ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



Субботин Станислав Валерьевич

ИНЕРЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И ОСРЕДНЁННЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОЛОСТЯХ

1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор В.Г. Козлов

Пермь – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ 6
ВВЕДЕНИЕ 12
ГЛАВА 1. ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОЛОСТЯХ 28
1.1. Общие свойства вращающейся жидкости 28
1.2. Инерционные волны 33
1.2.1. Глобальные инерционные моды 39
1.2.2. Волновые аттракторы 43
1.3. Осреднённые течения при гармоническом воздействии 47
1.4. Неоднородные по плотности системы в инерционных силовых полях 54
1.5. Нелинейные режимы 59
1.6. Обоснование актуальности задач исследования 66
ГЛАВА 2. ИНЕРЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И ОСРЕДНЁННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ 71
2.1. Экспериментальная установка 72
2.1.1. Методика изучения мгновенного поля скорости 76
2.1.2. Анализ осреднённых характеристик течений 81
2.2. Движение жидкости в прямом цилиндре 82
2.2.1. Инерционные волны. Нерезонансный случай 82
2.2.2. Скорость пульсационного течения 86
2.2.3. Инерционные моды 88
2.2.4. Осреднённые течения 93
2.2.4.1. Зональное течение 93
2.2.4.2. Влияние инерционных волн на зональное течение 97
2.2.4.3. Меридиональная циркуляция 99
2.2.4.4. Роль безразмерной частоты 105
2.2.4.5. Обсуждение результатов 108
2.3. Движение жидкости в цилиндре с наклонными торцами 113
2.3.1. Трассировка волновых лучей в замкнутой полости 113
2.3.2. Инерционные режимы, наблюдаемые в экспериментах 119

2.3.2.1. Временная динамика аттракторов 129
2.3.2.2. Азимутальный захват волн 132
2.3.2.3. Влияние числа Экмана на характеристики волновых лучей 135
2.3.3. Зональное течение в условиях линейных режимов волн 138
2.3.4. Неустойчивость зонального течения 144
2.3.4.1. Пороги неустойчивостей и структурообразование 144
2.3.4.2. Нелинейные режимы волнового аттрактора: спектральный анализ 149
2.3.4.3. Осреднённые течения, генерируемые аттрактором 151
2.3.4.4. Нелинейные режимы инерционных мод: спектральный анализ .. 155
2.3.4.5. Осреднённые течения, генерируемые инерционными модами ... 160
2.4. Основные выводы по главе 165
ГЛАВА 3. АТТРАКТОРЫ ИНЕРЦИОННЫХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КОЛЬЦЕВОМ СЛОЕ С КОНИЧЕСКИМ ТОРЦОМ 171
3.1. Экспериментальная установка и методика 173
3.1.1. Особенности исследования поля скорости 176
3.2. Наблюдение (1,1) аттрактора инерционных волн 177
3.3. Осреднённые течения в линейном режиме аттрактора 181
3.3.1. Зональное течение 181
3.3.2. Меридиональная циркуляция 182
3.4. Нелинейные режимы аттрактора 184
3.5. Зональное течение в режиме аттрактора 189
3.6. Вихревые кластеры и волны Россби 190
3.7. Основные выводы по главе 198
ГЛАВА 4. ИНЕРЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И ОСРЕДНЁННЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ 202
4.1. Динамика жидкости в отсутствие дифференциального вращения ядра ... 203
4.1.1. Экспериментальная установка и методика 203
4.1.2. Траектория движения ядра относительно полости 210
4.1.3. Линейная динамика инерционных волн 213
4.1.3.1. Роль направления круговых колебаний ядра 216
4.1.3.2. Азимутальные колебания жидкости 225

4.1.4. Зональное течение 229
4.1.4.1. Опережающие колебания 229
4.1.4.2. Вклад инерционных волн в зональное течение 234
4.1.4.3. Отстающие колебания ядра с частотой $n = -1$ 237
4.1.5. Обсуждение результатов 242
4.2. Влияние собственного дифференциального вращения свободного осциллирующего ядра на движение жидкости 244
4.2.1. Особенности постановки задачи и методики проведения экспериментов 245
4.2.2. Колебания с частотой $n = -1$ 249
4.2.2.1. Колебания ядра и его дифференциальное вращение 249
4.2.2.2. Структурообразование в слое и зональное течение 253
4.2.2.3. Меридиональная циркуляция 256
4.2.2.4. Роль чисел Экмана и Рейнольдса 259
4.3. Влияние заданного дифференциального вращения ядра на структуру течения 261
4.4. Многочастотные колебания свободного ядра 265
4.4.1. Зональное течение 267
4.4.2. Аддитивность осреднённых эффектов 268
4.5. Основные выводы по главе 277
ГЛАВА 5. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ 282
5.1. Надкритические течения в условиях отстающих колебаний ядра 283
5.1.1. Пороги неустойчивостей 288
5.1.1.1. Влияние неустойчивостей на дифференциальное вращение ядра 294
5.1.1.2. Пороги в отсутствие дифференциального вращения ядра 296
5.1.2. Нелинейная динамика надкритических течений 298
5.1.2.1. Вихревая система вблизи оси вращения слоя 298
5.1.2.2. Волны Россби 302
5.1.2.3. Внешняя вихревая система 303
5.2. Нелинейные режимы инерционных волн в условиях опережающих колебаний ядра 307

5.2.1. Спектральный состав возмущений в поле скорости 308
5.2.2. Декомпозиция волн 312
5.2.3. Пороги волновой неустойчивости 316
5.3. Влияние нелинейных волн на осреднённые течения 318
5.3.1. Неустойчивость слоя Стюартсона 324
5.3.1.1. Фазовая скорость 328
5.3.1.2. Пороги неустойчивости 330
5.3.2. Осреднённые структуры в Р- и Т-режимах 333
5.3.3. Дисперсионные соотношения 337
5.4. Основные выводы по главе 341
ГЛАВА 6. ВЛИЯНИЕ ЛИБРАЦИЙ НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВРАЩЕНИЕ СВОБОДНОГО ЯДРА И ОСРЕДНЁННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ 347
6.1. Особенности постановки эксперимента 348
6.2. Инерционный отклик ядра 350
6.2.1. Вращательные колебания ядра 350
6.2.2. Трансляционные колебания ядра 355
6.3. Влияние либраций на дифференциальное вращение ядра 357
6.4. Совпадение частоты либраций с частотой внешнего инерционного поля 363
6.5. Влияние либраций на зональное течение. Принцип суперпозиции 366
6.6. Основные выводы по главе 371
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 373
ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ 379
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 383
ПРИЛОЖЕНИЯ 405
Приложение А – Акт внедрения методики измерения мгновенных полей скорости во вращающихся полостях 405
Приложение Б – Патент на полезную модель 407

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

PIV	Particle image velocimetry
APS	цилиндрическая полость с антипараллельно наклонными торцами
CE	цилиндрическая полость с коническими торцами
OSE	цилиндрическая полость с одним наклонным торцом
PS	цилиндрическая полость с параллельно наклонными торцами
SC	цилиндрическая полость с прямыми торцами
L	длина цилиндрической полости
R	радиус цилиндрической полости
R_1	радиус ядра / внутренний радиус кольцевого слоя
R_2	радиус сферической полости / внешний радиус кольцевого слоя
H	максимальная глубина кольцевого слоя
a	отношение радиуса к длине цилиндрической полости
η	отношение радиуса ядра к радиусу сферической полости / внутреннего радиуса кольцевого слоя к внешнему радиусу
α	угол наклона торцов полости
r	расстояние от оси вращения полости
z	расстояние вдоль оси вращения полости
φ	азимутальная координата
Ω_{rot}	угловая скорость вращения полости
f_{rot}	линейная частота вращения полости
T_{rot}	период вращения полости
Ω_{lib}	угловая частота либраций полости
f_{lib}	линейная частота либраций полости
T_{lib}	период либраций полости
Ω_{osc}	частота колебаний ядра (прецессии диска) в лабораторной системе отсчёта
Ω	частота колебаний ядра (прецессии диска) относительно полости

T_o	период колебаний ядра (прецессии диска) относительно полости
b	амплитуда колебаний ядра (края диска) относительно полости
b_{osc}	амплитуда колебаний сферической полости в лабораторной системе отсчёта
σ	безразмерная частота либраций
n	безразмерная частота круговых колебаний ядра (прецессии диска) относительно полости
$\Delta\varphi$	угловая амплитуда либраций полости
ε	безразмерная амплитуда либраций
ν	кинематическая вязкость жидкости
ρ_L	плотность жидкости
ρ_C	средняя плотность ядра
ρ	относительная плотность ядра
δ	толщина пограничного слоя Стокса
δ_E	толщина пограничного слоя Экмана
δ_S^o	толщина внешнего слоя Стюартсона
δ_S^i	толщина внутреннего слоя Стюартсона
c	фазовая скорость инерционной волны
c_g	групповая скорость инерционной волны
$\mathbf{k}$	волновой вектор инерционной волны
θ	угол между направлением групповой скорости инерционной волны и осью вращения полости
β	угол между волновым вектором инерционной волны и осью вращения полости
u_r	радиальная компонента мгновенной скорости жидкости
u_φ	азимутальная компонента мгновенной скорости жидкости
u_z	осевая компонента мгновенной скорости жидкости

u	средняя по пространству осцилляционная скорость жидкости в меридиональной плоскости полости
$\tilde{u}$	скорость пульсационного движения жидкости вблизи внешней границы полости
ξ_φ	φ-компонента мгновенной завихренности
ξ_z	z-компонента мгновенной завихренности
$<\xi_\varphi>$	φ-компонента завихренности осреднённого по периоду воздействия течения
$<\xi_z>$	z-компонента завихренности осреднённого по периоду воздействия течения
Δu_φ	азимутальная скорость осреднённого зонального течения
$<u_z>$	осевая скорость осреднённого течения
$<u>$	средняя по пространству и времени осцилляционная скорость жидкости в меридиональной плоскости полости
$<u_\varphi>$	средняя по пространству и времени осцилляционная скорость жидкости в поперечном сечении полости
$<U>$	средняя по пространству и времени безразмерная осцилляционная скорость жидкости в меридиональной плоскости полости
V	z-компонента безразмерной скорости осреднённого течения
$\Delta\Omega$	осреднённая по периоду воздействия угловая скорость зонального течения (дифференциального вращения жидкости)
$\Delta\Omega^g$	гравитационная компонента скорости зонального течения
$\Delta\Omega^v$	вибрационная компонента скорости зонального течения
$\Delta\Omega^E$	угловая скорость дифференциального вращения жидкости, связанная с Экмановской циркуляцией
$\Delta\Omega^{lib}$	либрационная компонента скорости дифференциального вращения жидкости
Ω_C	угловая скорость вращения свободного ядра в лабораторной системе отсчёта

$\Delta\Omega_C$	угловая скорость дифференциального вращения свободного ядра
$\Delta\Omega_C^g$	гравитационная компонента скорости дифференциального вращения свободного ядра
$\Delta\Omega_C^v$	вибрационная компонента скорости дифференциального вращения свободного ядра
$\Delta\Omega_C^{lib}$	либрационная компонента скорости дифференциального вращения свободного ядра
$\langle\Delta\Omega\rangle_\varphi$	осреднённая по периоду воздействия и по азимуту угловая скорость зонального течения (дифференциального вращения жидкости)
$\mathrm{M}(n,m,k)$	инерционная мода в цилиндре с осевым (n), радиальным (m) и азимутальным (k) волновыми числами
$\mathrm{A}(n,m)$	волновой аттрактор с n и m отражениями от горизонтальных и вертикальных стенок соответственно
$\mathrm{C}(n,m)$	режим симметричного распространения волновых лучей с n и m отражениями от горизонтальных и вертикальных стенок соответственно
σ_{theory}	безразмерная собственная частота инерционной моды в цилиндре
$\tilde{k}_h$	безразмерное волновое число горизонтальных структур из тяжёлых частиц на границе цилиндра
$\tilde{k}_v$	безразмерное волновое число вертикальных структур из тяжёлых частиц на границе цилиндре
$\omega_{1,2\ldots}$	частоты инерционных волн / собственных колебаний ядра
$n_{1,2\ldots}$	безразмерные частоты инерционных волн в сферическом (кольцевом) слое
$\sigma_{1,2\ldots}$	безразмерные частоты инерционных волн в либрирующем цилиндре
$n_{\pm}^*$	безразмерные частоты собственных колебаний ядра
$\Delta\psi$	амплитуда либрационного отклика ядра на либрации полости
k	азимутальное волновое число субгармоник

T	неустойчивость триадного резонанса (T-режим)
P	параметрическая неустойчивость триадного резонанса (P-режим)
L	неустойчивость триадного резонанса с медленной низкочастотной компонентой (L-режим)
Iv	осреднённая вихревая система вблизи оси вращения в сферическом слое при отстающих колебаниях ядра
RW	волны Россби в сферическом слое / кольцевом слое
Ov	осреднённая вихревая система на периферии сферического слоя при отстающих колебаниях ядра
$\Delta\Omega_I$	фазовая скорость Iv
$\Delta\Omega_R$	фазовая скорость RW в сферическом слое / кольцевом слое / вращающегося в ретроградном направлении осреднённого вихревого кластера в цилиндре
$\Delta\Omega_O$	фазовая скорость Ov
$\Delta\Omega_T$	фазовая скорость вихревого кластера, связанного с неустойчивостью триадного резонанса
k_I	азимутальное волновое число Iv
k_R	азимутальное волновое число RW в сферическом слое / кольцевом слое / вращающегося в ретроградном направлении осреднённого вихревого кластера в цилиндре
k_O	азимутальное волновое число Ov
k_L	азимутальное волновое число осреднённых структур, связанных с неустойчивостью в L-режиме
k_T	азимутальное волновое число осреднённых структур, связанных с неустойчивостью в T- режиме
k_P	азимутальное волновое число осреднённых структур, связанных с неустойчивостью в P- режиме
Ro	число Россби
Ro_b	вибрационный аналог числа Россби

E	число Экмана
Re	число Рейнольдса
Re^{g}	число Рейнольдса, рассчитанное через гравитационную компоненту скорости дифференциального вращения свободного ядра
Re^{v}	число Рейнольдса, рассчитанное через вибрационную компоненту скорости дифференциального вращения свободного ядра
Re_{p}	пульсационное число Рейнольдса
Re_{b}	вибрационное число Рейнольдса
Re_{Γ}	число Рейнольдса, рассчитанное через величину внешнего воздействия на ядро
$\tilde{\omega}$	безразмерная частота колебаний жидкости
Γ	безразмерное ускорение поля силы тяжести
Ψ	безразмерный комплекс, определяющий безразмерную скорость дифференциального вращения свободного ядра и жидкости в сферическом слое

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Фундаментальные задачи гео- и астрофизической гидродинамики во многом строятся на исследовании динамики вращающихся жидкостей. Масштабы охватываемых явлений колоссальны: от глобальной циркуляции океанических и атмосферных масс до конвективных движений в звёздах и жидких ядрах планет. Во всех случаях определяющую роль играет вращение, которое посредством действия сил инерции (центробежной силы и силы Кориолиса) определяет структуру течений и их устойчивость. При этом действующая на частицы жидкости сила Кориолиса играет роль квазиупругой возвращающей силы, определяя дисперсионные характеристики среды и обусловливая существование так называемых *инерционных волн* [1–3]. Активно участвуя в динамике вращающихся жидкостей, инерционные волны вносят существенный вклад в функционирование природных систем, выступая в качестве одного из механизмов переноса энергии, влияя на долговременную эволюцию вращения звёзд и планет [4, 5]. В реальных условиях эффекты вращения, как правило, сосуществуют с эффектами стратификации плотности и температуры, приводя к появлению инерционно-гравитационных волн, совместное действие которых существенно обогащает спектр режимов течений жидкости [6]. Понимание того, каким образом энергия глобальных процессов, связанных с приливным гравитационным взаимодействием, сейсмической активностью, ветрами и крупномасштабными конвективными движениями трансформируется в энергию инерционных волн, остаётся одной из важнейших задач геофизики [7].

Инерционные волны являются поперечными и подчиняются необычному дисперсионному соотношению, согласно которому направление волнового вектора относительно оси вращения зависит только от частоты. Благодаря этому в системах со сложной топографией дна возможны ситуации, когда энергия волн фокусируется в относительно узких зонах, а не рассеивается равномерно по объёму полости. Данное направление имеет сравнительно недавнюю историю. Одним из примеров фокусировки волн являются *волновые аттракторы* [8], наличие которых может приводить к усиленной диссипации энергии [9–11]. Предполагается,

что аттракторы инерционных волн могут возникать в жидких ядрах или подповерхностных океанах планет и спутников Солнечной системы [12, 13]. Ключевые работы по динамике аттракторов были опубликованы в конце 1990-х годов Лео Маасом (Утрехтский университет), и до настоящего времени основное внимание уделялось исследованию структуры и характеристик линейных режимов [8, 14–16]. Интересно, что во вращающихся сферических слоях жидкости волновые аттракторы являются практически единственными решениями задачи на собственные значения (Мишель Риторд, университет г. Тулузы [17–19]). Для условий планетарных масштабов наибольший интерес представляет нелинейная динамика, переход к которой, как правило, осуществляется посредством волнового каскада триадных взаимодействий. Так, энергия крупномасштабных течений передается на меньшие масштабы, где происходит её диссипация за счёт вязкости. Данный механизм существенно влияет не только на вертикальное перемешивание в океанах и атмосферах [20–22], но и на процессы генерации магнитных полей [23] и *зонального* (осреднённого азимутального) течения в конвективных оболочках [24]. Существенный вклад в исследование нелинейных режимов волновых аттракторов внутренних волн внесли работы сотрудников Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Высшей нормальной школы г. Лиона и МГУ им. М. В. Ломоносова [25–29], которые показали, что каскадные волновые процессы в аттракторе приводят к возникновению волновой турбулентности. Другой тип резонанса в замкнутых полостях связан с собственными колебаниями вращающейся жидкости – *инерционными модами* [18, 30, 31, А6]. Последние представляют собой крупномасштабные осциллирующие вихревые структуры и время от времени идентифицируются в жидком ядре Земли посредством анализа сейсмических данных [32, 33]. Пространственная структура мод, а также дискретный набор значений собственных частот определяются геометрией полости. При этом вопросы об экспериментальной идентификации инерционных мод во вращающихся сферических слоях реальной вязкой жидкости остаются открытыми.

В модельных задачах традиционно используют следующие способы внесения возмущений в систему: прецессия оси вращения [34, 35], упругие приливные

деформации полости [36, 37], а также периодические изменения скорости вращения – либрации [38, 39, A7]. Эти способы гармонического воздействия («*форсинга*») являются наиболее типичными для ротационной динамики планетарных тел и обусловлены их гравитационным взаимодействием [40]. Данное направление развивается теоретически и экспериментально несколькими исследовательскими группами, каждая из которых фокусируется на своих ключевых задачах. Работы коллектива Бранденбургского технического университета (г. Котбус, Германия) под руководством Кристофа Эгберса и Уве Харландера посвящены экспериментальному и численному изучению инерционных волн в полостях различной геометрии (кольцевой слой, кольцевой слой с усеченным внутренним конусом, сферический слой), возбуждаемых либрациями [41–43]. Они одними из первых экспериментально методом PIV (Particle Image Velocimetry) обнаружили волновой аттрактор в сферическом слое [41] и в настоящее время интересуются вопросами нелинейного взаимодействия гармоник [44] и генерации среднего течения пограничными слоями [45, 46]. Также они показали, что в нелинейном режиме инерционные моды могут испытывать неустойчивость триадного резонанса в дифференциально вращающемся сферическом слое в отсутствие дополнительного гармонического воздействия на систему [47–49]. При этом постановка задачи подразумевает классическое течение Куэтта, когда дифференциальное вращение задаётся искусственным образом. Группа Мишеля Ле Барса из университета Экс-Марсель (Франция) сосредоточена на теоретическом, численном и экспериментальном анализе фундаментальных механизмов возбуждения инерционных волн, обусловленных либрациями, прецессией и приливным воздействием [40, 50, 51]. Особое внимание уделяется эллиптической неустойчивости и её роли в генерации магнитных полей планет [52]. Зональные течения в турбулентных режимах [40] могут обладать огромной энергией и рассматриваться как альтернатива конвективному динамо [53, 54]. Вместе с тем влияние линейных режимов инерционных волн на осреднённые течения нередко остаётся вне теоретического поля зрения, а экспериментально и вовсе не рассматриваются.

В реальных планетарных телах внутренние ядра свободны (не связаны жестко с мантией) и обладают набором собственных частот, часто называемым «*триплетом Слихтера*», природа которых связана с ненулевой плавучестью ядер [55–60]. Одна из мод соответствует трансляционным колебаниям вдоль оси вращения, другие две моды – круговым колебаниям в экваториальной плоскости (по направлению вращения и против направления вращения Земли). Каждая из этих мод может возбуждаться резонансным образом в случае внешнего периодического воздействия с собственной частотой и выступать в качестве источника инерционных волн [А5] и сильно влиять на структуру зонального течения и его устойчивость [А1, А4]. Данное направление, инициированное проф. В. Г. Козловым [61, 62] (лаборатория вибрационной гидромеханики Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета), развивает автор диссертации.

Таким образом, динамика инерционных волн во вращающихся полостях является объектом активных исследований. При заметном прогрессе в теоретическом описании линейных режимов, данные по их экспериментальной верификации в зависимости от частоты вносимых возмущений остаются фрагментарными. Особого внимания заслуживает нелинейная динамика инерционных волн в условиях дифференциального вращения жидкости и сложной топографии границ. В частности, до сих пор отсутствует чёткая классификация нелинейных режимов во вращающихся сферических слоях и понимание их роли в устойчивости зональных течений. Прямое же численное моделирование сугубо трехмерных нелинейных волновых эффектов остается трудоемкой и ресурсозатратной задачей. Диссертационная работа призвана восполнить некоторые из этих пробелов в отношении эксперимента как доступного и надёжного источника данных. Поскольку отдельные свойства инерционно-волновых режимов удобнее изучать в упрощённых конфигурациях, работа построена по принципу последовательного усложнения геометрии: от цилиндра с прямыми торцами к цилиндру с наклонными торцами, затем к кольцевому и, наконец, сферическому слою. При этом важно отметить, что даже слабое изменение формы полости, например, изменение осевой симметрии торцевых стенок, коренным образом меняет характер течения. Это позволяет

управлять эффектами, которые выходят на первый план, будь то фокусировка [А2, А3, А14], азимутальный захват [А11, А13] или возбуждение неосесимметричных модовых колебаний [А2, А23].

Целью диссертационной работы является экспериментальное выявление закономерностей формирования инерционно-волновых режимов и структуры осреднённых течений во вращающихся полостях. Для поддержания волнового движения используется несколько типов гармонического воздействия на жидкость: либрации полости (периодические изменения скорости вращения) с азимутальным волновым числом $k = 0$; прецессия диска и круговые колебания ядра с $k = \pm 1$, что позволяет исследовать влияние направления распространения возмущений относительно глобального вращения.

Задачи диссертационной работы:

1. Разработка и изготовление экспериментальных установок и кювет, методики определения мгновенных и осреднённых полей скорости.

2. Изучение пространственной структуры линейных инерционно-волновых режимов (волновые аттракторы, инерционные моды, нерезонансные замкнутые волновые траектории) в зависимости от частоты и способа внесения возмущений в систему, а также геометрии полости.

3. Разработка двумерной лучевой модели, описывающей траектории инерционных волн, и сопоставление расчётных результатов с экспериментом.

4. Изучение влияния инерционных волн на структуру осреднённого (по периоду колебания) течения (азимутального и меридионального), определение безразмерных комплексов, ответственных за скорость течения.

5. Изучение нелинейного отклика свободного ядра во вращающейся сферической полости с жидкостью на внешнее силовое поле (вращающееся в системе отсчёта полости поле силы тяжести, инерционное поле вибраций, либрации полости).

6. Изучение влияния дифференциального вращения внутреннего ядра на структуру и скорость осреднённого течения во вращающейся сферической полости с жидкостью.

7. Изучение инерционно-волновых каскадных процессов в полостях различной формы (цилиндр с наклонными торцами, кольцевой слой, сферический слой).

8. Классификация нелинейных режимов инерционных волн и определение их роли в устойчивости зональных течений; определение основных безразмерных комплексов, влияющих на пороги неустойчивостей.

9. Изучение нелинейной надкритической динамики осреднённых течений во вращающемся сферическом слое в зависимости от направления и частоты колебания ядра, наличия/отсутствия дифференциального вращения, чисел Экмана и Рейнольдса.

Научная новизна. Разработан комплекс оригинальных экспериментальных методик, позволяющих выполнять PIV-визуализации мгновенных полей скорости во вращающихся полостях произвольной геометрии, основываясь на анализе данных, полученных в неподвижной лабораторной системе отсчёта.

Впервые обнаружена меридиональная циркуляция, возбуждаемая инерционными колебаниями жидкости в пограничных слоях. Во вращающемся цилиндре впервые экспериментально реализованы волновые аттракторы. Обнаружение эффекта азимутального захвата волн является первым экспериментальным подтверждением существования так называемого супер-аттрактора, до этого предсказанного теоретически [63, 64]. Впервые во вращающемся цилиндре определены законы масштабирования ширины сдвиговой зоны и скорости жидкости в инерционных волнах в зависимости от числа Экмана, а также механизмы неустойчивости зонального течения, возбуждаемого волновым аттрактором и инерционной модой.

Впервые экспериментально реализована модельная система, в которой поддерживается неосесимметричный волновой аттрактор в условиях эквивалентного топографического бета-эффекта при неосесимметричном воздействии (прецессия). Экспериментально подтверждено, что аттрактор возникает только при ретроградном воздействии на жидкость. Впервые продемонстрировано, что механизм генерации зонального течения аттрактором связан с нелинейными эффектами в пограничном слое на наклонной торцевой стенке полости (аналогичные вы-

воды сделаны для геометрии сферического слоя): структура осреднённого течения полностью определяется положением точек фокусировочного отражения волн от границ. В нелинейном волновом режиме впервые обнаружен переход к крупномасштабным структурам (волнам Россби) через инверсию направления зонального течения.

Для вращающегося сферического слоя впервые обнаружен параметрический режим колебаний инерционных волн на половине частоты воздействия (P-режим). Впервые предложена чёткая классификация нелинейных режимов, включающая классический триадный резонанс с парами субгармоник различных частот (T-режим) и низкочастотный режим (L-режим). Впервые обнаружено, что триадный резонанс может одновременно реализовываться в разных областях вращающейся жидкости с одинаковыми частотами, но разными волновыми числами.

Впервые исследованы осреднённые течения и их устойчивость в сферическом слое при круговых колебаниях ядра. Показано, что механизм неустойчивости связан с наличием точек перегиба в осреднённом профиле скорости, а пороги неустойчивостей характеризуются одним безразмерным комплексом – числом Рейнольдса. Впервые экспериментально показано, что собственное дифференциальное вращение свободного ядра и его колебания являются двумя независимыми источниками течения, подчиняющегося (в докритической области) принципу линейной суперпозиции. Аналогичный принцип суперпозиции характерен для многочастотных колебаний во вращающихся системах. Впервые обнаружено, что при низкочастотных либрациях полости в спектре инерционного отклика ядра содержатся его собственные трансляционные круговые моды.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа вносит значительный вклад в развитие актуального научного направления – «гидродинамика вращающихся жидкостей». Постановки задач отличаются оригинальностью и позволяют моделировать в лабораторных условиях разнообразные линейные и нелинейные режимы инерционных волн, характерные для природных систем. Разработанная методика изучения мгновенных полей скорости во вращающихся

системах отсчёта при помощи неподвижных в лабораторной системе отсчёта камеры и лазера может быть пригодной для любых экспериментов, где есть быстрое вращение и источник колебаний. В ряде случаев такой подход может существенно сократить трудовые и финансовые затраты на приобретение дорогостоящего оборудования, необходимого для создания установок с непосредственной визуализацией течений в системе отсчета полости. Таким образом, результаты важны для развития экспериментальных методов гидродинамики и могут быть внедрены в практику научных лабораторий, занимающихся изучением вращающихся жидкостей.

Результаты исследований могут использоваться в промышленности в качестве инструмента для управления тепло- и массопереносом. В частности, возбуждение инерционных колебаний жидкости предполагает генерацию интенсивных осреднённых течений, которые способны обеспечить быстрое равномерное перемешивание, в том числе высоковязких и чувствительных к сдвигу компонентов. Количественные данные, полученные в диссертации, могут использоваться для конкретных рекомендаций по выбору геометрии полости, а также амплитуды и частоты воздействия для достижения максимальной интенсивности перемешивания при минимальных энергозатратах. Это особенно важно для пищевой, химической и фармацевтической промышленности, где требуется гомогенизация вязких сред. Полученные закономерности являются основой для создания биореакторов для культивирования чувствительных к сдвиговым напряжениям клеток (микроорганизмы, микроводоросли). В свою очередь формы полостей позволят организовать круговое освещение жидкости, что критически важно для фототрофных микроорганизмов, и могут быть масштабированы до промышленных объёмов в сотни литров без потери эффективности перемешивания. Результаты изучения осреднённых течений защищены патентом на полезную модель «Перемешиватель жидкостей» [Б1], что подтверждает их практическую значимость и возможность внедрения в промышленность.

Стоит отметить, что гармоническое воздействие не всегда является полезным эффектом и в ряде технических случаев может обернуться серьёзными по-

следствиями. Например, в баллистике одним из способов стабилизации летательных аппаратов (ракет или спутников) является их собственное вращение. В то же время даже малое возмущение способно вывести жидкое топливо в баке из состояния твердотельного вращения, переведя его в колебательный режим, тем самым воздействуя на траекторию самого объекта. Это указывает на важность умения предсказывать динамику вращающихся гидродинамических систем при действии внешних осложняющих факторов.

Методология и методы исследования. Основные данные о характеристиках мгновенных и осреднённых полей скорости получены с помощью современного бесконтактного метода PIV (Particle Image Velocimetry). Для изучения течений в пристеночных областях полости использовались тяжёлые частицы различного размера (мелкие и сравнимые по величине с толщиной пограничного слоя). В отдельных экспериментах для визуализации объемных течений применялась электрохимическая методика с тимоловым индикатором. Кросс-корреляционная обработка последовательностей изображений выполнялась в хорошо зарекомендовавшей себя бесплатной программе PIVlab [65, 66]. Для предварительной пакетной обработки изображений использовались самостоятельно разработанные программы, написанные в MATLAB. Для интерпретации экспериментальных данных использовалась лучевая модель трассировки инерционных волн, также реализованная в MATLAB [Б2, Б3]. Спектральный анализ мгновенных полей скорости выполнялся с использованием оконного преобразования Фурье.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Структуры осцилляционных течений во вращающейся полости могут быть восстановлены путём анализа последовательности изображений, полученных с помощью неподвижной в лабораторной системе отсчёта камеры с частотой съёмки, кратной частоте вращения полости.

2. Частота гармонического воздействия определяет пространственную структуру режимов фокусировки инерционных волн в полостях с наклонными относительно оси вращения границами и условия реализации глобальных инерци-

онных мод, приводящих к резонансному увеличению скорости осцилляционного течения.

3. Структура осреднённого зонального течения в виде системы вложенных геострофических жидких цилиндров, вращающихся с различными угловыми скоростями, определяется положением точек отражения инерционных волн от границ полости, а его скорость квадратичным образом зависит от амплитуды колебаний жидкости.

4. Осреднённая меридиональная циркуляция вблизи боковой стенки вращающихся цилиндрических полостей обусловлена инерционными колебаниями в объёме жидкости, а её пространственная структура задаётся осевым волновым числом инерционной моды.

5. Результирующее дифференциальное вращение жидкости во вращающейся сферической полости является линейной суперпозицией осреднённых эффектов, возбуждаемых осцилляциями внутреннего ядра с различными частотами.

6. Дифференциальное вращение свободного ядра во вращающейся сферической полости генерирует стационарную экмановскую циркуляцию, аддитивным образом влияющую на зональное течение вибрационной природы.

7. Причиной неустойчивости зональных течений, проявляющейся в виде системы квазидвумерных валов, является развитие по сценарию триадных взаимодействий нелинейных режимов инерционных волн.

8. Пороги неустойчивостей зонального течения, возбуждаемого осциллирующим ядром во вращающейся сферической полости, на порядок ниже, чем в случае с неустойчивостью сдвигового течения в сферическом течении Куэтта.

9. Во вращающейся сферической полости с осциллирующим ядром реализуются три класса нелинейных волновых режимов, различаемых по спектральному составу: триадный резонанс с двумя различными по величие субгармониками, субгармонический параметрический резонанс, низкочастотный режим.

10. Зональное течение приводит к доплеровскому сдвигу частот инерционных волн и смене волновых режимов.

11. Низкочастотные либрации сферической полости возбуждают собствен-

ные трансляционные моды свободного ядра и его вращательные колебания.

Достоверность результатов обеспечена применением современных бесконтактных средств диагностики течений, воспроизводимостью экспериментальных данных, а также их сравнением с известными теоретическими, численными и экспериментальными работами. Кроме того, наблюдаемые режимы течений сравнивались с результатами авторской модели трассировки волновых лучей [Б2, Б3], что подтверждает адекватность выводов.

Апробация результатов. Результаты исследования были представлены на XXI–XXVI международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность (НеЗаТеГиУс)» (Звенигород, 2014, 2016, 2018, 2024, 2026); V–VII Всероссийской конференции с участием зарубежных учёных «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Бийск, 2014, Барнаул, 2017, Красноярск, 2020 (онлайн)); VII международной научной школе молодых учёных «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 2016); международном симпозиуме «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2017, 2021 (онлайн), 2024, 2026); I–III, V, VII–X Пермских гидродинамических научных чтениях (Пермь, 2013, 2014, 2015, 2018, 2020, 2022, 2023, 2025); XVIII–XXIII Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021, 2023); VI–IX Всероссийской научной конференции «Теплофизика и физическая гидродинамика» (Севастополь, 2021, Сочи, 2022, Махачкала, 2023, Сочи, 2024); XI–XIII Всероссийском съезде по фундаментальным вопросам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015, Уфа, 2019, Санкт-Петербург, 2023); Всероссийской конференции молодых учёных-механиков (Сочи, 2018); IX и X Всероссийской конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2020, 2025); XLII и XLV Summer School – Conference «Advanced Problems in Mechanics (APM)» (Санкт-Петербург, 2014, 2017); X European Fluid Mechanics Conference (EFMC) (Копенгаген, 2014); 65–67 International Astronautical Congress (Торонто, 2014, Иерусалим, 2015, Гвадалахара, 2016); XIX International Couette-Taylor Workshop (ICTW) (Котбус, 2015); VI и VIII International Symposium on Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics

(BIFD) (Париж, 2015, Лимерик, 2019); XVIII International Conference «Fluxes and Structures in Fluids» (Калининград, 2015); XXIV и XXVI ELGRA Biennial Symposium and General Assembly (Корфу, 2015, Гранада, 2019); XXIV и XXVI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM) (Монреаль, 2016, Тэгу, 2024); Всероссийской конференции «Механика в новых материалах, конструкциях, технологиях» (Пермь, 2026); Школе-конференции «Современная гидродинамика» (Черноголовка, 2026). Результаты диссертации обсуждались на Пермском городском гидродинамическом семинаре им. Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова (рук. проф. Т.П. Любимова), а также семинаре лаборатории вибрационной гидромеханики ПГГПУ (рук. проф. В.Г. Козлов).

Исследования выполнялись при поддержке грантов Российского научного фонда №14-11-00476 (исполнитель), 18-71-10053 и 18-71-10053-П (руководитель), 25-11-00358 (руководитель); Российского фонда фундаментальных исследований №13-01-00675а (исполнитель), №16-31-00169 мол_а и 16-31-90099 мол_а_дк (руководитель); грантов Президента РФ для государственной поддержки научных исследований молодых российских учёных – кандидатов наук №МК-1994.2018.1 и МК-1779.2021.1.1 (руководитель); гранта Правительства Пермского края С-26/1191 для развития и поддержки ведущей научной школы «Вибрационная гидромеханика» (исполнитель); государственного задания Министерства просвещения РФ №1023032300071-6-2.3.1 (исполнитель).

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 27 работ, в том числе 23 [А1–А23] в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень, рекомендованный ВАК. Публикации [А1–А26] индексированы в международных базах данных Web of Science и Scopus, из них 10 [А1–А10] соответствуют изданиям первого квартиля. Публикации [А20–А23] входят в издания RSCI (Russian Science Citation Index). Получены патент на полезную модель «Перемешиватель жидкостей» RU 208677 U1 [Б1] и 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [Б2, Б3].

Личный вклад автора. Работы [А6, А24, А25] выполнены автором лично. В работах [А1, А2, А4–А7, А11–А14, А17, А20, А21, А26, А27, Б1–Б3] автору

принадлежат идеи экспериментов и постановка задач, в [А8–А10, А15, А16, А18, А19] постановка задач обсуждалась вместе с соавторами (В.Г. Козлов, Н.В. Козлов). В [А3, А4, А7–А10, А15, А18, А19, А22, А23, Б1] эксперименты выполнены лично, в [А1, А2, А5, А11–А14, А16, А17, А20, А21, А26, А27] исследования выполнялись под руководством автора диссертации и при его непосредственном участии. Обработка экспериментальных данных в [А7–А9, А15, А18, А22, Б1] выполнена лично, в [А1–А5, А10–А14, А16, А17, А19–А21, А23, А26, А27] – вместе с соавторами (В.В. Дьякова, В.Г. Козлов, Н.В. Козлов, А.С. Четина (Кропачева), Е.В. Ерманюк, М.С. Субботина, Н.Д. Шмакова, М.А. Ширяева). Анализ результатов в [А5, А11, А14, А17, А20, А26, А27, Б1–Б3] принадлежит автору, в остальных публикациях результаты обсуждались и анализировались вместе с соавторами. В частности, в [А1–А4, А7, А9, А12, А16] лично выполнен анализ среднего зонального течения, роли инерционных волн в генерации течения, а также его устойчивости, в [А7, А8] автору принадлежит идея о декомпозиции силовых полей, создаваемых полем силы тяжести и вибрациями для объяснения нарушения осевой симметрии течения, в [А1, А2, А11–А13] принадлежит анализ пульсационного течения, в [А7] принадлежит идея о наличии в спектральном составе релаксационных колебаний ядра собственных трансляционных мод. Также автору принадлежит классификация неустойчивостей в работах [А1, А2, А4]. В [А1–А4, А13, А21] вместе с соавторами принято участие в проведении спектрального анализа азимутального поля скорости, в [А13] автор принимал участие в получении зависимостей скорости сдвигового течения и ширины сдвиговой зоны в инерционной волне от числа Экмана. В [А5, А11–А14, Б2, Б3] автору принадлежит верификация лучевой модели распространения инерционных волн. В [А5, А7, А8, А11, А15–А17, А20–А22, А26, А27] автором диссертации подготовлены исходные тексты статей, в остальных публикациях текст готовился вместе с соавторами. В статьях [А5–А9, А15, А17–А19, А26] лично подготовлен весь иллюстративный материал.

Автором диссертации самостоятельно изготовлены кюветы и экспериментальные установки, использованные в работе; идея новой методики изучения

пульсационного поля скорости во вращающихся системах отсчета при помощи неподвижного в лабораторной системе отсчёта оборудования принадлежит автору диссертации, а её реализация в отдельных экспериментах осуществлялась вместе с М.А. Ширяевой [А1–А5, А11–А14, А20, А21, А26].

Благодарности. Автор диссертационной работы выражает искреннюю благодарность своему учителю д.ф.-м.н. профессору Виктору Геннадьевичу Козлову за многолетнее наставничество, внимание к теме исследований и создание доброжелательной творческой атмосферы в коллективе; к.ф.-м.н. Николаю Викторовичу Козлову за плодотворное сотрудничество и многочисленные содержательные обсуждения результатов экспериментальных исследований на начальном этапе работы; д.ф.-м.н. профессору Евгению Валерьевичу Ерманюку за наставничество в области нелинейной динамики волн, обсуждение многочисленных результатов и помощь в постановке задач; к.ф.-м.н. Наталье Дмитриевне Шмаковой за помощь в спектральном анализе нелинейных режимов инерционных волн, интерпретации полученных данных и дружеское теплое отношение; к.ф.-м.н. Марии Андреевне Ширяевой за активное участие в проведении совместных экспериментов и помощь в обработке многочисленных результатов экспериментов. Автор глубоко признателен за поддержку и вклад в его профессиональное становление коллективу лаборатории вибрационной гидромеханики Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета: д.ф.-м.н. Алевтине Алексеевне Ивановой, к.ф.-м.н. Ольге Андреевне Власовой, к.ф.-м.н. Алексею Анатольевичу Вяткину, к.ф.-м.н. Веронике Вадимовне Дьяковой, к.ф.-м.н. Ивану Эдуардовичу Карпунину, к.ф.-м.н. Денису Александровичу Полежаеву, к.ф.-м.н. Кириллу Юрьевичу Рысину, к.ф.-м.н. Рустаму Рустямовичу Сабирову и к.ф.-м.н. Виталию Дмитриевичу Щипицыну.

