

На правах рукописи

**Лекомцев Сергей Владимирович**

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ  
ОБОЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ,  
СОДЕРЖАЩИХ ТЕКУЩУЮ ИЛИ НЕПОДВИЖНУЮ  
ЖИДКОСТЬ**

Специальность 01.02.04 — Механика деформируемого твёрдого тела

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Пермь – 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (ИМСС УрО РАН)

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор,  
академик РАН  
**Матвеев Валерий Павлович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор  
член-корреспондент РАН  
**Ильгамов Марат Аксанович**  
(Институт механики УНЦ РАН,  
заведующий лабораторией механики  
твёрдого тела)

доктор физико-математических наук, профессор  
**Вахрушев Александр Васильевич**  
(Институт механики УрО РАН,  
заведующий лабораторией механики  
наноструктур)

Ведущая организация: ФГБУН Институт теоретической и прикладной  
механики им. С.А. Христиановича Сибирского  
отделения Российской академии наук

Защита состоится 26 июня 2013 г. в 10<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного совета Д 004.012.01 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1; тел: (342) 2378388; факс: (342) 2378487; сайт: [www.icmm.ru](http://www.icmm.ru).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИМСС УрО РАН.

Автореферат разослан «\_\_» мая 2013 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,



Березин Игорь Константинович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Колебания конструкций, взаимодействующих с неподвижной или текущей жидкостью, представляют собой сложные и разнообразные явления, которые могут наблюдаться в различных отраслях промышленности, например, таких как атомная энергетика или добыча нефти и газа. К типичным динамическим явлениям, возникающим в этих системах, можно отнести дивергенцию и флаттер трубопроводов, докритические колебания ядерных топливных сборок или труб теплообменников. Начиная с середины 60-х годов прошлого века, исследования в этой области вызывают повышенный интерес, обусловленный как широким использованием новых высокопрочных сплавов и композиционных материалов, позволяющих получать более лёгкие и тонкие изделия и, следовательно, более восприимчивые к вибрациям, так и разработкой и развитием перспективных атомных энергетических реакторов, потребовавших высокоскоростных жидкостных систем охлаждения, где необходимо принимать во внимание гидроупругую природу колебаний. Исследование динамики упругих оболочек, содержащих неподвижную жидкость, было вызвано в основном проблемами ракетно-космической техники. Возникшие на начальном этапе становления этих отраслей проблемы были обусловлены тем, что при проектировании изделий не принималось во внимание наличие неподвижной жидкости или нежелательные эффекты, порождаемые текущим потоком. Появившиеся для решения возникших проблем модели гидроупругого взаимодействия, решаемые с использованием численно-аналитических методов, могли давать качественное описание существующих явлений только для ограниченного класса исследуемых объектов.

Гидроупругое взаимодействие тонкостенных оболочек с жидкостью исследовалось многими отечественными и зарубежными авторами с использованием различных экспериментальных, аналитических и численно-аналитических методов. Ведущее место в решении этой проблемы занимают работы Болотина В.В., Вольмира А.С., Ильгамова М.А., Кийко И.А., Моисеева Н.Н., Рапопорта И.М., Румянцева В.В., Шклярчука Ф.Н., Amabili M., Chen S.S., Dowell E.H., Maheri M.R., Lindholm U.S., Olson M.D., Paidoussis M.P., Wang X., Weaver D.S. На протяжении последних десятилетий взаимодействие цилиндрической, главным образом круговой, оболочки с жидкостью изучается интенсивно с использованием численных методов. Значительное количество работ выполнено с применением техники конечно-элементного моделирования (Бочкарёв С.А., Матвеев В.П., Мокеев В.В., Шклярчук Ф.Н., Amabili M., Bathe K.J., Bauer H.F., Lakis A.A., Nguyen V.B., Paidoussis M.P., Schotté J.S. Zhang Y.L., Zienkiewicz O.C., и др.) и на основе смешанного подхода (Постнов В.А., Ergin A., Ugurlu B. и др.), где перемещения конструкции определяются с помощью метода конечных элементов (МКЭ), тогда как для жидкости применяется метод граничных интегральных уравнений. Представленные решения, как правило, являются двумерными. Большинство из них записано в рамках осесимметричных постановок, что ограничивает класс рассматриваемых задач телами вращения. В результате этого остается не исследованным ряд факторов, влияние которых на динамическое поведение системы может быть оценено только при решении задачи в трёхмерной постановке. С помощью такого подхода становится возможным рассматривать конструкции, в которых поток жидко-

сти заполняет только часть внутреннего объёма оболочки, или исследовать системы с произвольным или открытым профилем. Кроме того, трёхмерная формулировка задачи снимает ограничения на кинематические и статические граничные условия, задаваемые на боковой поверхности упругого тела. Наличие в промышленных приложениях конструкций, взаимодействующих с жидкой или газообразной средой, имеющих либо незначительное отклонение от кругового профиля, либо полностью некруговой профиль, определяет необходимость разработки численных алгоритмов, предназначенных для их анализа. Исследования на данную тематику представлены в литературе ограниченным числом работ. Главным образом это связано со сложностью получения аналитических решений таких задач и необходимостью использования более ресурсоёмких численных методов. При обзоре литературы была найдена только одна работа, в которой численный анализ устойчивости оболочек произвольного сечения осуществлен в трёхмерной постановке (R.D. Firouz-Abadi и др., 2010 г.). Однако разработанный здесь алгоритм, представляющий собой комбинацию методов граничных и конечных элементов, применим только для несжимаемых сред. В настоящее время высокопроизводительные компьютерные системы позволяют преодолеть вычислительные трудности, вызванные большими размерами разрешающих систем уравнений или нелинейностью постановки. В связи с этим является актуальным численное моделирование в трёхмерной постановке оболочек, взаимодействующих с неподвижной или текущей жидкостью.

