

Федеральное агентство научных организаций  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
**Институт механики сплошных сред  
Уральского отделения  
Российской академии наук**

**УТВЕРЖДАЮ**

Зам. директора по научной работе

Д. ф.-м. н.,

О. А. Плехов

2015 г.



**ФОНД  
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ  
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**«Операторная школа тензорного исчисления и ее использование в  
термодинамике сплошной среды»**

*Направление подготовки: 01.06.01 «Математика и механика»*

*Профиль подготовки: «Механика деформируемого твердого тела»*

*Квалификация (степень) выпускника: Исследователь. Преподаватель-исследователь*

**Пермь 2015**  
**РАЗДЕЛ I. Аннотация**

**1.1 Краткая характеристика данной дисциплины, ее особенности**

Дисциплина «Операторная школа тензорного исчисления и ее использование в термодинамике сплошной среды» относится к вариативной части блока 1 и является дисциплиной по выбору аспирантов при освоении ООП ВО по направлению подготовки 01.06.01 – «Математика и механика», направленность «01.02.04 – механика деформируемого твердого тела».

**Связь с предшествующими дисциплинами**

Курс предполагает наличие у аспирантов знаний алгебры, анализа, аналитической геометрии, теоретической механики, теории упругости в объеме программы высшего профессионального образования.

**Связь с последующими дисциплинами**

Знания и навыки, полученные аспирантом при изучении данного курса, необходимы при работе над и при написании диссертации по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела.

**Цели изучения дисциплины:** формирование знаний в области термодинамики сложных диссипативных сред, работающих в условиях конечных деформаций, освоение операторной школы тензорного исчисления и приобретения навыков ее использования в практических приложениях, получение знаний, позволяющих ориентироваться в современных школах тензорного исчисления, развитие способности самостоятельного построения определяющих уравнений сред со сложным реологическим поведением.

**Задачи дисциплины:**

• **сформировать у аспирантов:**

- представления о векторных пространствах и операциях с элементами этих пространств, о математических основах построения операторов, осуществляющих линейные преобразования векторов;
- представления об операторной школе тензорной алгебры и тензорного анализа;
- представления об использовании операторной школы тензорного исчисления для проведения выкладок, получения следствий из законов термодинамики, проверки на объективность определяющих уравнений сложных сред;

• **обеспечить:**

- овладение методами доказательства формул тензорной алгебры и тензорного анализа, необходимых для осуществления выкладок;
- овладение методами построения определяющих уравнений деформируемых сред и проверки их на удовлетворение требования объективности.

## 1.2 Требования к результатам освоения дисциплины

Компетенции аспиранта, формируемые в результате освоения дисциплины «Операторная школа тензорного исчисления и ее использование в термодинамике сплошной среды»:

Код	Содержание
ПК-1:	Способность проводить научные исследования в области механики деформируемого твёрдого тела
ПК -2:	способность анализировать и формулировать связи между структурой материалов, характером внешних воздействий и процессами деформирования и разрушения

В результате изучения дисциплины аспирант должен:

• **знать:**

- методологию, конкретные методы и приемы научно-исследовательской работы в области механики деформируемого твёрдого тела (основные современные теории процессов деформирования и разрушения, взаимодействия структуры материала и внешних полей различной природы и интенсивности, методы описания процессов деформирования, фазовых и структурно-кинетических переходов в материале);

- методологию, конкретные методы и приемы решения краевых задач, встречающихся при исследовании проблем механики деформируемого твёрдого тела.

• **уметь:**

- ставить задачу и применять современные методы (численные, аналитические, экспериментальные) для решения задач в области механики деформируемого твёрдого тела с учётом эволюции структуры материала и внешних воздействий различной природы и интенсивности.

### Формы работы студентов

Аудиторные занятия: лекции.

Самостоятельная работа: изучение теоретического материала.

## 1.3 Виды контроля.

Рабочая программа дисциплины предусматривает текущий контроль в форме устного опроса по окончании разделов дисциплины, итоговый контроль в форме дифференцированного зачета, который выставляется по итогам проведённого промежуточного контроля и самостоятельной работы.