Автор выражает благодарность своим девочкам – любимой мамочке, дорогой супруге и маленькой доченьке. Без них работа едва ли была бы написана с тем же чувством и пониманием главного.

Структура работы. Текст диссертационного исследования состоит из введения, шести глав и заключения. Объем работы составляет 408 страниц текста,

включая 172 рисунка, 11 таблиц, список сокращений и условных обозначений, список публикаций по теме диссертации, список литературы из 252 наименований и два приложения.

Во введении сформулированы цель, задачи, актуальность и научная новизна диссертационного исследования, обоснована его практическая и теоретическая значимость.

В первой главе представлен обзор литературы по динамике инерционных волн и осреднённых течений во вращающихся полостях различной геометрии, показано место исследования среди работ других авторов, обоснован выбор задач исследования.

Во второй главе изложены результаты экспериментального исследования линейных и нелинейных инерционно-волновых режимов в цилиндрических полостях с прямыми и наклонными торцами. Для прямого цилиндра установлены законы генерации осреднённого зонального течения и меридиональной циркуляции. Для цилиндра с наклонными торцами впервые описаны линейные и нелинейные режимы инерционных волн, представлена лучевая модель трассировки волн, проведено её сравнение с экспериментами. Исследованы пороги неустойчивости зонального течения в зависимости от числа Экмана.

В третьей главе представлены результаты исследования линейной и нелинейной динамики волнового аттрактора во вращающемся кольцевом слое с коническим дном и прецессирующим диском. Обнаружен каскад нелинейных режимов: от триадного резонанса через волновую турбулентность к крупномасштабным вихревым структурам, идентифицированным как волны Россби.

В четвёртой главе представлены результаты экспериментального исследования инерционных волн и осреднённых течений во вращающемся сферическом слое с колеблющимся внутренним ядром. Установлена взаимосвязь между пространственной структурой волн (критические широты, точки отражения) и системой вложенных геострофических цилиндров в зональном течении. Исследовано влияние дифференциального вращения ядра, а также его многочастотных колебаний на структуру зонального течения.

В пятой главе представлены результаты исследования устойчивости осреднённого зонального течения во вращающемся сферическом слое. Для отстающих колебаний ядра детально изучены различные типы неустойчивостей в зависимости от числа Экмана и наличия дифференциального вращения ядра; построены карты режимов течений. Для опережающих колебаний детально изучены нелинейные режимы инерционных волн и проведена их классификация. Определены дисперсионные соотношения и влияние волн на надкритическую структуру зонального течения.

В шестой главе представлены результаты исследования динамики свободного ядра и жидкости в сферической полости при либрациях. Исследованы законы инерционного отклика ядра в широком диапазоне частот либраций, выполнен спектральный анализ частот релаксационных колебаний ядра.

В заключении сформулированы основные выводы.

ГЛАВА 1. ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОЛОСТЯХ

1.1. Общие свойства вращающейся жидкости

Кратко рассмотрим основные теоретические концепции динамики вращающихся жидкостей, опора на которые будет использоваться в диссертации. Для описания движения равномерно вращающейся жидкости с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_{rot}$ используется уравнение Навье–Стокса в неинерциальной системе отсчёта, которая движется вместе с жидкостью, и уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = \nu\Delta\mathbf{u} - \frac{1}{\rho_L}\nabla p - 2[\mathbf{\Omega}_{rot}\times\mathbf{u}] - \mathbf{\Omega}_{rot}\times[\mathbf{\Omega}_{rot}\times\mathbf{r}], \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u}, \nu, \rho_L, p$ – скорость частицы жидкости, кинематическая вязкость, плотность жидкости и давление. В уравнении появляются два новых члена, соответствующие действию двум фиктивным силам – силе Кориолиса и центробежной силе. Последний член является безвихревым, поэтому его можно представить в виде градиента от скалярной функции и объединить с давлением:

$$\mathbf{\Omega}_{rot}\times[\mathbf{\Omega}_{rot}\times\mathbf{r}] = -\nabla\frac{\left[\mathbf{\Omega}_{rot}\times\mathbf{r}\right]^2}{2}, \tag{1.3}$$

$$P = p - \frac{\rho_L}{2}\left[\mathbf{\Omega}_{rot}\times\mathbf{r}\right]^2. \tag{1.4}$$

Тогда уравнение движения будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = \nu\Delta\mathbf{u} - \frac{1}{\rho_L}\nabla P - 2[\mathbf{\Omega}_{rot}\times\mathbf{u}]. \tag{1.5}$$

Для жидкости, вращающейся в полости радиуса R с постоянной скоростью $\mathbf{\Omega}_{rot} = \Omega_{rot}\mathbf{e}_z$, введём следующие единицы измерения [1 (стр. 12)]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* U, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}^* R, \quad t = t^*/\Omega_{rot}, \quad \nabla = \nabla^*/R, \quad P = P^*\Omega_{rot}\rho_L RU. \tag{1.6}$$

Тогда, опуская звёздочки, уравнение (1.5) можно записать в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathrm{Ro}(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = \mathrm{E}\Delta\mathbf{u} - \nabla P - 2[\mathbf{e}_z\times\mathbf{u}]. \tag{1.7}$$

В полученном выражении появляются два важных безразмерных параметра. Первый называется *числом Россби*, характеризующим отношение конвективного (нелинейного) члена в уравнении движения к силе Кориолиса:

$$\mathrm{Ro} = \frac{U}{\Omega_{rot} R}. \tag{1.8}$$

Вторым параметром является *число Экмана*, которое сравнивает вязкие силы с силой Кориолиса:

$$\mathrm{E} = \frac{\nu}{\Omega_{rot} R^2}. \tag{1.9}$$

Комбинация этих чисел даёт *число Рейнольдса,* равное отношению конвективного члена к вязкому:

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Ro} \cdot \mathrm{E}^{-1} = \frac{UR}{\nu}. \tag{1.10}$$

Огромные пространственные размеры природных объектов приводят к выводу о доминирующем влиянии силы Кориолиса, поэтому с геофизической точки зрения наибольший интерес представляет область $\mathrm{Ro} \ll 1$, $\mathrm{E} \ll 1$. Например, оценка числа Экмана для жидкого ядра Земли, где молекулярная вязкость предполагается равной $\nu = 10^{-6}\,\text{м}^2/\text{с}$, радиус $R = 3500\,\text{км}$, а угловая скорость осевого вращения $\Omega_{rot} = 7.3 \cdot 10^{-5}\,\text{рад/с}$, приводит к $\mathrm{E} \sim 10^{-15}$ [50]. На рис. 1.1 приведена карта безразмерных параметров для планетарных тел и существующих лабораторных и численных экспериментов по моделированию течений. Видно, что реальные природные системы находятся в широком диапазоне временных и пространственных масштабов и соответствуют экстремально низким значениям E, когда движение жидкости становится сильно турбулентным. Это явно недостижимо для непосредственного моделирования в лаборатории. Если говорить о прямом численном счёте (DNS) на современных мощных компьютерах, то уже для $\mathrm{E} \sim 10^{-7}$ и $\mathrm{Re} \sim 10^{3}$ подобные процедуры занимают месяцы всего лишь для нескольких характерных времен вращения [67], поэтому систематические исследования долговременной динамики в DNS недоступны. Кроме того, численные задачи усложняются при учёте реальной топографии. Поэтому одной из ключевых трудностей перехода к моделям реальных гео- и астрофизических объектов является приближение к соответствующему диапазону безразмерных параметров. Другой сложностью является учёт разнообразных механизмов движения, в том числе конвекции, которая в данном обзоре и диссертации в целом не рассматри-

вается. Из-за этого огромного разрыва большинство исследований динамики вращающихся жидкостей молчаливо предполагают асимптотическое приложение результатов, основанное на принципе динамического подобия. Это позволяет хотя бы приблизительно оценить, насколько далеки теория и эксперименты от реальных приложений. При таком подходе лабораторные эксперименты оказываются наиболее ценными и полезными, поскольку позволяют систематически исследовать динамику и длительную эволюцию системы в широком диапазоне управляющих параметров. Для определённости необходимо указать, что в диссертации диапазон рассматриваемых чисел Экмана составляет $\mathrm{E} \sim 10^{-5} \div 10^{-2}$. Характерные значения чисел Экмана и Рейнольдса для спутников Солнечной системы можно найти в [68].

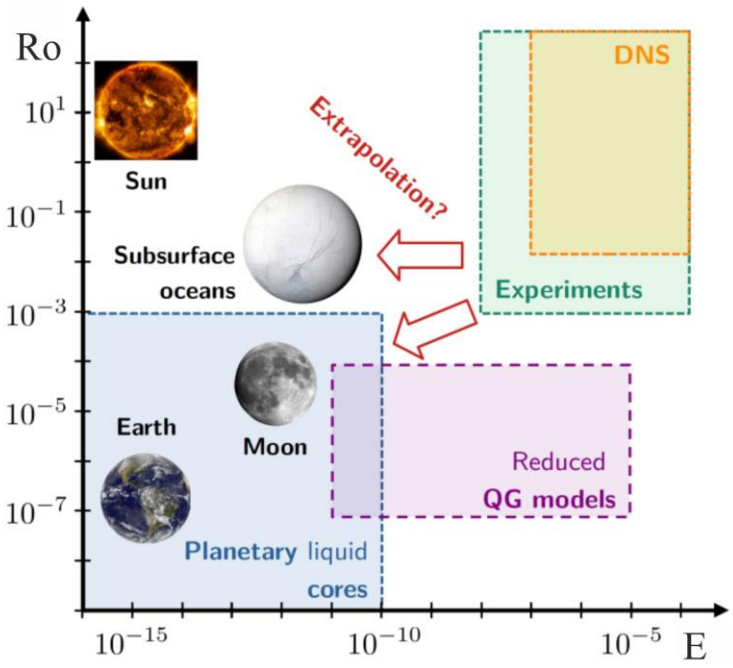


Рисунок 1.1 – Характерные значения чисел Россби и Экмана для реальных гео- и астрофизических систем, а также место существующих модельных экспериментов и численного счёта; адаптировано из [69]

Одним из наиболее поразительных и красивых эффектов, связанных с вращением, является тенденция к сохранению двумерности. Рассматривая случай невязкого стационарного течения в пределе низких чисел Россби, уравнение Навье–Стокса (1.7) сводится к

$$\nabla P = -2[\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}]. \qquad (1.11)$$

Беря ротор от этого выражения и используя уравнение неразрывности (1.2), получим

$$\left(\mathbf{e}_z \cdot \nabla\right)\mathbf{u} = 0\,. \tag{1.12}$$

Если ось вращения направлена вдоль оси *z*, то

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0\,. \tag{1.13}$$

Данное выражение отражает суть теоремы Тейлора–Праудмена: компоненты скорости невязкой быстро вращающейся жидкости не изменяются в направлении вектора $\mathbf{\Omega}_{rot}$. Другими словами, столб вращающейся жидкости, заключённый между двумя параллельными стенками, должен иметь одинаковую скорость по всей своей высоте. Этот результат особенно важен в приложении к океаническим движениям, где топография порождает возмущения в виде столбов. Такие течения, где градиент давления уравновешивается силой Кориолиса, называются *геострофическими*, а их классическим примером является так называемый *столбик Тейлора–Праудмена*, теоретически предсказанный Праудменом [70] и вскоре экспериментально подтверждённый Тейлором [71]. Примеры реализации столбчатого течения можно найти в экспериментах с всплывающими сферами [72], а также при дифференциальном вращении твёрдых тел, закреплённых на оси вращения [73] (рис. 1.2*а*, *б*)[1]. Вне столбика жидкость вращается как единое целое со скоростью, равной скорости вращения всей системы, а внутри – с промежуточной скоростью тела и внешней жидкости [73, 74]. В результате дифференциального вращения и тангенциального разрыва азимутальной компоненты скорости на поверхности столбика Тейлора–Праудмена формируются сдвиговые слои, получившие название *слоёв Стюартсона*. Последние имеют сложную вложенную структуру. В двумерной постановке внешний слой сглаживает резкий скачок скорости жидкости на границе столба и характеризуется толщиной $\delta_S^o \sim \mathrm{E}^{1/4}$. Внутренний слой толщиной $\delta_S^i \sim \mathrm{E}^{1/3}$ обеспечивает меридиональную циркуляцию [75]. На рис. 1.2*в* приведена схема формирования свободных сдвиговых слоёв на примере движения жидкости между двумя дисками, совершающими дифференциальное вращение в

[1] В зарубежной литературе граница столба Тейлора–Праудмена в геометрии сферического слоя часто называется «касательным» или «тангенциальным» цилиндром (tangent cylinder).

цилиндрической полости [76]. Отметим, что из-за разности градиентов давления вблизи твёрдых границ и в объёме жидкости возникают тонкие пограничные *слои Экмана* толщиной $\delta_E \sim \mathrm{E}^{1/2}$, где появляется радиальная циркуляция, выбрасывающая жидкость в слой δ_S^i. В литературе принято называть механизм этого движения «экмановской подкачкой» (Ekman pumping), а наглядным примером её реализации является радиальное движение чаинок в чашке к центру при помешивании.

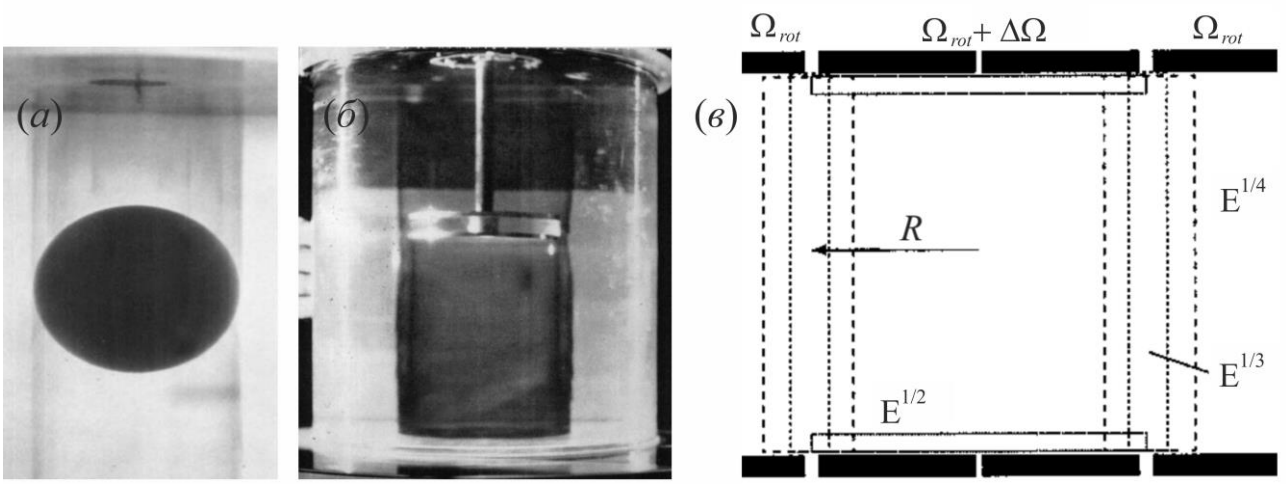


Рисунок 1.2 – Визуализация красителем границы столбика Тейлора–Праудмена при (*а*) всплывании свободной лёгкой сферы [72] и (*б*) слабом дифференциальном вращении диска [73] во вращающемся цилиндре. На фрагменте (*в*) приведена схема сдвиговых слоёв в постановке из [76]

В сферическом слое, образованном двумя концентрическими сферами, вращающимися с различными скоростями, структура сдвиговых слоёв осложняется дополнительным сдвиговым слоем промежуточной толщины $\delta_S^M \sim \mathrm{E}^{2/7}$, который устраняет сингулярность в распределении азимутальной скорости на касательной к экваториальной поверхности внутренней сферы [77 (рис. 1)]. Слои Стюартсона в сферической постановке были численно воспроизведены Р. Холлербахом [78, 79] и Э. Дорми с коллегами [80] вплоть до чисел Экмана $\mathrm{E} \sim 10^{-7}$, причём в обоих случаях было получено хорошее согласие с асимптотической теорией.

1.2. Инерционные волны

Перейдем к рассмотрению волнового движения во вращающейся жидкости. Исторически первые результаты в этой области принадлежат Кельвину [81]. В равномерно вращающейся жидкости центробежная сила, действующая на частицы, уравновешивается радиальным градиентом давления. Если частица жидкости смещается наружу в радиальном направлении, то в силу закона сохранения момента импульса её азимутальная скорость должна уменьшиться. В новом положении центробежная сила уже не уравновешивается градиентом давления, поэтому частица стремится вернуться в свое прежнее положение. В отсутствие вязкости такое движение эквивалентно поляризованным по кругу колебаниям под действием силы Кориолиса в антициклоническом направлении с частотой $2\Omega_{rot}$ (рис. 1.3*а*). Если частота колебаний ω меньше удвоенной скорости вращения системы, частицы жидкости выходят из плоскости, поперечной оси вращения и описывают круги в плоскостях, нормаль к которым составляет угол β с вектором $\mathbf{\Omega}_{rot}$. Это прямое следствие выполнения закона сохранения момента импульса и уравнения неразрывности. Следуя О. Филлипсу, удобно разложить вектор $\mathbf{\Omega}_{rot}$ на компоненту, параллельную волновому вектору $\mathbf{k}$, и перпендикулярную ему [82]. Тогда в плоскости движения проекция силы Кориолиса $2\Omega_{rot} u\cos\beta$ обеспечивает круговое движение с уже меньшим центростремительным ускорением ωu. Кроме того, в системе появляется дополнительный градиент давления, необходимый для компенсации нормальной (перпендикулярной плоскости движения) составляющей силы Кориолиса. Поскольку плоскость движения частиц есть поверхность постоянной фазы, градиент давления определяет направление фазовой скорости вдоль нормали к плоскости, что и придаёт волне поперечную структуру и круговую поляризацию.

Дадим краткий вывод дисперсионного соотношения для инерционных волн [2], для этого будем рассматривать движение вращающейся жидкости в пределе $\mathrm{Ro},\ \mathrm{E} << 1$, тогда уравнение (1.7) сводится к

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2[\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}] = -\nabla P\,. \tag{1.14}$$

Взяв ротор от этого выражения и используя уравнение неразрывности, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\,. \tag{1.15}$$

Применяя операцию ротора второй раз, получим уравнение, решение которого соответствует инерционным волнам:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\mathbf{u} + 4\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = 0\,. \tag{1.16}$$

Будем искать решение в виде плоской волны $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\sigma t)}$, после подстановки в (1.16) получим:

$$\sigma = \pm 2\frac{k_z}{|\mathbf{k}|} = \pm 2\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_z}{|\mathbf{k}|} = \pm 2\cos\beta\,, \tag{1.17}$$

где $\sigma = \omega / \Omega_{rot}$ – безразмерная частота волны, β – угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{\Omega}_{rot}$. Таким образом, направление распространения волны зависит только от частоты, поэтому инерционные волны являются анизотропными. То есть при заданной частоте волны распространяются в направлении, составляющем фиксированный угол с осью вращения всей системы.

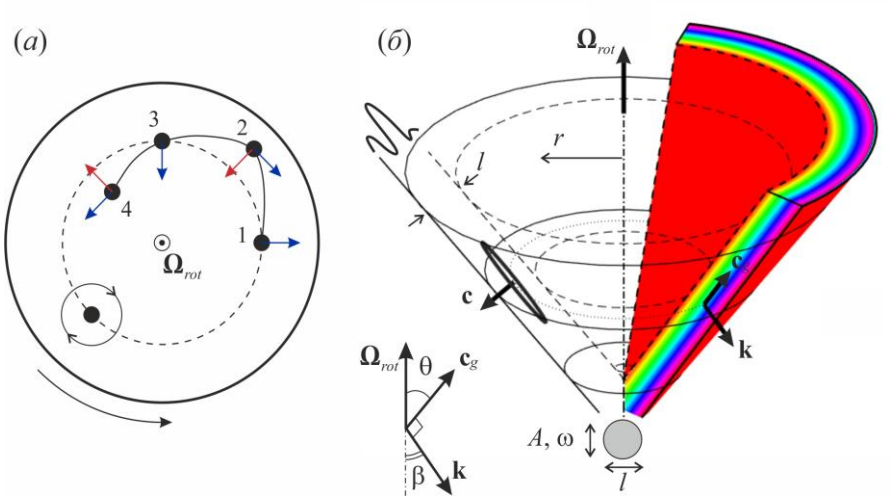


Рисунок 1.3 – (*а*) Схема инерционных колебаний частицы жидкости под действием силы Кориолиса с частотой $2\Omega_{rot}$; синие стрелки – направление скорости частицы, красные – направление силы Кориолиса. (*б*) Схема распространения инерционной волны, излучаемой колеблющимся источником размером l в бесконечной среде с частотой $\omega < 2\Omega_{rot}$; показана только верхняя половина конуса; цветом показана фаза волны; сплошной жирной окружностью показана плоскость колебаний частицы жидкости; адаптировано из [83]

Фазовая скорость волны вдоль направления $\mathbf{k}$ определяется как

$$\mathbf{c} = \frac{\sigma}{|\mathbf{k}|}\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = 2\cos\beta\frac{\mathbf{k}}{k^2}. \qquad (1.18)$$

Видно, что скорость распространения фазы зависит не только от величины, но и от направления волнового вектора, длинные волны распространяются быстрее коротких. Одним из следствий уравнения (1.17) является то, что данной угловой частоте не соответствует единственная длина волны; фактическая длина волны определяется внешним масштабом, например, размером источника при локальном возбуждении или размером самой системы при глобальном воздействии. В свою очередь направление распространения возмущений определяется групповой скоростью

$$\mathbf{c}_g = \nabla_k\sigma = 2\frac{\mathbf{k}\times(\mathbf{e}_z\times\mathbf{k})}{k^3}. \qquad (1.19)$$

Это означает, что мгновенное локальное возмущение порождает волновой пакет, энергия которого распространяется с групповой скоростью $\mathbf{c}_g$ в направлении, составляющем угол $\theta = \pi/2 - \beta$ с осью вращения. При этом фазовая скорость волны внутри пакета направлена перпендикулярно групповой скорости. В связи с этим дисперсионное соотношение часто записывают так

$$\sigma = \pm 2\sin\theta. \qquad (1.20)$$

На рис. 1.3*б* представлена схема распространения осесимметричной инерционной волны, возбуждаемой колеблющимся вдоль оси вращения источником. Волновые лучи образуют угол θ по отношению к оси вращения. Сдвиговые слои, формируемые пучком, имеют форму двойного конуса, симметрично расходящегося вверх и вниз от источника; на рисунке показана лишь верхняя половина конуса. Цветом показана фаза волны, а расстояние между соседними параллельными линиями определяет ширину волнового пакета *l*. Поверхность постоянной фазы движется с фазовой скоростью поперёк пучка – от внутренней границы конуса к внешней.

Работ, посвящённых экспериментальному исследованию локализованных инерционных волн, не так много. Одна из первых качественных визуализаций волновых лучей во вращающемся цилиндре была сделана А. Макэваном при по-

мощи частиц слюды [84]. По-видимому, наверное, первые количественные PIV-исследования представлены в работе Л. Мессио с коллегами в 2008 году [83], где была экспериментально восстановлена структура конического волнового пучка, возбуждаемого осциллирующим диском, а также подтверждена анизотропная дисперсия. Также было показано, что характерная длина волны практически постоянна во всём исследованном диапазоне частот и примерно в 1.15 раза превышает диаметр диска. Это подтверждает, что длина волны определяется размером источника. Продолжением стала работа [85], где детально изучена вязкая диссипация двумерного волнового пучка, генерируемого осциллирующим цилиндром (рис. 1.4). Показано, что толщина пучка растёт с расстоянием как $x^{1/3}$, а амплитуда завихренности убывает как $x^{-2/3}$, что согласуется с результатами для внутренних волн [86]. Также было обнаружено, что при низких частотах воздействия помимо основной волны возникают вторичные гармоники на удвоенной частоте, что свидетельствовало о развитии нелинейных эффектов вблизи источника. В [87] в качестве источника плоских инерционных волн выступал волновой генератор с синусообразным профилем, геометрия которого полностью определяла длину волн.

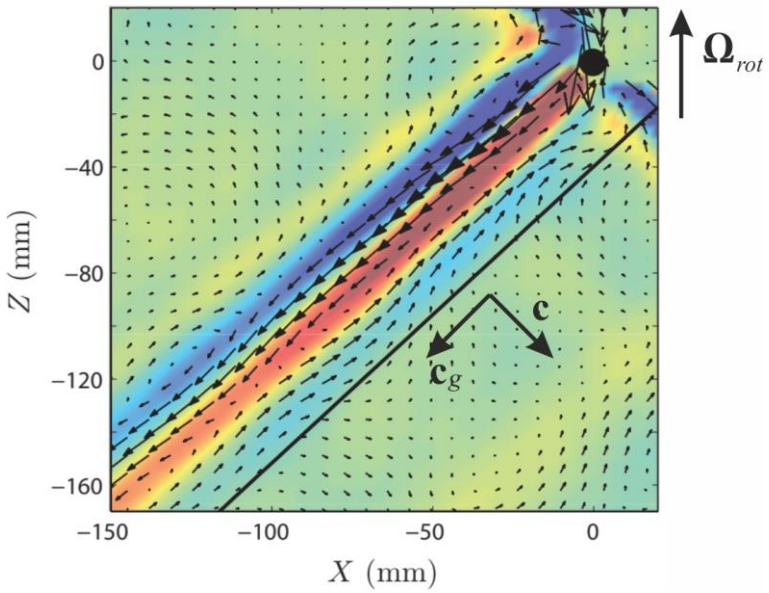


Рисунок 1.4 – Мгновенное PIV-изображение инерционной волны, генерируемой колеблющимся цилиндром (чёрный круг) при частоте $\sigma = 1.34$. Чёрной наклонной линией показано направление, предсказываемое дисперсионным соотношением (1.20); адаптировано из [85]

Прямое численное моделирование локализованных инерционных волн в ограниченном объёме выполнено в [88]. Было обнаружено, что при увеличении амплитуды накачки формируются долгоживущие вихревые структуры, как в экспериментах Э. Хопфингера и коллег [89]. Немного забегая вперёд, следует отметить работы [90] и [A17], где численно и, соответственно, экспериментально исследовались локализованные инерционные волны и их влияние на средние течения в либрирующем цилиндре.

Вместе с уравнением для скорости (1.16) можно получить аналогичное уравнение для поля давления, известное как уравнение Пуанкаре:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta p + 4\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0\,. \tag{1.21}$$

Подставляя $p \sim e^{-i\sigma t}$, получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \left(\frac{\sigma^2 - 4}{\sigma^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0\,. \tag{1.22}$$

Видно, что при $\sigma^2 < 4$ задача является гиперболической, а при $\sigma^2 > 4$ эллиптической и волновое движение невозможно. Поэтому инерционные волны всегда ограничены по диапазону безразмерных частот. Для исследования линейной динамики часто пользуются характеристиками этого уравнения, например, в плоскости (r, z) [1 (стр. 189), 91]:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \pm\sqrt{\frac{4}{\sigma^2} - 1} \quad \Rightarrow \quad const_{\pm} = z \pm r\sqrt{\frac{4}{\sigma^2} - 1} = z \pm r\tan\beta\,. \tag{1.23}$$

Далее, в Главах 2 и 4 этот подход будет использоваться для предсказания траекторий распространения волн в цилиндрических и сферических полостях.

Наконец, необходимо отметить, что при частотах $\sigma << 1$ дисперсионное соотношение (1.20) даёт угол $\theta \to 0°$, что соответствует нулевой фазовой скорости. В этом случае характеристические поверхности представляют собой цилиндры, вытянутые вдоль оси вращения жидкости, при этом выполняется (1.13), а течение является столбом Тейлора–Праудмена. Более подробная информация об инерционных волнах может быть найдена в статье [83].

Если источник волн имеет протяжённые размеры, излучение происходит от его кромок, например, края диска [84, A3], рёбер полости [30] или углов полости

[90, A17]. Природа рождения волн в сферических полостях принципиально иная. Если на вращающуюся систему действует гармоническое воздействие, источником волн служат *критические широты* на сферических границах – точки, где характеристический конус оказывается касательным к поверхности. На этих широтах экмановское приближение перестаёт работать, толщина пограничного слоя $\sim \mathrm{E}^{1/2}$ локально расходится, а баланс сил меняется [92]. П. Робертс и К. Стюартсон показали, что в окрестности критической широты толщина экмановского слоя возрастает до $\sim \mathrm{E}^{2/5}$ на угловом масштабе $\sim \mathrm{E}^{1/5}$ (см. рис. 1.5) [93]. В результате возникает сингулярная экмановская накачка, которая и порождает внутренние сдвиговые слои, пронизывающие объём жидкости вдоль характеристических конусов [34, 94]. Дополнительную сложность вносит аномальный закон отражения инерционных волн от твёрдых границ: в отличие от световых или звуковых волн, при отражении сохраняется угол с осью вращения, а не с нормалью к поверхности [82]. Количественное описание структуры волновых пакетов в сферических слоях опирается на асимптотические теории, численные расчёты и, в ограниченной степени, на экспериментальные данные. Законы масштабирования сильно зависят от кривизны границы, на которой зарождается слой.

Для слоёв, порождаемых на осциллирующей внешней (вогнутой) границе сферы, теоретические результаты сходятся на следующих законах масштабирования: ширина слоя $\sim \mathrm{E}^{1/5}$, амплитуда пульсационной скорости $\sim \varepsilon \mathrm{E}^{1/5}$, где ε – характерная амплитуда воздействия [94, 95]. Эти зависимости хорошо подтверждаются прямым численным моделированием как во вращающейся сфере так и сферическом слое [34, 96, 97]. Прямые экспериментальные измерения этих законов в сферических оболочках автору диссертации неизвестны. Большинство лабораторных исследований были сосредоточены на визуализации волновых картин и качественном подтверждении существования критических широт [41, 43, 98, 99], но не на количественном определении законов масштабирования от числа Экмана. Необходимо заметить, что в цилиндрических полостях, где углы выступают геометрическим аналогом критических вогнутых широт, ширина волновых пучков демонстрирует аналогичную зависимость от числа Экмана (Раздел 2.3.2.3).

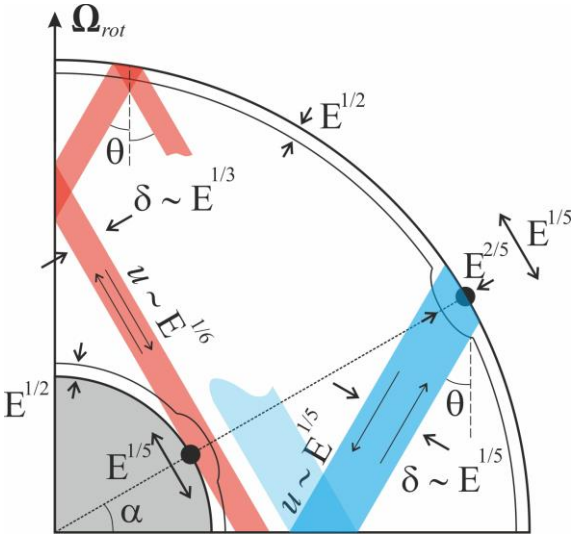


Рисунок 1.5 – Схема масштабирования ширины и скорости конических сдвиговых слоев, образующихся на критических широтах (чёрные точки) во вращающемся сферическом слое; на основе [94, 100]

Для слоёв, касательных к внутренней осциллирующей границе, ситуация сложнее. Ширина сдвигового слоя однозначно определяется как $\sim \mathrm{E}^{1/3}$ [94, 96]. Однако амплитуда скорости остаётся предметом дискуссий. Классическая теория Р. Керсвелла предсказывает $\sim \varepsilon \mathrm{E}^{1/6}$ [94]. Более поздняя работа С. Ле Дизе и М. Ле Барса для выпуклой границы даёт $\sim \varepsilon \mathrm{E}^{1/12}$ [101]. Численные расчёты Ю. Линя и Ж. Нуар [97] показывают согласие с законом $\sim \varepsilon \mathrm{E}^{1/12}$ в диапазоне чисел Экмана $\mathrm{E} \sim 10^{-7} - 10^{-5}$. Тем не менее окончательное подтверждение этого требует достижения асимптотического режима при меньших E. Экспериментальная проверка данных законов масштабирования автору диссертации также неизвестна.

1.2.1. Глобальные инерционные моды

В замкнутых полостях спектр возможных инерционных режимов расширяется за счет возбуждения собственных мод, структура которых существенно зависит от геометрии полости. В литературе такое движение часто называют *инерционными модами* или кельвиновскими модами, а математической основой для их описания служит уравнение Пуанкаре (1.21). В зависимости от геометрии задачи инерционные моды могут быть как регулярными аналитическими решениями, так и сингулярными структурами, требующими учёта вязкости для регуляризации.

Примером последнего случая являются так называемые волновые аттракторы, обсуждение которых будет дано в следующем разделе.

Цилиндрическая геометрия (цилиндр и цилиндрический слой) является одной из немногих, где инерционные моды могут быть найдены аналитически. Так, в цилиндре длины L и радиуса R собственные частоты удовлетворяют дисперсионному соотношению:

$$\sigma^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{\pi^2 n^2 + \xi_{nmk}^2 L^2 / R^2}, \qquad (1.24)$$

где n, m, k – осевое, радиальное и азимутальное волновые числа, ξ_{nmk} – m-й корень трансцендентного уравнения, вид которого определяется граничными условиями (цилиндр или цилиндрический слой) [1 (стр. 79), 102]. При $k = 0$ эти структуры осесимметричны и напоминают стоячие волны. Возбуждение неосесимметричных инерционных мод ($k \neq 0$) в цилиндрической геометрии одним из первых экспериментально продемонстрировал А. Макэван, причём резонансные частоты хорошо согласовывались с предсказаниями линейной невязкой теории [84]. В [31] численно и экспериментально исследовано возбуждение инерционных мод в цилиндрическом слое при модуляции скорости вращения внешнего цилиндра и торцевых границ. Было показано, что локализованные инерционные волны, рождаемые вблизи углов полости, переходят в глобальные осесимметричные колебания при совпадении частоты воздействия с собственной частотой слоя. Важным результатом стало обнаружение сдвига резонансных частот в сторону бóльших значений, обусловленного наличием слоя Стокса у либрирующей стенки. В [102] при помощи ультразвуковой доплеровской велосиметрии изучены линейные и нелинейные режимы инерционных мод в прецессирующем цилиндрическом слое. Также стоит отметить работу [103], где было выполнено прямое численное моделирование инерционных волн и мод в цилиндре с колеблющейся вдоль оси вращения боковой стенкой. При этом механизмом возбуждения инерционных колебаний жидкости служат осциллирующий слой Стокса на боковой стенке полости и углы. А. Сауре с коллегами выполнили прямое численное моделирование влияния инерци-

онных мод на зональные течения в цилиндре [90], что позднее было подтверждено экспериментально [A17].

Геометрия куба представляет интерес в связи с возможностью возбуждения целого спектра инерционных режимов в зависимости от ориентации оси вращения. Так, при вращении вокруг оси, проходящей через центры двух параллельных граней, решение допускает существование регулярных инерционных мод [30, 104]. Первая работа [30] посвящена эксперименту и численному счету в условиях либрационного воздействия. Интересно, что, несмотря на большой дискретный спектр мод, почти вся энергия уходит на раскачку азимутально симметрично моды (2,1,+) (рис. 1.6*а*), хотя теория [105] также предсказывает существование антисимметричных мод (–). В работе [104] численные исследования были расширены вплоть до чисел Экмана $\mathrm{E} \sim 10^{-6}$.

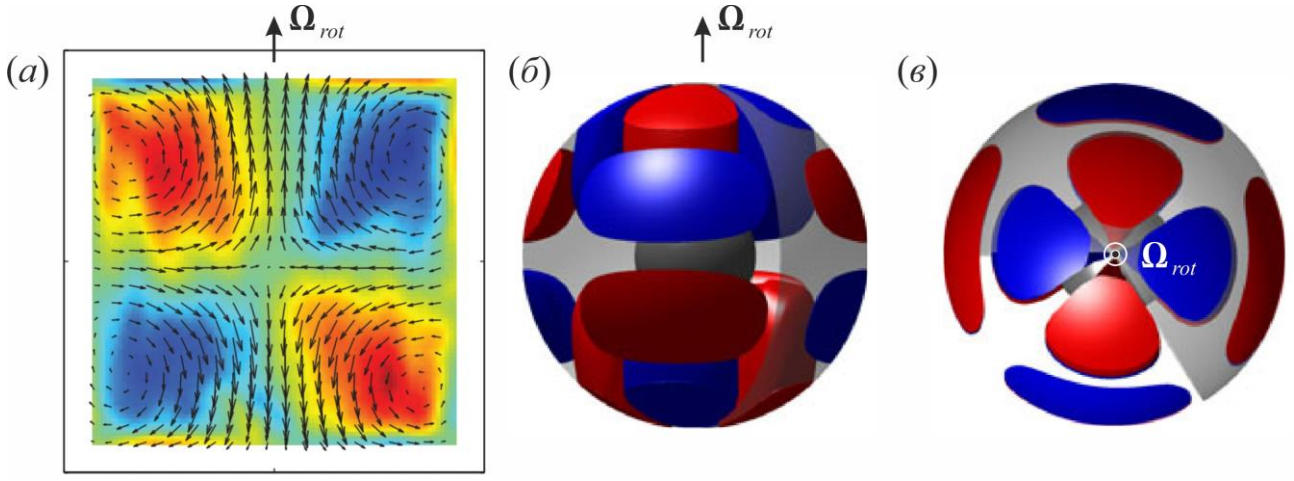


Рисунок 1.6 – (*а*) Экспериментальная визуализация симметричной инерционной моды (2,1,+) во вращающемся кубе в осевом сечении [30]; цветом показана завихренность. (*б*, *в*) Численное моделирование моды (5,2) во вращающемся сферическом слое [48]; цветом показаны изоповерхности мгновенной радиальной скорости, красный цвет обозначает положительное значение скорости (наружу), а синий – отрицательное (внутрь)

Инерционные моды в сфере известны ещё со времен Г. Брайана [106], который получил первое неявное решение. Аналитические выражения для всех инерционных мод в явном виде были получены К. Чжаном с соавторами [3, 107]. Инерционные моды соответствуют сферическим гармоникам, а их важнейшим

свойством является ортогональность. Первое экспериментальное исследование инерционных мод во вращающейся сфере сделано в работе [108]. Измерения давления позволили чётко идентифицировать семь резонансных мод, частоты которых согласуются с теоретическими предсказаниями вплоть до 0.5%. Инерционные моды для эллиптически деформированных полостей описаны в [109].

Сферический слой представляет собой наиболее сложный случай, где задача на собственные значения становится некорректной в невязком пределе [12]. Причиной является невозможность удовлетворить граничным условиям гладкими решениями гиперболического уравнения Пуанкаре. Это приводит к появлению сингулярных мод, которые могут быть классифицированы на три категории: сингулярности на оси вращения, на критических широтах внутренней сферы и вдоль предельного цикла, к которому сходятся характеристики уравнения [17–19]. Волновая энергия не распределяется по гладким глобальным структурам, а концентрируется вдоль характеристических поверхностей, образуя сложные интерференционные картины. Как показал М. Риторд с коллегами, единственным классом регулярных решений выделяются тороидальные моды (не имеющие радиальной компоненты скорости), собственные значения частот которых могут быть рассчитаны как [110]:

$$\sigma = \frac{2}{(1+k)}. \tag{1.25}$$

Соответствующие поля скорости могут быть найдены следующим образом:

$$\begin{aligned} u_\theta &= Ar^k \left(\sin\theta\right)^{k-1} \sin\left(k\varphi + \omega t\right), \\ u_\varphi &= Ar^k \left(\sin\theta\right)^{k-1} \cos\theta \cos\left(k\varphi + \omega t\right). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Необходимо также отметить так называемые квазирегулярные моды, поскольку лишь в ограниченном диапазоне их собственные функции почти не зависят от числа Экмана [13]. Частоты этих мод близки к $2\sin\left(\pi/4\right)$ то есть к точному значению одной из частоты замкнутой периодической орбиты. При $\mathrm{E} \sim 10^{-10}$ и ниже регулярность нарушается и появляются тонкие сдвиговые слои.