Целью диссертационной работы является создание численного метода для расчёта собственных частот, форм колебаний, границы устойчивости и его применение для параметрического анализа динамических характеристик оболочек произвольного поперечного сечения, взаимодействующих с неподвижной или текущей жидкостью и нагруженных различными силовыми факторами.

#### Научная новизна результатов.

1. Предложен метод и разработан алгоритм его численной реализации для расчёта в трёхмерной постановке собственных частот, форм колебаний и границ устойчивости нагруженных оболочек, содержащих неподвижную или текущую жидкость.

2. Получены зависимости и новые качественные закономерности для собственных частот и форм колебаний заполненных неподвижной жидкостью горизонтально и вертикально расположенных оболочек с круговым и эллиптическим сечением при различных граничных условиях, уровнях заполнения жидкостью и геометрических параметрах.

3. Получены новые количественные и качественные результаты об устойчивости круговых и эллиптических оболочек, взаимодействующих с текущей жидкостью, при различных вариантах граничных условий и геометрических параметрах исследуемых систем.

4. Исследовано влияние силовых факторов, в том числе стационарных сил вязкого сопротивления жидкости, на собственные частоты и формы колебаний, границу устойчивости круговых и эллиптических цилиндрических оболочек, взаимодействующих жидкостью.

Практическая значимость. Предложенная линеаризованная модель позволяет получить приемлемые оценки собственных частот, форм колебаний и критических скоростей жидкости, необходимые при проектировании конструкций, включающих оболочки, взаимодействующие с неподвижной или текущей жидкой средой. Разработанный алгоритм даёт возможность за короткое время проанализировать широкий спектр различных параметров, качественно влияющих на границу устойчивости. Кроме этого, полученные результаты могут являться основой для определения границ применимости линеаризованной модели и областей параметров, которые необходимо исследовать с использованием более сложных моделей жидкости.

Защищаемые положения.

1. Численный метод для определения собственных частот и форм колебаний нагруженных оболочек произвольного поперечного сечения, содержащих неподвижную жидкость, и собственных частот, форм колебаний и границы устойчивости нагруженных оболочек, содержащих текущую жидкость.

2. Результаты численного исследования динамических характеристик тонкостенных горизонтальных и вертикальных круговых и эллиптических цилиндрических оболочек, полностью или частично заполненных неподвижной жидкостью.

3. Результаты расчётов критических скоростей потери устойчивости круговых и эллиптических цилиндрических оболочек, взаимодействующих с текущей внутри них жидкостью, с учётом и без учёта различного рода силовых факторов, действующих на оболочку.

Достоверность полученных результатов подтверждена численными экспериментами по оценке сходимости конечно-элементного алгоритма, сопоставлением с существующими аналитическими решениями, имеющимися исследованиями других авторов и сравнением отдельных результатов с экспериментальными данными.

Апробация работы. Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались на Международной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Россия, г. Тула, 2010, 2012 гг.); Всероссийской конференции молодых учёных «Неравновесные процессы в сплошных средах» (г. Пермь, 2010, 2012 гг.); XVII и XVIII Всероссийских Зимних школах по механике сплошных сред (г. Пермь, 2011, 2013 гг.); X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Нижний Новгород, 2011 г.); II Междисциплинарной молодежной научной конференция «Информационная школа молодого ученого» (г. Екатеринбург, 2012 г.); XVI Международной научной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Россия, г. Ростов-на-Дону, 2012 г.); 84-й ежегодной конференции Международной ассоциации прикладных математиков и механиков GAMM-2013 (Сербия, г. Нови Сад, 2013 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 17 работ, включая 4 статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК [1–4].

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из вводной части, трёх глав, заключения и списка литературы (142 наименования). В работе приводится 34 рисунка и 9 таблиц. Общий объём диссертации составляет 118 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Введение** имеет преимущественно обзорный характер. Представлены публикации, отражающие историю развития и современное состояние исследований в области гидроупругости. Основное внимание уделено трём направлениям: анализу динамического и статического поведения оболочек, динамическому анализу оболочек, содержащих неподвижную жидкость, и устойчивости оболочек, взаимодействующих с текущим потоком жидкости. В завершении обсуждается актуальность исследуемой проблемы, формулируются цель и задачи диссертационной работы, а также её научная новизна и практическая значимость.

В **первой главе** диссертационной работы представлена математическая модель, описывающая поведение системы «упругая оболочка-текущая жидкость». Рассмотрена тонкостенная изотропная оболочка произвольного поперечного сечения, взаимодействующая с установившимся внутренним потоком идеальной сжимаемой жидкости или газа. Деформации, возникающие в оболочке в результате гидродинамического воздействия, являются малыми. Влияние пограничного слоя и динамические явления на свободной поверхности в случае конструкций, частично заполненных жидкостью, не учитываются. Схема модели и положение системы координат приведены на рисунке 1.

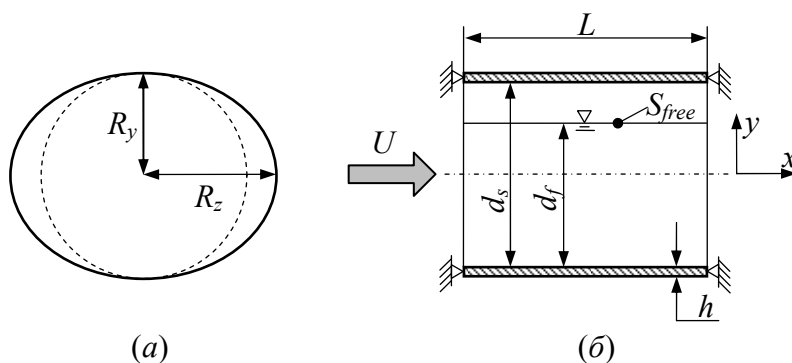


Рисунок 1 — Некруговая оболочка: (а) — поперечное сечение; (б) — продольное сечение

Безвихревое движение идеальной сжимаемой жидкости, занимающей объём  $V_f$ , описывается волновым уравнением

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2U}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $\varphi$  — потенциал возмущённых скоростей,  $U$  — скорость течения,  $c$  — скорость звука в среде,  $M = U/c$  — число Маха,  $(x, y, z)$  — декартовы координаты.

