле.- Теплофизика высоких температур, 1964, №5.

40г
0321

18 к.