Чисто тороидальные моды хорошо экспериментально идентифицируются в сферическом течении Куэтта (между дифференциально вращающимися концен-

трическими сферами) [110]. Тем не менее, моды, близкие по структуре к модам в полной сфере, также могут возбуждаться в слоях с аспектным соотношением $\eta = 1/3$. Так, работы [47, 48, 111] указывают на появление в спектре частот, соответствующих «быстрым» экваториально антисимметричным инерционным модам, что также подтверждается расчётами с помощью кода SINGE [112]. Например, собственная частота моды (5,2) для полной сферы составляет $\sigma^* = 0.467$ [107], аналогичные пространственные структуры возникают в эксперименте и численном счёте в диапазоне частот $\sigma = 0.500 \div 0.540$ (рис. 1.6*б*, *в*; также см. табл. 1–3 в [48]). Физически авторы связывают это с тем, что в таком относительно толстом слое около 85% объема жидкости находится за пределами тангенциального цилиндра, где жидкость вращается практически твердотельно со скоростью внешней сферы. Поэтому для большей части жидкости геометрия эквивалентна полной сфере, где могут существовать регулярные моды. При этом возмущения в слое Стюартсона выполняют роль генератора волн.

1.2.2. Волновые аттракторы

Одним из типов сингулярностей во вращающемся сферическом слое является схождение характеристик уравнения Пуанкаре к замкнутым траекториям, которые получили название *волновых аттракторов* [12]. Термин был введен в работах Л. Мааса, который исследовал особенности геометрической фокусировки внутренних волн в стратифицированной жидкости [8, 14]. По сути, аттрактор представляет собой предельное множество траекторий волновых лучей в замкнутом объёме жидкости, к которому сходятся все лучи данной частоты после многократных отражений от границ. Физический механизм, лежащий в основе формирования волновых аттракторов, связан с анизотропной дисперсией (1.20). Это означает, что все волны заданной частоты распространяются под фиксированным углом к оси вращения и при каждом отражении от наклонной границы ширина произвольного волнового пучка уменьшается, а амплитуда волны растёт. Конечно, в реальной вязкой жидкости сингулярность регуляризуется, и энергия концентрируется в тонких сдвиговых слоях конечной ширины [13]. Пример волнового

аттрактора в меридиональной плоскости сферического слоя представлен на рис. 1.7. Предполагается, что волновые аттракторы являются ключевым механизмом диссипации приливной энергии в тонких сдвиговых слоях недр планетарных тел [10]. Причём в асимптотическом пределе малых чисел Экмана мощность диссипации не зависит от E [9], что позволяет объяснить циркуляризацию орбит двойных звёзд [113] и внутренний разогрев подповерхностных океанов спутников [11] и ядер планет [33].

С геометрической точки зрения формирование аттрактора описывается с помощью отображения последовательности характеристик, которое имеет отрицательный показатель Ляпунова [19]. Важным свойством волновых аттракторов является их существование в целых частотных полосах, ширина которых уменьшается с ростом длины аттрактора [19, 114]. На границах полосы происходят бифуркации отображения, и аттрактор заменяется более сложным. В сферическом слое существуют особенные частоты, для которых все траектории характеристик являются периодическими, а показатель Ляпунова равен нулю. Эти режимы получили название *замкнутых периодических орбит* с частотами

$$\sigma = 2\sin\left(p\pi / 2q \right), \tag{1.27}$$

где p и q – целые числа. Например, при частоте $\sigma = \sqrt{2}$ в меридиональном сечении слоя траектория имеет прямоугольную форму [97, 100, 115]. В [115] этот режим называют антирезонансным, поскольку инерционный отклик жидкости исчезает при стремлении числа Экмана к нулю.

Основные свойства аттракторов могут быть исследованы в более простых с геометрической точки зрения полостях. Обычно достаточно добавления одной наклонной стенки, которая будет обеспечивать фокусировку. Например, в [15, 116] экспериментально исследован аттрактор инерционных волн во вращающейся призме с прямоугольным трапециевидным сечением. Позднее в [42] было проведено детальное численное и экспериментальное исследование особенностей фокусировки волн в кольцевом слое, внутренняя граница которого представляла собой усечённый конус (трёхмерный вариант геометрии Л. Мааса [116]). В двумерной осесимметричной постановке [117] структура волнового аттрактора не зави-

сит от азимутального направления и полностью определяется безразмерной частотой σ. Однако при неосесимметричном воздействии на систему (например, прецессии), аттрактор воспроизводит его азимутальную форму (Глава 3) [118, А3]. Причём в случае опережающего по фазе воздействия фокусировка не наблюдается ни в эксперименте, ни в счёте. Также эксперименты показывают, что аттракторы возникают при одновременном наличии вращения и стратификации жидкости по плотности [119]. Наконец, стоит отметить обзорные работы [6, 29], посвящённые сравнению линейных и нелинейных режимов аттракторов внутренних и инерционных волн.

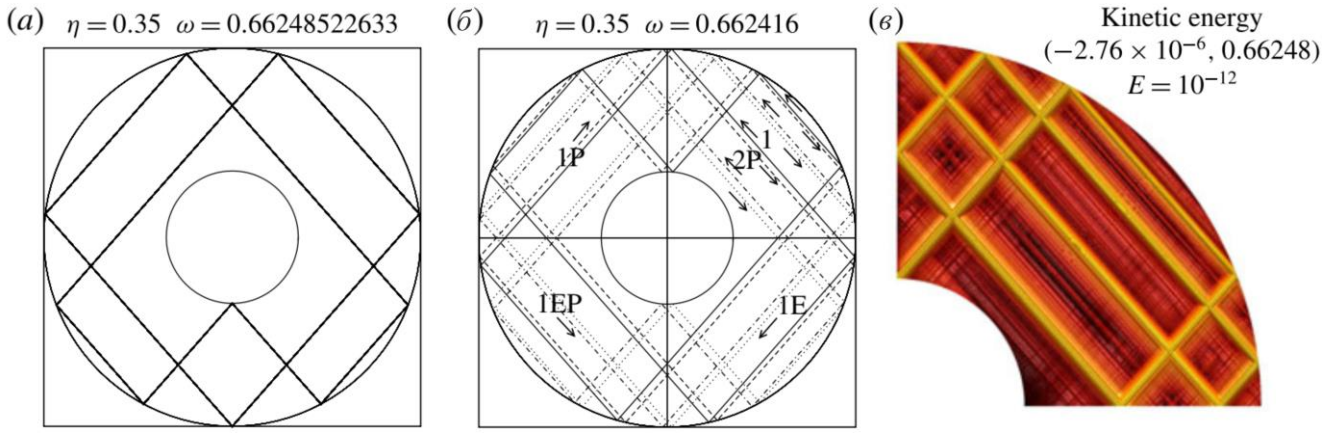


Рисунок 1.7 – (*а*) Форма осесимметричного аттрактора в сферическом слое с аспектным соотношением $\eta = 0.35$ при частоте $\sigma = 1.325$ и (*б*) его симметризованное представление. Пунктирные, точечные и штрихпунктирные линии симметричны сплошным линиям по отношению к оси вращения, экватором и началом координат. Стрелки указывают направление, выбранное вдоль аттрактора. (*в*) Соответствующее численное решение, показывающее плотность кинетической энергии в меридиональной плоскости. Адаптировано из [13]

Ещё одной особенностью закона отражения лучей от наклонных стенок является изменение их азимутального направления [82]. Так, во вращающемся сферическом слое после многократных отражений волновые лучи собираются в плоскости меридионального сечения [120, 121]. В длинном канале с трапециевидным сечением кинетическая энергия аттрактора неравномерно распределена вдоль длины канала: наблюдается локализация аттрактора в определённом попе-

речном сечении, даже если изначально лучи распространялись вдоль канала [122, 123]. В [63] линейная трассировка лучей демонстрирует прямую взаимосвязь между захватом волн и существованием двумерных аттракторов. Азимутальное направление волн стремится выровняться в соответствии с градиентом наклона стенок. Также в канале, поперечное сечение которого изменяется с длиной, было предсказано появление *супер-аттракторов*. В недавней работе [64] было продемонстрировано существование супер-аттрактора во вращающейся полости эллиптического сечения, заключённой между двумя горизонтальными параллельными плоскостями. В рамках лучевой теории показано, что все характеристики сходятся к единственной предельной петле, локализованной в плоскости, проходящей через малую полуось эллипса. Результаты подтверждаются прямым численным моделированием линейной задачи, причём амплитудное значение скорости в супер-аттракторе уменьшается с числом Экмана по закону $\sim \mathrm{E}^{-1/6}$. По сути, первым экспериментальным подтверждением существования супер-аттрактора является работа автора диссертации, который использовал геометрию вращающегося цилиндра с наклонёнными относительно плоскости поперечного сечения торцами (Глава 2) [A2, A11, A13]. Наконец, необходимо отметить серию работ, посвященных исследованию эффектов фокусировки в неравномерно вращающейся кубической полости, которые проявляются, если ось вращения проходит через две противоположные вершины куба [124] или через середины двух противоположных рёбер [125]. Наличие сложной топографии может приводить к появлению новых волновых режимов, изучение которых представляет большой интерес. Например, совсем недавно появились теоретические данные о существовании так называемого *аттрактора критического склона* (critical-slope wave attractor) в стратифицированной жидкости, который возникает вдоль подводных склонов [126]. Таким образом, теоретическое описание инерционно-волновых режимов во вращающихся жидкостях предсказывает целый ряд интересных эффектов, требующих детального экспериментального изучения.

1.3. Осреднённые течения при гармоническом воздействии

Для возбуждения инерционных колебаний во вращающейся жидкости обычно используются три типа гармонического воздействия: либрация (периодические изменения осевой скорости вращения), прецессия (изменение ориентации оси вращения) и периодические деформации упругой границы полости [40]. Причина выбора связана с тем, что они моделируют реальные возмущения, вызванные гравитационным взаимодействием, в планетарных системах [127]. Помимо генерации инерционных волн в жидких ядрах и подповерхностных океанах, такие периодические воздействия приводят к возникновению осреднённых по времени (по периоду воздействия) течений, которые обеспечивают крупномасштабную циркуляцию и могут служить индикаторами внутренней структуры планетарных тел. Рассмотрим механизмы формирования и свойства осреднённых течений, связанных с гармоническим воздействием.

Прецессия. Исследования течений, возбуждаемых прецессией, насчитывают более чем вековую историю [128]. Рассматривая движение жидкости в сфероидальной полости, А. Пуанкаре показал, что невязкий отклик жидкости характеризуется твердотельным вращением вокруг оси, наклонённой относительно оси вращения сосуда, известным как *мода Пуанкаре* или *tilt-over мода*. Однако невязкое решение не позволяет однозначно определить ось вращения, а также не удовлетворяет условию прилипания на стенке. Учёт вязких эффектов посредством пограничных слоёв Экмана был сделан аналитически Ф. Буссе [129], а позднее его результаты были проверены экспериментально [130, 131] и численно [34, 132]. В. Малкус экспериментально обнаружил, что, помимо основного твердотельного вращения, возникает вторичное отстающее осреднённое течение [133]. При увеличении скорости прецессии им были выделены три режима, которые впоследствии также наблюдались в [130]: ламинарное геострофическое течение (рис. 1.8*б*, визуализация Ж. Нуар), переход к турбулентному режиму и режим развитой турбулентности. Кроме визуализации, В. Малкус провёл количественные измерения зонального течения, связанного с геострофическими осреднёнными структурами при помощи красителя. Слабонелинейный анализ зонального течения был также

выполнен Ф. Буссе [129], а позднее и в [135]. Важно отметить, что наиболее интенсивное сдвиговое течение возникает на расстоянии $\approx 0.86R$ (светлые наклонные полосы на рис. 1.8*б*), связанное с существованием тонкой опережающе вращающейся цилиндрической струи вблизи стенки полости. Этот сдвиг, также присутствующий в теории Ф. Буссе, соответствует критической широте, где перестают выполняться стандартные законы масштабирования для экмановского слоя и происходит излучение инерционных волн (рис. 1.5, рис. 1.8*а*).

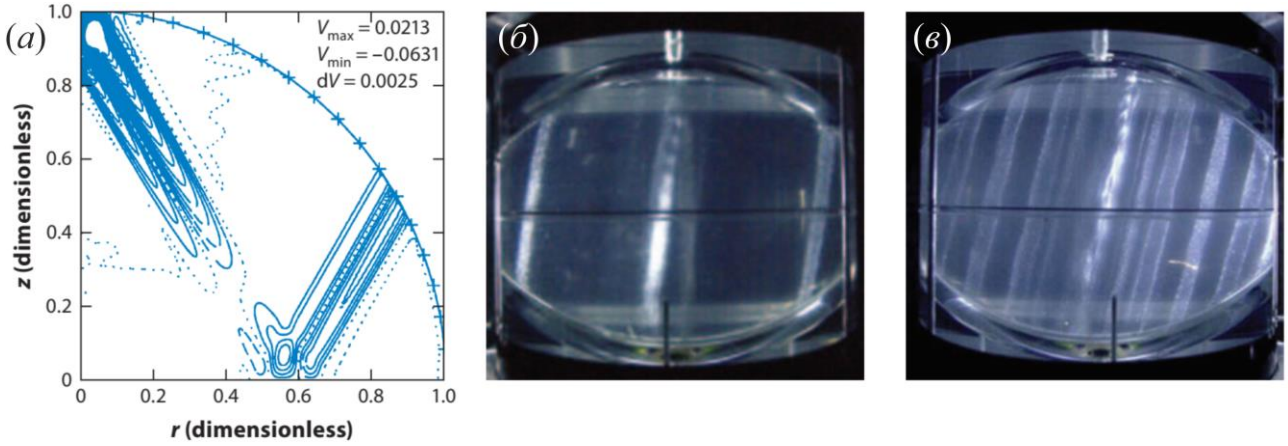


Рисунок 1.8 – (*а*) Результат численного моделирования инерционных волн (изоконтуры радиальной скорости), излучаемых критическими широтами прецессирующей сферы при $\mathrm{E} = 10^{-8}$. (*б*, *в*) Визуализация среднего течения (зональные цилиндрические струи) частицами каллироскопа в меридиональной плоскости полости при угле прецессии $20°$ и безразмерных частотах $\sigma_P = -0.01$ и 0.3 (в лабораторной системе отсчёта), соответственно. Адаптировано из [40] и [134]

Таким образом, нелинейные взаимодействия в областях сингулярности пограничного слоя генерируют осреднённые геострофические сдвиговые течения, ширина и амплитуда которых масштабируются с числом Экмана как $\sim \mathrm{E}^{1/5}$ и $\sim \mathrm{E}^{-3/10}$. Позднее эти результаты были подтверждены для вращающихся сферических слоёв как численно [96, 136], так и экспериментально [99]. Отметим, что дополнительные сдвиговые слои могут генерироваться наличием внутреннего ядра, например, на его критической широте или из-за топографических эффектов, когда эллиптичность внутреннего ядра отличается от эллиптичности полости [137]. При

этом в зональном течении могут присутствовать дополнительные сдвиговые слои, происхождение которых до сих пор неизвестно (рис. 1.8*в*).

Приливное воздействие. Перейдем к обсуждению осреднённых эффектов, связанных с приливными силами, соответствующими эллиптической деформации границы ядра с азимутальным волновым числом $k = 2$. Первой публикацией в этой области считается работа С. Суэсса [138], который аналитически и экспериментально показал, что даже в частном случае неподвижной в лабораторной системе отсчёта деформации ($\Omega_{osc} = 0$) во вращающейся сферической полости возникает ретроградное осреднённое зональное течение. Следующий шаг был сделан А. Тилгнером [139], который рассмотрел общий случай приливного воздействия с произвольной частотой Ω_{osc}. В отличие от полной сферы, где инерционные моды являются гладкими, а их невязкое нелинейное взаимодействие не приводит к стационарной геострофической циркуляции [140], в сферическом слое существуют наклонные сдвиговые слои, которые становятся сингулярными в пределе $\mathrm{E} \to 0$. Ключевым результатом стало доказательство того, что именно нелинейность в слоях сдвига порождает осесимметричное зональное течение, поскольку в численной модели влияние пограничных слоёв на твёрдых границах было исключено. Причём амплитуда зонального течения неограниченно растёт в пределе $\mathrm{E} \to 0$. Это означает, что приливной механизм возбуждения инерционных волн может быть очень сильным в гео- и астрофизических масштабах. Подтверждение ключевых выводов было опубликовано в работе [36], экспериментальная установка из которой показана на рис. 1.9*а*. Деформация создавалась двумя роликами, которые могли независимо вращаться вокруг оси симметрии с частотой Ω_{osc}. Хотя в эксперименте использовалась полная сфера (без внутреннего ядра), где сингулярные слои сдвига отсутствуют, было обнаружено наличие зонального течения (рис. 1.9*б, в*). Наиболее сильный резонансный отклик наблюдался на частотах, соответствующих половине частот инерционных мод полной сферы. Причём скорость течения масштабировалась с числом Экмана по закону $\sim \gamma^2 \mathrm{E}^{-3/10}$. Это качественно согласуется с теоретическими предсказаниями [139] и совпадает с тем,

что было получено для случая прецессионного воздействия. Тем не менее, асимптотическое поведение такой системы остаётся предметом дискуссий, поскольку экспериментальные данные при $E < 5 \cdot 10^{-5}$ оказались противоречивыми. Кроме того, при небольшом изменении частоты показатель степени зависимости менялся на $\sim E^{-0.64}$ [37].

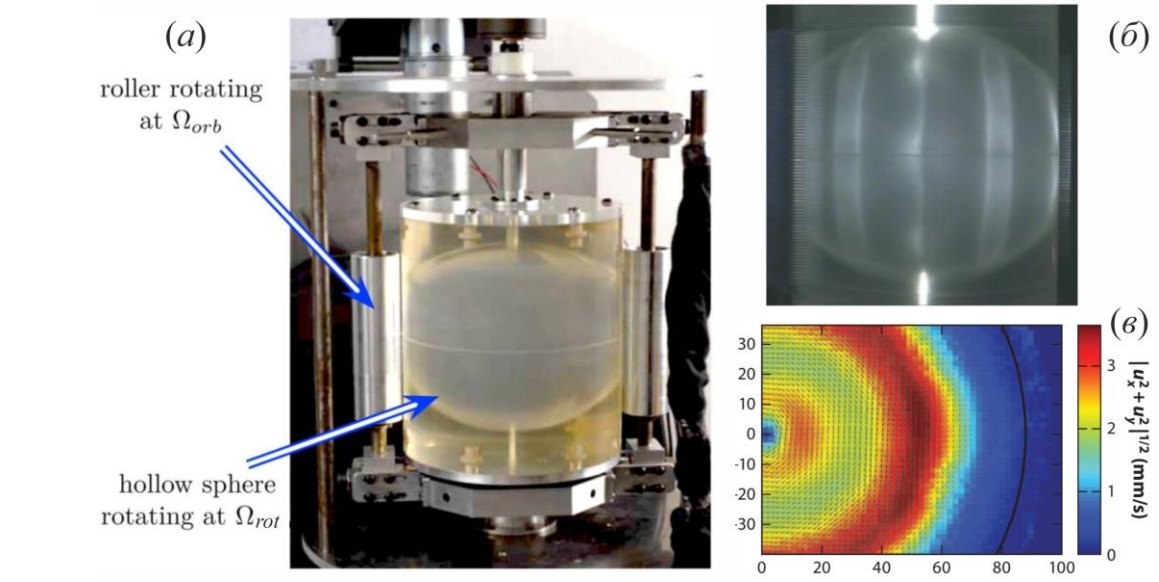


Рисунок 1.9 – (*а*) Фотография экспериментальной установки для исследования влияния приливного воздействия на вращающиеся полости. (*б*, *в*) Среднее зональное течение в сфере при $E = 6 \cdot 10^{-5}$, амплитуде деформации $\gamma = 0.04$ и безразмерной частоте деформаций $\sigma_T = 0.38$ (в лабораторной системе отсчёта); (*б*) визуализация в меридиональной плоскости сферы частицами каллироскопа, (*в*) соответствующее осреднённое поле скорости в экваториальной плоскости; адаптировано из [36, 37]

Дальнейшее развитие задачи было получено в работе Б. Фавье с соавторами [141], которые провели первое трёхмерное прямое численное моделирование нелинейной эволюции приливных инерционных волн в сферическом слое. Так же, как и в [139] на твёрдых границах было использовано условие проскальзывания, что позволило сосредоточиться на объёмных эффектах. Отражение волн от внешней границы приводит к локальному усилению градиентов скорости, что создаёт условия для интенсивного нелинейного взаимодействия. При этом осреднённый угловой момент неоднородно распределялся вдоль радиальной координаты, в ре-

зультате чего в полости возникало сложное геострофическое течение. Важным результатом этой работы стало наблюдение вторичной сдвиговой неустойчивости, о которой подробнее будет сказано позднее.

Либрации. Интерес к данному типу воздействия обусловлен его повсеместным распространением – от Меркурия и Луны до Галилеевых спутников Юпитера (см. табл. 1.1 [68], ПО – подповерхностный океан, ЖЯ – жидкое ядро). Анализ либрационного отклика позволяет определять гипотетическую внутреннюю структуру планетарных тел. Например, наблюдения за либрациями позволили предположить наличие жидкого ядра у Меркурия [142], обнаружить подповерхностный океан на Титане [143], а также создать модели строения спутников Юпитера [144, 145]. Либрации являются эффективным механизмом передачи энергии от внешней оболочки к жидким недрам, способным генерировать интенсивные осреднённые течения. Ч. Ванг был первым, кто теоретически и экспериментально исследовал влияние продольных либраций на динамику жидкости в цилиндре [146]. Он показал, что в отсутствие инерционных волн генератором течения являются пограничные слои Экмана на торцевых стенках, и получил аналитические выражения для скорости зонального течения в зависимости от частоты воздействия σ. Впоследствии его результаты в пределе высоких частот ($\sigma \geq 2$) были подтверждены экспериментально автором диссертации [A17] и двумерным численным счётом А. Сауре с соавторами [90]: движение жидкости в объёме полости является отстающим и твердотельным, а его скорость квадратичным образом зависит от амплитуды либраций ε и не зависит от числа Экмана. Случай «короткого» либрирующего цилиндра был аналитически исследован Ф. Буссе, который показал, что в пределе низких частот либраций ($\sigma << 1$) скорость зонального течения стремится к значению $\Delta\Omega / \varepsilon^2 \Omega_{rot} = -3/20$ [147]. Если частота либраций меньше удвоенной частоты вращения системы, волны вносят существенную корректировку в структуру зонального течения, предсказанного теорией [90, 148, A17]. Эксперименты Ж. Нуар [148] с коллегами также впервые показали, что вблизи боковой стенки цилиндра генерируется опережающее течение, природа которого, как показано в работах [A6, A17], связана с осреднёнными угловыми

потоками, возникающими в углах полости. Несмотря на то, что в [148] профиль азимутальной скорости исследовался в надкритической области, когда на боковой поверхности кюветы возникала центробежная неустойчивость, результаты в целом согласуются с вычислениями [90].

Таблица 1.1. Основные параметры планет и спутников Солнечной системы и характеристики их либраций [68]

Название	Внутренний слой	R, км	σ	$\Delta\varphi$, рад	E
Каллисто	ПО	2300	1	$4.22\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-14}$
Ганимед	ЖЯ	800	1	$5.64\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-14}$
Луна	ЖЯ	350	1	$7\cdot10^{-5}$	10^{-12}
Титан	ПО	2500	1	$2.3\cdot10^{-5}$	$3.5\cdot10^{-14}$
Меркурий	ЖЯ	1800	2/3	$2\cdot10^{-4}$	$7.5\cdot10^{-14}$
Ио	ЖЯ	500	1	$1.3\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-14}$
Европа	ПО	1450	1	$2\cdot10^{-4}$	$0.23\cdot10^{-14}$

При вращательных вибрациях цилиндра помимо слоёв Экмана (на торцевых стенках) возникают динамические слои Стокса (на боковой поверхности). Последние исключались из рассмотрения в теории [147]. Теоретическое и экспериментальное изучение роли слоя Стокса в генерации среднего зонального течения было сделано в работе [46]. Рассматривался вращающийся кольцевой слой, в котором либрации совершала только внутренняя боковая граница, поэтому эффекты слоя Экмана исключались. Оказалось, что вблизи внутренней стенки возникает сильное опережающее течение, скорость которого $\sim \mathrm{E}^{-1/4}$, что отличается от предсказаний теории. Помимо генерации зональных течений, инерционные волны и моды оказывают существенное влияние на структуру течений в пограничном слое. Как показано в работах [A6, A17], нелинейное взаимодействие волн в пределах слоя Стокса приводит к формированию осреднённой меридиональной циркуляции, которая проявляется в виде системы тороидальных вихрей. Этот эффект особенно заметен при резонансном возбуждении инерционных мод, усиливая нелинейные взаимодействия.

Либрациям сферической полости посвящено не меньшее количество работ. Так, в пионерской работе Ф. Буссе [38] показано, что в либрирующей сферической полости без учета инерционных волн, в приближении низких частот и малых амплитуд, возникает среднее течение, скорость которого не зависит от числа Экмана и возрастает с расстоянием от оси вращения r:

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_{rot}} = \varepsilon^2 \frac{259r^2 - 360}{2400\left(1 - r^2\right)}. \qquad (1.28)$$

Эксперименты и численные расчеты [149] подтвердили теорию [38], но только в объёме. Во внешней экваториальной области было обнаружено опережающее течение, подобное тому, что наблюдалось в цилиндре [90, 148] и в прецессирующей сфере [34, 133]. Причём наличие внутреннего ядра не изменяет качественно форму зонального течения, возбуждаемого либрациями внешней сферы [100]. В то же время, при либрациях внутренней сферы [41] вдоль геометрического продолжения ядра возникает цилиндрическое опережающее течение, как при либрациях внутреннего цилиндра в слое [46]. Существенный прогресс в изучении осреднённых течений был сделан А. Сауре и С. Ле Дизе [39], которые разработали теорию либрирующего сферического слоя для высоких частот либраций ($\sigma > 2$): в диапазоне $2 < \sigma < 8.5$ либрации возбуждают как отстающее, так и опережающее дифференциальное вращение жидкости; при $\sigma > 8.5$ либрации возбуждают только слабое опережающее вращение. Ключевым результатом стало предсказание разрыва в профиле зонального течения на границе тангенциального цилиндра, который сглаживается в слоях Стюартсона толщиной $\sim \mathrm{E}^{1/4}$, $\mathrm{E}^{2/7}$ и $\mathrm{E}^{1/3}$ (аналогично конфигурации дифференциально вращающегося сферического слоя [77]). Если внутреннее ядро свободно, оно отклиается на наизкочастотные либрации полости с амплитудой $\sim \mathrm{E}^{1/2} / \sigma$ [A7]. Наконец, динамике жидкости в либрирующих неосесимметричных полостях посвящены работы [150–153].

Инерционные волны играют ключевую роль в формировании средних зональных течений в либрирующих сферических слоях. Ю. Линь и Ж. Нуар численно показали, что при либрациях как внешней, так и внутренней сферы

нелинейные взаимодействия в пограничном слое вблизи критических широт индуцируют локальное среднее геострофическое сдвиговое течение шириной $\sim \mathrm{E}^{1/5}$ и амплитудой $\sim \varepsilon^2 \mathrm{E}^{-1/10}$ [97], что существенно отличается от случая прецессионного воздействия. Также было обнаружено, что отражения инерционных волн от границ порождают дополнительные геострофические сдвиговые течения в точках падения. Ширина этих сдвиговых течений масштабируется с числом Экмана $\sim \mathrm{E}^{1/3}$ (совпадает с шириной волновых пучков, см. рис. 1.5), а их амплитуда как $\sim \varepsilon^2 \mathrm{E}^{-1/6}$. Отметим, что аналогичные сдвиговые течения обнаружены экспериментально при круговых колебаниях внутреннего ядра (Глава 4, [А5]).

1.4. Неоднородные по плотности системы в инерционных силовых полях

В природе и технике широко распространены системы, в которых плотность меняется скачкообразно (границы раздела жидкостей, свободные поверхности, твёрдые включения) или непрерывно (температурная стратификация). При этом неоднородность плотности является ключевым фактором, определяющим их динамику. Вибрационное воздействие позволяет контролировать форму границы раздела фаз [154–156], управлять поведением фазовых включений [157–160] и существенно влиять на тепло- и массоперенос [161, 162]. Последний связан с осреднёнными по времени конвективными потоками, вызванными колебаниями жидкости – *вибрационной тепловой конвекцией*, которая получила широкое развитие в Пермской гидродинамической научной школе [161, 163–165]. Осреднённые эффекты оказываются пропорциональными квадрату амплитуды колебаний, поэтому даже малые градиенты плотности могут генерировать заметные по величине течения. Во вращающихся полостях конвекция приобретает ряд специфических черт, связанных с действием сил инерции [166]. Так, при определенном отношении частоты осцилляций силового поля к частоте вращения полости происходит резонансное увеличение интенсивности колебаний жидкости [167]. Вибрационные эффекты могут проявляться и в отсутствие непосредственного силового воздействия на полость, например, при вращении полости с неоднородной по

плотности жидкостью во внешнем статическом поле (поле силы тяжести). Если направление поля перпендикулярно оси вращения, то в системе отсчёта полости оно совершает ретроградное вращение, вызывая колебания неизотермической жидкости. В этом случае частота периодического воздействия совпадает с частотой вращения. В геометрии коаксиального слоя термовибрационный механизм возбуждает длинноволновые виброконвективные структуры [168]. С другой стороны, осреднённые течения могут возбуждаться инерционными волнами, которые, распространяясь в объёме неизотермической жидкости, взаимодействуют с температурным полем и возбуждают конвективные течения даже в условиях значительного стабилизирующего действия центробежного поля [169–171]. Оказывается, ещё до порога возникновения вибрационной конвекции инерционные волны индуцируют слабый тепломассоперенос.

Другим примером неоднородной по плотности вращающейся системы является центрифугированная граница раздела «жидкость–газ». При вращении вокруг горизонтальной оси статическое в лабораторной системе отсчёта поле силы тяжести возбуждает бегущую в системе отсчёта полости поверхностную азимутальную волну [172], в результате чего жидкость совершает медленное отстающее движение относительно стенок. Позже А. А. Иванова с соавторами показали, что скорость осреднённого движения жидкости, возбуждаемого центробежными волнами пропорциональна квадрату безразмерного ускорения Γ^2 [173], где $\Gamma = g / a\Omega_{rot}^2$, g – ускорение поля силы тяжести, a – радиус воздушного столба. Динамика системы двух несмешивающихся жидкостей различной плотности в равномерно вращающемся цилиндре была теоретически и экспериментально исследована в работе Н. В. Козлова с соавторами [174]. Для описания центробежных волн на границе раздела жидкостей было получено обобщённое дисперсионное уравнение, которое в предельном случае «жидкость–газ» переходит в уравнение О. Филлипса [172]. Это уравнение имеет два решения, которые соответствуют опережающей и отстающей волнам. При этом экспериментально наблюдались только отстающие волны, что связано с направлением вращения силы тяжести в системе отсчёта полости. Кроме того, в [174] был исследован механизм генерации

осреднённого течения, связанный с появлением осреднённой массовой силы в динамических вязких пограничных слоях при колебаниях границы раздела. При воздействии на центрифугированную границу раздела «жидкость-газ» [175], «жидкость-жидкость» [176] или «жидкость-легкая сыпучая среда» [177] поперечными оси вращения вибрациями обнаружено резонансное возбуждение азимутальных волн, распространяющихся в направлении вращения полости или в обратном направлении, в зависимости от соотношения между частотой вибраций и частотой вращения полости. При совпадении частоты вибраций и частоты вращения полости столб лёгкой жидкости радиально смещается с оси вращения на величину, равную половине амплитуды вибраций [178]. Этот эффект эквивалентен параллельному переносу оси вращения и универсален для различных пар жидкостей.

Экспериментальное исследование структурообразования в центрифугированном слое жидкости выполнено в работе В. Г. Козлова и Д. А. Полежаева [179]. О структуре течения можно качественно судить по поведению мелких тяжёлых частиц алюминиевой пудры, которые формируют равноотстоящие кольцевые структуры на боковой стенке полости (рис. 1.10). Анализ показал, что расстояние между кольцами хорошо согласуется с пространственным периодом λ отражения инерционной волны от границ слоя жидкости. Источником инерционных волн выступали колебания границы раздела в углах полости, поэтому наиболее яркое структурообразование наблюдалось вблизи торцевых стенок слоя. Таким образом, было предположено, что при отражении инерционные волны генерируют осреднённое движение жидкости в пограничном слое Стокса, приводящее к перераспределению частиц визуализатора. Позднее в работе автора диссертации была представлена первая визуализация этого течения PIV-методом (Глава 2, [А17]).

Зачастую частицы сыпучей среды не только позволяют обнаружить и исследовать течения в жидкости, но при определённой концентрации могут стать причиной возникновения различных явлений. Например, осциллирующие потоки жидкости над слоем сыпучей среды приводят к формированию пространственно-периодического рельефа на её поверхности [180–183]. Так, в экспериментах [181]

под действием тангенциальных к границе раздела фаз колебаний происходит ожижение сыпучей среды, что приводит к развитию неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на границе чистой жидкости и ожиженной сыпучей среды. В [182] исследуется устойчивость границы раздела жидкость – сыпучая среда в либрирующем цилиндре. Колебания жидкости над поверхностью сыпучей среды приводят к перераспределению твёрдых частиц вдоль границы раздела в виде вытянутых вдоль оси вращения полости чередующихся холмов и впадин. При этом механизмом возникновения рельефа является квазистационарная неустойчивость пограничного слоя Стокса.

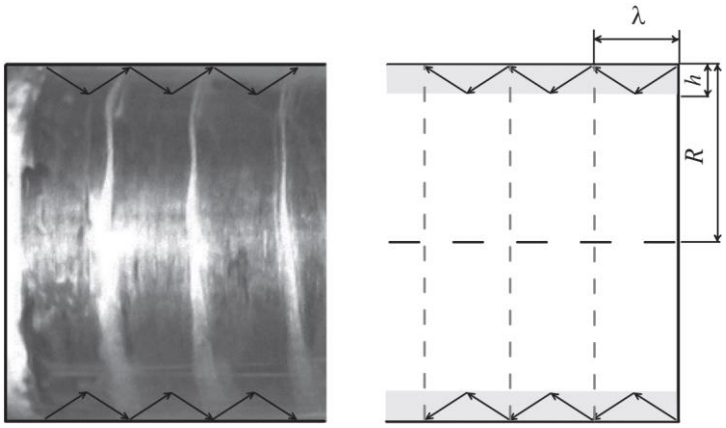


Рисунок 1.10 – Фотография структуры вблизи торцевой стенки цилиндра и схема распространения инерционной волны в кольцевом слое жидкости толщиной h; λ – расстояние между двумя последовательными отражениями инерционной волны от твердой поверхности. Пунктирные линии показывают положение полос высокой концентрации алюминиевой пудры; адаптировано из [179]

Одним из наиболее ярких проявлений осреднённой динамики вращающихся гетерогенных систем является «*вибрационный гидродинамический волчок*», под которым пониматся интенсивное дифференциальное вращение легкого твердого ядра при его колебаниях относительно полости [61]. В отличие от классического течения Куэтта, внутреннее ядро свободно и вращается благодаря гидродинамическому взаимодействию с окружающей жидкостью в ходе колебаний. Такая постановка задачи представляет большой интерес с геофизической точки зрения, поскольку в реальных планетарных условиях внутренние твердые ядра свободны

и способны совершать колебания [55]. Теория волчка получила развитие в работах В. Г. Козлова и Н. В. Козлова [61, 62, 184]: рассматривается бесконечно длинный слой жидкости, заключенный между двумя цилиндрами, причём внутренний цилиндр, плотность которого меньше плотности жидкости, имеет относительную свободу к радиальному смещению. Вся система быстро вращается в статическом внешнем силовом поле вокруг оси симметрии. Опять же, с точки зрения полости в неинерциальной системе отсчёта вращается поле. Последнее вызывает круговые колебания тела, в результате чего в жидкости возникает азимутальная волна, генерирующая осреднённую массовую силу в пограничных слоях Стокса на поверхности тела и полости. Поскольку ядро свободно, оно раскручивается в направлении действия силы, которое определяется направлением распространения азимутальной волны. В случае вращения в поле силы тяжести волна (в системе отсчёта полости) распространяется в направлении, противоположном направлению вращения полости. В отсутствие инерционных волн в приближении тонких пограничных слоёв ($\delta << R_1$) и малых амплитуд колебаний ($b << R_1$) скорость осреднённого дифференциального вращения легкого цилиндра определяется следующим образом:

$$\frac{\Delta\Omega_C}{\Omega_{rot}} = -\frac{1}{4}\Gamma^2 \frac{R_1}{\delta}\left(1-\rho\right)^2\left(1-\eta^2\right), \qquad (1.29)$$

где $\rho = \rho_C / \rho_L$ – отношение плотности тела к плотности жидкости, $\eta = R_1 / R_2$ – отношение радиуса тела к радиусу полости, $\delta = \left(2\nu / \Omega_{osc}\right)^{1/2}$ – толщина пограничного слоя Стокса, $\Gamma = g / \Omega_{rot}^2 R_1$ – безразмерное ускорение поля силы тяжести. Полученное выражение хорошо согласуется с экспериментом в широком диапазоне параметров [184] и имеет универсальный характер, применимый как к сферическим телам в цилиндрических полостях [185–187], так и к сферическим телам в сферических полостях [А10, А19, А23]. Осреднённая сила приводит во вращение не только ядро, но и жидкость за пределами пограничных слоёв, при этом профиль скорости имеет сложную форму в виде вложенных геострофических цилиндров [А18, А19]. Это качественно отличается от классического движения жидкости между двумя концентрическими сферами [77, 188] и напоминает течение,

возбуждаемое гармоническим воздействием, обсуждаемым ранее (Раздел 1.3, [40]). Поперечные оси вращения вибрации также позволяют управлять направлением и скоростью дифференциального вращения жидкости [A8, A9]. Таким образом, перечисленные вибрационные эффекты характерны для всех гетерогенных вращающихся систем [189] и лежат в основе Глав 4 и 5.

1.5. Нелинейные режимы

С ростом амплитуды колебаний в жидкости развиваются нелинейные волновые процессы, которые влияют на устойчивость зонального течения и приводят к перемешиванию жидкости. Монохроматическая волна (внутренняя или инерционная) конечной амплитуды может испытывать *параметрическую субгармоническую неустойчивость* (PSI) в результате нелинейного резонансного взаимодействия трёх волн, при котором энергия первичной волны перекачивается к двум вторичным волнам с более низкими частотами [87, 190, 191]. Данное явление привлекает огромный интерес в случае внутренних гравитационных волн [192, 193], поскольку считается ответственным за диссипацию энергии в океане и за формирование медленных квазидвумерных течений во вращающейся турбулентности [194, 195]. Параметрическая неустойчивость является универсальным механизмом, будь то маятник или инерционная волна, где в роли «параметра» выступает частота Кориолиса $2\Omega_{rot}$. В присутствии первичной волны с частотой σ_0 этот параметр оказывается локально модулированным во времени и способен возбуждать вторичные волны с более низкими собственными частотами, удовлетворяющими условию триадного резонанса: $\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2$. Причём в отсутствие диссипации $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0 / 2$, а вторичные волны имеют бесконечно малую длину волны [192]. Вязкость снимает это вырождение, при этом частоты субгармоник оказываются смещёнными по разные стороны от $\sigma_0 / 2$. В недавней работе [196] выполнен анализ устойчивости плоской инерционной волны конечной амплитуды и показано, что при малых амплитудах параметрическая субгармоническая неустойчивость является единственным механизмом. При больших амплитудах начинает доминировать двумерная сдвиговая неустойчивость, которая обусловле-

на уже членами третьего порядка по амплитуде и как бы «подхватывает» энергию сдвигового течения в самой волне. Кроме того, сдвиговая неустойчивость может самостоятельно возникать при наличии точек перегиба в профиле скорости (например, неустойчивость слоя Стюартсона [188]). Также возможны и другие механизмы неустойчивостей, такие как центробежная неустойчивость и неустойчивость пограничного слоя [68, 132, 197].

Первое экспериментальное подтверждение триадного резонанса плоских инерционных волн было получено коллективом авторов под руководством Т. Доксуа [87]. В спектре наблюдались широкие пики, частоты которых удовлетворяли временному условию $\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2$. Пространственный анализ волн с использованием преобразования Гильберта [198] позволил получить данные о волновых векторах (рис. 1.11), которые удовлетворяют пространственному условию $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Важнейшим результатом стало то, что направление волнового вектора нижних субгармоник систематически стремится к горизонтальной плоскости (рис. 1.11*б*). В более поздней работе [199] было показано, что триадный резонанс является трёхмерным процессом.