Потенциал возмущённых скоростей на входе в конструкцию и выходе из неё подчиняется следующим граничным условиям:

$$x = 0 : \varphi = 0; \quad x = L : \partial \varphi / \partial x = 0. \quad (2)$$

Давление жидкости на стенку оболочки вычисляется с помощью линеаризованной формулы Бернулли

$$p = p_0 - \rho_f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \text{ на } S_\sigma = S_f \cap S_s, \quad (3)$$

где  $S_f$  — поверхность, ограничивающая объём жидкости  $V_f$ ;  $S_s$  — поверхность оболочки;  $p_0$ ,  $\rho_f$  — статическое давление и плотность жидкости, соответственно.

На поверхности раздела жидкости и оболочки  $S_\sigma$  задается условие непроницаемости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{n}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности  $S_\sigma$ ;  $\mathbf{U} = \{u \ v \ w\}^T$  — вектор перемещений оболочки.

Оболочка произвольной геометрии рассматривается согласно подходу, в котором предполагается, что её криволинейная поверхность достаточно точно аппроксимируется совокупностью плоских четырёхугольных (или треугольных) элементов. Такое представление делает возможным воссоздание конструкций со сложным изменением кривизны, наличием отверстий произвольной формы и позволяет избежать дополнительных вычислений и трудностей, вызванных введением локальной криволинейной системы координат, связанной с боковой поверхностью. Деформации определяются в рамках теории тонких оболочек на основе гипотез Кирхгофа-Лява. Для математической постановки задачи динамики упругого тела используется вариационный принцип возможных перемещений, в который включаются уравнение Бернулли (3) для вычисления гидродинамического давления, действующего со стороны жидкости на конструкцию, и работа сил инерции. С целью линеаризации нелинейных соотношений для состояния с малым отклонением от положения равновесия получено следующее соотношение

$$\int_{S_s} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dS + \int_{V_s} \rho_s \delta \mathbf{d}^T \ddot{\mathbf{d}} dV - \int_{S_\sigma} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{P} dS + \int_{S_s} \delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{e} dS = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{e} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T.$$

Здесь:  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{P}$  — вектора обобщенных перемещений и поверхностных нагрузок;  $\rho_s$  — удельная плотность материала оболочки;  $\mathbf{D}$  — матрица упругих констант;  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  — система координат, связанная с боковой поверхностью оболочки;  $V_s$  — объём, занимаемый оболочкой. Элементы матрицы  $\boldsymbol{\sigma}_0$  находятся из условия  $\mathbf{E}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{e}$ , где  $\mathbf{E}$  — матрица линейных множителей, а вектор  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  определяется из решения соответствующей статической задачи.

В качестве альтернативной постановки к описанию поведения тонкостенной конструкции приводятся уравнения трёхмерной теории упругости. В этом случае не принимаются во внимание малость толщины по сравнению с другими геометрическими размерами и способность оболочки в целом нести нагрузку за счёт мембран-

ных и изгибающих усилий.

**Вторая глава** посвящена численной реализации предложенной модели. Уравнение в частных производных для потенциала возмущённых скоростей (1) вместе с граничными условиями (2) и условиями непроницаемости (4) с помощью метода Бубнова-Галёркина сводятся к системе уравнений, которую можно представить в матричном виде

$$(\mathbf{K}_f + \mathbf{A}_f^c)\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{M}_f\ddot{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{C}_f^c\dot{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{C}_f\dot{\boldsymbol{w}} - \mathbf{A}_f\boldsymbol{w} = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_f &= \sum_{m_f} \int_{V_f} \left( \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) dV, \quad \mathbf{M}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{1}{c^2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV, \\ \mathbf{A}_f &= \sum_{m_\sigma} \int_{S_\sigma} U \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial x} dS, \quad \mathbf{A}_f^c = - \sum_{m_f} \int_{V_f} M^2 \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dV, \\ \mathbf{C}_f &= \sum_{m_\sigma} \int_{S_\sigma} \mathbf{F}^T \mathbf{N}^w dS, \quad \mathbf{C}_f^c = - \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{2U}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \mathbf{F} dV. \end{aligned}$$

Здесь  $m_f, m_\sigma$  — число конечных элементов, на которые разбиваются область жидкости  $V_f$  и поверхность  $S_\sigma$ ;  $\mathbf{F}, \mathbf{N}^w$  — функции формы для потенциала возмущённых скоростей и нормальной составляющей вектора перемещений оболочки. Дискретизация объёма жидкости проводится с помощью 8-ми узлового конечного элемента в форме призмы.

Процедура метода конечных элементов с учётом представления для динамического давления (3) приводит уравнение (5) к соотношению

$$(\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_g)\mathbf{d} + \mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{d}} + \rho_f \mathbf{C}_s \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \rho_f \mathbf{A}_s \boldsymbol{\varphi} = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s &= \sum_{m_s} \int_{S_s} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS, \quad \mathbf{K}_g = \sum_{m_s} \int_{S_s} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{G} dS, \quad \mathbf{M}_s = \sum_{m_s} \int_{V_s} \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \\ \mathbf{C}_s &= \sum_{m_\sigma} \int_{S_\sigma} \mathbf{F}^T \mathbf{N}^w dS, \quad \mathbf{A}_s = \sum_{m_\sigma} \int_{S_\sigma} U (\mathbf{N}^w)^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dS. \end{aligned}$$

Здесь:  $m_s$  — число конечных элементов, на которые разбивается поверхность оболочки;  $\mathbf{N}$  — функции формы конечного элемента;  $\mathbf{B}, \mathbf{G}$  — матрицы связи деформаций с узловыми перемещениями.