**РАЗДЕЛ II. Паспорт фонда оценочных средств  
по дисциплине (модулю) «Операторная школа тензорного исчисления и  
ее использование в термодинамике сплошной среды»**

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины (модуля)*	Наименование оценочного средства**	Код контролируемой компетенции***
1	<p align="center"><b>Раздел 1: Операторная школа тензорного исчисления</b></p> <p>Тема 1. Множества, операции, векторные пространства, тензоры второго ранга. Множество. Операция. Группа. Кольцо. Модуль. Прямое произведение. Отображение. Тензорное произведение. Скаляр. Вектор. Тензор второго ранга. Сложение тензоров. Умножение тензора на скаляр. Внешнее умножение. Векторное пространство тензоров второго ранга.</p>	Вопросы для устного опроса	ПК-1, ПК-2
	<p>Тема 2. Тензорная алгебра. Нулевой тензор. Единичный тензор. Произведение тензоров. Скалярное произведение тензоров. След тензора. Транспонированный тензор. Симметричный тензор. Антисимметричный тензор. Обратный тензор. Вырожденный</p>	Вопросы для устного опроса	ПК-1, ПК-2

<p>тензор.  Ортогональный тензор. Положительно определенный тензор. Собственные векторы и собственные числа тензора.  Ортопроектор. Нильпотентный тензор. Поворот. Тензорные функции. Равенства, использующие след тензора.  Транспонирование произведения двух тензоров. Равенства, связывающие возможные варианты скалярного умножения тензора и произведения двух других тензоров. Векторные и тензорные равенства со скалярным умножением, в которых одновременно используются тензоры и векторы. Обратный тензор от транспонированного тензора. Обратный тензор от произведения двух тензоров.  Представление симметричного тензора и ортогонального тензора в виде суммы трех слагаемых. Ось поворота. Угол поворота. Полярное</p>		
--	--	--

разложение обратимого тензора.		
<p>Тема 3. Тензорный анализ.</p> <p>Дифференцирование скалярной, векторной и тензорной функций по скалярным, векторным и тензорным аргументам.</p> <p>Производная по скаляру от произведения скалярных, векторных, тензорных функций.</p> <p>Производная по скаляру от обратной функции, от сложной функции. Спин.</p> <p>Производная по вектору от произведения скалярных, векторных, тензорных функций, от сложной функции.</p> <p>Отсчетная и актуальная конфигурации в термодинамике сплошной среды.</p> <p>Градиенты скалярных и векторных функций в отсчетной и в актуальной конфигурациях.</p> <p>Дивергенции векторных и тензорных функций в отсчетной и в актуальной конфигурациях.</p> <p>Левый и правый тензоры Коши-Грина.</p>	Вопросы для устного опроса	ПК-1, ПК-2

<p>Левый и правый тензоры растяжения. Физический смысл собственных чисел и собственных векторов правого и левого тензоров растяжения. Связь между градиентами скалярных и векторных функций в отсчетной и актуальной конфигурациях. Связь между нормальными к границам тела и между элементами поверхностей в отсчетной и в актуальной конфигурациях. Градиенты от произведения функций в отсчетной и в актуальной конфигурациях. Дивергенции произведения функций в отсчетной и в актуальной конфигурациях. Связь между дивергенциями функций в отсчетной и актуальной конфигурациях. Тензор скоростей растяжения. Физический смысл тензора скоростей растяжения. Индифферентные тензоры. Индифферентность тензора скоростей растяжения материала,</p>		
---	--	--

	<p>левого тензора Коши-Грина, левого тензора растяжения. Вычисление производных от левого и правого тензоров Коши-Грина по времени с помощью тензора скоростей растяжения. Вычисление производных от кратностей удлинения по времени с помощью тензора скоростей растяжения. Материальная производная скалярной функции по времени в отсчетной и в актуальной конфигурациях.</p>		
2	<p><b>Раздел 2: Законы термодинамики, требования объективности и их следствия.</b> Тема 4. Температура, энтропия и поток энтропии с точки зрения статистической механики. Использование аналитической механики для описания механического поведения системы материальных точек с наложенными стационарными связями. Уравнения Гамильтона. Фазовое пространство.</p>	Вопросы для устного опроса	ПК-1, ПК-2