С точки зрения исследования нелинейных волновых режимов, аттракторы представляют чрезвычайно удобный объект, поскольку позволяют концентрировать достаточно большую энергию в ограниченных областях пространства. В связи с этим даже при слабом внешнем воздействии локальная амплитуда волн оказывается достаточной для возбуждения триадного резонанса [25, 28, 200]. Причём из-за того, что в дисперсионном соотношении нет масштаба длины волн, нелинейные эффекты сами его устанавливают. Если в [200] внимание уделялось аттрактору в трапециевидной полости, то в [117] рассматривалась геометрия цилиндрического слоя при осесимметричном воздействии. Обнаружено, что в нелинейном режиме возникают вторичные течения в виде осреднённого вихревого кластера, совершающего опережающий дрейф. В работе [А3] исследовались линейные и нелинейные режимы аттрактора в аналогичной геометрии, но в условиях прецессии кольцевого диска, расположенного вблизи торца. По мере увеличения амплитуды воздействия наблюдается последовательность нелинейных режимов,

начиная с чётко идентифицируемого случая триадного резонанса, «перегретой» волновой турбулентностью со значительным непрерывным фоном и развитием медленных волн Россби (Глава 3). Для таких сильно нелинейных режимов по-прежнему нет общей формулы квантования собственных значений вторичных волн, что затрудняет предсказание того, какие именно частоты будут доминировать в спектре.

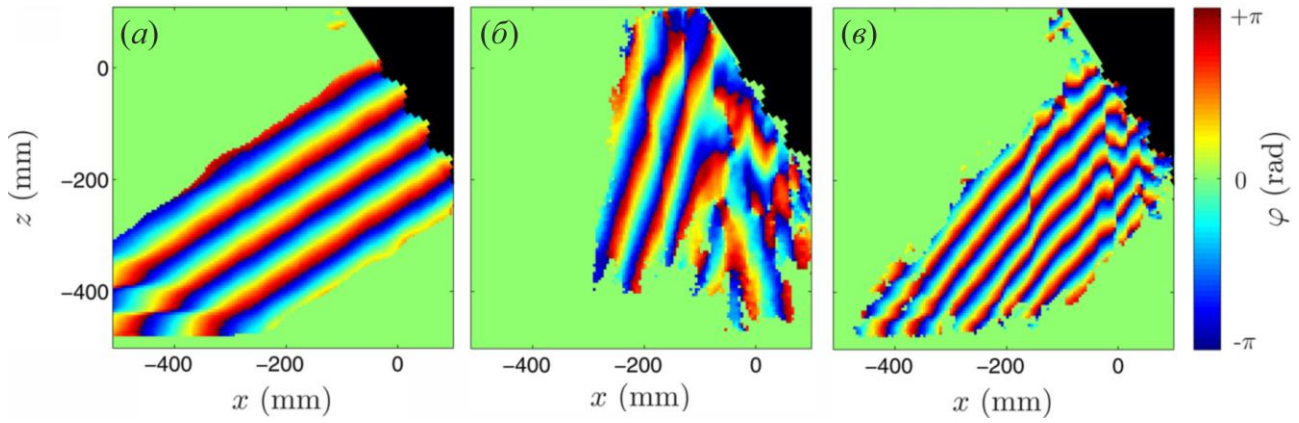


Рисунок 1.11 – Фаза инерционных волн, отфильтрованных при помощи преобразования Гильберта: (*а*) первичная волна с частотой $\sigma_0 = 1.68$, (*б*) вторичная волна с $\sigma_1 = 0.5$, (*в*) вторичная волна с $\sigma_2 = 1.18$; ось вращения направлена вверх; адаптировано из [87]

Прецессия. Триадный резонанс инерционных мод во вращающемся цилиндре известен ещё со времен А. Макэвана [84]. Волновое движение возбуждалось прецессирующим движением крышки. Если частота воздействия совпадает с одной из собственных частот глобальной инерционной моды, внезапным образом возникает так называемый «резонансный коллапс», характеризующийся пороговым перемешиванием жидкости. Он предположил, что механизм связан с триадным резонансом, хотя в то время не было ни теории, ни экспериментальных методов для его подтверждения. Детальные эксперименты по исследованию этого явления для различных значений числа Экмана, углов прецессии цилиндра и частот были проведены существенно позднее [201]. В некоторых случаях после коллапса происходила реламинаризация течения, после чего процесс повторялся. Физический механизм реализации триадного резонанса в цилиндре был предложен

Р. Керсвеллом [202], согласно которому основная вынужденная мода взаимодействует с двумя другими свободными инерционными модами цилиндра, что приводит к возникновению неустойчивости:

$$\sigma_0 = |\sigma_1 \pm \sigma_2|, \quad n_0 = |n_1 \pm n_2|, \quad k_0 = |k_1 \pm k_2|, \tag{1.30}$$

здесь, как и в (1.24), n и k – осевое и азимутальное волновое число соответственно. Этот процесс может продолжаться и в конечном итоге приводить к волновой турбулентности. Большой шаг со стороны эксперимента был сделан в работах [203, 204], которые при помощи PIV-метода количественно подтвердили предсказания теории. В [205] было проведено прямое численное моделирование триадного резонанса инерционных мод в прецессирующем цилиндре. Показано, что триадный резонанс имеет место вплоть до углов прецессии 45°, но его инкремент настолько мал, что для проявления неустойчивости требуется эволюция на масштабах нескольких вязких времён; этим объясняется, почему предыдущие работы, ограниченные более короткими временными интервалами, не обнаруживали резонанса для больших углов. В [206] Х. Лопесом и Ф. Маркусом было численно исследовано влияние угла прецессии, а в [207] ими же выполнен бифуркационный анализ нелинейной динамики течения в прецессирующем цилиндре в зависимости от числа Рейнольдса. Наконец, в [208] был продемонстрирован универсальный характер триадного резонанса. Даже когда основное течение не является вынужденной инерционной модой, оно всё равно может быть неустойчивым по отношению к триадному резонансу с двумя свободными модами. При уменьшении числа Экмана система проходит через цепочку бифуркаций – от предельного цикла к квазипериодическим колебаниям, затем к состояниям с очень низкой частотой и, в итоге, к хаосу. Примечательно, что даже в хаосе время от времени система возвращается к состояниям, где триадный резонанс отчётливо виден. Исследованию нелинейных режимов инерционных мод в цилиндрических слоях посвящены работы [44, 102].

В работе [209] обнаружено, что в прецессирующей сфере, в отличие от сфероида, неустойчивость возникает не из-за топографического эффекта (эллиптичности формы) [210], а благодаря коническим сдвиговым слоям в инерционных

волнах (conical shear instability). При пороге неустойчивости возникали антисимметричные моды с азимутальными волновыми числами k = 17 и 18, локализованные в кольцевой области $0.6 < r / R < 0.8$, частоты которых удовлетворяют условиям параметрического резонанса. Заметим, что в прецессирующих цилиндрах [203, 204] характерные азимутальные волновые числа равны 5 и 6. Кроме того, авторы наблюдали обратный каскад энергии в виде крупномасштабных циклонических структуры, дрейфующих в ретроградном направлении. Предложенный механизм неустойчивости объясняет природу вихревых структур, наблюдаемых в экспериментах с прецессирующим сфероидом [130]. В работах [211] и [212] было предложено использовать прецессирующую сферу в качестве генератора турбулентности для лабораторных исследований.

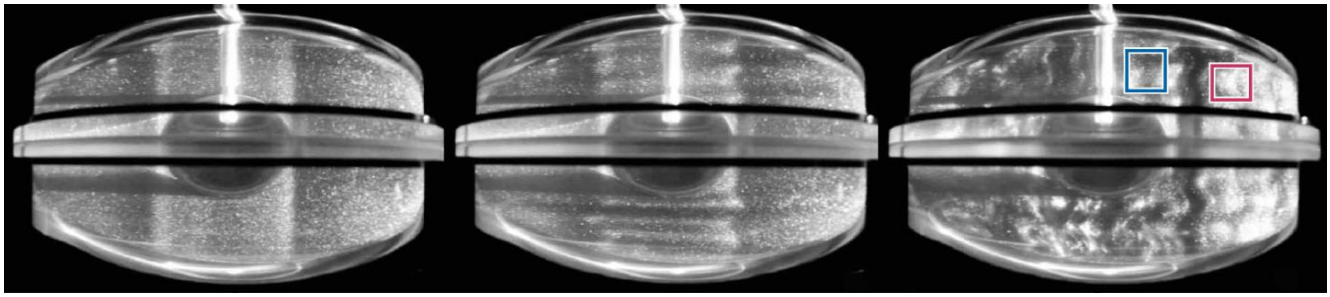


Рисунок 1.12 – Визуализация течения в либрирующем эллипсоиде с твердым внутренним ядром в различные моменты времени. Слева направо: формирование тангенциального цилиндра (столбика Тейлора–Праудмена), развитие блинообразных структур (инерционные моды), резонансный рост амплитуды колебаний жидкости и развитие вторичных локальных сдвиговых неустойчивостей; адаптировано из [52]

Либрации. В неосесимметричных контейнерах, таких как эллипсоиды, топографическая связь между либрирующей границей и жидкостью порождает эллиптически деформированное основное течение. Это течение может резонансно взаимодействовать с парой свободных инерционных мод, порождая эллиптическую неустойчивость (libration-driven elliptical instability, LDEI) [213]. Эксперименты и численные симуляции выявляют два различных режима: перемежаемость, характеризующуюся циклами роста амплитуды инерционных мод и коллапса; устойчивая турбулентность. При этом внимание уделялось относительно высоким часто-

там воздействия, когда инерционные волны напрямую не возбуждаются. Так, при $\sigma = 4$ возникает первичный каскад с частотами $\approx \sigma / 2$ и азимутальными волновыми числами $|k_1 - k_2| = 2$. Насыщение волнового режима сопровождается вторичным триадным каскадом дочерних мод с субгармоническими частотами [214, 215]. Одновременно в полости возникает отстающее осреднённое зональное течение, амплитуда которого возрастает с уменьшением числа Экмана. Это контрастирует со случаем, когда зональное течение генерируется нелинейными эффектами в основном течении, скорость которого не зависит от числа Экмана [38, 149]. LDEI также наблюдается в эллипсоидальных слоях с внутренним ядром [52], которое хоть и вносит пространственные неоднородности, но не препятствует развитию неустойчивости (рис. 1.12). Пороговое значение амплитуды либраций масштабируется с числом Экмана как $\sim \mathrm{E}^{0.65}$, что объясняется конкуренцией между поверхностной диссипацией в пограничных слоях ($\sim \mathrm{E}^{1/2}$) и объёмной диссипацией ($\sim \mathrm{E}^{1}$).

Неустойчивости в течении Куэтта. В заключительной части обзора остановимся на устойчивости сдвигового течения во вращающейся жидкости, теоретические основы которой были заложены Ф. Буссе [216]. Он показал, что в цилиндрической геометрии достижение критического значения числа Россби приводит к неустойчивости слоёв Стюартсона, причём $\mathrm{Ro}_C = \Delta\Omega_C / \Omega_{rot} \sim \mathrm{E}^{3/4}$. Из линейного анализа следовало, что характер неустойчивости не зависит от знака числа Россби. Практически одновременно этот результат был подтверждён экспериментально в работе Р. Хайда и Ч. Титмана [73], которые рассматривали дифференциально вращающийся диск, находящийся в середине длинной цилиндрической полости (рис. 1.2*б*). При достижении критического значения Ro_C граница столба Тейлора–Праудмена в поперечном сечении становится неосесимметричной. Неустойчивость возникает как при положительном ($\mathrm{Ro} > 0$), так и при отстающем ($\mathrm{Ro} < 0$) дифференциальном вращении диска, при этом пороги совпадают по величине и подчиняются закону $|\mathrm{Ro}_C| \sim \mathrm{E}^{0.6}$, а волновые картины принципиально разные. В случае $\mathrm{Ro} > 0$ азимутальные волновые числа в пороге увели-

чиваются с уменьшением числа Экмана, тогда как в случае $\mathrm{Ro} < 0$ всегда доминирует «таинственная» мода с $k = 1$, что не предсказывается теорией. Впоследствии в экспериментах [76], постановка которых была максимально приближена к [216], был получен закон $\left|\mathrm{Ro}_C\right| \sim \mathrm{E}^{0.72}$, а различие между волновыми картинами не было обнаружено. Позднее Р. Холлербах показал, что знак числа Россби играет важную роль, когда высота столбика резко изменяется в радиальном направлении [79]. Поэтому асимметрия между $\mathrm{Ro} > 0$ и $\mathrm{Ro} < 0$ наиболее ярко проявляется в сферическом слое. Его численный счёт показал, что для опережающего вращения выполняется закон $\mathrm{Ro}_C \sim \mathrm{E}^{0.65}$, а для отстающего $\mathrm{Ro}_C \sim \mathrm{E}^{0.45}$. В экспериментах Н. Шеффера и Ф. Кардена в слое с аспектным соотношением $R_1 / R_2 = 1/3$ для опережающего вращения был получен закон $\mathrm{Ro}_C \sim \mathrm{E}^{0.6}$ [188], а в экспериментах К. Эгберса с соавторами в слое с $\eta = 0.67$ закон $\mathrm{Ro}_C \sim \mathrm{E}^{0.7}$ [217]. Причём экспериментальные точки [217] лежат выше, чем [188], что указывает на сильную зависимость неустойчивости от толщины слоя. Интересно, что в последнем случае закон развития неустойчивости слоёв Стюартсона полностью совпадает законом, полученным для вращающегося цилиндра со сферическим ядром [186]. Для отстающего дифференциального вращения известны экспериментальные данные в слое с $\eta = 1/3$ [188], которые полностью совпадают с [79], данные [218] в аналогичной постановке, где $\mathrm{Ro}_C \sim \mathrm{E}^{0.55}$, и данные [186], где $\mathrm{Ro}_C \sim \mathrm{E}$. Если внутренняя сфера вращается медленнее внешней, то неустойчивость локализована вблизи границы тангенциального цилиндра. Если внутренняя сфера вращается быстрее, возникают опережающие спиральные волны, заполняющие весь объём слоя. В последнем случае порог неустойчивости (в терминах числа Россби) оказывается значительно ниже, чем для отрицательного дифференциального вращения, что также характерно для течения во вращающемся цилиндре со сферическим ядром [186]. Данный эффект был подробно исследован в численных моделях [79, 219] и экспериментах [188, 218].

Нелинейные режимы инерционных волн во вращающемся сферическом слое при либрациях внутренней сферы экспериментально исследованы в [43]. Ди-

намика системы зависит от фазы либраций и согласуется с режимами, полученными в условиях опережающего (отстающего) дифференциального вращения [218]. В спектре обнаружены субгармоники триадного резонанса с основной неосесимметричной модой неустойчивости слоя Стюартсона $k=1$. Постоянное дифференциальное вращение также может служить источником инерционных волн и мод. В случае $\mathrm{Ro}<0$ возникает мода, вызывающая триадный резонанс с двумя экваториально-антисимметричными модами [47, 48]. Эти моды появляются за порогом, определяющим возникновение неустойчивости слоя Стюартсона, и являются «быстрыми» по сравнению с фундаментальной модой на основной частоте. Данные моды также были обнаружены в экспериментах [110] и численных исследованиях [219]. Важно отметить, что частоты вторичных мод систематически сдвинуты относительно собственных значений для полной сферы, что связано с изменением их структуры под влиянием фонового сдвигового течения. Дальнейшее увеличение скорости дифференциального вращения приводит к развитию волновой турбулентности по закону $\mathrm{Ro}_C \sim \mathrm{E}^{1/5}$, которая является основным предметом рассмотрения в работе [49]. Данный переход характеризуется появлением непрерывного фона в энергетических спектрах с выраженными пиками на основных частотах. Эти гармоники наследуются от предыдущего режима, и их значение изменяется при пороговом переходе. Источником турбулентности является центробежная неустойчивость пограничного слоя вблизи экватора внутренней сферы, приводящая к генерации вихрей Гёртлера. Этот механизм детально исследован в [45, 68, 220]. В случае $\mathrm{Ro}>0$ динамика системы становится более сложной: увеличение числа Россби вызывает последовательное чередование спиральных мод с понижением азимутального волнового числа [218].

1.6. Обоснование актуальности задач исследования

Несмотря на более чем вековую историю изучения инерционных волн, остаётся открытым целый ряд фундаментальных вопросов, касающихся их линейной и нелинейной динамики, а также их роли в формировании осреднённых течений. Особую значимость эти вопросы приобретают в контексте гео- и аст-

рофизических приложений, где инерционные волны рассматриваются как один из механизмов диссипации энергии, перемешивания и генерации магнитных полей. Лабораторное моделирование является важнейшим инструментом, позволяющим систематически исследовать волновые процессы в широком диапазоне управляющих параметров. Перечислим основные направления, получившие развитие в рамках диссертации.

1. *Влияние геометрии полости на пространственную структуру инерционно-волновых режимов*. Теоретические и численные исследования показывают, что изменение глубины полости с расстоянием от оси вращения (эквивалентный топографический бета-эффект) и наличие наклонных границ радикально меняют линейную динамику волн, приводя к фокусировке энергии в аттракторы [29, 116, 121]. Экспериментальных работ по исследованию свойств аттракторов крайне мало, при этом они ограничены либо двумерной [15, 116], либо осесимметричной постановкой [117]. В свою очередь, в неосесимметричных полостях лучевые модели предсказывают возникновение качественно новых эффектов, таких как азимутальный захват волн и формирование так называемых супер-аттракторов [63, 64]. Прямое численное моделирование этих сугубо трёхмерных эффектов является ресурсозатратной задачей, при этом в лабораторных экспериментах основные свойства волн удобнее рассматривать в более простых с геометрической точки зрения полостях. Для этой цели динамика жидкости исследуется в цилиндрической полости с наклонными торцевыми стенками. Выбранная геометрия сохраняет приближение бета-плоскости и позволяет успешно моделировать эффекты фокусировки и волнового захвата [A2, A11, A12, A13, A21].

2. *Экспериментальное исследование характеристик инерционных волн*. Ширина волновых пучков и амплитуды скорости зависят от числа Экмана по степенным законам [94, 97, 101, 115], однако прямая экспериментальная проверка этих законов масштабирования отсутствует. Одной из задач работы является изучение свойств волновых пучков в цилиндрической полости, где углы

выступают геометрическим аналогом критических широт на вогнутой границе сферы [A13].

3. *Механизмы генерации осреднённых течений инерционными волнами*. Нелинейное взаимодействие инерционных волн в объёме жидкости, особенно в местах пересечения волн, является источником осреднённых зональных течений [139, 141, 221]. Другой механизм связан с нелинейными эффектами в осциллирующем пограничном слое Экмана на искривлённой границе в местах излучения и отражения волн [96, 97]. Важной задачей является экспериментальное изучение этого механизма во вращающемся сферическом слое жидкости [A5, A24], а также цилиндрических полостях при наличии эквивалентного топографического бета-эффекта [A2, A3, A14, A20]. Наконец, интерес представляют течения, возбуждаемые инерционными волнами и модами в пограничных слоях Стокса на боковой цилиндрической стенке [A6, A17], которые обычно исключаются из теоретического рассмотрения [147].

4. *Нелинейные режимы инерционных волн*. Переход к нелинейной динамике, как правило, осуществляется через каскад триадных взаимодействий, хорошо изученный для инерционных мод в цилиндрических полостях [102, 203] и волновых аттракторов в полостях с трапециевидным сечением [29, 117, 200, A3]. Динамика жидкости в нелинейных режимах инерционных волн во вращающихся сферических слоях при наличии дифференциального вращения внутреннего ядра остаётся предметом активных исследований [49]. В ключе создания общей классификации режимов немалый интерес представляет систематическое изучение сценариев волнового распада при неосесимметричном воздействии в зависимости от частоты, амплитуды и направления азимутального распространения по отношению к глобальному вращению [A1, A3]. В частности, переходы к сильно нелинейным режимам, где нет общей формулы квантования собственных значений вторичных волн, представляют огромный интерес.

5. *Специфика гармонического воздействия на вращающуюся жидкость*. Направление азимутального воздействия определяет спектр возможных инер-

ционно-волновых режимов во вращающихся слоях. Последние, как известно [9], влияют на устойчивость движения жидкости и величину приливной диссипации в жидких ядрах. Например, численные эксперименты [118] предсказывают возникновение аттрактора только для ретроградного воздействия. Одной из задач является систематическое экспериментальное исследование линейного инерционного отклика жидкости на неосесимметричные возмущения в зависимости от величины и знака частоты [A3, A5].

6. *Динамика свободного внутреннего ядра и жидкости*. В реальных планетарных системах внутренние ядра не связаны жестко с мантией, обладают собственными степенями свободы и могут совершать колебания [55, 56]. Вопросы инерционного отклика ядра на внешнее гармоническое воздействие являются предметом активных теоретических и экспериментальных исследований [61, 184, A9, A10]. В частности, неизвестно, как частота и амплитуда либраций планетарных тел влияют на амплитуду колебаний ядра, его дифференциальное вращение и на структуру зонального течения [33, A8, A19, A23]. Особый интерес представляет случай, когда частота либраций совпадает с частотой вращения полости или с собственной частотой колебаний ядра, где ожидаются резонансные эффекты [A7].

7. *Суперпозиция течений*. В реальных геофизических системах вращающаяся жидкость одновременно подвергается действию нескольких механических факторов: либрации, прецессия, приливные деформации, осциллирующее движение неоднородных по плотности включений. Вопрос о том, как происходит суперпозиция создаваемых ими течений, остаётся практически неизученным. В ряде случаев эффекты от разных воздействий могут линейно складываться (принцип суперпозиции) [A8, A15, A22], однако в резонансных областях (совпадение частот с собственными модами системы) суперпозиция нарушается, приводя к качественно новым нелинейным режимам и асимметрии течений [A7]. Решение этой задачи необходимо для корректного моделирования динамики жидких ядер планет и подповерхностных океанов.

8. *Устойчивость зональных течений*. С ростом амплитуды воздействия зональное течение теряет устойчивость. В классической постановке сферического течения Куэтта установлено, что характер неустойчивости слоёв Стюартсона сильно зависит от знака дифференциального вращения [79, 188, 218]. Однако механизмы возникновения неустойчивостей в условиях гармонического воздействия (либрации, прецессия, круговые колебания ядра) остаются малоизученными. Важным является вопрос о том, как развитие нелинейных волновых процессов влияет на пороги устойчивости зонального течения и какую роль в этом играет наличие собственного дифференциального вращения свободного ядра [A2, A4, A15, A18].

9. *Взаимодействие волн с зональным течением*. Нелинейные волновые режимы не только изменяют структуру зонального течения, но и могут приводить к возникновению низкочастотных геострофических структур. Поэтому ещё одной задачей, сохраняющей большую актуальность и новизну, является экспериментальное исследование осреднённой (по периоду воздействия) динамики жидкости в нелинейных волновых режимах [A2, A3]. Открытыми остаются вопросы о связях между триадным резонансом и осреднёнными вихревыми кластерами, а также о том, каким образом геострофическая мода влияет на вторичные волны [A1, A4].

ГЛАВА 2. ИНЕРЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И ОСРЕДНЁННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ

Экспериментально исследуется динамика жидкости в неравномерно вращающемся (либрирующем) цилиндре. В отсутствие либраций жидкость совершает твердотельное вращение вместе с полостью. Если частота либраций меньше удвоенной скорости вращения, в полости поддерживается осцилляционное течение в виде инерционных волн. Это поперечные волны, направление распространения которых полностью определяется их частотой. Колебания жидкости резонансным образом усиливаются при совпадении частоты либраций с собственной частотой вращающейся жидкости – инерционной моды. Это приводят к интенсификации осреднённого зонального течения и появлению осреднённой меридиональной циркуляции жидкости в пограничных слоях вблизи боковой стенки полости. Обсуждается структура осреднённых потоков и скорость циркуляции жидкости в зависимости от пространственных характеристик инерционной моды и управляющих параметров системы (число Экмана, безразмерная частота колебаний жидкости, амплитуда либраций).

Нарушение азимутальной симметрии торцевых стенок цилиндра приводит к возникновению двух качественно новых режимов течений – волнового аттрактора и режима симметричного отражения волновых лучей. Оба представляют собой замкнутые траектории, вдоль которых распространяется волновой процесс. Несмотря на визуальное сходство, природа режимов различна. Первый обусловлен геометрической фокусировкой лучей на предельный цикл после серии отражений от наклонных торцов, а второй – симметричным ходом лучей из углов полости. Результаты экспериментов подтверждаются трассировкой лучей в двумерной постановке. Отдельное внимание уделено исследованию структуры азимутального течения: обнаружен эффект азимутального захвата волн вблизи плоскости, проходящей через линию наклона торцов. Исследуются характеристики волновых лучей (скорость жидкости и ширина сдвиговой зоны) в зависимости от числа Экмана, а также их влияние на зональный поток.

Наконец, исследуется надкритическая динамика жидкости в режиме аттрактора и основной инерционной моды при параллельном наклоне торцевых стенок. В обоих случаях переход к нелинейной динамике происходит по сценарию триадных взаимодействий. Тем не менее зональное течение по-разному откликается на развитие волновой неустойчивости. Инерционные моды порождают систему азимутально-периодических осреднённых вихрей, частота которых совпадает с субгармонической частотой триадного резонанса. При больших амплитудах либраций в спектре азимутальной скорости появляется низкочастотная составляющая, связанная с возбуждением ретроградно вращающейся системы вихрей. Развитие слабонелинейного режима волнового аттрактора сопровождается неустойчивостью вязких пограничных слоев вблизи цилиндрической стенки полости. В сильно нелинейном режиме аттрактора возникают осреднённые вихревые пары, совершающие азимутальный и радиальный дрейф. Результаты исследований опубликованы в работах [А2, А6, А11–А14, А17, А20, А21, А25, Б1, Б2, 222].

2.1. Экспериментальная установка

Эксперименты проводятся на установке, представленной на рис. 2.1. Кювета представляет собой полый плексигласовый параллелепипед, внутри которого расположен плексигласовый цилиндр кругового сечения. Данная конструкция герметизируется с обеих сторон прозрачными фланцами и закрепляется в шарикоподшипниках опор установки. Таким образом, кювета состоит из двух отсеков. В «рубашку», образованную пространством между стенками параллелепипеда и цилиндра, заливается та же жидкость, что и в цилиндр. За счет этого оптические искажения на цилиндрической поверхности полости компенсируются при наблюдении сбоку. В качестве рабочей жидкости используется водный раствор глицерина, кинематическая вязкость которого в разных экспериментах варьируется в диапазоне $\nu = 1 \div 250$ сСт.

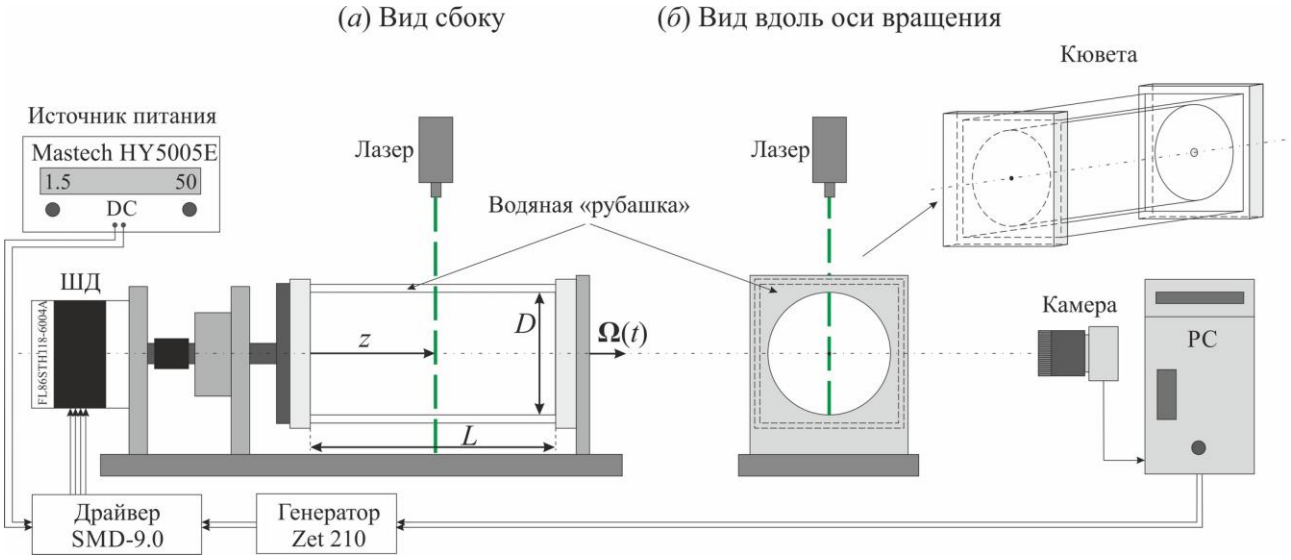


Рисунок 2.1 – Схема экспериментальной установки

Рассматриваются различные формы полостей. Первый вариант представляет собой прямой цилиндр длиной L и радиусом R, *Straight cylinder* (SC) (рис. 2.2*а*, Раздел 2.2). Во втором варианте торцы полости наклонены относительно плоскости поперечного сечения, *Parallel slope* (PS). Технически это реализуется при помощи двух прозрачных плексигласовых вставок в виде усечённых цилиндров с углом между секущей плоскостью и круговым сечением α. Наклонные плоскости параллельны друг другу, поэтому расстояние L между торцами не зависит от r, а осевое сечение полости в общем случае представляет собой параллелограмм, причем угол между смежными сторонами изменяется от $90°$ (прямоугольник) до $(90 \pm \alpha)°$ в зависимости от азимутального угла φ. С увеличением значения угла α расстояние L уменьшается, поэтому соотношение сторон изменяется в диапазоне $R/L = 0.29 \div 0.34$. Основная часть экспериментов проводится при $R/L = 0.34$ (рис. 2.2*б*, Раздел 2.3). Дополнительно рассматриваются следующие геометрии торцевых стенок, когда длина полости меняется с расстоянием от оси вращения r: антипараллельное расположение вставок, *Antiparallel slope* (APS); конические вставки, *Cone ends* (CE); наклон только одного торца, *One sloping end* (OSE) (рис. 2.2*в–д*). Геометрические параметры полостей, в которых проводятся эксперименты, представлены в табл. 2.1.

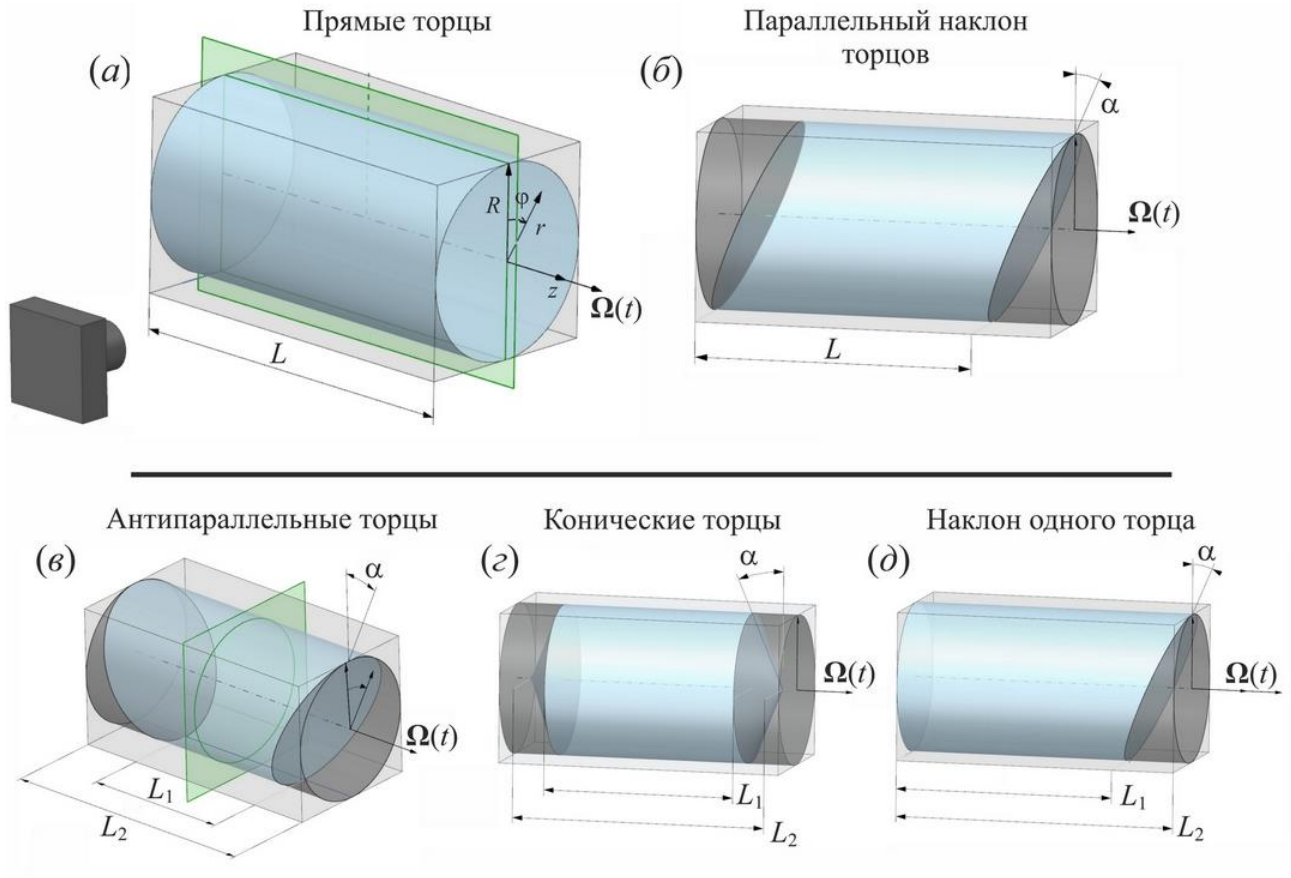


Рисунок 2.2 – Схема цилиндрической полости с прямыми (*а*), параллельно наклонёнными (*б*), антипараллельно наклонёнными (*в*), коническими торцами (*г*) и только одним наклонным торцом (*д*)

Таблица 2.1 – Геометрические параметры полостей

L, мм	R, мм	α, °	R/L	Тип торцов	
102	26	0	0.25	прямые	SC
90	26	8.5	0.29	параллельный наклон	PS
84	26	15.0	0.31	параллельный наклон	PS
77	26	23.0	0.34	параллельный наклон	PS

L_1, мм	L_2, мм			$2R/(L_1 + L_2)$		
99	55	26	23.0	0.34	антипараллельный наклон	APS
66	88	26	23.0	0.34	конические торцы	CE
77	99	26	23.0	0.30	наклон одного торца	OSE

Кювета крепится на стационарном горизонтальном столе с помощью двух металлических вертикальных опор. Обе опоры оснащены шарикоподшипниками, что позволяет кювете вращаться вокруг оси симметрии. Передний фланец закреплен в шарикоподшипнике с внутренним диаметром, превосходящим диаметр ра-

бочей полости. Это позволяет наблюдать за структурой азимутального течения через торцевую поверхность. Вращение полости осуществляется шаговым двигателем FL86STH118-6004A, управляемым драйвером SMD-9.0. Для повышения плавности вращения основной шаг двигателя 1.8° дополнительно делится драйвером до 0.45°. Питание системы осуществляется источником постоянного тока HY5005E с выходным напряжением 50 В. В качестве генератора сигналов используется цифро-аналоговый преобразователь ZET 210, управляемый через USB-порт персонального компьютера. Специальное программное обеспечение ZETLab позволяет управлять импульсами генератора модуля ЦАП, в том числе модулировать частоту выходного сигнала. Для соединения вала двигателя с полостью используется муфта SJCA-30C, обеспечивающая точную передачу вращения. В настоящих исследованиях для возбуждения инерционных колебаний жидкости скорость вращения полости модулируется по гармоническому закону (*либрации*):

$$\Omega(t) = \Omega_{rot}\left[1 + \varepsilon \sin\left(\Omega_{lib} t\right)\right], \qquad (2.1)$$

где Ω_{rot} – средняя угловая скорость вращения, а Ω_{lib} – угловая частота либраций. Амплитуда модуляции скорости вращения определяется как $\varepsilon \equiv \Delta\varphi\Omega_{lib} / \Omega_{rot}$, где $\Delta\varphi$ – угловая амплитуда вращательных колебаний полости, а $\sigma \equiv \Omega_{lib} / \Omega_{rot}$ – безразмерная частота либраций. В проведенных экспериментах средняя частота вращения варьируется в диапазоне $f_{rot} = \Omega_{rot} / 2\pi = 2.5 \div 10$ об/с и устанавливается с точностью 0.001 об/с. Безразмерная частота либраций и амплитуда модуляции скорости изменяются в пределах $\sigma = 0.2 \div 14$ и $\varepsilon = 0 \div 0.3$ соответственно. Для удобства основные параметры экспериментов суммированы в табл. 2.2.

Важным параметром задачи является число Экмана – отношение вязких сил к силе Кориолиса, $\mathrm{E} \equiv \nu / \Omega_{rot} R^2 = 2.4 \cdot 10^{-5} \div 2.4 \cdot 10^{-2}$. С другой стороны, этот параметр характеризует относительную толщину вязких пограничных слоев Экмана на торцевых стенках, $\mathrm{E} \sim \delta_E^2 / R^2$. На боковой границе цилиндра возникает динамический пограничный слой, который в отсутствие вращения именуется слоем Стокса, а его поперечный размер определяется как $\delta = \left(2\nu / \Omega_{lib}\right)^{1/2}$.

Другим важным параметром задачи является пульсационное число Рейнольдса Re_p, которое можно ввести через амплитуду пульсационной компоненты скорости на боковой границе $\tilde{u} = \Delta\varphi\Omega_{lib}R$, и переписать через амплитуду либраций и число Экмана:

$$\mathrm{Re}_p = \frac{\tilde{u}R}{\nu} = \varepsilon \mathrm{E}^{-1} \tag{2.2}$$

Таблица 2.2 – Значения основных параметров в экспериментах

Параметр	Определение	Значение
Ω_{rot}	Средняя угловая скорость вращения	15.7 ÷ 62.8 рад/с
Ω_{lib}	Угловая частота либраций	9.42 ÷ 219.8 рад/с
ν	Кинематическая вязкость жидкости	1 ÷ 250 сСт
$\Delta\varphi$	Угловая амплитуда либраций	0 ÷ 1.5 рад
$\sigma = \Omega_{lib} / \Omega_{rot}$	Безразмерная частота либраций	0.2 ÷ 14.0
$\varepsilon = \Delta\varphi\sigma$	Амплитуда либраций	0 ÷ 0.3
$\mathrm{E} = \nu / \left(\Omega_{rot} R^2\right)$	Число Экмана	$2.4{\cdot}10^{-5} \div 2.4{\cdot}10^{-2}$
$\delta = \sqrt{2\nu / \Omega_{lib}}$	Толщина пограничного слоя Стокса	0.1 ÷ 5.2 мм
$\mathrm{Re}_p = \varepsilon \mathrm{E}^{-1}$	Пульсационное число Рейнольдса	$\leq 3{\cdot}10^3$

2.1.1. Методика изучения мгновенного поля скорости

Методика проведения экспериментов следующая. Кювета приводится в быстрое равномерное вращение со скоростью Ω_{rot}. После установления твердотельного вращения жидкости и прошествии характерного времени спинапа $\mathrm{E}^{-1/2}\Omega_{rot}^{-1}$ при заданной частоте Ω_{lib} плавно увеличивается амплитуда ε. После выхода системы на установившийся режим вращения исследуется профиль скорости жидкости. В последующих экспериментах при заданных значениях Ω_{rot} и ε варьируется частота либраций Ω_{lib}. Движение жидкости исследуется методом PIV (Particle Image Velocimetry). Для этого в жидкость добавляются полиамидные частицы размером $d \sim 60$ мкм и средней плотности ~1.04 г/см^3. Объемная доля частиц в рабочей жидкости не превышает 10^{-4}. Для изучения азимутального течения

жидкость освещается световым ножом в поперечном сечении (рис. 2.1*а*). Световой нож генерируется непрерывным лазером KLM-532/h-1000 толщиной 2 мм и рассекает полость на расстоянии $z / L = 0 - 1$. При исследовании осевого течения полость освещается световым ножом вдоль оси вращения (рис. 2.1*б*). Видеорегистрация положения светорассеивающих частиц осуществляется на неподвижную в лабораторной системе отсчета скоростную видеокамеру CamRecord CL600x2. Данные с камеры записываются на видеорегистратор DVR Express Core. Частота съемки составляет до 360 кадров/с, а разрешение – 800×1000 пикселей. Время экспозиции варьируется в диапазоне 0.20 ÷ 0.40 мс.

Для описания движения жидкости выбрана цилиндрическая система координат (r, φ, z). Для определённости в случае наклонных торцов (рис. 2.2*б, в, д*) координата *z* отсчитывается от острого угла торца полости. При этом направление φ отсчитывается также от острого угла по часовой стрелке при наблюдении со стороны прозрачного торца и совпадает с направлением глобального вращения. Для удобства наблюдений со стороны торца сделана специальная метка, указывающая на нулевое значение φ.