Вектор узловых перемещений элемента имеет шесть составляющих

$$\boldsymbol{\delta}_l = \{u_l \ v_l \ w_l \ \theta_{\bar{x}_l} \ \theta_{\bar{y}_l} \ \theta_{\bar{z}_l}\}^T, \quad l = \overline{1,4},$$

где  $\theta_{\bar{x}}, \theta_{\bar{y}}, \theta_{\bar{z}}$  — углы поворота относительно соответствующей оси системы координат  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , связанной с боковой поверхностью оболочки. Для аппроксимации мембранных перемещений используется линейная зависимость, а для изгибных — несовместные функции формы.

Задача исследования динамики поведения нагруженных оболочек с протекающей внутри них жидкостью сводится к:



- решению статической задачи  $\mathbf{K}U = \mathbf{P}_0$ , из которой определяются усилия и моменты, вызванные приложенной нагрузкой;
- совместному решению систем уравнений (6) и (7) с учётом предварительного напряжённого недеформируемого состояния, обусловленного влиянием статических силовых факторов, действующих на оболочку:

$$\mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} + \mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} \\ \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix} + \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = 0, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_g & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_f \mathbf{C}_s \\ -\mathbf{C}_f & -\mathbf{C}_f^c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_f \mathbf{A}_s \\ -\mathbf{A}_f & \mathbf{A}_f^c \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{K}$  — матрица жёсткости,  $\mathbf{M}$  — матрица масс,  $\mathbf{C}$  — матрица демпфирования и  $\mathbf{A}$  — матрица гидродинамической жёсткости.

Представляя возмущенное движение оболочки и жидкости следующим образом:  $\mathbf{d} = \mathbf{q} \exp(i^* \omega t)$ ,  $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f} \exp(i^* \omega t)$ , где  $\mathbf{q}, \mathbf{f}$  — некоторые функции координат,  $i^* = \sqrt{-1}$ , а  $\omega = \lambda_1 + i^* \lambda_2$  — характеристический показатель, окончательно получим:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i^* \omega \mathbf{C} + \mathbf{A}) \{\mathbf{q} \ \mathbf{f}\}^T = 0. \quad (9)$$

При такой форме записи  $\lambda_1$  является собственной частотой колебаний системы, а  $\lambda_2$  характеризует демпфирование.

Разрешающую систему уравнений (9) можно преобразовать к виду:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{A}) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \omega \mathbf{x}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица,  $\mathbf{x} = \{\mathbf{q} \ \mathbf{f} \ \dot{\mathbf{q}} \ \dot{\mathbf{f}}\}^T$ .

В **третьей главе** представлены результаты, полученные с помощью разработанного численного метода. Выполнено исследование влияния линейных размеров, уровня заполнения и граничных условий на собственные частоты, формы колебаний и границу устойчивости тонкостенных круговых и эллиптических цилиндрических оболочек, взаимодействующих с неподвижным или текущим потоком жидкости.

В **разделе 3.1** приведены результаты, подтверждающие достоверность и эффективность разработанной численной процедуры путём сравнения вычисленных собственных частот колебаний с известными экспериментальными и теоретическими данными. Представлены результаты решения спектральной задачи для двух подходов к описанию тонкостенных конструкций: в рамках трёхмерной теории упругости (3D solid) и в рамках теории оболочек (3D shell). В ходе численных экспериментов установлено, что каждый из них имеет свои положительные и отрицательные стороны. В частности, применимость реализации 3D shell ограничивается толщиной оболочки, тогда как в 3D solid увеличение толщины не играет роли. С другой стороны, подход на основе уравнений теории упругости обладает худшей сходимостью и для получения решения с заданной точностью требуется большее количество степеней свободы.

Его главным достоинством является универсальность, в частности возможность применения не только для оболочек, но и для более сложных конструкций, где с тонкостенными телами сопрягаются объекты произвольной геометрии. Отмечается, что в настоящей работе при решении задач гидроупругости целесообразным является использование реализации 3D shell как наиболее экономичной с точки зрения вычислительных ресурсов.

**Раздел 3.2** посвящён анализу собственных частот и форм колебаний круговых и эллиптических цилиндрических оболочек, содержащих неподвижную жидкость. При этом основное внимание уделяется горизонтально расположенным конфигурациям, так как в этом случае даже для круговых цилиндрических оболочек задача является трёхмерной. Показано, что частичное заполнение жидкостью таких конструкций приводит к несимметричности системы. Вследствие этого, кратные частоты практически не встречаются в спектре, что обуславливает появление дополнительных форм колебаний с одинаковым количеством полуволн в окружном и продольном направлениях. В зависимости от уровня заполнения различие между соответствующими им частотами может достигать больших значений. Установлено, что формы колебаний, соответствующие низшим частотам частично заполненных жидкостью горизонтальных круговых и эллиптических оболочек, обладают одной особенностью. Вне зависимости от уровня заполнения, максимальная высота полуволн в окружном направлении всегда наблюдается на части боковой поверхности, которая взаимодействует с жидкой средой (рисунок 2), в то время как перемещения «сухой» поверхности заметно меньше. Здесь величина  $k = V_f/V_i$ , где  $V_i$  — объём внутренней полости оболочки, определяет уровень заполнения оболочки жидкостью. Для более высоких форм колебаний эта закономерность, как правило, не проявляется.