<p>Применение аналитической механики для моделирования состояния поведения молекулярных систем. Гипотеза о максимальной меры хаоса в стационарном состоянии. Распределение Гиббса. Понятие энтропии, температуры и потока энтропии с точки зрения статистической механики. Растяжение свободно-сочлененной цепи. Энтропийный характер упругих свойств эластомерных материалов.</p>		
<p>Тема 5. Законы термодинамики и следствия из них. Первый закон термодинамики. Инвариантность записи закона сохранения энергии к преобразованиям Галилея. Следствия из первого закона термодинамики. Законы сохранения массы, движения, и новая формулировка закона сохранения энергии. Второй закон термодинамики. Неравенство диссипации. Невозможность создания вечных двигателей первого и второго рода.</p>	<p>Вопросы для устного опроса</p>	<p>ПК-1, ПК-2</p>

	<p>Несжимаемые среды.          Запись условия несжимаемости с помощью тензора скоростей растяжения.          Неравенство диссипации и определяющие уравнения газа, идеальной жидкости, ньютоновской жидкости, упругого тела. Учет несжимаемости в определяющих уравнениях среды.          Вывод уравнения теплопроводности для газа, идеальной жидкости, ньютоновской жидкости, упругого тела, упругого тела с дополнительными параметрами состояния.</p>		
3	<p><b>Раздел 3: Примеры математических моделей термодинамики деформируемых сред.</b>          Тема . 6. Примеры математических моделей термодинамики деформируемых сред.          Потенциалы свободной энергии гиперупругих несжимаемых материалов.          Одноосное сжатие и эквивалентное двuosное растяжение.</p>	Вопросы для устного опроса	ПК-1, ПК-2

<p>Потенциал Трелоара.  Потенциал Муни-Ривлина. Координаты Муни-Ривлина.  Потенциал Джента.  Задача о раздувании несжимаемой бесконечной среды, содержащей сферическую пору внутренним давлением.  Разложение Ли градиента деформации пластически деформируемой среды. Модель пластического течения материала в условиях конечных деформаций. Модель деформируемой жидкости (расплав полимера). Сдвиговое течение расплава полимера.  Дифференциальные модели вязкоупругих сред. Интегральные модели вязкоупругих сред. Законы термодинамики смеси континуумов. Первое и второе следствие из закона сохранения энергии для смеси континуумов.  Вариационная постановка задачи нахождения полей напряжений для упругого сжимаемого материала.  Вариационная постановка задачи для</p>		
--	--	--

упругого несжимаемого материала.		
--	--	--

\*Наименование темы (раздела) или тем (разделов) берется из рабочей программы дисциплины (модуля).

\*\*Примерный перечень оценочных средств приведен в приложении А.

\*\*\*Код контролируемой компетенции берется из ФГОС ВПО, ФГОС ВО

### РАЗДЕЛ III. Содержание оценочных средств по дисциплине

#### Приложение А (обязательное)

#### Перечень вопросов для текущего контроля (устный опрос)

##### Раздел I. Операторная школа тензорного исчисления

1. Множества, операции, векторные пространства, тензоры второго ранга. Множество. Операция. Группа. Кольцо. Модуль. Прямое произведение. Отображение. Тензорное произведение. Скаляр. Вектор. Тензор второго ранга. Сложение тензоров. Умножение тензора на скаляр. Внешнее умножение. Векторное пространство тензоров второго ранга.
2. Тензорная алгебра. Нулевой тензор. Единичный тензор. Произведение тензоров. Скалярное произведение тензоров. След тензора. Транспонированный тензор. Симметричный тензор. Антисимметричный тензор. Обратный тензор. Вырожденный тензор. Ортогональный тензор. Положительно определенный тензор. Собственные векторы и собственные числа тензора. Ортопроектор.
3. Нильпотентный тензор. Поворот. Тензорные функции. Равенства, использующие след тензора. Транспонирование произведения двух тензоров. Равенства, связывающие возможные варианты скалярного умножения тензора и произведения двух других тензоров.
4. Векторные и тензорные равенства со скалярным умножением, в которых одновременно используются тензоры и векторы. Обратный тензор от транспонированного тензора. Обратный тензор от произведения двух тензоров. Представление симметричного тензора и ортогонального тензора в виде суммы трех слагаемых. Ось поворота. Угол поворота. Полярное разложение обратимого тензора.
5. Тензорный анализ. Дифференцирование скалярной, векторной и тензорной функций по скалярным, векторным и тензорным аргументам. Производная по скаляру от произведения скалярных, векторных, тензорных функций. Производная по скаляру от обратной функции, от сложной функции. Спин. Производная по вектору от произведения скалярных, векторных, тензорных функций, от сложной функции.