Для получения пульсационного поля скорости в осевом сечении полости выбираются пары кадров, временной интервал между которыми кратен периоду вращения $T_{rot} = 2\pi / \Omega_{rot}$. Поскольку соотношение между частотой либраций и частотой вращения полости может быть произвольным, возникает вопрос о методике расчета мгновенной скорости. Либрации полости означают, что ее угловая координата в лабораторной системе отсчета изменяется со временем по закону:

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi = \Omega_{rot} t + \Delta\varphi \cos\left(\Omega_{lib} t\right), \tag{2.3}$$

где $\Omega_{rot} t$ – угол, на который поворачивается полость в результате равномерного вращения со средней скоростью Ω_{rot}, а $\Delta\varphi \cos\left(\Omega_{lib} t\right)$ – периодическое изменение угловой координаты. Благодаря неравномерному вращению два последовательных угловых положения полости с интервалом времени NT_{rot} не совпадают (рис. 2.3); здесь N – количество оборотов полости. То есть полость совершает один полный оборот с небольшой добавкой $\delta\varphi_\tau = \left|\varphi_0 - \Delta\varphi\right|$, которая может иметь

как положительное, так и отрицательное значение, в зависимости от соотношения частот σ. При этом структура течения представляет собой суперпозицию осреднённого (по периоду либраций) и пульсационного течения из-за ненулевого $\delta\varphi_\tau$. Принимая во внимание, что осреднённая компонента скорости $<u>$ заведомо мала по сравнению с пульсационной u, последовательность кадров, взятых с частотой $1/NT_{rot}$, будет определять мгновенное поле скорости $u = \Delta s / \Delta\tau$, где Δs – смещение частиц-трассеров, а $\Delta\tau$ – время между двумя последовательными фазами либраций.

Наблюдение со стороны боковой поверхности с частотой f_{rot} напоминает стробоскопический эффект, при котором в случае равенства частот $f_{rot} = f_{lib}$ изображение покоится. При небольшой рассинхронизации $f_{rot} \neq f_{lib}$ вращение кюветы кажется либо более быстрым, либо более медленным. Таким образом, при последовательном переборе пар кадров с частотой f_{rot} наблюдаемая фаза либраций постоянно меняется (см. для примера рис. 2.4*а*). Отметим, что фазы вращения и съемки подбираются таким образом, чтобы среднее положение боковой стенки было перпендикулярно оптической оси камеры.

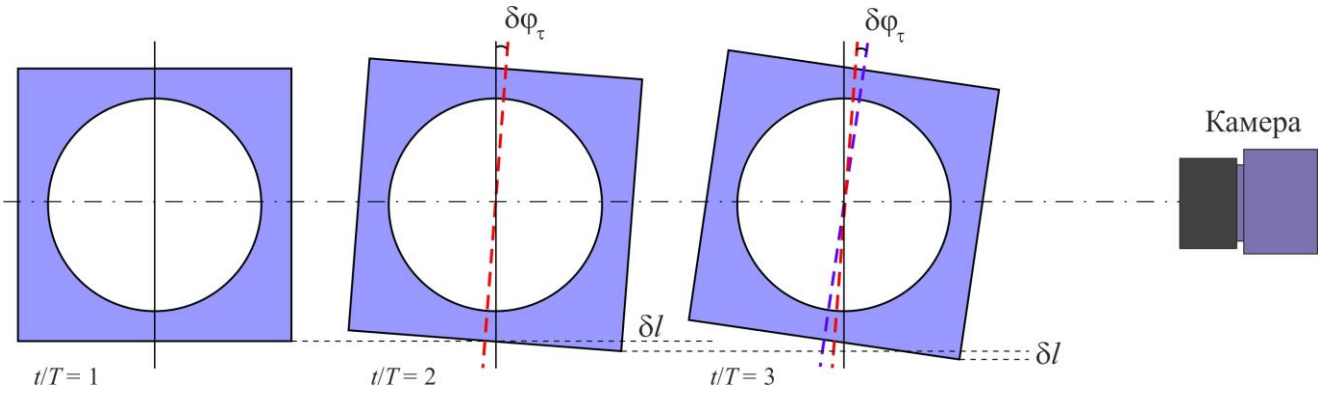


Рисунок 2.3 – Три последовательных положения либрирующей полости в лабораторной системе отсчета через промежуток времени T (вид вдоль оси вращения)

Время между фазами можно определить следующим образом:

$$\Delta\tau = \left| NT_{rot} - MT_{lib} \right|, \tag{2.4}$$

где M – количество циклов либраций, которые приходятся на количество оборотов полости N. Для большинства частот либраций $M = N = 1$. Так, например, при $\sigma = 0.90$ фаза либраций отстаёт от фазы равномерного вращения полости на $\Delta\tau = 11.11$мс, что отмечено на рис. 2.4*а* штриховкой. Очевидно, что уже при $\sigma > 1$ будет выполняться обратное соотношение для фаз. Важно отметить, если разность фаз превышает величину $\Delta\tau / T_{rot} > 0.25$, подбирается другая комбинация из двух кадров, для которых $M \neq N$. Это можно проиллюстрировать для частоты $\sigma = 0.70$ (рис. 2.4*б*). Если рассматривать два последовательных кадра, время между ними будет составлять $\Delta\tau_1 = 42.86$ мс, что уже становится сравнимым по величине с основным циклом вращения $T_{rot} = 100$ мс ($f_{rot} = 10$ об/с). В этом случае целесообразнее выбрать второй кадр через три оборота, тогда $\Delta\tau_2 = 14.29$ мс. В противном случае один период либраций будет разрешаться небольшим количеством кадров, чего недостаточно для полного понимания структуры пульсационного течения.

Оценки показывают, что угловая добавка в большинстве случаев $\delta\varphi_\tau < 4°$ (рис. 2.4*в*). А учитывая, что скорость осреднённого азимутального течения мала ($\Delta\Omega / \Omega_{rot} << 1$), частицы визуализатора через время T_{rot}, и даже $3T_{rot}$, остаются в плоскости светового ножа. Этот подход полностью оправдан для малых амплитуд либраций в линейных режимах инерционных колебаний жидкости.

Другим важным аспектом предварительного анализа изображений является влияние наклона боковой границы кюветы при смене кадра. С одной стороны, это приводит к смещению изображения по вертикали на δl (см. рис. 2.3 и 2.4*в*). Чтобы компенсировать эти «колебания», была разработана программа в среде MATLAB, которая совмещает центры масс изображений для всей последовательности кадров. С другой стороны, изображение сжимается/растягивается в том же направлении. Оценки показывают, что для большинства случаев изменение размеров полости в радиальном направлении незначительно – $\Delta R/R < 0.02$.

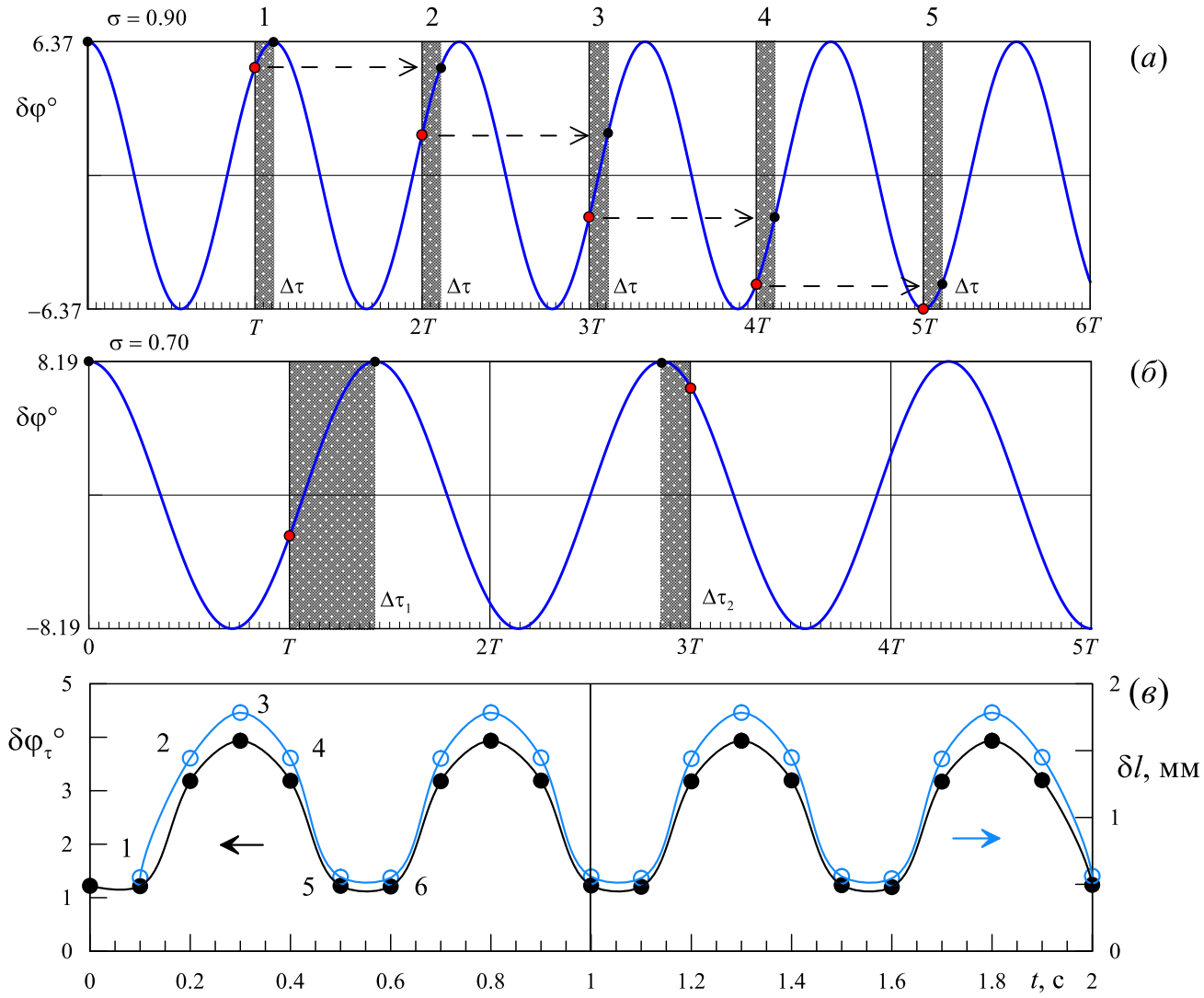


Рисунок 2.4 – Либрационная компонента угла поворота полости $\delta\varphi = \Delta\varphi\cos\Omega_{lib}t$ (синяя кривая) при $\sigma = 0.90$ и $\varepsilon = 0.10$ (*а*); $\sigma = 0.70$ и $\varepsilon = 0.10$ (*б*). Заштрихованная область соответствует разности фаз между одним полным оборотом полости за счет равномерного вращения и дополнительного поворота, обусловленного либрациями. Красными символами обозначена фаза колебаний полости через интервал времени T, а черными – предыдущая фаза. На фрагменте (*в*) показана зависимость угла $\delta\varphi_\tau$ между двумя последовательными положениями полости от времени (черные точки) и соответствующее смещение боковой стенки δl (синие круги)

Кросс-корреляционная обработка последовательности изображений осуществляется в программе PIVlab [65, 66]. PIV-анализ основан на быстром преобразовании Фурье с несколькими проходами при последовательном уменьшении размера окна (42×42, 24×24 и 14×14 пикселей) и сдвиге на ½ от первоначаль-

ного размера. Дополнительно в PIVlab можно сгладить финальные поля скорости путем расчёта среднего в одной фазе согласно следующей схеме:

$$\frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} u_{jq+1}, \tag{2.5}$$

где q – число кадров, разрешающих один период либраций, j – номер кадра (для данной фазы либраций), K – количество кадров, участвующих в осреднении. Так, например, при $\sigma = 0.90$ один полный период либраций разрешается 10 кадрами. Тогда для осреднения по условно первой фазе либраций берутся кадры с номерами 1,11, 21, …; для второй фазы 2,12, 22, … и т.д.

При исследовании азимутального течения частота съемки составляет 360 кадр/сек. Для перехода во вращающуюся систему отсчета с частотой f вся последовательность кадров поворачивается относительно оси вращения в направлении, противоположном вращению на величину, необходимую для их совмещения.

2.1.2. Анализ осреднённых характеристик течений

При расчёте осреднённого азимутального поля скорости для анализа выбираются пары кадров с промежутком времени, кратным периоду либраций T_{lib}. При таком подходе пульсационная компонента скорости автоматически исключается из рассмотрения. В отдельных экспериментах осреднению подвергается последовательность пар кадров, полученных в различные фазы колебаний (осреднение по серии мгновенных полей скорости за время T_{lib}). Отметим, что в каждом случае для анализа используются данные для не менее 50 периодов либраций.

Для визуализации структуры осреднённого течения вблизи боковой стенки полости используется измельчённый активированный уголь или тяжёлые хлопья слюды размером ~ 100 мкм и плотностью ~ 2.7 г/см^3. При равномерном вращении полости частицы ровным слоем покрывают боковую границу полости. В свою очередь наличие осреднённых течений и их неустойчивость сопровождается заметным перераспределением частиц. Исследования структурообразования проводятся только для воды.

2.2. Движение жидкости в прямом цилиндре

2.2.1. Инерционные волны. Нерезонансный случай

В области частот $0<\sigma<2$ либрации полости являются источником инерционных волн, которые рождаются в местах соединения боковой и торцевых стенок кюветы. Инерционные волны распространяются вдоль конусообразных поверхностей, образованных свободными сдвиговыми слоями. Направление групповой скорости волны c_g определяется отношением частоты либраций к удвоенной скорости вращения системы [1]:

$$\theta=\arcsin\left(\sigma/2\right). \tag{2.6}$$

На рис. 2.5 представлены мгновенные поля скорости и соответствующее поле завихренности $\xi_\varphi=\mathrm{rot}_\varphi\mathbf{u}$ в осевом сечении полости при различных σ. Поскольку инерционные волны являются поперечными, фазовая скорость $c\perp c_g$. При этом завихренность ξ_φ, касательная к волновым лучам, определяет фазу волны и распространяется по направлению к боковым стенкам. Визуально процесс распространения инерционных волн ассоциируется с периодическим «выталкиванием» и «всасыванием» жидкости из углов полости за цикл либраций. Следует заметить, что движение жидкости относительно правого и левого торца является зеркально симметричным. С увеличением частоты либраций σ угол θ увеличивается, при этом возрастает количество отражений волновых лучей от боковой стенки. Например, для случая, показанного на рис. 2.5*в*, частота $\sigma=1.44$ подобрана таким образом, чтобы волна один раз взаимодействовала с боковой стенкой, а при $\sigma=1.68$ (рис. 2.5*г*) уже два раза.

Аналогичные волновые лучи ранее наблюдались в ряде экспериментальных работ и численных симуляциях. Одним из первых был А. Макэван [84], который визуально наблюдал инерционные колебания жидкости в равномерно вращающемся цилиндре с прецессирующим диском, расположенным вблизи одного из торцов. Для визуализации использовалась алюминиевая пудра и перламутровые частицы Merlin AC, которые хорошо идентифицировали поля вязких напряжений. Основу этих частиц составляют вытянутые чешуйки слюды, покрытые ди-

оксидом титана. В численных экспериментах [31] волновые лучи возникали в либрирующем цилиндрическом слое постоянного поперечного сечения. В [42] рассматривался слой переменной толщины за счёт наличия конической внутренней поверхности. В [30, 104] внимание уделялось численному исследованию инерционных волн в либрирующем кубе. Отдельно следует отметить работу [90], наиболее близкую по постановке к настоящим экспериментам, где численно исследовалось движение жидкости в либрирующем цилиндре. Во всех перечисленных работах волновые лучи рождались вблизи углов полости, что согласуется с результатами настоящей работы.

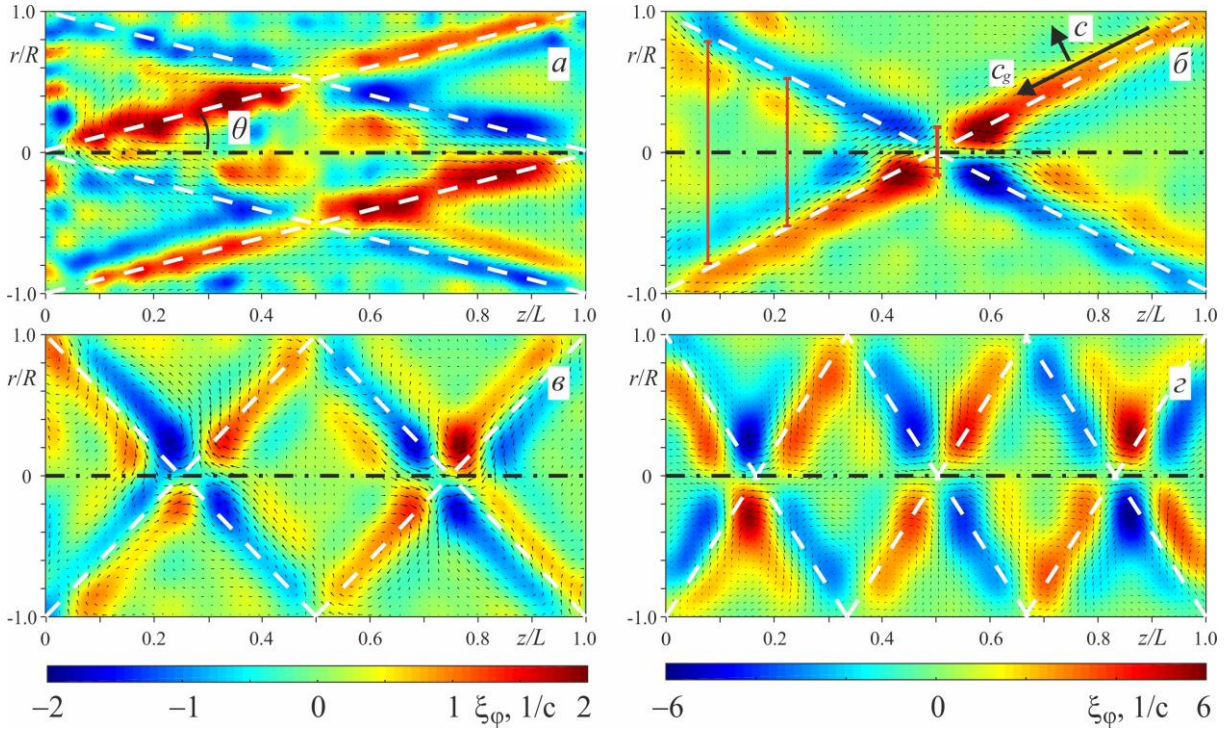


Рисунок 2.5 – Мгновенные поля скорости при частотах либраций $\sigma = 0.49$ (*а*), $\sigma = 0.90$ (*б*), $\sigma = 1.44$ (*в*), $\sigma = 1.68$ (*г*) и фиксированной амплитуде $\varepsilon = 0.10$. Фаза либраций во всех случаях составляет $\Omega_{lib} t = 0$; вязкость жидкости $\nu = 7$ сСт; число Экмана $\mathrm{E} = 1.65 \cdot 10^{-4}$. Цветом показана проекция завихренности на азимутальное направление. Штриховые линии проведены вдоль теоретически предсказанного направления распространения волновых лучей $\theta = \arcsin(\sigma / 2)$; чёрными стрелками показано направление групповой $\mathbf{c}_g$ и фазовой скорости $\mathbf{c}$ инерционных волн. Красные вертикальные линии соответствуют сечениям z/L, для которых получены поля скорости на рис. 2.6

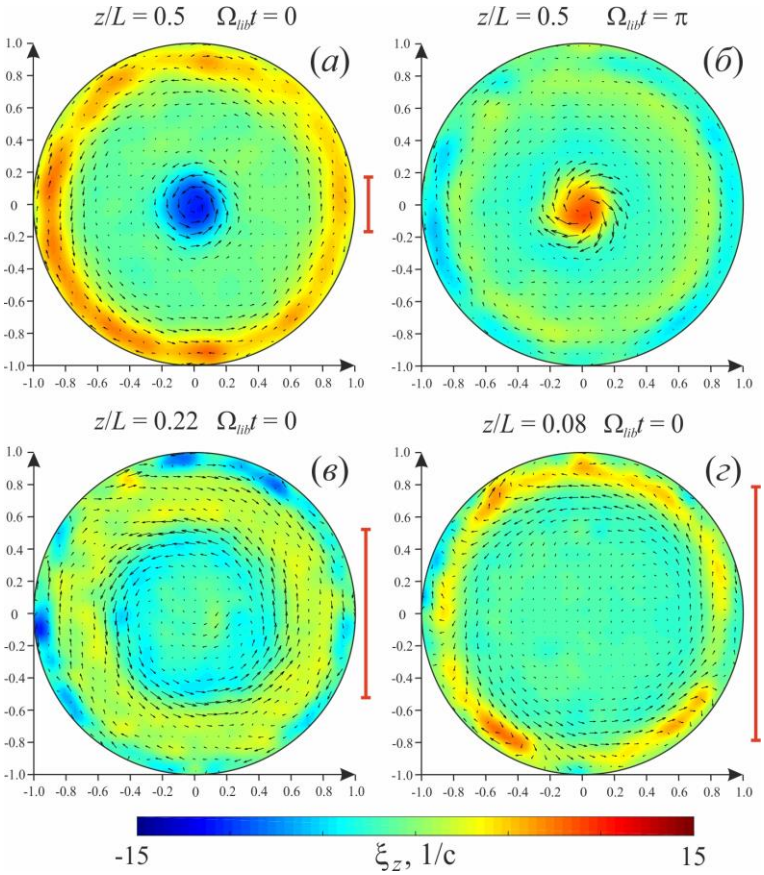


Рисунок 2.6 – Мгновенные поля скорости в различных поперечных сечениях z/L и фиксированных значениях $\sigma = 0.90$, $\varepsilon = 0.10$ и $\mathrm{E} = 1.65 \cdot 10^{-4}$. Цветом показана z-компонента завихренности ξ_z (красный цвет соответствует циклонической закрутке, синий – антициклонической). Вертикальные красные линии соответствуют масштабам на рис. 2.5*б*. Здесь и далее направление вращения полости по часовой стрелке

Механизм возбуждения волн следующий. При ускорении (замедлении) полости на торцевых стенках возникают осциллирующие пограничные слои Экмана. На создаваемый радиальный поток действует сила Кориолиса, которая сносит частицы жидкости на круговую траекторию. В результате вблизи мест соединения боковой и торцевых стенок полости генерируется мгновенная завихренность, которая является источником инерционных волн.

На Рис. 2.6 показаны мгновенные поля скорости в различных поперечных сечениях при параметрах, соответствующих рис. 2.5*б*. Осевая составляющая завихренности ξ_z подчеркивает наличие осесимметричного сдвигового течения, связанного с распространением волны. Как и ожидается, жидкость совершает ко-

лебания не во всём объёме, а только в пределах кольца, размер которого определяется пересечением конического волнового пакета с плоскостью измерения z/L. При $\sigma = 0.90$ диаметр кольца уменьшается с расстоянием z/L. В целом результаты PIV-визуализации волновых лучей в двух взаимно перпендикулярных плоскостях хорошо согласуются между собой.

Для проверки дисперсионного соотношения (2.6) использовались два подхода. Первый – это прямые измерения угла θ вдоль линии постоянной фазы в осевом сечении полости. При детальном сравнении теоретически предсказанного направления (белые штриховые линии на рис. 2.5) и реально наблюдаемой волновой картиной видно, что в экспериментах величина θ немного больше. В свою очередь это соответствует более высокой частоте либраций σ. Результаты сравнения линейной теории с систематическими измерениями $\sin(\theta)$ представлены на рис. 2.7*а*.

Вторую проверку дисперсионного соотношения можно выполнить по измерениям скорости движения частиц в поперечном сечении, как было в свое время предложено в [83]. Идея основана на том, что в поперечной инерционной волне частицы жидкости совершают антициклоническое круговое движение с частотой Ω_{osc} в плоскостях, лежащих под углами $\pm\theta$ относительно оси вращения. Таким образом, зная эллиптичность диаграмм скорости на плоскости (u_φ, u_r), или годографов, можно предсказать величину θ. На рис. 2.7*б* показано распределение азимутальной u_φ и радиальной u_r компоненты скорости при частоте $\sigma = 0.90$ в сечении $z/L = 0.22$ на расстоянии $r/R = 0.5$, т.е. в области максимума пульсационного движения жидкости. Видно, что фазовая диаграмма имеет эллиптическую форму, поскольку является проекцией кругового движения жидкости вокруг конуса на плоскость поперечного сечения. Поляризация волны является антициклонической, т.е. в направлении, противоположном глобальному вращению полости (против часовой стрелки). Значение эллиптичности составляет $u_r / u_\varphi \approx 0.52$ (красный крест на рис. 2.7*а*), что хорошо согласуется с прямым измерением $\sin(\theta) \approx 0.49$ для данной частоты либраций.

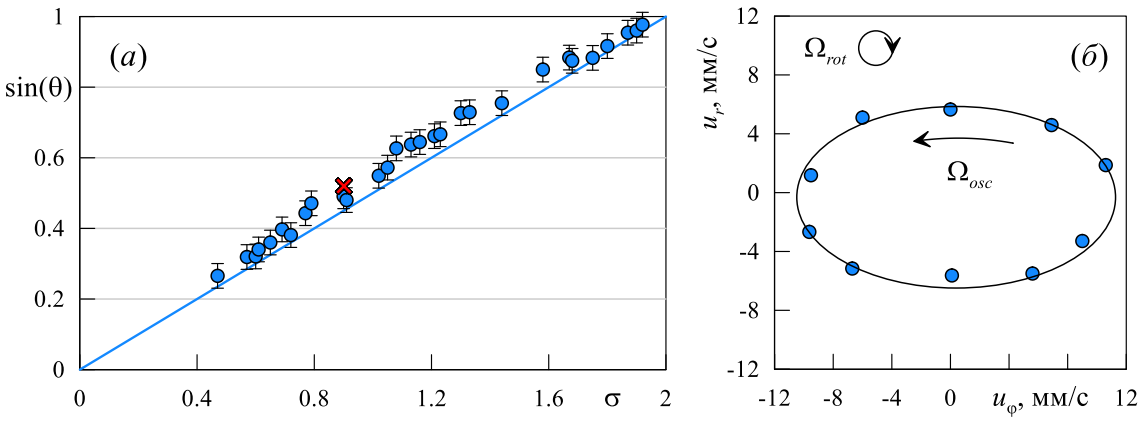


Рисунок 2.7 – Апертура конуса инерционных волн в зависимости от безразмерной частоты либраций (*а*). Синими точками показаны непосредственные измерения угла θ в осевом сечении полости. Линия – предсказание линейной теории, формула (2.6). На фрагменте (*б*) показана фазовая диаграмма скорости на плоскости параметров $\left(u_\varphi, u_r\right)$, измеренная в центре волнового пакета при $\sigma = 0.90$ и $\varepsilon = 0.10$. Красный крест на (*а*) соответствует углу θ, рассчитанному через эллиптичность фазовой траектории

В целом результаты визуализации мгновенного профиля скорости PIV-методом подтверждаются теорией распространения волновых лучей [1]. Стоит отметить, что реальное поле скорости отягощается вязкими эффектами. Это проявляется в конечной толщине волновых лучей и наличии вязких пограничных слоев на твердых границах, модифицирующих геометрию полости. Так, например, отражение волн происходит не точно в точке падения, но вблизи нее. Это также отмечалось в численных исследованиях [103], где рассматривались инерционные волны во вращающемся цилиндре с осциллирующей боковой стенкой. Там же было обнаружено, что при отражении волновых лучей пограничные слои становятся более толстыми.

2.2.2. Скорость пульсационного течения

Обсудим, как зависит полный динамический отклик жидкости от частоты σ в линейном режиме, т.е. в области малых амплитуд ε. В качестве характеристики интенсивности пульсационного течения будем использовать величину:

$$u = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{u_{r_i}^2 + u_{z_i}^2}\,, \qquad (2.7)$$

где u_r и u_z – проекции мгновенной скорости на оси r и z в осевом сечении полости; количество элементов N определяется пространственным разрешением PIV-метода. Пример типичной зависимости осреднённой по пространству скорости u от времени для частоты либраций $\sigma = 0.90$ и амплитуды $\varepsilon = 0.10$ представлен на рис. 2.8*а*. Зависимость имеет гармонический характер, за один период либраций скорость жидкости дважды достигает максимального и минимального значения, что связано с периодическим изменением направления групповой скорости вдоль волновых лучей. Эксперименты показывают, что подобная временная динамика является типичной для всего диапазона частот либраций. Далее полученное значение скорости осредняется по периоду T_{lib}:

$$< u > = \frac{1}{T_{lib}}\int_{T_{lib}} u\,dt\,. \qquad (2.8)$$

Осреднение $< u >$ происходит не менее чем по десяти периодам либраций. С увеличением амплитуды ε интенсивность пульсационного движения жидкости возрастает. В линейном режиме при фиксированной частоте σ средняя скорость $< u > \sim \varepsilon$ (рис. 2.8*б*). Изменение частоты либраций приводит к смене инерционного режима колебаний жидкости, при этом в области малых амплитуд ε линейная зависимость сохраняется.

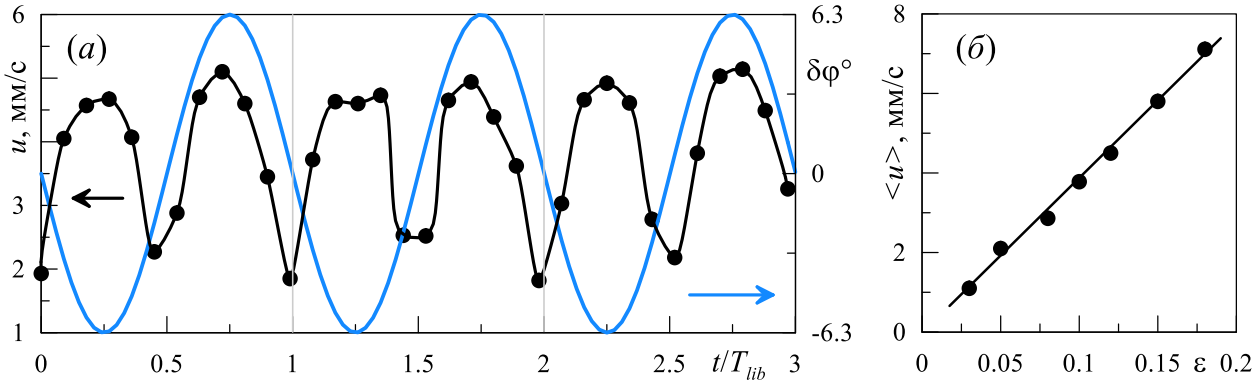


Рисунок 2.8 – Зависимость средней по сечению скорости пульсационного течения в осевом сечении полости при частоте либраций $\sigma = 0.90$ и амплитуде $\varepsilon = 0.10$ (черные точки); синей кривой изображена либрационная компонента угла поворота полости (*а*). На фрагменте (*б*) показана зависимость средней скорости пульсаций $< u >$ от амплитуды либраций

2.2.3. Инерционные моды

Для сравнения результатов экспериментов в линейном режиме величина скорости $<u>$ нормируется на амплитуду пульсационной скорости боковой границы полости $\Delta\varphi\Omega_{lib}R$:

$$<U>=\frac{<u>}{\Delta\varphi\Omega_{lib}R}. \tag{2.9}$$

Безразмерная скорость жидкости $<U>$ для всего исследуемого диапазона частот либраций представлена на рис. 2.9. Видно, что зависимость имеет немонотонный вид с серией ярко выраженных экстремумов. Наиболее сильный резонансный отклик наблюдается при возбуждении *инерционных мод* – собственных колебаний вращающейся жидкости в замкнутой полости. Данные режимы характеризуются глобальными колебаниями жидкости и обозначаются как $\mathrm{M}(n,m,k)$, где *n*, *m*, *k* означают осевое, радиальное и азимутальное волновое число соответственно. Значения собственных частот невязких инерционных мод в цилиндре определяются следующим выражением [1]:

$$\sigma^2=\frac{4\pi^2n^2}{\pi^2n^2+\xi_{nmk}^2/a^2}, \tag{2.10}$$

где ξ_{nmk} характеризует *m*-ное положительное решение трансцендентного уравнения:

$$\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}J_{|k|}(\xi)+k\sqrt{1+\frac{\xi^2}{n^2\pi^2a^2}}J_{|k|}(\xi)=0. \tag{2.11}$$

Здесь $J_{|k|}(\xi)$ – функция Бесселя первого рода порядка $|k|$. Рассчитанные собственные значения σ_{theory} для прямого цилиндра с аспектным соотношением $a = R/L = 0.25$ представлены в табл. 2.3. Рассматривается осесимметричное течение, поэтому в данном случае всегда $k=0$. Соответствующие значения резонансных пиков, наблюдаемые в эксперименте, хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями. Отметим, что поскольку торцы полости колеблются симметрично, возникают только симметричные моды по отношению к плоскости $z/L=0.5$ с четными значениями *n*.

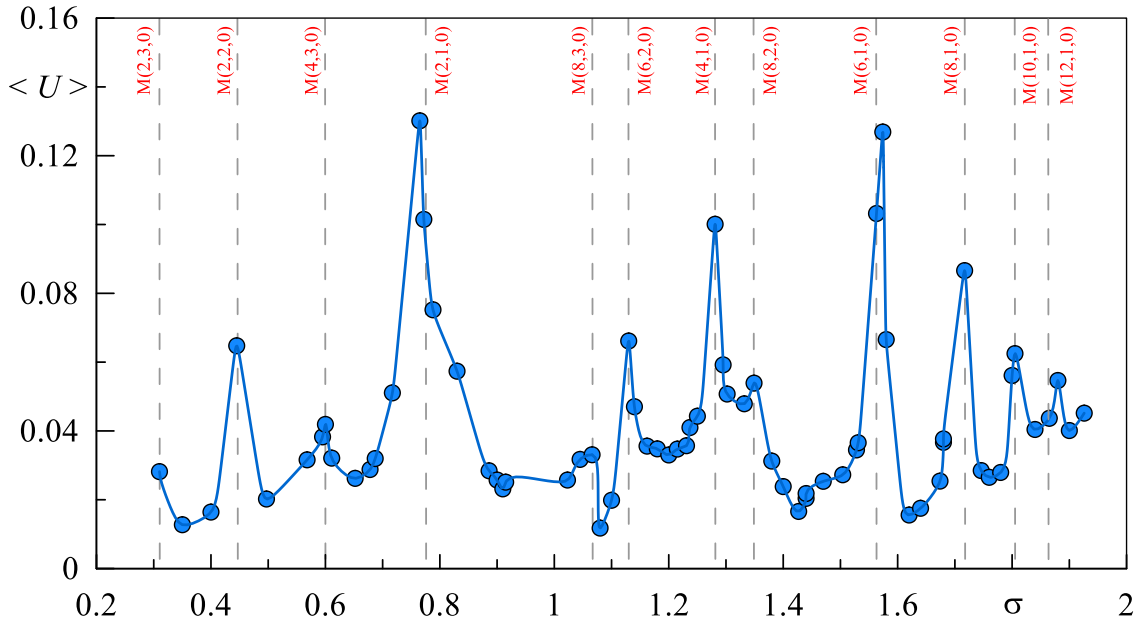


Рисунок 2.9 – Средняя скорость пульсационного течения в зависимости от безразмерной частоты при $\mathrm{E}=1.65\cdot10^{-4}$

Типичные мгновенные поля скорости с пространственными структурами, характерными для основных инерционных мод, показаны на рис. 2.10. Наблюдения за временной динамикой вихрей показывают, что в течение периода либраций знак завихренности меняется, в то время как максимумы завихренностей сохраняют свое положение. Например, при частоте $\sigma=0.772$ возбуждается мода $\mathrm{M}(2,1,0)$, которая представляет собой два тороидальных вихря, «разрезанных» на рис. 2.10*а* пополам лазерным ножом. В данном случае фаза колебаний имеет значение $\Omega_{lib}t=\pi$, при этом в противофазе ($\Omega_{lib}t=0$) направление закрутки жидкости в вихрях будет противоположным. Перестройка между модами всегда происходит по одному сценарию: повышение частоты σ при данном радиальном числе m приводит к росу осевого числа n, а понижение σ при данном n приводит к росу m. Так, при увеличении частоты до $\sigma=1.282$ возбуждается мода $\mathrm{M}(4,1,0)$ (рис. 2.10*г*) – количество вихрей в осевом направлении увеличивается в два раза. В то же время при понижении частоты до $\sigma=0.445$ возбуждается мода $\mathrm{M}(2,2,0)$ (рис. 2.10*б*) – количество вихрей увеличивается в радиальном направлении. Кроме того, хорошо видно, что с увеличением радиального волнового числа кинетическая энергия пульсационного течения уменьшается. При этом для мод с $m>1$

наиболее интенсивные колебания жидкости происходят в вихрях, расположенных вблизи оси вращения полости. Можно отметить, что похожие режимы стоячих волн с четными значениями n наблюдались в либрирующем цилиндре [90] (численные исследования), а также в кубе, либрирующем вдоль оси, проходящей через две противоположные грани [30].

Таблица 2.3 – Собственные значения невязких осесимметричных мод ($k = 0$) в цилиндре с аспектным отношением $R/L = 0.25$

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$n = 2$	0.772	0.445	0.311
$n = 4$	1.282	0.831	0.601
$n = 6$	1.564	1.130	0.855
$n = 8$	1.718	1.349	1.066
$n = 10$	1.804	1.505	1.238
$n = 12$	1.858	1.615	1.374

Отметим, что возбуждение инерционной моды происходит только на долю периода либраций. Наиболее ярко это проявляется в фазы $\Omega_{lib}t = 0$ и π, т.е. в моменты остановки кюветы в равномерно вращающейся системе отсчёта. Если внимательнее анализировать мгновенные поля завихренности, можно заметить корреляцию между положениями максимумов $\xi_\varphi^{\max}$ одного знака и гипотетическим направлением распространения волновых лучей, рассчитанных для соответствующих частот (рис. 2.11, белые штриховые линии). Так, для моды $\mathrm{M}(10,1,0)$ наклон лучей практически совпадает с шахматным порядком $\xi_\varphi^{\max}$ (рис. 2.11*а*); величину рассогласования можно видеть на рис. 2.7. Наиболее ярко корреляция проявляется для мод более высокого порядка. При частоте $\sigma = 1.238$ (мода $\mathrm{M}(10,3,0)$) наблюдается интересная картина, когда в углах параллелепипедов, построенных на лучах, оказываются завихренности одного знака (рис. 2.11*б*). По всей видимости, объединение этих завихренностей при небольшом повышении частоты до величины $\sigma = 1.282$ приводит к возбуждению более крупной моды $\mathrm{M}(4,1,0)$ (рис. 2.10*г*).