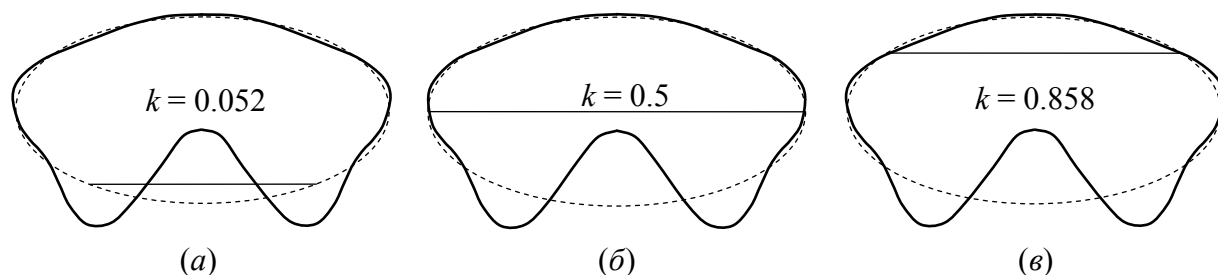


Рисунок 2 — Схематичное изображение собственных форм колебаний горизонтально расположенной эллиптической оболочки ( $\alpha = 2$ ), жёстко закреплённых на обоих краях: (а) —  $\omega_1 = 673.4$  Гц; (б) —  $\omega_1 = 505.2$  Гц; (в) —  $\omega_1 = 500.1$  Гц

Численные эксперименты позволили установить, что даже незначительное количество жидкости в горизонтальных оболочках приводит к существенному снижению наименьшей частоты колебаний системы и, например, достигает  $\sim 60\%$  при уровне заполнения  $k = 0.25$ .

В отличие от круговых оболочек, низшая собственная частота оболочек с эллиптическим поперечным сечением при  $\alpha = R_x/R_y < 1$  монотонно убывает на всём диапазоне изменения параметра  $k$ , а при  $\alpha > 1$  имеет асимптотический характер, т.е. при достижении определённого уровня жидкости перестаёт зависеть от его дальнейшего увеличения (рисунок 3 а). При анализе влияния параметра эллиптичности принимается не-

изменным размер вертикальной полуоси  $R_y$ . В этом случае изменение этого параметра связано с монотонным изменением площади поперечного сечения эллиптической оболочки и уровня жидкости при фиксированном значении  $k$ . Однако зависимость минимальной собственной частоты колебаний от параметра эллиптичности  $\alpha$  носит немонотонный характер (рисунок 3 б) и достигает максимального значения при  $\alpha < 1$ .

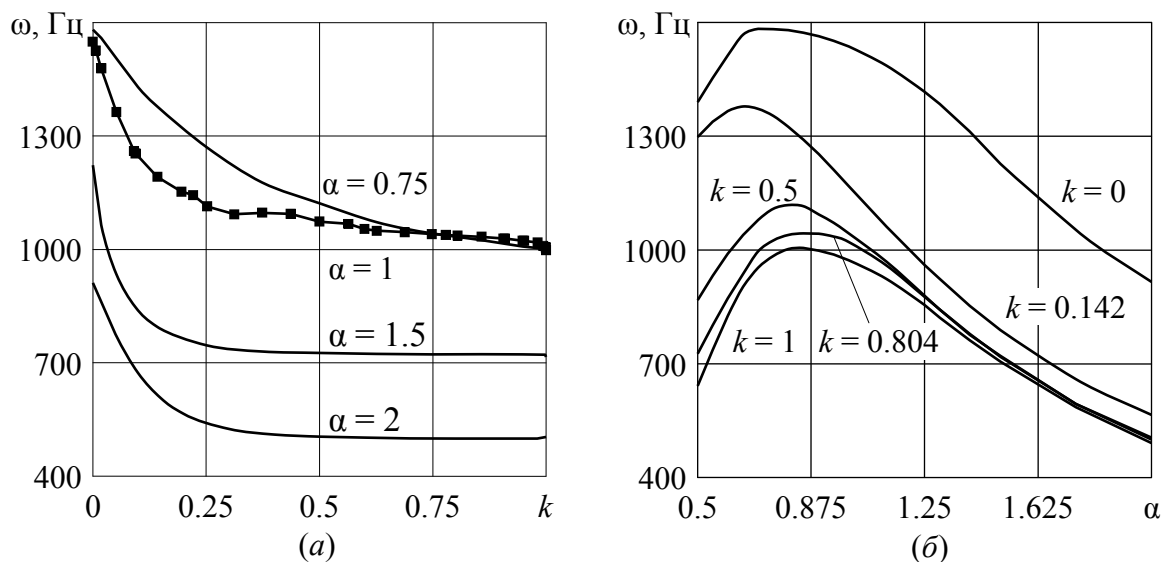


Рисунок 3 — Минимальные собственные частоты колебаний горизонтальных эллиптических оболочек, жёстко закреплённых на обоих краях, при разном уровне заполнения жидкостью (а) и различном отношении полуосей эллипса (б)

Существенное влияние на собственные частоты колебаний рассмотренных систем оказывает внешнее давление (соответствует  $P < 0$ ), увеличение которого приводит к их значительному снижению, вплоть до потери устойчивости (рисунок 4).