6. Отсчетная и актуальная конфигурации в термодинамике сплошной среды. Градиенты скалярных и векторных функций в отсчетной и в актуальной конфигурациях. Дивергенции векторных и тензорных функций в отсчетной и в актуальной конфигурациях. Левый и правый тензоры Коши-Грина. Левый и правый тензоры растяжения. Физический смысл собственных чисел и собственных векторов правого и левого тензоров растяжения. Связь между градиентами скалярных и векторных функций в отсчетной и актуальной конфигурациях. Связь между нормальными к границам тела и между элементами поверхностей в отсчетной и в актуальной конфигурациях.
7. Градиенты от произведения функций в отсчетной и в актуальной конфигурациях. Дивергенции произведения функций в отсчетной и в актуальной конфигурациях. Связь между дивергенциями функций в отсчетной и актуальной конфигурациях. Тензор скоростей растяжения. Физический смысл тензора скоростей растяжения.
8. Индифферентные тензоры. Индифферентность тензора скоростей растяжения материала, левого тензора Коши-Грина, левого тензора растяжения. Вычисление производных от левого и правого тензоров Коши-Грина по времени с помощью тензора скоростей растяжения.
9. Вычисление производных от кратностей удлинения по времени с помощью тензора скоростей растяжения. Материальная производная скалярной функции по времени в отсчетной и в актуальной конфигурациях.

## **Раздел II. Законы термодинамики, требования объективности и их следствия.**

10. Температура, энтропия и поток энтропии с точки зрения статистической механики.
11. Использование аналитической механики для описания механического поведения системы материальных точек с наложенными стационарными связями. Уравнения Гамильтона.
12. Фазовое пространство. Применение аналитической механики для моделирования состояния поведения молекулярных систем. Гипотеза о максимальной мере хаоса в стационарном состоянии. Распределение Гиббса.
13. Понятие энтропии, температуры и потока энтропии с точки зрения статистической механики. Растяжение свободно-сочлененной цепи. Энтропийный характер упругих свойств эластомерных материалов.
14. Законы термодинамики и следствия из них. Первый закон термодинамики. Инвариантность записи закона сохранения энергии к преобразованиям Галилея. Следствия из первого закона термодинамики. Законы сохранения массы, движения, и новая формулировка закона сохранения энергии.
15. Второй закон термодинамики. Неравенство диссипации. Невозможность создания вечных двигателей первого и второго рода.

Несжимаемые среды. Запись условия несжимаемости с помощью тензора скоростей растяжения. Неравенство диссипации и определяющие уравнения газа, идеальной жидкости, ньютоновской жидкости, упругого тела. Учет несжимаемости в определяющих уравнениях среды.

16. Вывод уравнения теплопроводности для газа, идеальной жидкости, ньютоновской жидкости, упругого тела, упругого тела с дополнительными параметрами состояния.

### **Раздел III. Примеры математических моделей термодинамики деформируемых сред.**

17. Примеры математических моделей термодинамики деформируемых сред. Потенциалы свободной энергии гиперупругих несжимаемых материалов. Одноосное сжатие и эквивалентное двуосное растяжение.

18. Потенциал Трелоара. Потенциал Муни-Ривлина. Координаты Муни-Ривлина. Потенциал Джента. Задача о раздувании несжимаемой бесконечной среды, содержащей сферическую пору внутренним давлением.

19. Разложение градиента деформации пластически деформируемой среды. Модель пластического течения материала в условиях конечных деформаций. Модель деформируемой жидкости (расплав полимера).

20. Сдвиговое течение расплава полимера. Дифференциальные модели вязкоупругих сред. Интегральные модели вязкоупругих сред. Законы термодинамики смеси континуумов.

21. Первое и второе следствие из закона сохранения энергии для смеси континуумов. Вариационная постановка задачи нахождения полей напряжений для упругого сжимаемого материала. Вариационная постановка задачи для упругого несжимаемого материала.

Разработчик:



(подпись)

д.ф.-м. н. Свистков А.Л.