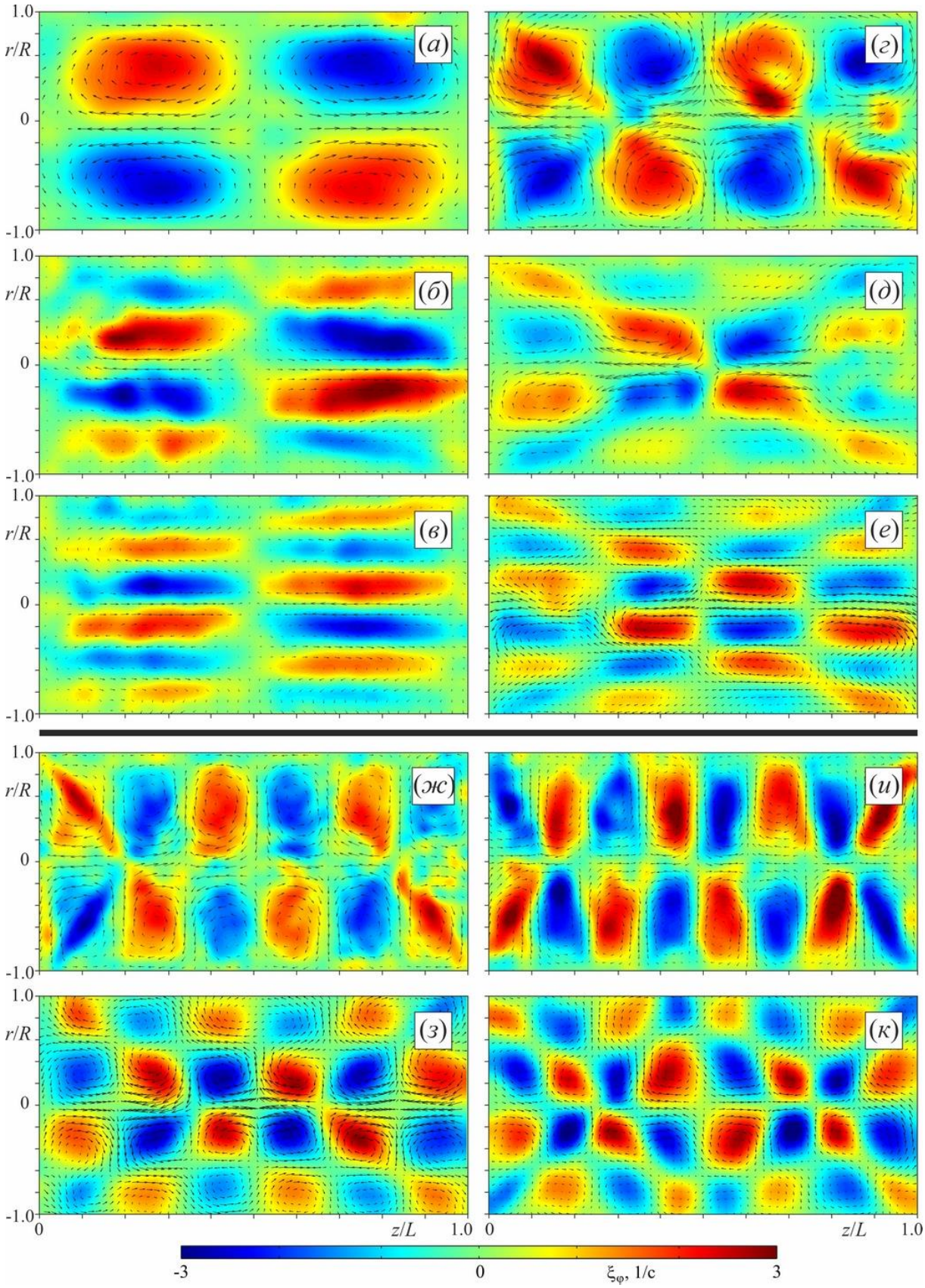


Рисунок 2.10 – Серия мгновенных полей скорости для мод $\mathrm{M}(2,1,0)$, $\mathrm{M}(2,2,0)$, $\mathrm{M}(2,3,0)$, $\mathrm{M}(4,1,0)$, $\mathrm{M}(4,2,0)$, $\mathrm{M}(4,3,0)$, $\mathrm{M}(6,1,0)$, $\mathrm{M}(6,2,0)$, $\mathrm{M}(8,1,0)$ и $\mathrm{M}(8,2,0)$ при частотах, указанных в табл. 2.3 и $\mathrm{E}=3.3\cdot10^{-4}$ (*а–к*, соответственно)

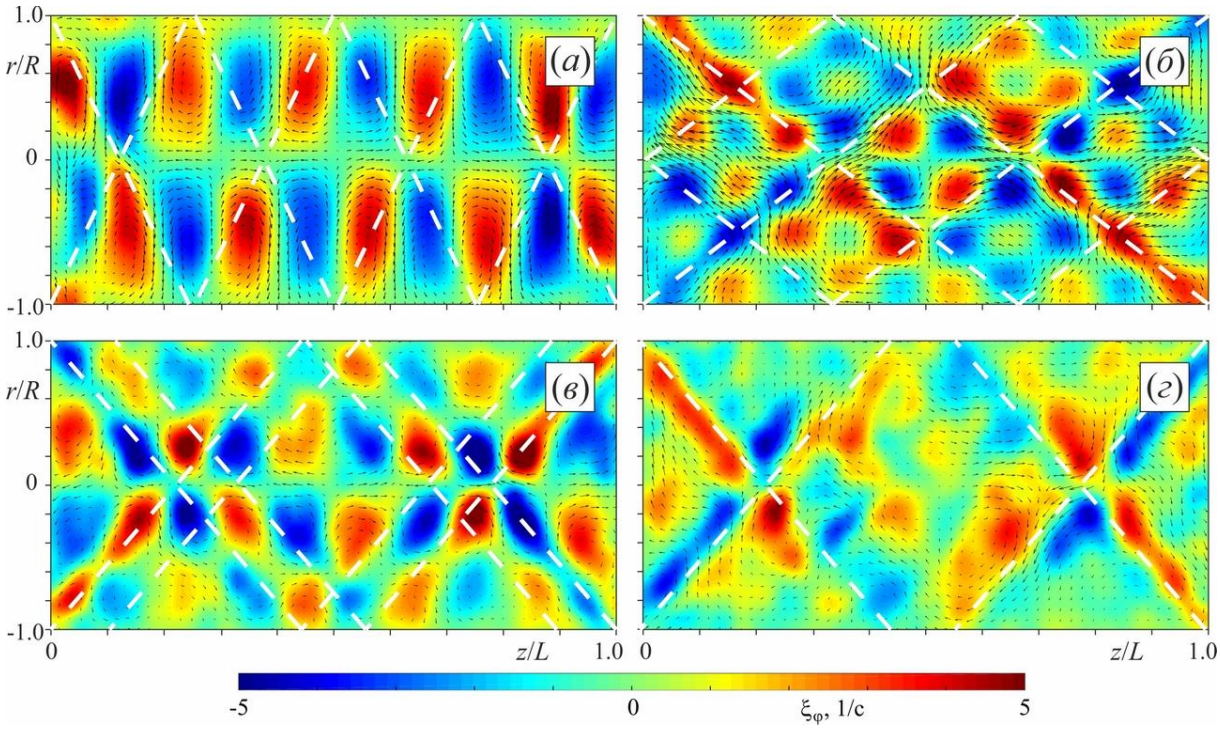


Рисунок 2.11 – Мгновенные поля скорости для мод $\mathrm{M}(10,1,0)$ и $\mathrm{M}(10,3,0)$ в фазе $\Omega_{lib}t=\pi$ – фрагменты (*а*) и (*б*), соответственно. В нижнем ряду показана мода $\mathrm{M}(10,2,0)$ в фазах $\Omega_{lib}t=0$ (*в*) и $\Omega_{lib}t=\pi/2$ (*г*). Белыми штриховыми линиями показаны теоретические характеристики волновых лучей

Любопытно проанализировать поля скорости в различные фазы либраций. Например, при $\sigma=1.505$ в фазе $\Omega_{lib}t=0$ отчётливо проявляется мода $\mathrm{M}(10,2,0)$, в то время как через четверть периода $\Omega_{lib}t=\pi/2$ наблюдаются локализованные волновые лучи (рис. 2.11*в*, *г*). Т.е. в моменты времени, когда угол либрации равен нулю, мгновенная амплитуда инерционной моды пропадает и проявляется характерная крестообразная волновая структура. Это хорошо согласуется с экспериментальными наблюдениями за временной динамикой инерционных мод в либрирующем кубе [30]. Таким образом, вблизи резонансных частот результирующее течение представляет собой суперпозицию отдельных волновых лучей и инерционной моды. Можно отметить, что это напоминает попеременное возбуждение осесимметричных и неосесимметричных мод, если торцы либрирующего цилиндра слегка параллельно наклонены [A20]. Отсюда возникает вполне закономерный вопрос о том, как связаны между собой инерционные моды, которые являются собственными колебаниями жидкости для заданной геометрии полости, и ло-

кализованные волновые лучи, возникающие благодаря осциллирующему движению в пограничных слоях Экмана вблизи углов полости.

По всей видимости, механизм возбуждения инерционных мод следующий. Либрации с заданной частотой возбуждают волновые лучи в объёме полости путём «отрыва» осциллирующих пограничных слоёв Экмана. Если частота либраций имеет близкое значение к собственной частоте инерционной моды, волновые лучи закачивают энергию в моду с правильной геометрической конфигурацией. Понятно, что всё это предполагает вязкий механизм переноса момента импульса от стенок течению. Как будет показано дальше, в случае наклонных торцов либрации обеспечивают наличие осевой компоненты скорости за счёт «толчков» жидкости, в результате чего интенсивность пульсационного течения в области резонансов возрастает на порядок (Раздел 2.3.2).

2.2.4. Осреднённые течения

2.2.4.1. Зональное течение

В отсутствие либраций жидкость и полость совершают твердотельное вращение. Либрации приводят к возникновению пульсационного движения в вязких пограничных слоях Экмана на торцевых стенках полости, в результате чего в объеме полости генерируется осреднённое ретроградное зональное течение (рис. 2.12*a*). При фиксированном значении частоты либраций σ азимутальная скорость жидкости Δu_φ возрастает квадратичным образом с амплитудой либраций, $\sim \varepsilon^2$. Этот результат следует из теоретического анализа Ванга [146] и Буссе [147], сделанного в приближении отсутствия инерционных колебаний жидкости в пределе низких частот и малых амплитуд либраций. Квадратичная зависимость скорости жидкости от ε неоднократно подтверждалась как численными [90], так и экспериментальными [148, A17] исследованиями. Отметим, что полученный результат справедлив не только для цилиндрической, но и для сферической геометрии задачи [38, 100, 149]. Универсальность квадратичного закона определяется общим механизмом генерации осреднённых течений, связанным с нелинейными эффектами в пограничных слоях Экмана, и справедлива для всех типов гармони-

ческого воздействия [40]. В связи с этим далее безразмерную скорость зонального течения будем нормировать следующим образом: $\Delta u_\varphi / \left(\Omega_{rot} r \varepsilon^2\right) = \Delta\Omega / (\Omega_{rot}\varepsilon^2)$.

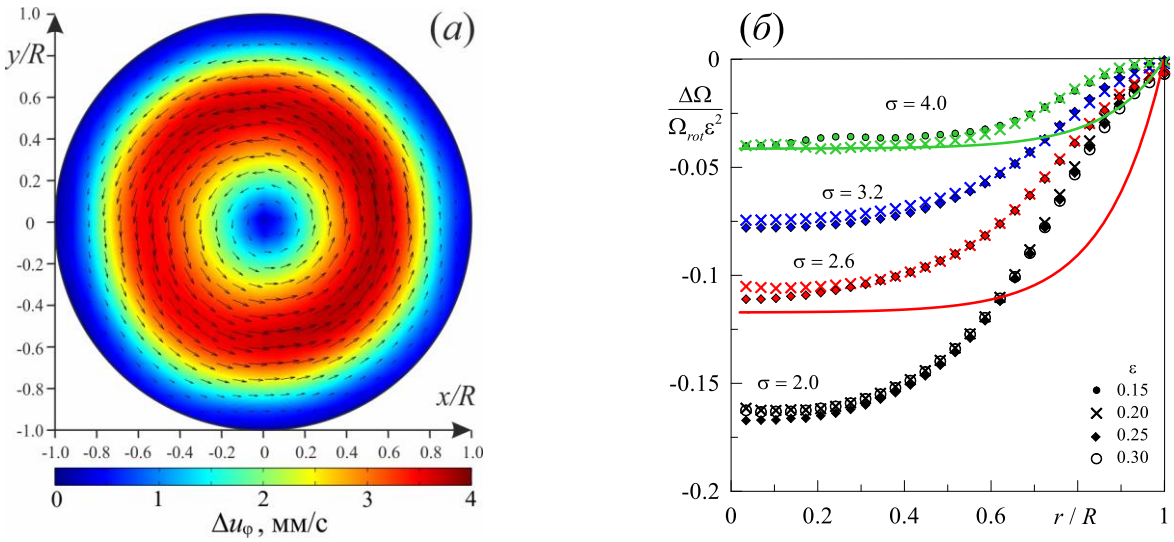


Рисунок 2.12 – Поле осреднённой азимутальной скорости жидкости Δu_φ при $\sigma = 2$ и $\varepsilon = 0.25$ (*а*) и профили осреднённой угловой скорости жидкости $\Delta\Omega / (\Omega_{rot}\varepsilon^2)$ на расстоянии $z / L = 0.5$ при различных частотах либраций и $\mathrm{E} = 3.3 \cdot 10^{-4}$ (*б*); сплошными кривыми показаны теоретические профили, рассчитанные по формуле (2.14)

Профили угловой скорости в сечении, проходящем через центр полости, приведены на рис. 2.12*б*. Вблизи оси вращения жидкость совершает твердотельное вращение и, по мере приближения к боковой стенке полости, угловая скорость $\Delta\Omega / (\Omega_{rot}\varepsilon^2)$ монотонно уменьшается по абсолютной величине. Двумерность этого течения сильно нарушается около торцов полости, где на расстоянии $r / R = 0.8 - 1$ отстающее дифференциальное вращение жидкости меняется на опережающее (рис. 2.13*а*). В этой части полости форма профиля скорости хорошо согласуется с результатами работ [148] и [90], где рассматривалось течение в относительно коротком цилиндре с $L / R = 2.13$ и 2.0, соответственно. Аналогичным образом вблизи боковой стенки скорость жидкости изменялась немонотонным образом в виде опережающего струйного течения. Как будет показано далее, механизм этого течения связан с возникновением осреднённых вихревых потоков в углах полости [А17]. Заметим, что в силу зеркальной симметрии поля скорости

относительно плоскостей $r=0$ и $z/L=0.5$, на рис. 2.13 представлены профили, ограниченные размерами $r/R=0-1$ и $z/L=0.5-1$.

С увеличением частоты либраций σ скорость ретроградного движения жидкости в центральной части полости монотонно уменьшается до нуля (рис. 2.12*б*), и при $\sigma>8$ вся жидкость совершает опережающее вращение. Результаты экспериментов можно сравнить с аналитическим решением для зонального течения в либрирующем цилиндре, полученным Вангом [146], и переписанным в более удобной форме в [90]. Он показал, что для произвольной частоты либраций в отсутствие инерционных мод, скорость твердотельного дифференциального вращения жидкости определяется величиной $\Omega^*=\Omega^*(\sigma)$, которая может быть вычислена следующим образом:

$$\Omega^*=\frac{\Delta\Omega}{\Omega_{rot}\varepsilon^2}=\frac{(\sigma+1)\sqrt{2\sigma+4}+2}{8\sqrt{2\sigma+4}\left(\sigma^2+4\sigma+5\right)}-\frac{(\sigma-3)\sqrt{2\sigma-4}+2}{8\sqrt{2\sigma-4}\left(\sigma^2-4\sigma+5\right)}+\frac{2\sigma-\sqrt{2\sigma+4}\sqrt{2\sigma-4}}{2\sigma\sqrt{2\sigma+4}\sqrt{2\sigma-4}}+$$
$$+\frac{2\sigma\left(\sigma^2-6\right)-\sqrt{2\sigma+4}\left(\sigma^2+3\sigma-12\right)-\sqrt{2\sigma-4}\left(\sigma^2-3\sigma-12\right)+3\sigma\sqrt{2\sigma+4}\sqrt{2\sigma-4}}{4\sigma\left(\sigma^2-3\right)\sqrt{2\sigma+4}\sqrt{2\sigma-4}},\quad \sigma>2 \qquad (2.12)$$

$$\Omega^*=\frac{\Delta\Omega}{\Omega_{rot}\varepsilon^2}=\frac{(\sigma+1)\sqrt{4+2\sigma}+2}{8\sqrt{4+2\sigma}\left(\sigma^2+4\sigma+5\right)}-\frac{(\sigma-1)\sqrt{4-2\sigma}-2}{8\sqrt{4-2\sigma}\left(\sigma^2-4\sigma+5\right)}-\frac{1}{\sqrt{4-2\sigma}\sqrt{4+2\sigma}}+$$
$$+\frac{\sqrt{4-2\sigma}\sqrt{4+2\sigma}+\sigma\left(\sqrt{4+2\sigma}-\sqrt{4-2\sigma}\right)-4}{\sqrt{4-2\sigma}\sqrt{4+2\sigma}\left(2+\sqrt{4+2\sigma}\sqrt{4-2\sigma}\right)\left(\sqrt{4+2\sigma}+\sqrt{4-2\sigma}\right)},\quad \sigma<2 \qquad (2.13)$$

Ванг также предположил, что структура циркуляции жидкости вблизи боковой границы должна состоять из вязкого слоя $\delta_S^o\sim R\mathrm{E}^{1/4}$ и внутреннего подслоя $\delta_S^i\sim R\mathrm{E}^{1/3}$. В первом зануляется зональное течение ($\Omega^*=0$), а второй слой необходим для удовлетворения непрерывности осевой *z*-компоненты скорости.

Результаты измерения скорости твердотельного вращения на расстоянии $r/R=0.25$ в целом описываются теоретической зависимостью Ванга [146] для $\sigma>2$ (рис. 2.14*а*). Следует отметить, что количественное согласование наблюдается только при $\mathrm{E}=2.1\cdot10^{-4}$ и $\mathrm{E}=3.3\cdot10^{-4}$, что указывает на достижение асимптотического предела $\mathrm{E}\ll1$. Ранее в экспериментах [148] и численном счете [90]

также было обнаружено, что независимо от частоты либраций при $\mathrm{E} < 10^{-4}$ скорость твердотельного вращения жидкости вдали от боковой стенки полости не зависит от E. Настоящие эксперименты показывают, что уже при $\mathrm{E} = 6.6 \cdot 10^{-4}$ наблюдается выход системы из области низких чисел Экмана, в результате чего интенсивность зонального течения заметно уменьшается.

Профиль угловой скорости с учетом решения в слое δ_S^o имеет следующий вид [146]:

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_{rot}\varepsilon^2} = \Omega^* \left[1 - \exp\left(-\frac{1 - r/R}{\mathrm{E}^{1/4}} \right) \right], \tag{2.14}$$

где величина Ω^* вычисляется по формулам (2.12) и (2.13). Из рис. 2.12*б* видно, что результаты теории и эксперимента хорошо согласуются только в области твердотельного вращения жидкости. По мере приближения к боковой стенке появляется заметное рассогласование. По всей видимости, это связано со сложной структурой осреднённой меридиональной циркуляции, о которой речь пойдёт в следующих разделах. Кроме того, теория Ванга не воспроизводит сильное опережающее течение вблизи мест соединения боковой и торцевых стенок (рис. 2.13*а*). Действительно, Ванг предполагал, что пограничные слои на этих двух взаимно перпендикулярных границах можно рассматривать независимо. Однако результаты экспериментов показывают, что это не так.

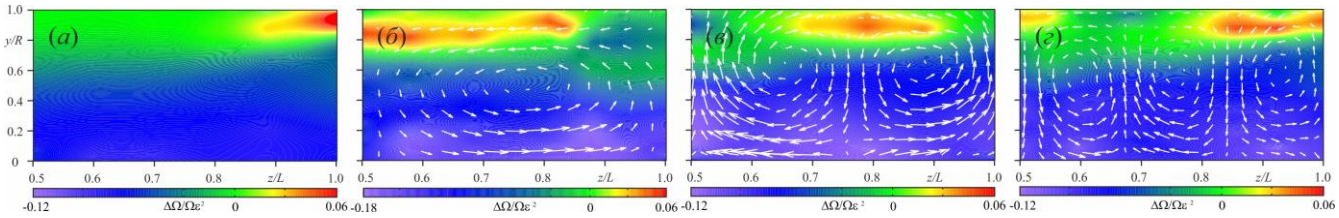


Рисунок 2.13 – Распределение осреднённой угловой скорости жидкости $\Delta\Omega / (\Omega_{rot}\varepsilon^2)$ вдоль осевого сечения полости при $\sigma = 2$, 0.77, 1.28 и 1.56 (*а–г*, соответственно). Амплитуда либраций и число Экмана для всех случаев составляют $\varepsilon = 0.10$ и $\mathrm{E} = 2.4 \cdot 10^{-3}$. Стрелками на фрагментах *б–г* показано мгновенное поле скорости в осевом сечении полости в фазе либраций $\Omega_{lib} t = \pi$

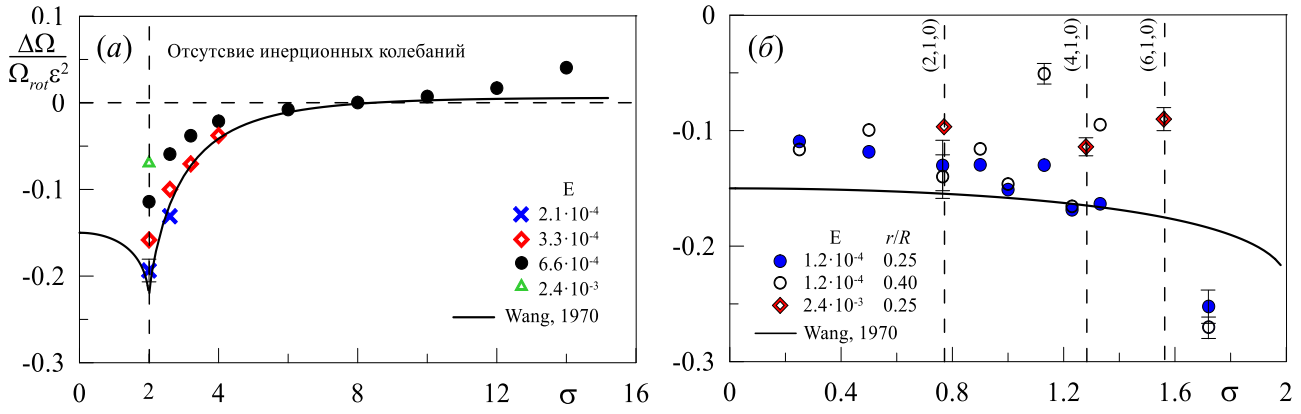


Рисунок 2.14 – Безразмерная угловая скорость жидкости на расстоянии $r/R=0.25$ в сечении $z/L=0.5$ для высоких частот либраций $\sigma>2$ (*а*) и для низких частот $\sigma<2$ (*б*). Сплошные кривые построены для Ω^* и соответствуют теории Ванга [146], построенной в предположении отсутствия инерционных колебаний жидкости в пределе малых чисел Экмана

2.2.4.2. Влияние инерционных волн на зональное течение

Инерционные колебания жидкости сильно влияют на структуру осреднённого зонального течения. Так, в условиях колебаний моды $\mathrm{M}(2,1,0)$, опережающее движение в углах полости подавляется возрастающим отстающим азимутальным потоком (рис. 2.13*б*). В то же время вблизи боковой стенки полости на расстоянии $z/L=0.8-0.85$ возникает опережающее течение. Интенсивность этого течения сравнима с тем, что генерируется в углах полости в отсутствие инерционных колебаний (рис. 2.13*а*). Профиль скорости жидкости принимает более сложную форму. Движение вблизи оси вращения перестает быть твердотельным, при этом форма профиля скорости сильно меняется вдоль координаты z/L.

С увеличением номера моды распределение угловой скорости жидкости наиболее сильно меняется на расстоянии $r/R=0.7-1$ (рис. 2.13*в*, *г*). Вдоль боковой стенки полости наблюдается чередование областей опережающего и отстающего дифференциального вращения. В то же время на расстоянии $r/R=0-0.5$ изменения, происходящие в профиле скорости вдоль оси вращения, выражены не сильно. Качественные изменения вблизи границы полости связаны с возбуждением осреднённого вихревого движения в пограничном слое Стокса. В [А6, А17] показано, что осциллирующее движение жидкости приводит к появлению интен-

сивных средних течений в виде тороидальных вихрей. Количество вихрей определяется осевым волновым числом *n* (Раздел 2.2.4.3).

На рис. 2.14*б* приведена зависимость скорости зонального течения от частоты либраций в области частот $\sigma < 2$. Можно отметить, что в пределе низкочастотных либраций теоретически рассчитанная величина отклонения угловой скорости жидкости от твердотельного вращения приближается к значению $\Delta\Omega / \left(\Omega\varepsilon^2\right) = -3/20$. Это полностью согласуется с результатом асимптотической теории Буссе [147], полученным в предположении $\sigma << 1$ и $L/R << 1$.

Экспериментально полученные значения скорости азимутального течения для случая малых чисел Экмана $\mathrm{E} = 1.2 \cdot 10^{-4}$ отличаются от теории. Так, в диапазоне частот $0 < \sigma < 1$ благодаря инерционным колебаниям интенсивность отстающего течения оказывается меньше. При этом измерения, выполненные на различных расстояниях от оси вращения, показывают, что при некоторых частотах σ движение жидкости в центральной части полости нетвердотельное. Профиль скорости принимает более сложную форму, вид которой меняется в зависимости от частоты либраций. В диапазоне частот $1 < \sigma < 2$ разброс экспериментальных точек становится более существенным. Это связано с возбуждением инерционных мод с меньшим пространственным периодом (см. табл. 2.3). Из всей последовательности результатов выбиваются экспериментальные точки, полученные для моды $\mathrm{M}(8,1,0)$. В этом случае дополнительное пульсационное движение жидкости приводит к существенной интенсификации отстающего дифференциального вращения жидкости (рис. 2.14*б*). Тот факт, что в экспериментах с различными частотами либраций наблюдается либо увеличение, либо уменьшение величины $\Delta\Omega / \left(\Omega\varepsilon^2\right)$ по сравнению с теорией, говорит о том, что инерционные моды могут генерировать как опережающее, так и отстающее дифференциальное вращение жидкости. Таким образом, результирующее течение определяется комбинационным действием двух механизмов: нелинейными эффектами в пограничных слоях Экмана и нелинейными эффектами в объеме полости, связанными с крупномасштабными колебаниями жидкости.

Повышение числа Экмана до $\mathrm{E} = 2.4 \cdot 10^{-3}$ приводит к незначительному уменьшению интенсивности дифференциального вращения жидкости. Это определяется тем, что толщина свободных сдвиговых слоев зависит от E.

2.2.4.3. Меридиональная циркуляция

Первоначально опишем меридиональную структуру течения, связанную исключительно с вращательными колебаниями полости ($\sigma \geq 2$). Эксперименты показывают, что вблизи мест соединения боковой и торцевых стенок цилиндра генерируются осреднённые угловые потоки (рис. 2.15). Это течение имеет форму двух тороидальных вихрей, жидкость в которых движется вдоль боковой стенки от торцов в центр полости. Как было показано в [А6, А17], угловое течение существует во всем диапазоне частот либраций, а скорость течения также изменяется с амплитудой либраций по закону $\sim \varepsilon^2$.

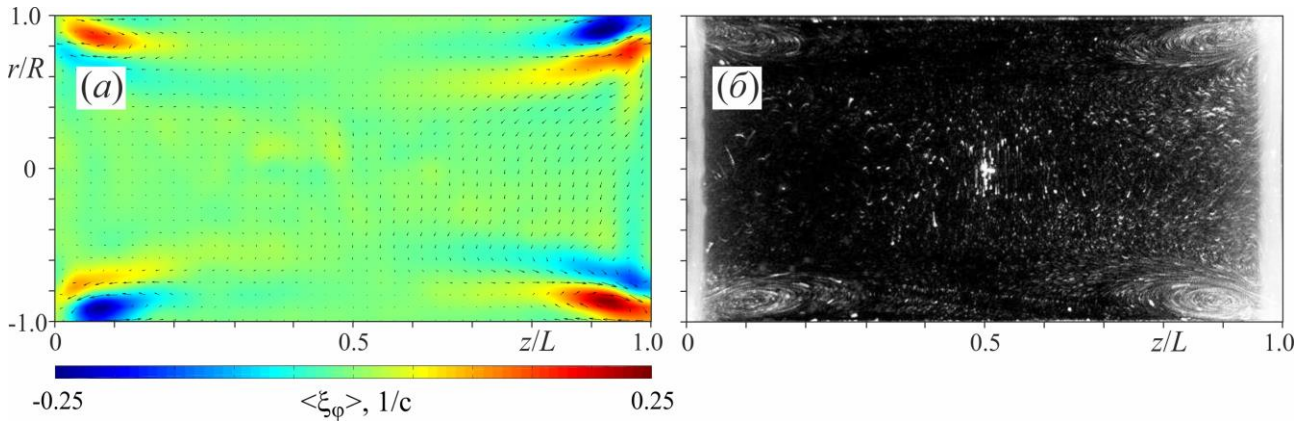


Рисунок 2.15 – Осреднённое по периоду либраций поле скорости в осевом сечении кюветы (*а*) и трековая визуализация структуры течения (*б*) при $\sigma = 2.2$, $\varepsilon = 0.10$ и $\mathrm{E} = 1.8 \cdot 10^{-3}$. Цветом показана φ-компонента поля осреднённой завихренности $\overline{\mathrm{rot}_{\varphi}\mathbf{u}}$

Инерционные колебания жидкости в объеме полости приводят к возникновению осреднённого течения в вязких пограничных слоях на боковой стенке полости. Структура меридиональной циркуляции проявляется при осреднении поля скорости по периоду либраций T_{lib}. Эксперименты показывают, что наряду с угло-

выми потоками вблизи боковой стенки полости формируется система дополнительных вихрей (рис. 2.16). Эти потоки имеют тороидальную форму, а их радиальный размер ограничен несколькими толщинами осциллирующего пограничного слоя. При добавлении в рабочую жидкость измельченного активированного угля тяжелые частицы, размер которых меньше толщины пограничного слоя, образуют на боковой стенке систему азимутальных колец. Структурообразование происходит в течение нескольких минут (~5 мин.) после включения либраций. Положение колец не меняется со временем и полностью согласуется со структурой осреднённого течения, полученной PIV-методом. Кольца локализуются между парами вихрей, образующих встречные потоки вдоль боковой стенки. Наблюдения показывают, что кольцевые структуры однородны по азимуту, что говорит об осесимметричности тороидальных потоков. Отметим, что в отсутствие либраций частицы угля равномерным слоем распределяются по боковой поверхности полости.

В нерезонансном случае при $\sigma = 1.68$ (рис. 2.16*а*, *б*) кольца образуются по обе стороны от мест отражения волновых лучей. Это означает, что осреднённые потоки направлены вдоль стенки полости от места, куда ударяет волна. Так, если инерционная волна отражается от боковой стенки только один раз ($\sigma = 1.44$ и $\sigma = 0.65$), вблизи точки падения формируются два осесимметричных кольца. Подобные кольцевые структуры из частиц алюминиевой пудры были обнаружены во вращающейся вокруг горизонтальной оси цилиндрической полости, частично заполненной центрифугированным слоем жидкости [179]. Частота колебаний жидкости совпадала с частотой вращения ($\sigma = 1$), поэтому направление распространения волн было фиксировано и составляло с осью вращения угол $\theta = 30°$. Подобно тому, что наблюдается в настоящих экспериментах, вблизи мест удара волновых лучей формировались кольцевые структуры. Аналогичные азимутальные структуры, связанные с инерционными волнами, наблюдаются в сферической полости с осциллирующим сферическим ядром (Раздел 4.1.4.3).

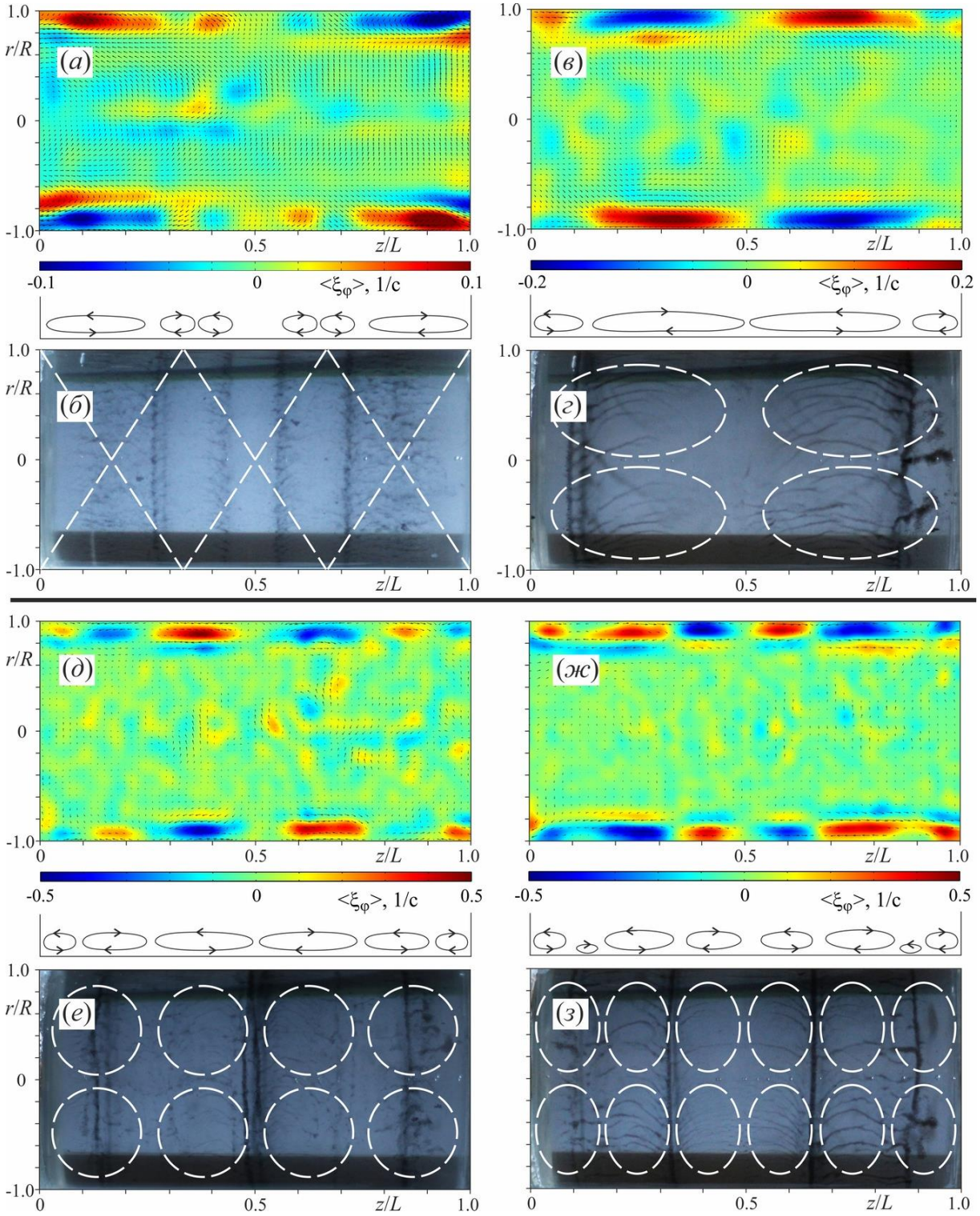


Рисунок 2.16 – Осреднённое поле скорости в нерезонансном случае при $\sigma = 1.68$, $\varepsilon = 0.10$ и $\mathrm{E} = 1.65 \cdot 10^{-4}$ (*а*); моды $\mathrm{M}(2,1,0)$ при $\sigma = 0.77$, $\varepsilon = 0.10$, $\tilde{\omega} = 4800$ и $\mathrm{E} = 1.65 \cdot 10^{-4}$ (*в*); моды $\mathrm{M}(4,1,0)$ при $\sigma = 1.28$, $\varepsilon = 0.12$, $\tilde{\omega} = 3900$ и $\mathrm{E} = 3.3 \cdot 10^{-4}$ (*д*); моды $\mathrm{M}(6,1,0)$ при $\sigma = 1.56$, $\varepsilon = 0.12$, $\tilde{\omega} = 4700$ и $\mathrm{E} = 3.3 \cdot 10^{-4}$ (*ж*). Внизу каждого фрагмента приведены схемы осреднённых течений. На (*б*, *г*, *е*, *з*) показаны фотографии распределения тяжелых частиц угля на боковой стенке полости; белыми штриховыми кривыми показаны характеристики пульсационного течения

Рассмотрим ситуацию, когда частота либраций совпадает с резонансной частотой системы. На рис. 2.16*в*, *д*, *ж* представлены осреднённые поля скорости и схематическое изображение структуры течения, соответствующие модам $\mathrm{M}(2,1,0)$, $\mathrm{M}(4,1,0)$ и $\mathrm{M}(6,1,0)$. Течение имеет вид системы тороидальных вихрей, размер которых вдоль оси *z* согласуется с размером осциллирующих вихрей. Исключение составляет область вблизи мест соединения боковой и торцевых стенок, где структура осреднённого течения осложняется присутствием углового течения. Поперечный размер вихрей ограничивается несколькими толщинами пограничного слоя δ, а их количество определяется соотношением $n + 2$. Дополнительная пара вихрей обусловлена наличием углового течения. Так, при $n = 6$ число вихрей, локализованных в пограничных слоях, составляет 8. При этом вихри, возбуждаемые осциллирующим движением на периферии ($0.15 > z / L > 0.85$), существенно подавляются осреднёнными угловыми потоками противоположной завихренности. Эти потоки слабо разрешимы на поле скоростей (рис. 2.16*ж*) и на нижнем фрагменте схематично изображены как вихри самого малого размера. Следует отметить, что количество осреднённых вихрей не зависит от радиального числа *m*. С увеличением *m* наблюдается только изменение интенсивности осреднённого движения жидкости.

В случае резонанса инерционной моды осреднённые течения также приводят к яркому структурообразованию на боковой стенке (рис. 2.16*г*, *е*, *з*). Кольцевые структуры формируются между каждыми двумя противоположно направленными потоками. На фотографиях, представленных на рис. 2.16*г*, *з*, также можно наблюдать «следы» движения частиц вдоль боковой стенки в виде вытянутых вдоль оси вращения жгутов. Можно ожидать, что спустя время частицы угля полностью сконцентрируются в кольцах.

На рис. 2.17 представлена карта положения колец в зависимости от частоты либраций σ. Между каждыми двумя кольцами располагаются два осреднённых вихря противоположной закрутки. Видно, что пространственный период структур сильно зависит от σ. При этом в положении колец, расположенных на периферии, можно выделить серию максимумов и минимумов, что связано с изменением

пульсационного режима движения жидкости. Так, при резонансном возбуждении инерционной моды крайние кольца максимально близко приближены к торцевым стенкам. Такая картина наблюдается при частотах $\sigma = 0.765$, $\sigma = 1.13$, $\sigma = 1.275$ и $\sigma = 1.56$, когда возбуждаются моды $\mathrm{M}(2,1,0)$, $\mathrm{M}(6,2,0)$, $\mathrm{M}(4,1,0)$ и $\mathrm{M}(6,1,0)$.

Когда частота либраций вдвое превышает частоту вращения полости, инерционные волны отсутствуют, при этом угловые потоки сносят частицы угля в центральную часть полости. В данном случае доверительный интервал на рис. 2.17 указывает на ширину кольцевых структур. В качестве характеристики скорости течения принимается абсолютное значение осреднённой максимальной скорости вдоль боковой стенки полости $\left|< u_z^m >\right|$. Так, например, при частоте $\sigma = 1.28$, мода $\mathrm{M}(4,1,0)$, вычисляется средняя скорость в четырёх максимумах, располагающихся в диапазоне $z / L = 0.1 - 0.9$ (рис. 2.18*а*). Потоки, возбуждаемые угловыми колебаниями, при осреднении не учитываются.

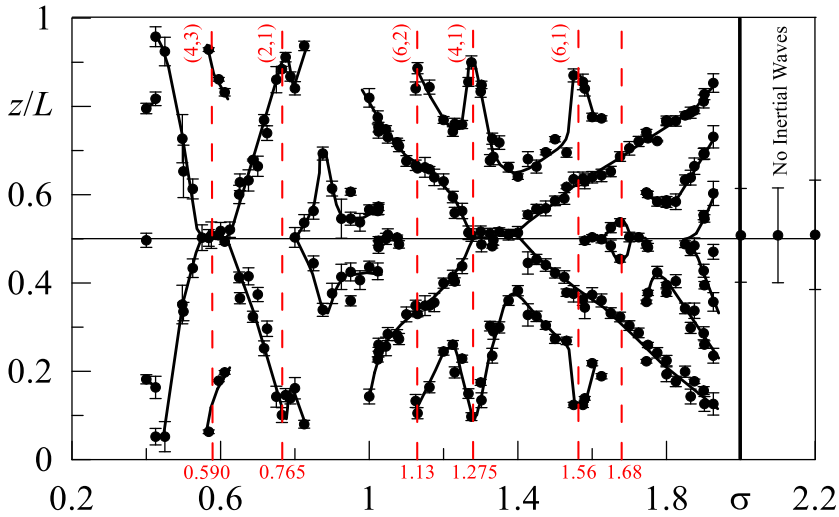


Рисунок 2.17 – Положение кольцевых структур из тяжелых частиц на боковой стенке полости в зависимости от частоты либраций при $\varepsilon = 0.1$ и $\mathrm{E} = 1.65 \cdot 10^{-4}$

На рис. 2.18*б* представлен график зависимости модуля максимальной скорости жидкости $< u_z^m > / \left(\Omega_{rot} R\right)$ от амплитуды либраций. Эксперименты показывают, что при фиксированной частоте σ интенсивность осреднённого движения возрастает по закону ε^2. Квадратичная зависимость определяется механизмом ге-

нерации осреднённых течений, связанным с нелинейными эффектами в динамическом пограничном слое Стокса. Таким образом, при фиксированном значении частоты либраций σ и числа Экмана E скорость осреднённого течения полностью определяется одним безразмерным комплексом $V = < u_z^m > / \left(\Omega_{rot} R \varepsilon^2 \right)$.