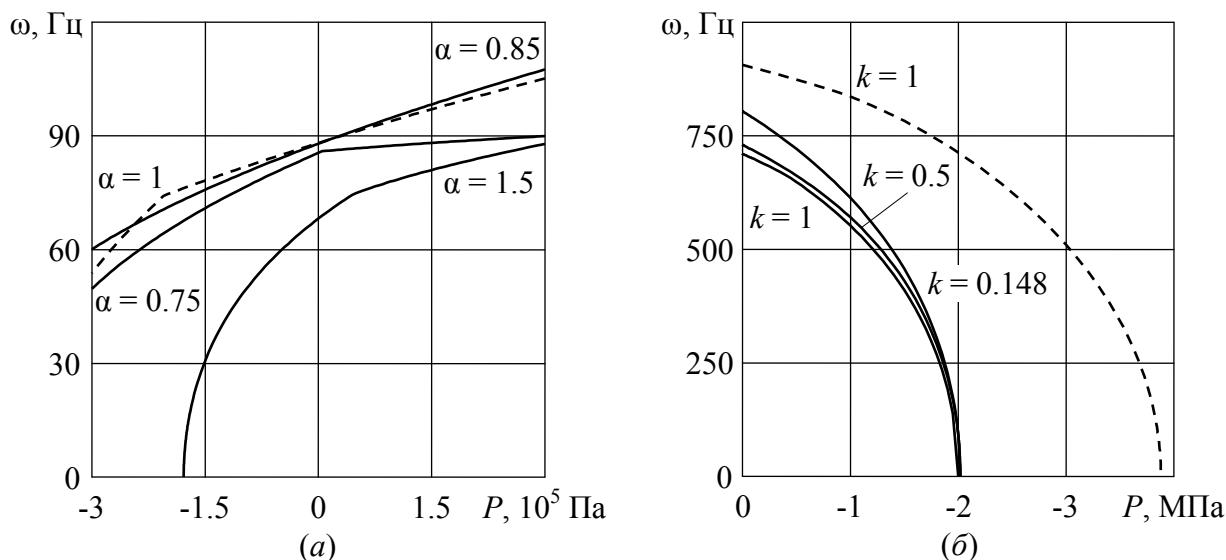


Рисунок 4 — Минимальные собственные частоты колебаний эллиптических цилиндрических оболочек под действием давления: (а) — при разных значениях параметра эллиптичности,  $k = 1$ , сплошные линии — эллиптические оболочки, пунктирная линия — круговая оболочка; (б) — при разном уровне жидкости,  $\alpha = 1.5$  — сплошные линии,  $\alpha = 0.65$  — пунктирная

В этом случае минимальная собственная частота при достижении нагрузки  $P$  некоторого значения обращается в ноль, что указывает на наступление неустойчивости дивергентного типа (выпучивание). Аналогичная величина внутреннего давления ( $P > 0$ ) лишь несколько повышает частоты колебаний системы. В ходе численных экспериментов обнаружено, что критическая нагрузка зависит от отношения полуосей эллипса  $\alpha$  и не зависит от уровня заполнения (рисунок 4 б). Более «растянутые» относительно кругового профиля оболочки, например  $\alpha = 1.5$ , обладают меньшей несущей способностью. Однако, вне зависимости от рассматриваемых параметров эллиптического поперечного сечения, эффект от уровня жидкости сказывается лишь на частотах колебаний системы, а не на величине критической нагрузки.

В разделе 3.3 изложены результаты исследования динамического поведения круговых и эллиптических цилиндрических оболочек, взаимодействующих с текущей внутри них жидкостью. Достоверность предложенного численного метода подтверждена сравнением с известными численными и аналитическими решениями других авторов. При численном анализе для критических скоростей используется общепринятая для подобных систем безразмерная скорость  $\Lambda$

$$\Lambda = \frac{U}{\xi L}, \quad \xi = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{D}{\rho_s h}}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Показано, что для полностью заполненных круговых оболочек, свободно опёртых на обоих краях, увеличение длины конструкции приводит к заметному снижению критических скоростей (рисунок 5 а). Данная зависимость носит немонотонный характер, обусловленный сменой формы колебаний, по которой осуществляется потеря устойчивости. При  $k = 1$  это приводит к резкому излому кривой критических скоростей, после которого вместо локального участка возрастания следует участок убывания. Уменьшение уровня заполнения повышает критические скорости течения жидкости, не оказывая влияния на вид потери устойчивости. Показано, что с ростом величины внешнего/внутреннего гидростатического давления происходит снижение/возрастание собственных частот колебаний и критических скоростей потери устойчивости оболочек, содержащих текущую жидкость (рисунок 5 б). Отмечается, что форма потери устойчивости может зависеть от величины и направления действия давления.

На примере круговых цилиндрических оболочек оценено влияние статической нагрузки, появляющейся из-за повышения давления в жидкости, которое необходимо для преодоления сил вязкого сопротивления в замкнутом канале, а также сил трения на боковой поверхности оболочки. Для вычисления соответствующих осевого усилия  $p^x$  и нормального давления  $p^w$  в работе используется вариант соотношений, полученный Raidoussis М.Р. и др., на основе усреднённых по времени уравнений Навье-Стокса

$$p^w = \frac{2\rho_f}{R} U_\tau^2 (L-x), \quad p^x = \rho_f U_\tau^2, \quad U_\tau^2 = \frac{1}{8} f U^2. \quad (11)$$

В выражениях (11)  $R$  — радиус оболочки,  $U_\tau$  — сдвиговая скорость. Коэффициент трения  $f$  вычисляется по формуле Колебрук-Уайта с уточняющей аппроксимацией

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \lg \left( \frac{\delta_\alpha/d}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f_a}} \right), \quad f_a = 0.0055 \left( 1 + \left[ 20000 \left( \frac{\delta_\alpha}{d} \right) + \frac{10^6}{\text{Re}} \right]^{1/3} \right),$$

где  $\delta_\alpha$  — шероховатость поверхности оболочки,  $d = 2R$  — гидравлический диаметр,  $\text{Re} = 2RU/\eta$  — число Рейнольдса,  $\eta$  — кинематическая вязкость жидкости.

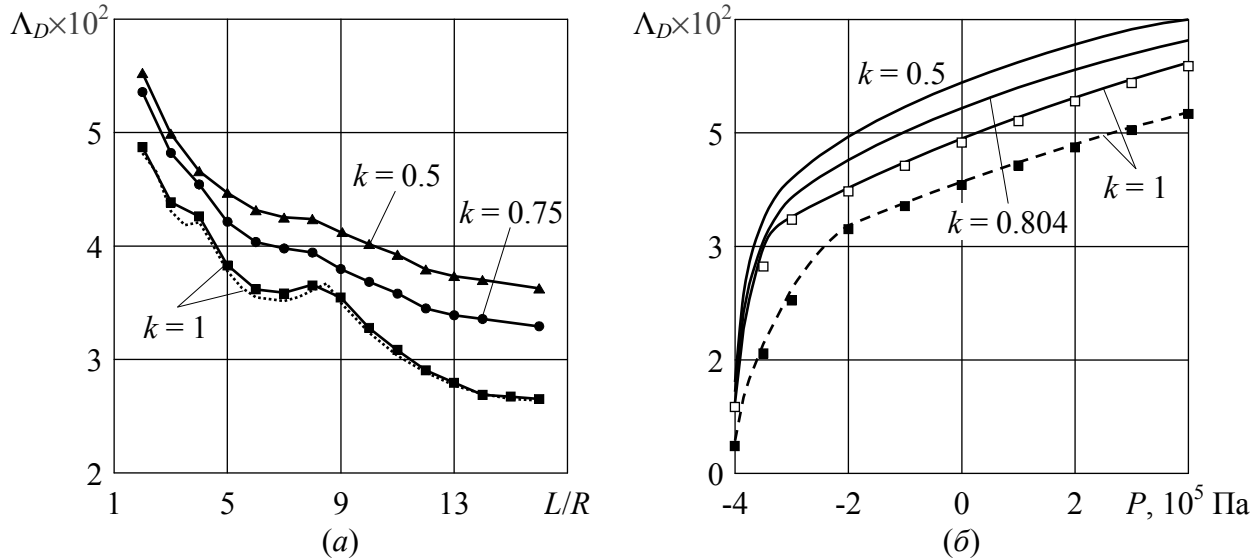


Рисунок 5 — Безразмерные критические скорости дивергенции  $\Lambda_D$  круговых цилиндрических оболочек: (а) — в зависимости от отношения  $L/R$ ; (б) — находящихся под действием давления: сплошные линии — с учётом стационарных сил вязкого сопротивления, пунктирная линия — без учёта, символы — двумерная постановка (Бочкарёв С.А. и др.)

Рассмотрена устойчивость нагруженных оболочек, частично заполненных текучей жидкостью, с учётом стационарных сил вязкого сопротивления (рисунок 5 б). В этом случае конструкция находится под действием неоднородных в окружном и продольном направлениях условий нагружения. Наравне с уровнем заполнения, уменьшение которого приводит к повышению критических скоростей, преобладающим фактором, значительно меняющим границу гидроупругой устойчивости, остаётся величина внешнего давления.

Проведённые численные эксперименты демонстрируют, что граница гидродинамической устойчивости цилиндрических оболочек эллиптического профиля существенно зависит от отношения полуосей эллипса  $\alpha$  (рисунок 6). Характерным для таких систем является достаточно монотонное снижение критических скоростей, которое имеет место при  $L/R \geq 6$ , приводящее в дальнейшем к существенному различию в критических скоростях течения жидкости между оболочками с эллиптическим и круговым поперечными сечениями. Это отличие обусловлено не только разницей в объёмах жидкости, но и, главным образом, особенностями геометрии конструкций некругового профиля. Отмечается, что для достаточно «растянутых» ( $\alpha > 1.25$ ) оболочек возможны ситуации, когда критические скорости дивергенции фактически не зависят от уровня заполнения, например при  $k > 0.5$  (рисунок 6 б).

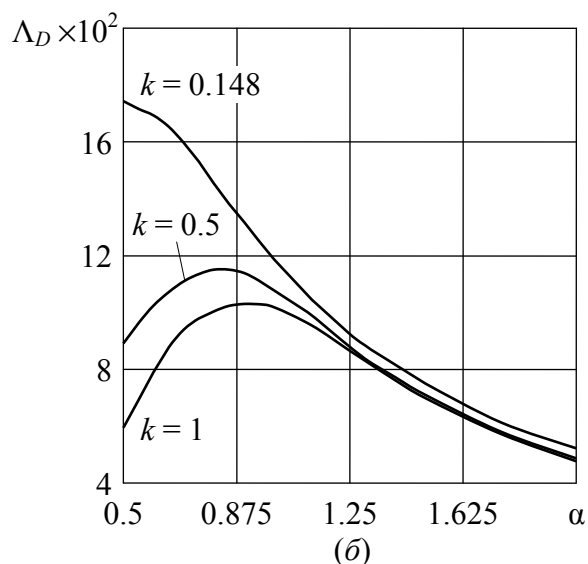
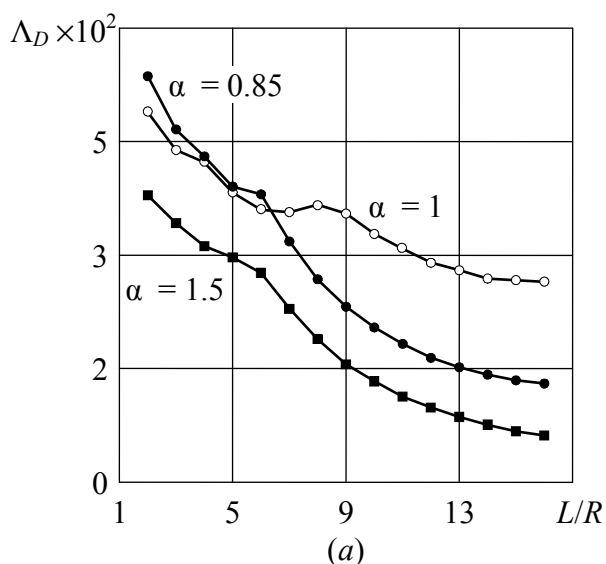


Рисунок 6 — Безразмерные критические скорости дивергенции  $\Lambda_D$  эллиптических цилиндрических оболочек в зависимости от: (а) — отношения  $L/R$  при  $k = 1$ ; (б) — отношения полуосей эллипса  $\alpha$  при разном уровне жидкости

Поведение системы «эллиптическая оболочка-текущая жидкость» под действием внешнего или внутреннего давления существенно зависит от отношения полуосей эллипса  $\alpha$ . Именно этот параметр определяет несущую способность конструкции, что заметно сказывается на границе гидродинамической устойчивости.