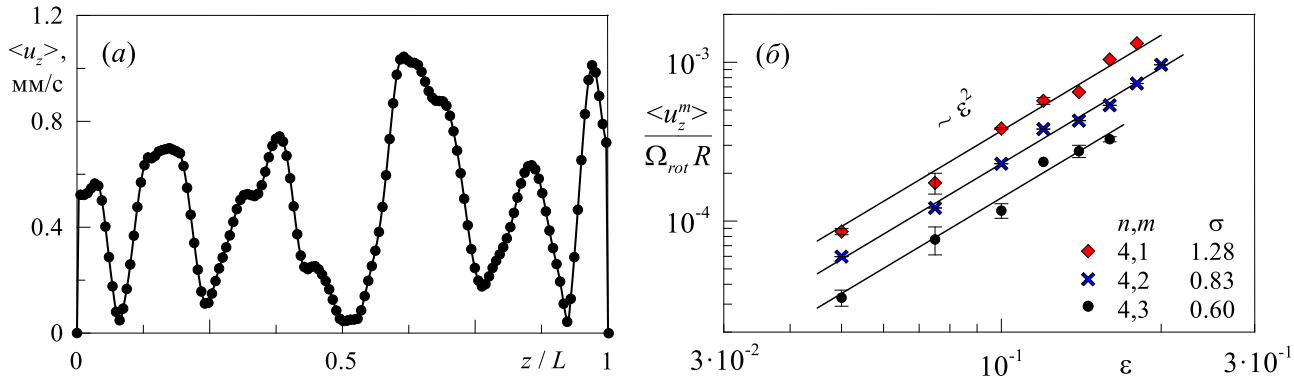


Рисунок 2.18 – Распределение модуля скорости осреднённого течения $< u_z >$ вдоль боковой стенки полости при $\sigma = 1.28$, $\varepsilon = 0.12$ и $\mathrm{E} = 1.65 \cdot 10^{-4}$ (*а*); зависимость максимальной скорости жидкости в осреднённых потоках от амплитуды либраций ε при фиксированном значении осевого волнового числа $n = 4$ и различных значениях радиального числа m (*б*)

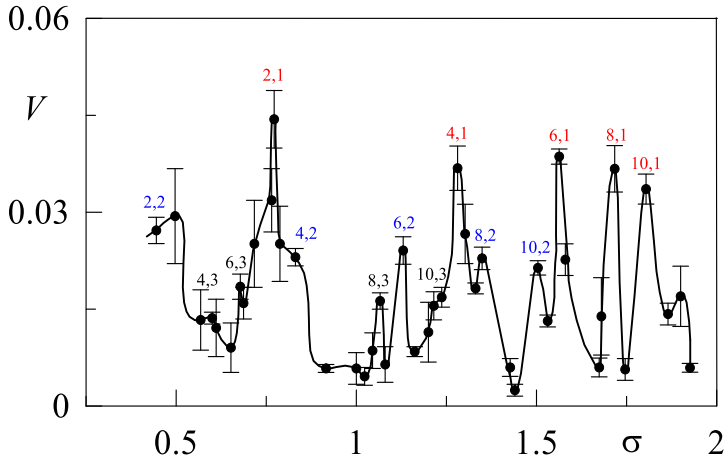


Рисунок 2.19 – Распределение безразмерной скорости осреднённого течения $V = < u_z^m > / \left(\Omega_{rot} R \varepsilon^2 \right)$ по частоте либраций σ при $\mathrm{E} = 1.65 \cdot 10^{-4}$; числа означают номера инерционных мод $\mathrm{M}(n, m, 0)$

При изменении частоты либраций σ скорость осреднённого течения V немонотонно меняется, испытывая серию экстремумов, соответствующих резонанс-

ному возбуждению инерционной моды $\mathrm{M}(n,m,0)$ (рис. 2.19). При этом наиболее интенсивное движение наблюдается для основной моды $\mathrm{M}(2,1,0)$, когда вся энергия колебаний аккумулирована в двух осциллирующих тороидальных вихрях. С увеличением радиального волнового числа m интенсивность осреднённого течения быстро ослабевает. Следующие по величине пики связаны с резонансным возбуждением мод $\mathrm{M}(n,2,0)$. При этом значение безразмерной скорости V примерно в полтора раза меньше, чем для мод с радиальным волновым числом $m = 1$. Наконец, потоки, связанные с модами $\mathrm{M}(n,3,0)$, практически не проявляют себя, что обусловлено сильной вязкой диссипацией мелкомасштабного пульсационного движения в объеме жидкости.

2.2.4.4. Роль безразмерной частоты

Важнейшим параметром задачи является безразмерная частота колебаний жидкости относительно полости $\tilde{\omega} = \Omega_{lib} R^2 / \nu$, которая характеризует квадрат отношения размера полости к толщине динамического слоя Стокса $\delta = \left(2\nu / \Omega_{lib}\right)^{1/2}$ на боковой стенке цилиндра. В области высоких частот ($\tilde{\omega} > 2 \cdot 10^3$) структура течения имеет вид, представленный на рис. 2.16. С понижением безразмерной частоты $\tilde{\omega}$ увеличивается относительная толщина пограничных слоев. Это приводит к тому, что размер осреднённых тороидальных вихрей также возрастает. Например, при частоте $\sigma = 0.77$, $\mathrm{M}(2,1,0)$ и $\tilde{\omega} = 330$ осреднённые вихри, возбуждаемые модами, разрастаются вплоть до торцевых стенок, наползая на угловые вихри (рис. 2.20*а, д*). Таким образом, вблизи торцов течение представляет собой двухуровневую систему, состоящую из пары тороидальных вихрей противоположной завихренности. Примечательно, что результирующее течение является суперпозицией двух потоков, обусловленных двумя различными механизмами – угловыми колебаниями полости и резонансными колебаниями жидкости в объеме полости.

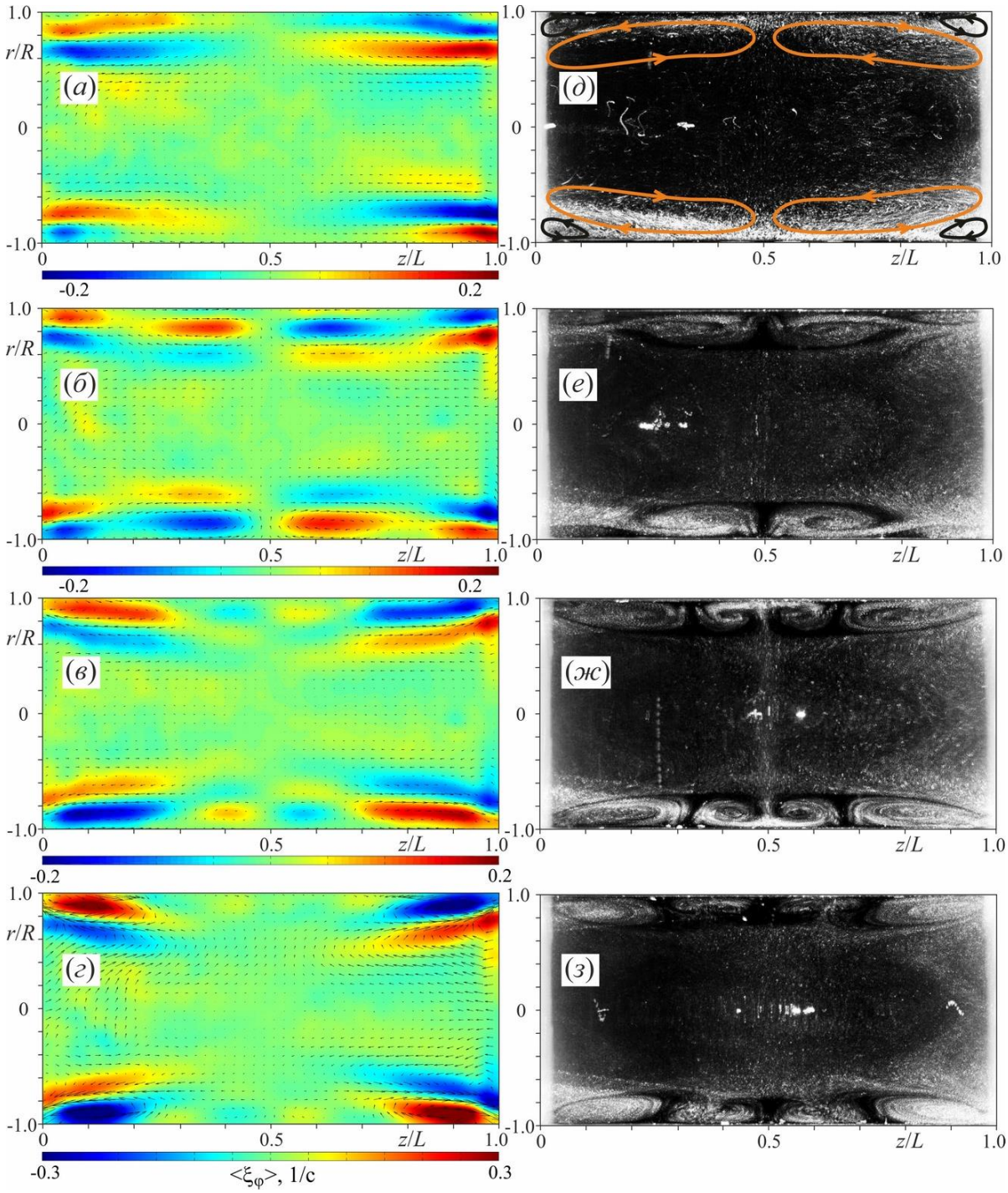


Рисунок 2.20 – Осреднённое поле скорости и его трековая визуализация при $\sigma = 0.77$ M(2,1,0), $\varepsilon = 0.15$ и $\tilde{\omega} = 330$ (*а*, *д*); $\sigma = 1.28$ M(4,1,0), $\varepsilon = 0.15$ и $\tilde{\omega} = 540$ (*б*, *е*); $\sigma = 1.56$ M(6,1,0), $\varepsilon = 0.15$ и $\tilde{\omega} = 660$ (*в*, *ж*); $\sigma = 1.72$ M(8,1,0), $\varepsilon = 0.20$ и $\tilde{\omega} = 730$ (*г*, *з*). Число Экмана для всех случаев составляет $\mathrm{E} = 2.4 \cdot 10^{-3}$. Цветом показана φ-компонента поля осреднённой по периоду либраций завихренности $< \xi_\varphi >= \overline{\mathrm{rot}_\varphi \mathbf{u}}$; на фрагменте *д* сплошными кривыми со стрелками схематично изображена структура осреднённого течения

Трансформация меридионального течения при фиксированном значении числа Экмана $\mathrm{E}=2.4\cdot10^{-3}$ для моды $\mathrm{M}(4,1,0)$ происходит аналогичным образом. При уменьшении $\tilde{\omega}$ осреднённые вихри, расположенные на расстоянии $z/L\in(0.1-0.2;0.8-0.9)$ (рис. 2.16*д*), увеличиваются в размере и вытесняются к периферии разрастающимися центральными вихрями (рис. 2.20*б, е*). Трековая визуализация течения показывает, что уже при $\tilde{\omega}=540$ осреднённые вихри в центральной части полости достигают существенного размера $\Delta r/R\approx0.3$. В то же время вблизи торцов полости осреднённое течение представляет собой двухвихревую систему, подобную той, что наблюдалась при $\sigma=0.77$ (рис. 2.20*а, д*).

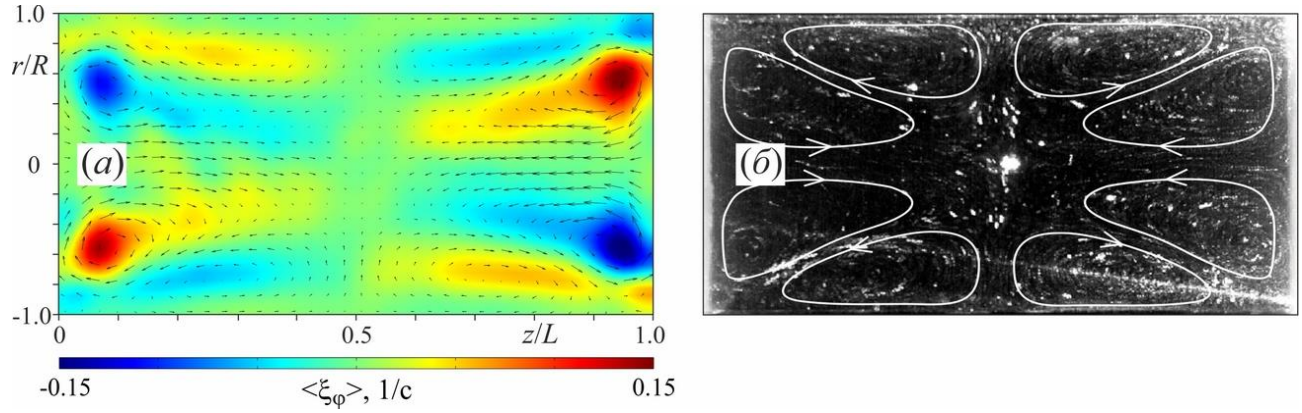


Рисунок 2.21 – Осреднённое поле скорости и его трековая визуализация при $\sigma=1.28$ M(4,1,0), $\varepsilon=0.15$, $\tilde{\omega}=110$ и $\mathrm{E}=1.2\cdot10^{-2}$

Процесс перестройки течения с изменением $\tilde{\omega}$, возбуждаемого модами более высокого порядка, немного отличается. Так, при $\sigma=1.56$ $\mathrm{M}(6,1,0)$ вихри, расположенные на расстоянии $z/L\in(0.15-0.2;0.85-0.9)$ (рис. 2.16*ж, з*), полностью подавляются близлежащими соседями. В результате угловое течение объединяется с ближайшим вихрем аналогичной завихренности, формируя по одному большому вихрю вблизи торцов полости (рис. 2.20*в, ж*). Таким образом, восьмивихревая структура (рис. 2.16*ж*) эволюционирует в четырёхвихревую (рис. 2.20*в*). Несмотря на то, что количество осреднённых вихрей вблизи боковой стенки при $\sigma=1.28$ и $\sigma=1.56$ одинаковое, центральные вихри отличаются как знаком завихренности, так и размером. Последнее обстоятельство связано с раз-

личием безразмерных частот $\tilde{\omega}$ для мод $\mathrm{M}(6,1,0)$ и $\mathrm{M}(4,1,0)$. По рис. 2.20*ж* можно оценить, что с увеличением $\tilde{\omega}$ толщина центральных вихрей уменьшилась до $\Delta r / R \approx 0.2$. По аналогичному сценарию происходит трансформация структуры осреднённого течения для моды $\mathrm{M}(8,1,0)$. В результате подавления угловыми потоками более слабых соседних вихрей, десятивихревое течение трансформируется в шестивихревое (рис. 2.20*г*, *з*).

При последующем понижении $\tilde{\omega}$ осреднённые потоки увеличиваются в размере, а их толщина становятся сравнимой с размером полости. В низкочастотном пределе $\tilde{\omega} < 10^2$ независимо от номера возбуждаемой моды течение представляет собой две пары согласованно вращающихся тороидальных вихрей (рис. 2.21). Вихревое движение жидкости формирует течение в виде струй, направленных в углы. В то же время наиболее сильное течение, направленное от торцов полости в её центр, возникает вдоль оси вращения. Отметим, что в случае нулевого среднего вращения ($\Omega_{rot} = 0$), вращательные вибрации с частотой Ω_{lib} генерируют вихревое движение противоположной завихренности [223, 224].

2.2.4.5. Обсуждение результатов

На рис. 2.22 приведена зависимость скорости $V = < u_z^m > / \left(\Omega_{rot} R \varepsilon^2 \right)$ осреднённых потоков, возбуждаемых модами $\mathrm{M}(2,1,0)$, $\mathrm{M}(4,1,0)$ и $\mathrm{M}(6,1,0)$, от числа Экмана $\mathrm{E} = \nu / \left(\Omega_{rot} R^2 \right)$. Во всех случаях с увеличением E движение жидкости в осреднённых вихрях диссипируется вязкостью по степенному закону, при этом скейлинг для различных инерционных мод может отличаться. В области низких чисел Экмана ($\mathrm{E} < 10^{-3}$) диссипация осциллирующего движения жидкости в объеме полости приводит к уменьшению максимальной скорости осреднённого течения по закону $V \sim \mathrm{E}^{-1/2}$. Однако при $\mathrm{E} > 10^{-3}$ наблюдается нарушение обнаруженного скейлинга. Так, монотонное уменьшение интенсивности течения, возбуждаемого модами $\mathrm{M}(2,1,0)$ и $\mathrm{M}(4,1,0)$, сменяется выходом системы на постоянное значение. Дополнительная подкачка энергии в течение связана с его трансформа-

цией, вызванной изменением $\tilde{\omega}$, понижение которой приводит к увеличению размеров вихрей. В результате осреднённое течение, возбуждаемое модой, начинает взаимодействовать с угловыми вихрями. После насыщения ($\mathrm{E} > 3\cdot10^{-3}$) монотонное понижение скорости V возобновляется по закону $V \sim \mathrm{E}^{-1/2}$.

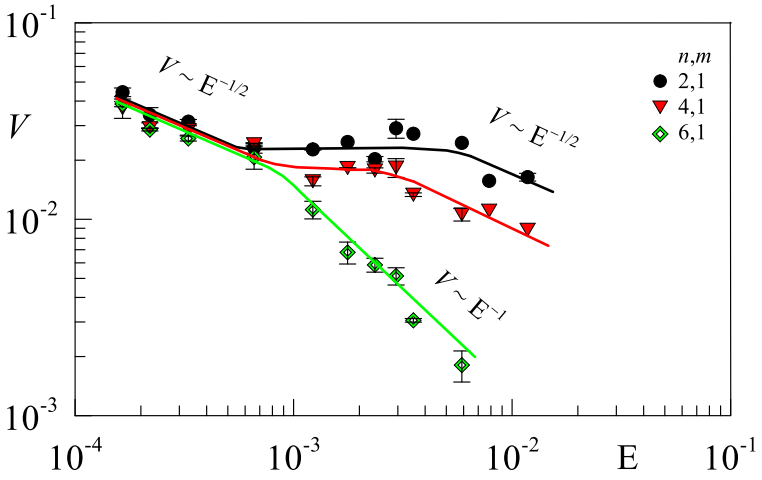


Рисунок 2.22 – Зависимость скорости осреднённой циркуляции от числа Экмана

Для моды $\mathrm{M}(6,1,0)$ при достижении числа Экмана $\mathrm{E} \sim 10^{-3}$ закон $V \sim \mathrm{E}^{-1/2}$ меняется на $V \sim \mathrm{E}^{-1}$, что отличается от скейлинга для мод с меньшим осевым волновым числом n. Стоит отметить, что в этом случае измерение скорости производилось только в центральных вихрях на расстоянии $z / L = 0.4 - 0.6$ (рис. 2.20*в*). Именно эти вихри связаны исключительно с резонансными осцилляциями инерционной моды и не отягощены влиянием углового течения. В то же время с увеличением E амплитуда пульсационного движения жидкости уменьшается с расстоянием от торцов и принимает наименьшее значение вблизи областей, где проводились измерения.

На рис. 2.23 представлено распределение скорости осреднённого течения с частотой либраций при числе Экмана $\mathrm{E} = 2.4\cdot10^{-3}$. Кружки соответствуют течению, связанному с модами, а ромбики – угловым вихрям. В отличие от случая на рис. 2.19 наблюдается только три основных максимума, соответствующих модам $\mathrm{M}(2,2,0)$, $\mathrm{M}(2,1,0)$ и $\mathrm{M}(4,1,0)$. Повышение E приводит к расширению частотных границ существования основных мод и одновременной диссипации мод бо-

лее высокого порядка. Например, при частотах либраций, соответствующих модам $\mathrm{M}(4,2,0)$ и $\mathrm{M}(6,2,0)$, возникает пульсационное течение, соответствующее модам $\mathrm{M}(2,1,0)$ и $\mathrm{M}(4,1,0)$. В свою очередь изменение режима пульсационного движения жидкости приводит к трансформации структуры осреднённого течения.

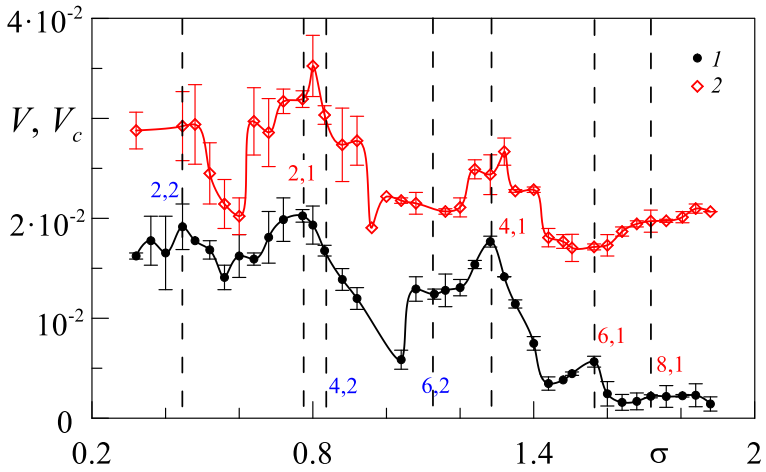


Рисунок 2.23 – Зависимость безразмерной скорости осреднённых потоков, возбуждаемых колебаниями жидкости в объеме полости V (кружки – *1*), и скорости углового течения V_c (ромбики – *2*) от частоты либраций при $\mathrm{E}=2.4\cdot10^{-3}$

Отметим, что в приведенном случае форма кривой для угловых потоков (ромбики на рис. 2.23) повторяет форму зависимости $V(\sigma)$. При этом значение скорости V_c может в несколько раз превышать скорость V, что особенно заметно для частот либраций $\sigma>1.3$. Это связано с тем, что с увеличением номера моды амплитуда пульсационного движения жидкости быстро уменьшается с расстоянием от торцов. Также стоит заметить, что течение вблизи торцов определяется суперпозиционным действием двух механизмов (вращательные колебания полости и инерционная мода), в результате чего скорость V_c выше, чем V.

Основываясь на зависимости, полученной на рис. 2.22 в высокочастотном пределе, ведём параметр $V\mathrm{E}^{1/2}$. Как показывают эксперименты, в диапазоне чисел Экмана $\mathrm{E}=10^{-4}-10^{-2}$ и при различных волновых числах, результаты согласуются на плоскости параметров $\tilde{\omega},V\mathrm{E}^{1/2}$ (рис. 2.24*а*). Видно, что в высокочастотном пределе параметр $V\mathrm{E}^{1/2}$ выходит на асимптотическое значение $5\cdot10^{-4}$. При пониже-

нии безразмерной частоты ($\tilde{\omega} < 2 \cdot 10^3$) скорость жидкости начинает зависеть от номера инерционной моды, что обусловлено влиянием угловых потоков. Так, при $\mathrm{M}(2,1,0)$ и $\mathrm{M}(4,1,0)$ скорость $V\mathrm{E}^{1/2}$ первоначально монотонно увеличивается, и при $\tilde{\omega} < 2 \cdot 10^2$ постепенно достигает максимального значения, после чего перестает меняться с безразмерной частотой.

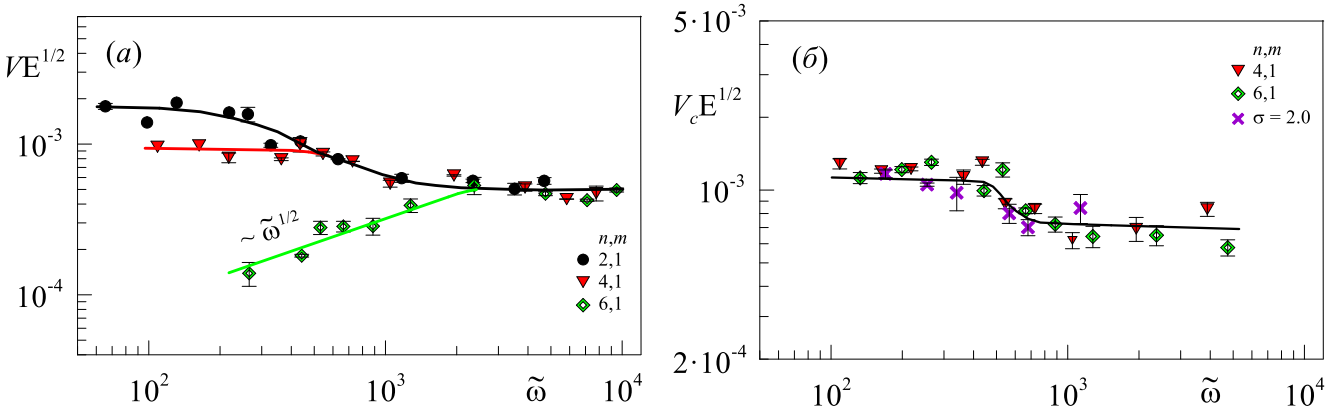


Рисунок 2.24 – Зависимость скорости осреднённого течения, возбуждаемого модами (*а*) и угловыми потоками (*б*), от безразмерной частоты колебаний жидкости

Скорость жидкости в угловых потоках представлена на рис. 2.24*б*. Видно, что независимо от частоты либраций все экспериментальные результаты укладываются на одну кривую. При этом в области умеренных безразмерных частот ($\tilde{\omega} < 5 \cdot 10^2$) значения скоростей $V_c\mathrm{E}^{1/2}$ и $V\mathrm{E}^{1/2}$ принимают близкие значения. Это указывает на то, что именно угловые потоки приводят к локальному повышению скорости течения, возбуждаемого инерционными модами.

Наиболее интересным является результат в области умеренных безразмерных частот для моды $\mathrm{M}(6,1,0)$ (рис. 2.24*а*). Поскольку внимание уделялось осреднённому течению вдали от торцов полости, угловые потоки не оказывали влияния на результаты измерений. Это означает, что скорость осреднённого движения жидкости в этих вихрях определяется только амплитудой пульсационного течения в объеме полости. Как показывают эксперименты, понижение $\tilde{\omega}$ приводит к вязкой диссипации течения по закону $V\mathrm{E}^{1/2} \sim \tilde{\omega}^{1/2}$. Принимая во внимание,

что частота либраций определяется как $\sigma = \Omega_{lib} / \Omega_{rot}$, а амплитуда $\varepsilon = \Delta\varphi \cdot \sigma$, можно получить, что

$$V\mathrm{E}^{1/2} = < u_z^m > \mathrm{E}^{1/2} / \left(\Delta\varphi^2 \Omega_{lib} R\sigma \right). \qquad (2.15)$$

Это означает, что безразмерная скорость осреднённого течения описывается следующим соотношением:

$$< u_z^m > / \tilde{u} = 10^{-5} \left(\Delta\varphi \cdot \tilde{\omega} \cdot \sigma^{1/2} \right), \qquad (2.16)$$

где $\tilde{u} = \Delta\varphi \Omega_{lib} R$ – амплитуда скорости пульсационного движения жидкости вблизи границы. Учитывая, что в данных экспериментах частота либраций σ не меняется, можно сделать вывод, что скорость осреднённого течения в центральных вихрях полностью определяется безразмерной частотой:

$$< u_z^m > / \tilde{u} \sim \tilde{\omega}. \qquad (2.17)$$

Интересно, что этот результат хорошо согласуется с анализом осреднённого течения, возбуждаемого вращательными колебаниями полости с периодически деформируемой эластичной стенкой [223]. В упомянутых исследованиях среднее вращение полости было равно нулю, при этом в низкочастотном пределе скейлинг для скорости осреднённого течения имел аналогичный вид.

2.3. Движение жидкости в цилиндре с наклонными торцами

Далее основное внимание будет уделено влиянию геометрии торцов цилиндрической полости на спектр возможных инерционно-волновых режимов. Рассматриваются четыре различные конфигурации: *i*) параллельный наклон обоих торцов (PS); *ii*) антипараллельный наклон (APS); *iii*) конические осесимметричные торцы (CE); *iv*) один торец является прямым, а второй наклонен относительно плоскости поперечного сечения (OSE). Наличие наклона, с одной стороны, обеспечивает возможность фокусировки волновых лучей на замкнутую траекторию (волновой аттрактор). Причем направление наклона вдоль радиальной координаты определяет пространственные характеристики сфокусированного волнового пути. С другой стороны, азимутальная неоднородность торцов позволяет возбуждать неосесимметричные инерционные моды, которые не наблюдаются в осесимметричной постановке.

2.3.1. Трассировка волновых лучей в замкнутой полости

Первоначально рассмотрим особенности распространения инерционных волн в замкнутой полости, содержащей наклонные (непараллельные и неперпендикулярные к оси вращения) стенки (рис. 2.25). Для описания динамики жидкости можно воспользоваться методом характеристик [91]. Это оправдано, поскольку в модели мы будем интересоваться только геометрическими свойствами распространения волн. Последние будут аппроксимироваться прямыми линиями, исходящими из углов полости, при этом жидкость считается идеальной. Направление волновых лучей определяется только безразмерной частотой волны σ и определяется из соотношения (2.6). При отражении лучей от границ полости сохраняется угол θ относительно оси вращения. Это продемонстрировано в точке F на рис. 2.25. Трассировка лучей осуществляется в двумерной постановке в плоскости осевого сечения Z, Y. Это связано с тем, что эффекты фокусировки в экспериментах также проявляются только в плоскости, проходящей вдоль направления радиального наклона торцов (Раздел 2.3.2.2). Отметим, что в случае конических торцов выделенное направление отсутствует, поэтому в качестве геометрии можно

использовать осевое сечение полости. Подобные лучевые модели хорошо зарекомендовали себя для анализа пространственно-волновых картин, даваемых как инерционными, так и внутренними волнами в стратифицированной жидкости [43, 120, 225].

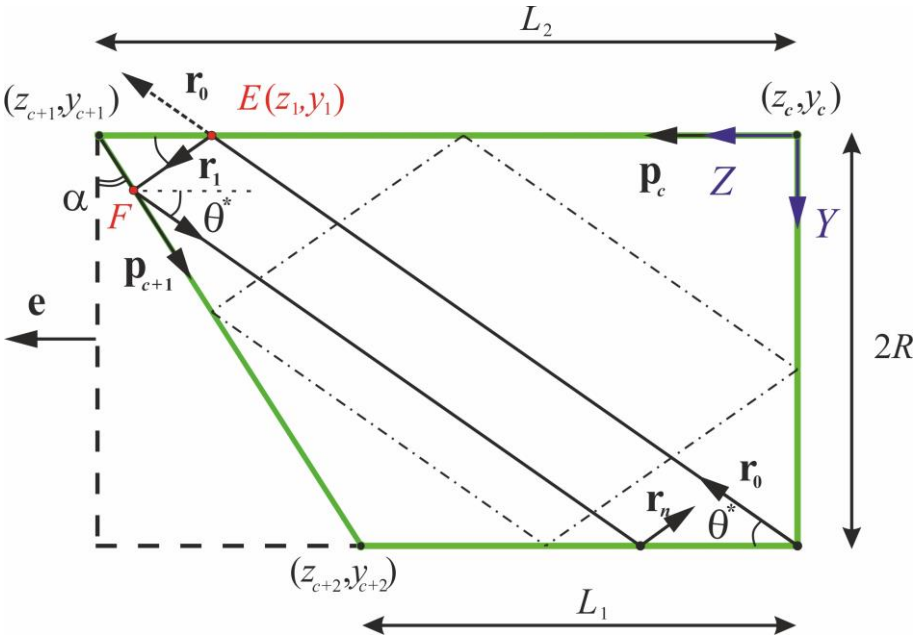


Рисунок 2.25 – Схема распространения волнового луча в полости с одной наклонной стенкой; штрихпунктирной линией обозначено фокусировочное отражение лучей. Ось вращения расположена горизонтально

Реализация трассировки осуществляется в среде MATLAB. Расчетная область представляет собой прямоугольник длиной L_2 и высотой $2R$, одна (или несколько) граница которого скошена под углом α к вертикали; $\mathbf{e}$ – единичный вектор в направлении оси вращения (рис. 2.25). Для каждой границы задается направляющий вектор в виде:

$$\mathbf{p_c} = b_{cy}\mathbf{j} + b_{cz}\mathbf{k}, \tag{2.18}$$

где $\mathbf{j},\mathbf{k}$ – единичные базисные векторы, $c = 1 \div 4$ указывает на номер границы. Отметим, что в общем случае число границ может быть произвольным. Коэффициенты b_{cy} и b_{cz} задаются следующим образом:

$$b_{cy} = y_{c+1} - y_c, \quad b_{cz} = z_{c+1} - z_c. \tag{2.19}$$

Волновой луч обозначен вектором $\mathbf{r_n}$, где n – количество отражений луча от границы. Первоначальный вектор $\mathbf{r_0}$ определяется как поворот вектора $\mathbf{e}$ на угол θ^* методом углов Эйлера:

$$\mathbf{r_0} = d_{0y}\mathbf{j} + d_{0z}\mathbf{k}, \tag{2.20}$$

где $d_{0y} = \sin\theta^*$, а $d_{0z} = \cos\theta^*$. Поскольку вектор $\mathbf{r_0}$ может исходить из любого угла полости, значение θ^* задается таким образом, чтобы $\mathbf{r_0}$ был всегда направлен внутрь полости. Правило для определения θ^* основано на пересечении луча с границами полости. Проверяются следующие значения θ^* до тех пор, пока не будет найдено пересечение с одной из стенок: $\theta^* = \theta$, $\theta^* = -\theta$, $\theta^* = \pi + \theta$ и $\theta^* = \pi - \theta$.

Точка пересечения n-луча и c-границы вычисляется через решение системы уравнений, составленной из уравнений прямых в параметрическом виде:

$$\begin{cases} y = y_n + d_{ny}\mathrm{t}_1 \\ z = z_n + d_{nz}\mathrm{t}_1 \\ y = y_c + b_{cy}\mathrm{t}_2 \\ z = z_c + b_{cz}\mathrm{t}_2 \end{cases} \tag{2.21}$$

Откуда получается:

$$\mathrm{t}_1 = \frac{\Delta z b_{cy} - \Delta y b_{cz}}{d_{nz}b_{cy} - d_{ny}b_{cz}}, \quad \mathrm{t}_2 = \frac{\Delta z d_{ny} - \Delta y d_{nz}}{d_{nz}b_{cy} - d_{ny}b_{cz}}. \tag{2.22}$$

Из уравнений (2.22) находится точка пересечения двух прямых. При описании отражения луча от границы угол θ^*, отсчитываемый от оси вращения $\mathbf{e}$, должен сохраняться.

Результатом работы алгоритма является траектория волнового луча внутри полости заданной геометрии, а, следовательно, и прогнозирование диапазона частот σ, в котором будут наблюдаться эффекты фокусировки. Для этой цели было разработано приложение, позволяющее произвольно задавать геометрические параметры полости (L_1, L_2, R, α), первоначальную точку излучения волн и количество последующих отражений. Программа позволяет не только визуально проналюдать траекторию волновых лучей, но и получить полную информацию о по-

ложении точек фокусировочного отражения аттрактора от любой границы. Результаты работы модели зарегистрированы в качестве программы для ЭВМ [Б2].

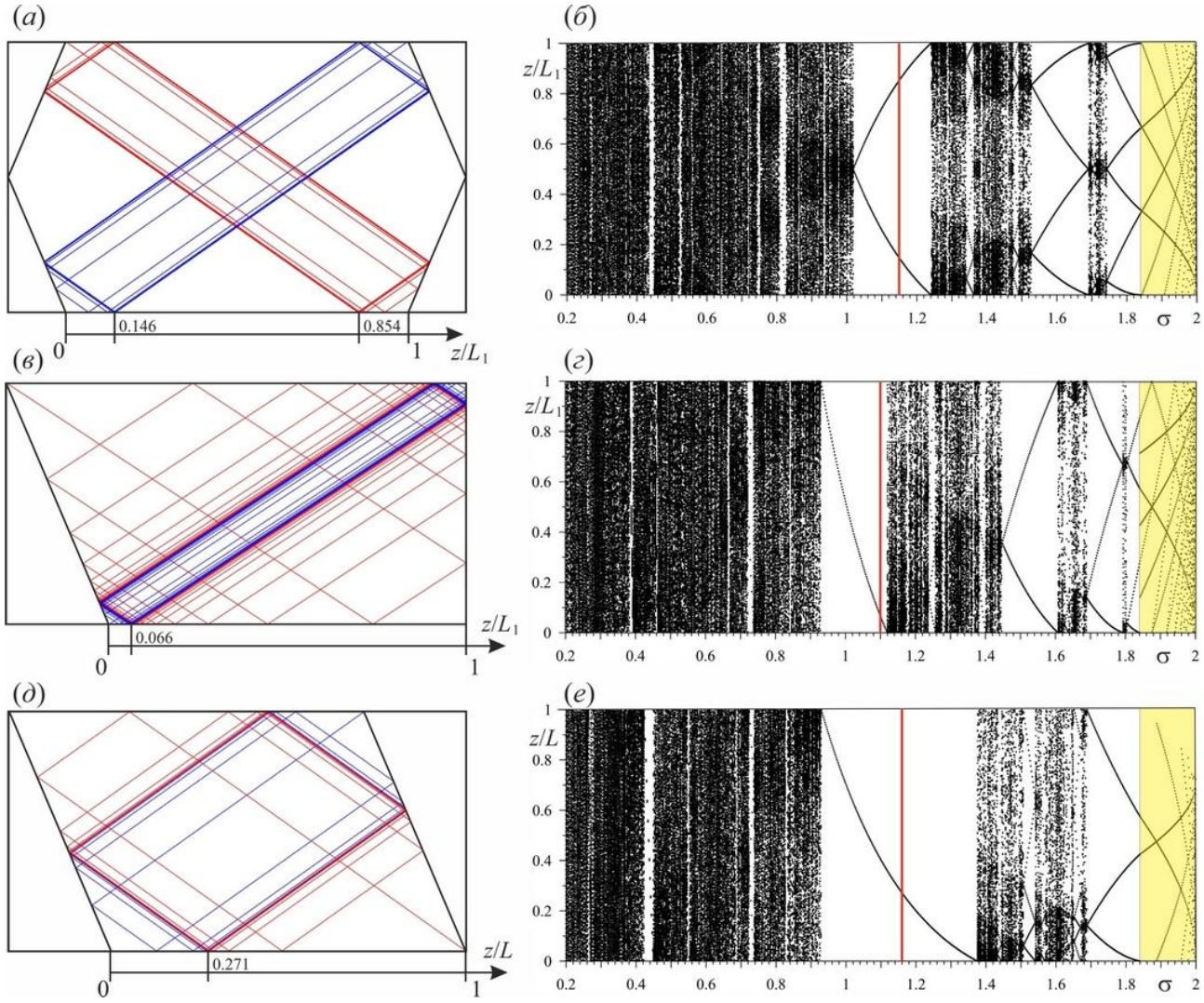


Рисунок 2.26 – Фокусировка волновых лучей в зависимости от геометрии торцевых стенок и координаты точки излучения при σ = 1.15 (*а*), 1.10 (*в*) и 1.16 (*д*). На фрагментах (*б*, *г*, *е*) представлены соответствующие данной геометрии полости диаграммы Пуанкаре для диапазона частот σ = 0.2 – 2.0. Точками показаны положения последних 50 отражений инерционных волн от боковой границы. Координата z/L отсчитывается от тупого угла; разрешение по частоте составляет $\Delta\sigma$ = 0.002. Красными вертикальными линиями обозначены частоты, для которых приведены рисунки в левом столбце. Желтая зона соответствует диапазону частот, где $\theta \geq 90° - \alpha$, т.е. дальнейшее распространение лучей прекращается при их взаимодействии с наклонными торцами

На рис. 2.26 показаны результаты расчета траектории волновых лучей в полостях различной конфигурации: с коническими торцами (СЕ), с одной наклонной

стенкой (OSE), и с параллельным наклоном противоположных стенок (PS). Пространственная структура аттрактора может быть охарактеризована двумя целыми числами (n, m), которые отвечают за количество симметричных пар отражений ветвей аттрактора от горизонтальных и вертикальных (или наклонных) стенок, или осевое и радиальное волновые числа, соответственно. Хорошо видно, что лучи, испущенные из различных углов полости (красные и синие), после серии последовательных отражений фокусируются на одну замкнутую траекторию (рис. 2.26*а*, *в*, *д*). Отметим, что свойства фокусировки не зависят от начальной точки излучения. Так, в геометриях OSE и PS при близких значениях частот возникает аттрактор A(1,1). Причем в полости с двумя наклонными торцами необходимое число итераций для достижения эффекта фокусировки (при данном σ) меньше в два раза. В то же время в геометрии CE визуально возникают два аттрактора A(1,1), которые по сути являются одним осесимметричным, «разрезанным» на две части. Это связано с тем, что фокусировка осуществляется при отражении от двух параллельных граней.