В **заключении** представлены основные результаты диссертационной работы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Предложен метод и разработан алгоритм его численной реализации для решения трёхмерных задач о собственных колебаниях и устойчивости нагруженных оболочек с круговым и произвольным поперечным сечением, содержащих неподвижную или текущую сжимаемую идеальную жидкость или газ.

2. В результате параметрического анализа получены новые количественные и качественные закономерности для собственных частот и форм колебаний круговых и эллиптических оболочек, полностью или частично заполненных жидкостью.

3. Установлено, что при частичном заполнении горизонтально расположенных оболочек, в том числе и круговых, возможно существование более двух собственных форм колебаний с различными частотами, но с одинаковым числом полуволн в окружном и меридиональном направлениях. Независимо от уровня заполнения на низших частотах максимумы перемещений достигаются на смоченной поверхности. Для полностью или частично заполненных жидкостью горизонтальных оболочек имеет место немонотонная зависимость низших собственных частот колебаний от отношения полуосей эллипса, определяющего сечение оболочки, при фиксированной величине одной из полуосей.

4. Получены результаты для критических скоростей потока жидкости, при которых происходит потеря устойчивости круговых и эллиптических цилиндрических оболочек при различных граничных условиях и геометрических параметрах системы.

Обнаружено, что граница гидроупругой устойчивости существенно зависит от отношения полуосей эллипса.

5. Показано, что уменьшение уровня потока жидкости внутри круговых и эллиптических цилиндрических оболочек приводит к повышению критических скоростей, но не оказывает влияния на вид потери устойчивости.

6. На примере горизонтальных круговых и эллиптических цилиндрических оболочек, частично заполненных неподвижной жидкостью, показано, что величина внешнего равномерного давления, приводящая к потере устойчивости, не зависит от уровня заполнения.

7. Учёт стационарных сил вязкого сопротивления в потоке жидкости приводит к повышению критических скоростей потери устойчивости круговых цилиндрических оболочек, полностью и частично заполненных текущей жидкостью, без изменения вида потери устойчивости.

#### ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. **Лекомцев, С. В. Собственные колебания и устойчивость стационарной и вращающейся круговой цилиндрической оболочки с вращающейся жидкостью / С. В. Лекомцев, С. А. Бочкарёв // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. — 2011. — №4, Часть 5. — С. 2302–2304.**
2. **Лекомцев, С. В. Конечно-элементные алгоритмы расчёта собственных колебаний трёхмерных оболочек / С. В. Лекомцев // Вычислительная механика сплошных сред. — 2012. — №2. — С. 233–243.**
3. **Бочкарёв, С. А. Исследование влияния граничных условий на устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с текущей жидкостью / С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. — 2012. — №3. — С. 88–101.**
4. **Бочкарёв, С. А. Численное моделирование пространственных колебаний цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью / С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев, В. П. Матвеев // Вычислительные технологии. — 2013. — Т. 18, №2. — С. 13–24.**
5. **Бочкарёв, С. А. Собственные колебания и устойчивость цилиндрической трубы с жидкостью / С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев // Всероссийская конференция молодых учёных «Неравновесные процессы в сплошных средах»: материалы конференции. — Пермь, 2010. — С. 47–50.**
6. **Бочкарёв, С. А. Исследование влияния граничных условий на устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с текущей жидкостью / С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев // Международная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики»: материалы конференции. — Россия, Тула, 2010. — С. 97–101.**
7. **Бочкарёв, С. А. Численное моделирование упругой трубы с текущей жидкостью [Электронный ресурс] / С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев // Труды XVII Зимней школы по механике сплошных сред. — Пермь, 2011. — 1 электрон. опт. диск (CD).**

8. Бочкарёв, С. А. Численное моделирование упругой трубы с текущей жидкостью / С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев // Вестник ПНИПУ. Механика. — 2011. — №3. — С. 5–14.
9. Лекомцев, С. В. Конечно-элементное моделирование устойчивости трёхмерных оболочек, содержащих текущую жидкость / С. В. Лекомцев, С. А. Бочкарёв // Международная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики»: материалы конференции. — Россия, Тула, 2012. — С. 193–199.
10. Лекомцев, С. В. Конечно-элементный анализ пространственных колебаний горизонтальных цилиндрических оболочек с жидкостью / С. В. Лекомцев, С. А. Бочкарёв, В. П. Матвеев, Е. В. Мурашкин // XVI международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды»: труды конференции. — Россия, Ростов-на-Дону, 2012. — Том I. — С. 148–152.
11. Бочкарёв, С.А. Трёхмерный анализ устойчивости некруговых оболочек, содержащих текущую жидкость / С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев // XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред: тезисы докладов. — Пермь, 2013. — С. 59.
12. Bochkarev S. A. Numerical modeling of elliptical cylindrical shells, containing flowing fluid [Электронный ресурс] / S. A. Bochkarev, S. V. Lekomtsev, V. P. Matveenko // 84th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics: abstracts. — Serbia, Novi Sad, 2013. — 1 USB-носитель.

---

Подписано в печать 23.05.2013. Формат 60×90/16  
Тираж 100 экз. Усл. печ. л. 1. Заказ № 000/2013

---

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии «Меркурий»  
614010, г. Пермь, Комсомольский пр., 80, тел.: (342) 241-01-33  
614007, г. Пермь, ул. Островского, 107, тел.: (342) 216-22-99