На рис. 2.26*б*, *г*, *е* показано распределение точек отражения инерционных волн от нижней границы полости, так называемая диаграмма Пуанкаре. Для построения диаграммы выбраны последние 50 последовательных отражений из 500. Распределение с большим разбросом точек (при фиксированном σ) вдоль координаты z/L соответствует сложным волновым режимам. Зачастую глобальные колебания жидкости в виде неосесимметричных инерционных мод попадают именно в этот частотный диапазон. В то же время режимы, при которых точки разделены большими пустотами, указывают на явные эффекты фокусировки. Можно отметить, что в геометрии OSE осевое волновое число аттрактора принимает значения $n = 1, 2, 3, \ldots$. Для PS симметрия полости навязывает аттракторы только с нечетными $n = 1, 3, 5, \ldots$. Отметим, что в случае двух антипараллельных торцов существуют аттракторы только с чётными осевыми числами $n = 2, 4, 6, \ldots$ [A12].

Можно сравнить полученные данные с результатами работы, где координаты точек отражения аттрактора (n,1) вычисляются методом отображений [226]. В качестве геометрии рассматривается сечение полости в виде прямоугольной тра-

пеции (рис. 2.25). Задача решается в общем виде, причем координаты точек z и y рассчитываются через следующие параметры [8]:

$$d = 1 - \frac{4R}{L_2}\tan\alpha, \quad \tau = \frac{4R}{L_2}\sqrt{\left(\frac{2}{\sigma}\right)^2 - 1}. \tag{2.23}$$

Здесь $d \in [-1;1]$ – параметр формы полости, где значение –1 соответствует прямоугольному треугольнику, а значение +1 соответствует прямоугольнику. Второй параметр τ отвечает за период инерционной волны.

Вычисление координат на горизонтальной и вертикальной стенках зависит от соотношения между номером последовательного отражения l и осевым волновым числом n:

если $l = 1 \ldots n$, то $$z_l = \frac{-n\tau^2 + 2\tau}{1-d} - (l-n)\tau - 1, \quad y_l = \frac{(-1)^{l+1} + 1}{2}\tau \tag{2.24}$$

если $l = n+2 \ldots 2n+1$, то $$z_l = \frac{n\tau^2 - 2\tau}{1-d} + (l-n-1)\tau - 1, \quad y_l = \frac{(-1)^{l} + 1}{2}\tau \tag{2.25}$$

Таблица 2.4 – Основные параметры для расчета положения точки фокусировочного отражения на боковой поверхности полости A(1,1) аттрактора согласно модели [226]

σ	d	τ	l	z_l	y_l	$L_1 = 1 + d$	$z = d - z_l$	z / L_1
1.10	0.554	1.595	1	0.448	1.595	1.554	0.106	0.068

На наклонной стенке $l = 0$, а начало перебора точек осуществляется против хода часовой стрелки. В табл. 2.4 представлены данные расчетов по алгоритму [226] для аттрактора $\mathrm{A}(1,1)$ в прямоугольной трапеции, стенка которой наклонена под углом $\alpha = 23°$. Отметим, что в данном случае начало отсчета находится в центре прямоугольника, описывающего трапецию, поэтому необходимо сделать переход к удобным для нас координатам по формулам $L_1 = 1 + d$ и $z = d - z_l$. Полученное значение $z / L_1 = 0.068$ хорошо согласуется с результатом авторской модели, где $z / L_1 = 0.066$ (рис. 2.26*в*).

2.3.2. Инерционные режимы, наблюдаемые в экспериментах

Первоначально обсудим, как зависит инерционный отклик жидкости на либрационное воздействие от частоты либраций и геометрии торцов полости. В данных экспериментах используются цилиндры с параллельным (PS) и антипараллельным наклоном торцов (APS), коническими торцами (CE) и с одним наклонным торцом (OSE). Схемы кювет приведены на рис. 2.2*б–д*. В данных экспериментах средняя скорость вращения полости всегда составляет $f_{rot} = \Omega_{rot} / 2\pi = 10$ об/с, при этом основное внимание уделяется мгновенному полю скорости. Особенности методики исследований подробно описаны в Разделе 2.1.1.

Пульсационная скорость жидкости в осевом сечении рассчитывается по формулам (2.7) – (2.9) и показана на рис. 2.27 для трех различных конфигураций полостей. Здесь следует заметить, что для случаев PS и APS измерения представлены в наклонном сечении, когда угол между соседними сторонами составляет $(90 \pm \alpha)^\circ$. Зависимость имеет немонотонный вид и характеризуется наличием ярко выраженных экстремумов. Каждому пику соответствует резонансный режим с определённым пространственным распределением кинетической энергии. Можно выделить три основных режима: *i*) глобальные колебания жидкости или инерционные моды, *ii*) аттракторы инерционных волн и *iii*) режимы симметричного отражения волновых лучей. Рассмотрим каждый режим в деталях.

Наиболее сильный резонансный отклик наблюдается при возбуждении инерционных мод. Данные режимы, как и ранее, обозначаются $\mathrm{M}(n,m,k)$, только теперь в полостях с неосесимметричными стенками азимутальное волновое число $k \neq 0$. При параллельном наклоне торцов длина полости вдоль оси вращения L не меняется, поэтому для расчета значений собственных частот можно также воспользоваться выражениями для прямого цилиндра (см. формулы 2.10 и 2.11). Рассчитанные значения неосесимметричных мод σ_{theory} в цилиндре с аспектным соотношением $a = 0.34$ представлены в табл. 2.5. Соответствующие резонансные пики, наблюдаемые в эксперименте, представлены в колонке σ_{exp}. Благодаря па-

раллельному наклону торцевых стенок два противоположных тупых и острых угла работают синфазно, возбуждая неосесимметричные моды с нечетным осевым волновым числом *n* (рис. 2.27*а*).

Типичное мгновенное поле скорости с пространственной структурой $\mathrm{M}(1,1,1)$ для самой мощной гармоники $\sigma = 0.66$ показано на рис. 2.28*а*. Наблюдения за временной динамикой вихрей показывают, что в течение периода либраций знак завихренности меняется, в то время как максимумы завихренностей сохраняют свое положение. Независимо от фазы колебаний вихревые структуры всегда ориентированы вдоль большей диагонали наклонного сечения. Изменение частоты либраций приводит к выходу системы из резонансной области, что сопровождается резким уменьшением значения $< U >$. В области низких частот наблюдаются инерционные моды с большими радиальными числами *m*. Так, при $\sigma = 0.35$ возбуждается мода $\mathrm{M}(1, 2, 1)$, состоящая из двух радиально вложенных друг в друга вихрей (рис. 2.28*б*). Частота $\sigma = 0.45$ соответствует одновременно двум модам $\mathrm{M}(1, 1, 2)$ и $\mathrm{M}(2, 3, 1)$, проявляемым попеременно. Пожалуй, это исключение из правил, когда при параллельном наклоне проявляется структура с $n = 2$. Подобные комбинационные режимы, когда на одной частоте в разные моменты времени возбуждаются инерционные моды с различными волновыми числами, проявляются при малых углах наклона торцов $\alpha = 8.5°$ [A20]. Наблюдалось попеременное возбуждение как осесимметричных мод $\mathrm{M}(6,1,0)$ и $\mathrm{M}(10, 2, 0)$, так и неосесимметричных $\mathrm{M}(5,1,1)$ и $\mathrm{M}(8,1,0)$.

При антипараллельном наклоне наиболее сильный отклик наблюдается на частоте $\sigma = 1.30$ (рис. 2.27*б*). Визуализация мгновенного поля скорости с помощью PIV-метода показывает, что структура течения имеет вид двух глобальных вихрей противоположной закрутки (рис. 2.28*в*). Вихри симметрично наклонены относительно друг друга, а их центры смещены от оси вращения к тупым углам сечения полости. Следующий экстремум соответствует частоте $\sigma = 0.72$. При этом в осевом сечении наблюдается система из шести вихрей (рис. 2.28*г*). Как и ранее, осциллирующие структуры напоминают стоячие волны или инерционные

моды, пространственная структура которых сильно модифицирована геометрией торцов полости. В данном случае граничные условия обеспечивают поддержку только неосесимметричных мод с азимутальным волновым числом $k=1$ и четными осевыми волновыми числами $n=2,4,6,\ldots$. Значения собственных частот инерционных мод также проще всего вычислить по аналогии с прямым цилиндром [1, A12]. При этом для оценки введем среднее аспектное отношение $a=2R/\left(L_1+L_2\right)$. Расчетные значения инерционных мод хорошо согласуются с положениями резонансных пиков в экспериментах (табл. 2.5).

Наконец, самый слабый отклик жидкости соответствует геометрии полости с коническими торцами (рис. 2.27*в*). При близких значениях числа Экмана E величина скорости оказывается на порядок меньше, чем при PS и APS. По всей видимости, различие объясняется механизмом возбуждения пульсационного течения. В осесимметричном случае движение жидкости возбуждается только посредством вязких пограничных слоев на торцевых стенках. Аналогичный способ использовался в постановках [31, 42, 148]. Наличие неосесимметричного наклона торцов вносит новую специфику в задачу. В поперечном сечении величина наклона стенки не постоянна, как в классической постановке, а меняется в диапазоне $\alpha\in\left[-23;+23\right]$. Это приводит к тому, что основной вклад в движение жидкости вносят не вязкие силы, а толчки границы при угловых поворотах полости. В результате в систему закачивается существенно больше энергии, с чем и связана разница в значениях $<U>$ на рис. 2.27. В связи с этим для исследования нелинейных режимов инерционных волн удобнее использовать неосесимметричные полости [227] или другой тип воздействия, например, прецессию оси вращения цилиндра [203–205, 208]. Отметим, что в случае конических торцов проявляются только осесимметричные моды с четными осевыми волновыми числами, при этом структура пульсационного течения аналогична геометрии с прямыми торцами (рис. 2.28*д*, *е*).

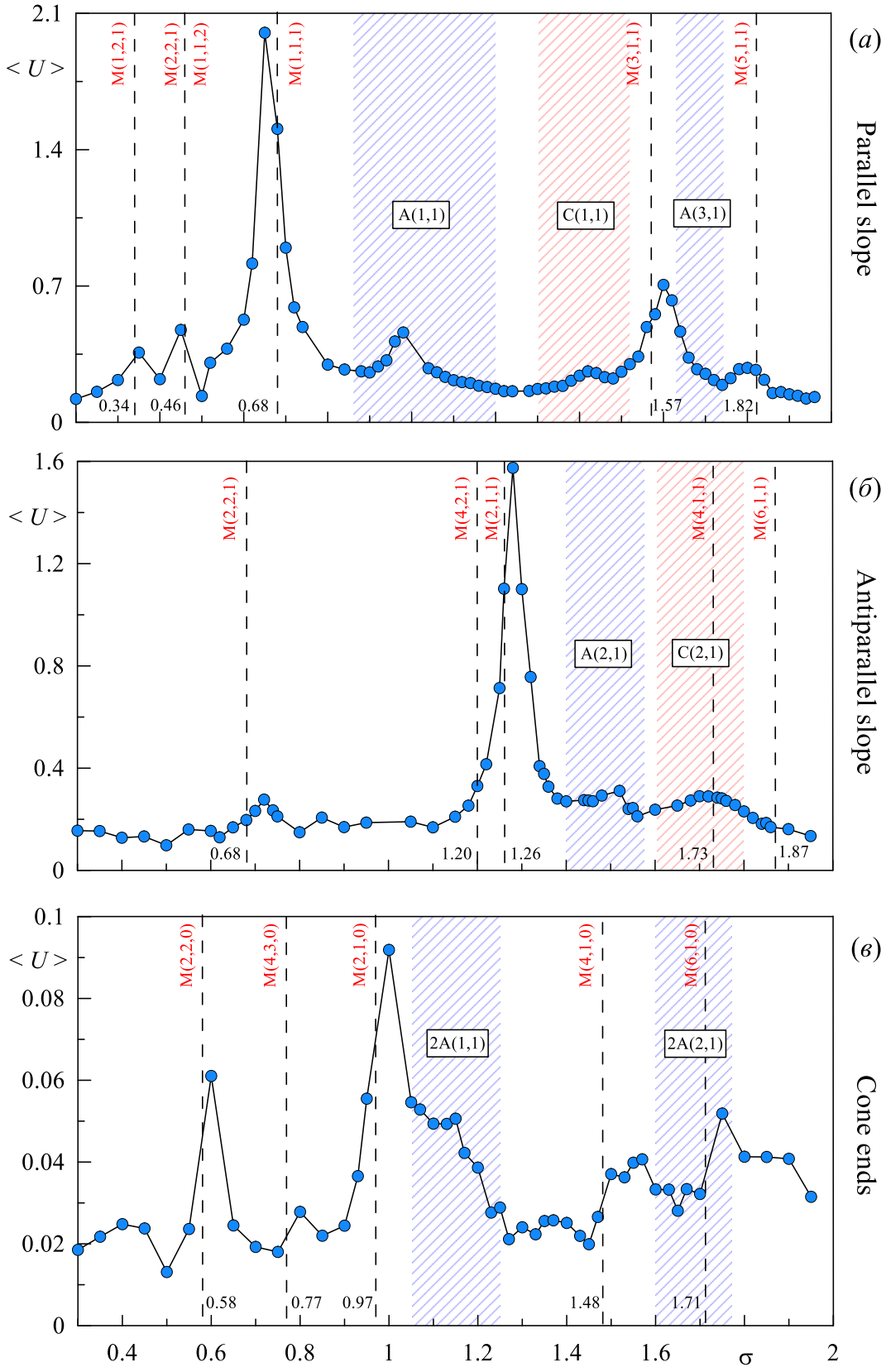


Рисунок 2.27 – Безразмерная скорость пульсационного течения в осевом сечении полости в зависимости от частоты либраций при PS (*а*), APS (*б*) и CE (*в*); число Экмана составляет $E = 1.2 \cdot 10^{-4}$, угол наклона торцов $\alpha = 23°$. Вертикальные штриховые линии соответствуют собственным частотам инерционных мод

Таблица 2.5 – Собственные значения невязких неосесимметричных инерционных мод в цилиндре с аспектным соотношением a = 0.34 (PS, APS)

n	m	k	σ_{theory}	σ_{exp}
1	2	1	0.339	0.35
1	1	2	0.447	0.45
1	1	1	0.679	0.65
3	1	1	1.570	1.60
5	1	1	1.816	1.80
2	2	1	0.684	0.72
2	1	1	1.260	1.30
4	1	1	1.728	1.70
6	1	1	1.868	1.86

Другой резонансный режим связан с фокусировкой волн в аттрактор (синяя штриховка на рис. 2.27) и был подробно описан в работах [A2, A17, A21]. Многократные отражения лучей от наклонных стенок приводят к постепенному сужению волнового пучка и формированию замкнутой траектории. Типичная волновая картина аттрактора A(1,1) в полости с PS показана на рис. 2.29*а*. На первый взгляд аттрактор сильно напоминает инерционную моду $\mathrm{M}(1,1,1)$. Тем не менее структура пульсационного течения отличается пространственным распределением волновой энергии. Для аттрактора характерна фокусировка волновых лучей на узкую замкнутую траекторию в виде параллелограмма, опирающегося на стенки полости. При частоте $\sigma \approx 1$ аттрактор имеет симметричную форму, равенство соотношений сторон которого нарушается при изменении частоты либраций: повышение σ приводит к наклону аттрактора к тупым углам, понижение σ – к острым. Для сравнения результатов экспериментов с предсказаниями лучевой модели можно обратить внимание на частоту $\sigma = 1.16$ (рис. 2.26*д* и рис. 2.29*а*). Согласно теории, волновые лучи должны распространяться под углом $\theta_{теор} = 35.5°$, в то время как в эксперименте наблюдается угол $\theta_{эксп} \approx 38°$, что соответствует $\sigma = 1.23$. Таким образом, реализуется более узкий аттрактор, фактически наблюдаемая волновая картина всегда смещена в область более высоких частот на $\sigma \approx 0.03 - 0.07$. Незначительные расхождения обусловлены тем, что в теории рассматриваются волны в невязкой жидкости в отсутствие нелинейных эффектов ти-

па среднего азимутального вращения жидкости. Другим эффектом, не учитываемым в лучевой модели, является конечная толщина волновых лучей, которая определяется балансом вязкой диссипации и фокусировки. Несмотря на это, результаты авторской модели хорошо предсказывают диапазоны частот, в которых проявляются эффекты фокусировки волновых лучей.

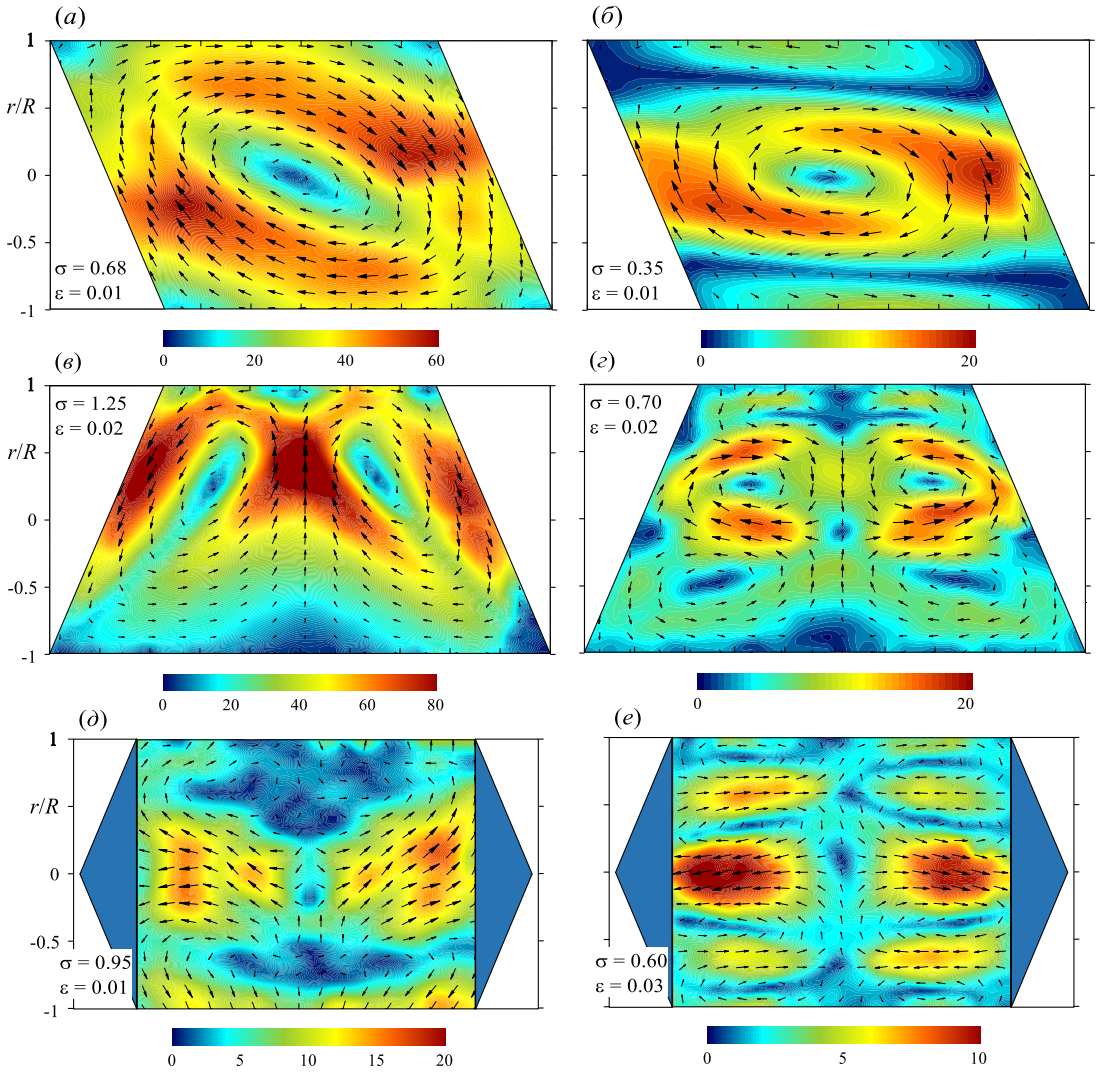


Рисунок 2.28 – Инерционные моды $\mathrm{M}(1,1,1)$, $\mathrm{M}(1,2,1)$, $\mathrm{M}(2,1,1)$, $\mathrm{M}(2,2,1)$, $\mathrm{M}(2,1,0)$ и $\mathrm{M}(2,2,0)$ в фазе либраций $\Omega_{lib}t=0$ при $\mathrm{E}=1.2\cdot10^{-4}$ (*а*–*е*). Цветом показан модуль скорости $\left(u_r^2+u_z^2\right)^{1/2}$ (мм/с)

При антипараллельном наклоне APS проявляются аттракторы с четным количеством отражений n фокусировочного луча от боковой стенки. Так, диапазон частот $1.4<\sigma<1.55$ соответствует области существования аттрактора $\mathrm{A}(2,1)$ (рис. 2.27*б*). Например, на рис. 2.29*в* видно, что волновые лучи распространяются

вдоль замкнутой траектории, состоящей из двух параллелограммов. В осесимметричном случае СЕ ясно идентифицируются два (1,1) аттрактора (рис. 2.29*д*). Видно, что движение жидкости локализовано в свободных сдвиговых слоях, которые образуют пару замкнутых траекторий. Важно, что в пределах каждого аттрактора направление групповой скорости волн согласовано. В то же время направление глобальной циркуляции в аттракторах отличается. Это следует из того, что либрационное воздействие со стороны торцов полости на жидкость является симметричным – в фиксированной фазе либраций волны, излучаемые углами полости, будут придерживаться одинаковых путей. Как отмечалось ранее, эти два аттрактора, наблюдаемые в осевом сечении полости, являются одним осесимметричным аттрактором, «разрезанным» на две зеркально симметричные части. В целом наблюдаемая структура пульсационного течения также хорошо согласуется с предсказаниями лучевой модели. Наконец, в случае одной наклонной стенки OSE структура пульсационного течения более сложная (рис. 2.29*ж*): волновая картина напоминает два несфокусированных (1,1) аттрактора, которые вложены друг в друга. Причиной может быть сложная структура азимутального течения – возможно, траектория волновых лучей замыкается, но только это требует более сложного пути вдоль азимута. Полная трехмерная структура пульсационного течения в случае OSE не исследовалась.

Выход из области существования аттрактора сопровождается монотонным уменьшением скорости $<U>$ (рис. 2.27). При этом на фоне аттрактора более ярко выражаются несфокусированные лучи, испущенные из острых углов полости (рис. 2.30). Структура пульсационного течения становится более сложной, и при частоте $\sigma = 1.24$ (рис. 2.30*а*) можно наблюдать две замкнутые траектории. Первая связана с аттрактором, который ориентирован вдоль меньшей диагонали наклонного сечения; вторая – исключительно с особенностями геометрии полости и симметрией распространения лучей из острых углов. Стоит отметить, что направление движения жидкости вдоль обеих траекторий является согласованным. На первый взгляд такая структура напоминает бигармонический аттрактор [228], в котором также одновременно распространяются две волны с разными, но близки-

ми по значению частотами, дающими фокусировку на двух предельных циклах. В данной задаче частота всех волн одинаковая, поэтому механизм формирования второй замкнутой траектории другой.

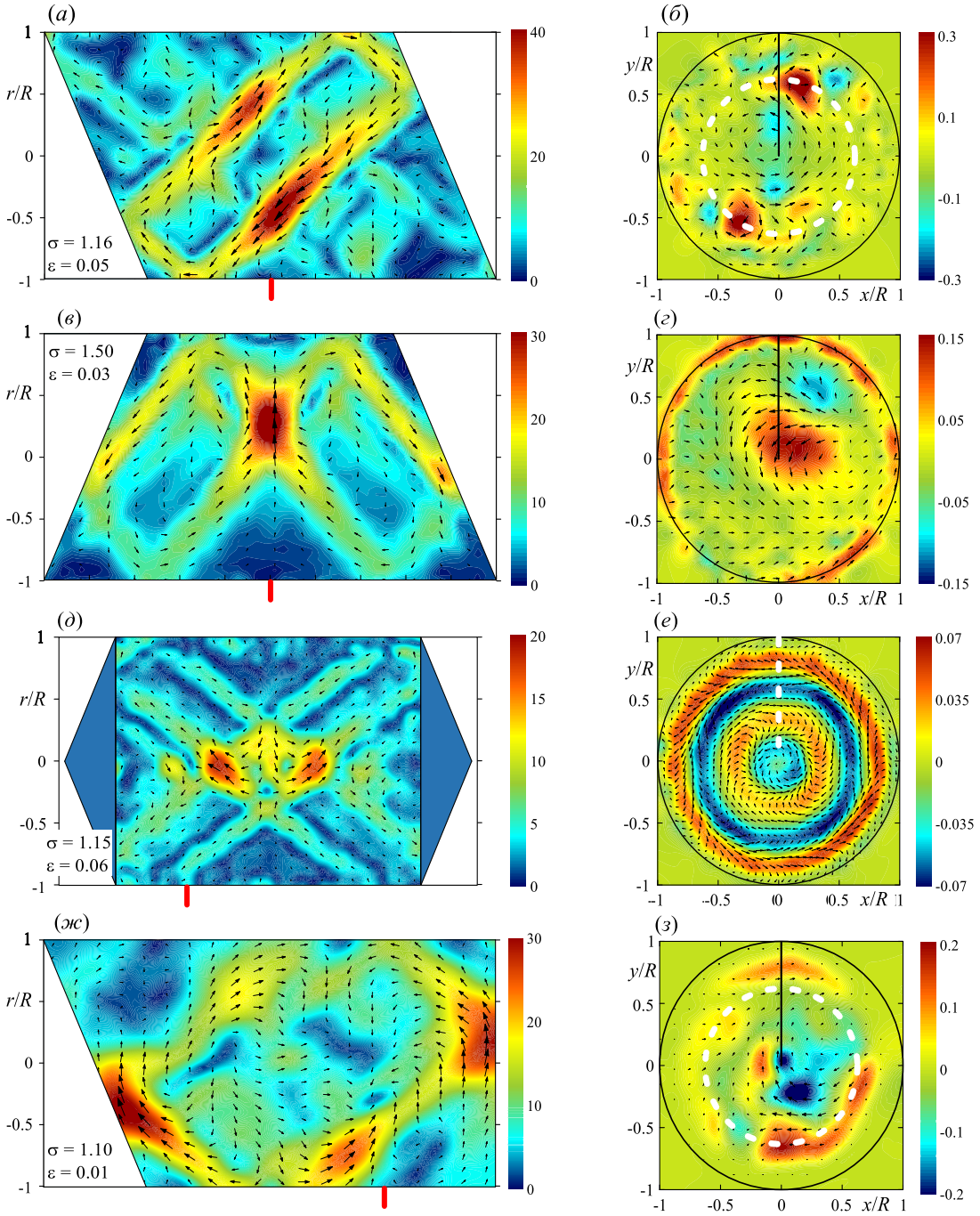


Рисунок 2.29 – Аттракторы инерционных волн $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{A}(2,1)$, $2\mathrm{A}(1,1)$ и $\mathrm{A}(1,1)$ в фазе либраций $\Omega_{lib}t=0$ (*а*, *в*, *д*, *ж*, соответственно); цветом показан модуль скорости (мм/с), $\mathrm{E}=1.2\cdot10^{-4}$. На фрагментах справа (*б*, *г*, *е*, *з*) показаны мгновенные поля скорости в поперечном сечении z/L (красные метки в левом столбце), а цветом завихренность ξ_z/Ω_{rot}; черными вертикальными линиями показано направление $\varphi=0$

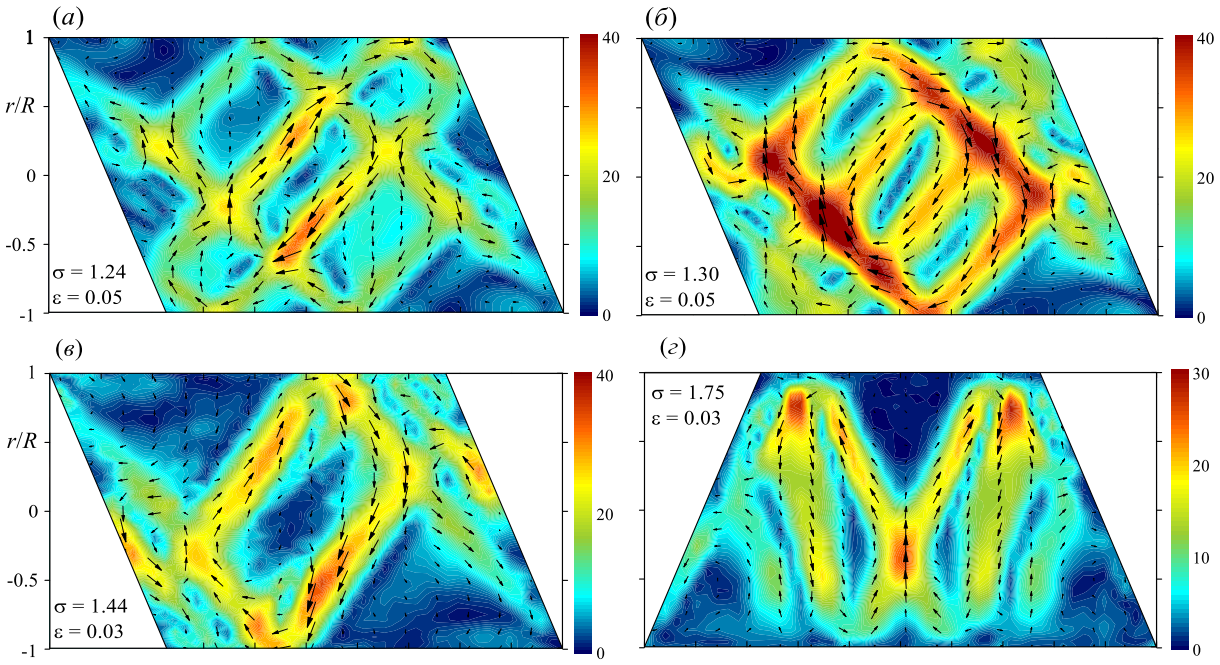


Рисунок 2.30 – Режимы симметричного отражения волновых лучей $C(1,1)$ при $\Omega_{lib}t = 0$ и $E = 1.2 \cdot 10^{-4}$; цвет означает модуль скорости (мм/с)

При частоте $\sigma = 1.30$ (рис. 2.30*б*) волновой аттрактор становится менее видимым, в то время как энергия волн, испущенных из острых углов, значительно повышается. Внутри внешней траектории отчетливо проявляются два волновых луча, которые сильно напоминают след от аттрактора (1,1). Интересно, что за пределами основного параллелограмма след аттрактора практически отсутствует, а положение внутренних волновых лучей хорошо согласуется с путями отражённых лучей от боковых границ полости. При $\sigma = 1.44$ (рис. 2.30*в*) наблюдается только одна замкнутая траектория, построенная из лучей, исходящих из острых углов. Этот режим сильно напоминает случай периодических орбит во вращающемся сферическом слое [19, 115] и обозначен как C(1,1). Интересно, что вблизи наклонных границ формируется пара вихревых структур, направление вращения жидкости в которых противоположно направлению циркуляции вдоль основного волнового пути. Можно предположить, что через эти вихри осуществляется основная подкачка энергии в замкнутую траекторию. Таким образом, визуально форма траектории напоминает аттрактор (1,1), однако лучевая теория не предсказывает эффекты фокусировки для этого диапазона частот (см. рис. 2.26). Из луче-

вой теории следует, что замкнутая траектория появляется благодаря особенностям геометрии полости и симметрии излучения волн. Возбуждение этого режима сопровождается локальным повышением интенсивности пульсационного движения жидкости (рис. 2.27*а*). Аналогичные эффекты симметрии траектории проявляются и в полости с APS в диапазоне частот $\sigma = 1.6 - 1.8$ (рис. 2.27*б*, 2.30*г*), где система откликается локальным повышением скорости $< U >$.

Дальнейшее повышение частоты либраций приводит к увеличению осевого волнового числа *n*. Причем наблюдаемый режим течения сильно зависит от угла наклона торцевых стенок α. Так, при $\alpha = 23°$ экстремум на частоте $\sigma = 1.60$ соответствует собственной частоте инерционной моды $\mathrm{M}(3,1,1)$ (рис. 2.27*а*). Тем не менее визуальные наблюдения показывают, что в этом случае колебания жидкости происходят вдоль замкнутой траектории, образованной достаточно узкими сдвиговыми слоями (рис. 2.31*в*). При этом структура течения больше напоминает $\mathrm{A}(3,1)$, нежели инерционную моду. Для выяснения механизма роста кинетической энергии можно сравнить поля скорости, полученные при разных α вблизи теоретически предсказанной собственной частоты моды $\mathrm{M}(3,1,1)$. При $\alpha = 8.5°$ (рис. 2.31*а*) структура течения явно напоминает моду с осевым волновым числом $n = 3$; жидкость совершает глобальные колебания во всем объеме полости. При $\alpha = 15°$ (рис. 2.31*б*) область колебаний жидкости заметно сужается; волновая структура больше напоминает ход лучей, испущенных из углов полости. Наконец, при $\alpha = 23°$ (рис. 2.31*в*) мгновенная завихренность локализована в двух вихрях, расположенных вблизи тупых углов полости, и одном узком вихре, наклоненном под углом $\theta = \arcsin(\sigma / 2)$. Таким образом, вблизи частоты $\sigma = 1.60$ возбуждается всё же инерционная мода $\mathrm{M}(3,1,1)$, которая сильно пространственно деформирована геометрией торцов полости. При дальнейшем повышении частоты либрации ($\sigma > 1.60$) кинетическая энергия монотонно понижается, в то же время траектория волновых лучей становится более похожей на аттрактор $\mathrm{A}(3,1)$.

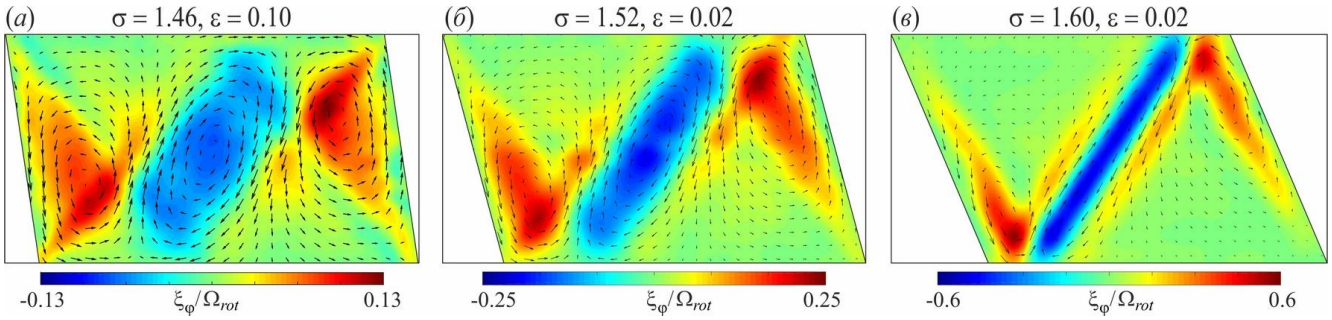


Рисунок 2.31 – Влияние геометрии полости на моду M(3,1,1) в фазе либраций $\Omega_{lib}t = 0$ при α = 8.5° (*а*), 15° (*б*), и 23° (*в*); цветом показана проекция безразмерной завихренности на азимутальное направление

2.3.2.1. Временная динамика аттракторов

Далее более подробно рассмотрим временную динамику (1,1) аттрактора в линейном режиме при параллельном наклоне торцов. Эксперименты показывают, что полная фокусировка волновой энергии на замкнутую траекторию происходит только в фазы либраций $\Omega_{lib}t = 0$ и $\Omega_{lib}t = \pi$ (рис. 2.32), т.е. когда угол поворота полости достигает амплитудного значения $\Delta\varphi$ (в равномерно вращающейся системе отсчёта). Именно в эти моменты времени (рис. 2.32, два рисунка в нижнем ряду) скорость пульсационного течения u достигает максимального значения. Подтверждение того, что в экспериментах наблюдается аттрактор – это согласованное направление движения жидкости в параллелограмме: по часовой стрелке в фазе $\Omega_{lib}t = 0$ и против часовой стрелки в фазе $\Omega_{lib}t = \pi$. Таким образом, через полпериода либраций направление групповой скорости в аттракторе меняется на противоположное. Это указывает на то, что в полости происходят непрерывные процессы фокусировки и дефокусировки волн. В целом движение в аттракторе воспринимается как параллельное смещение поверхностей постоянной фазы поперек направления групповой скорости (вдоль радиальной координаты относительно оси $r/R = 0$, т.е. из центра к периферии). Это вполне ожидаемый эффект, поскольку инерционные волны являются поперечными, что согласуется с результатами наблюдений в нерезонансном режиме (рис. 2.5).

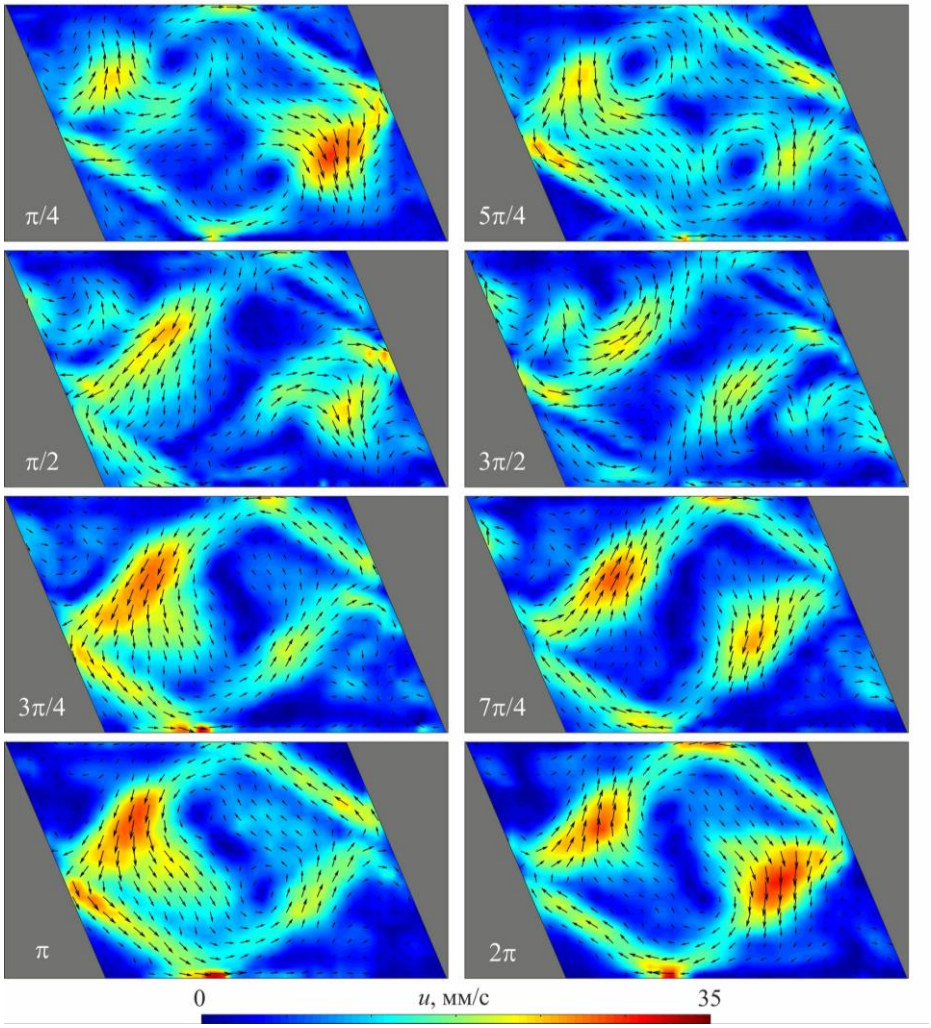


Рисунок 2.32 – Мгновенные поля скорости в различные фазы либраций при $\sigma = 1.06$, $\varepsilon = 0.06$ и $\mathrm{E} = 1.4 \cdot 10^{-4}$

Обсудим временную динамику азимутального течения. На рис. 2.29 (правый столбец) показаны серии мгновенных полей скорости в поперечном сечении для случаев осесимметричных и неосесимметричных торцевых стенок. Координаты светового ножа соответствуют положению красных отсечек на соответствующих фрагментах слева. В случае СЕ волны образуют кольцевые осесимметричные сдвиговые слои (рис. 2.29*e*). Причем фаза колебаний жидкости в кольцах на расстоянии $z / L_1 = 0.25$ полностью согласуется с наблюдениями в осевом сечении. При $r / R > 0.5$ поверхности с постоянной фазой смещаются к боковой стенке, а при $r / R < 0.5$ к центру полости (рис. 2.33*a*). Перемещение положения сечения z / L_1 приводит к изменению радиального положения r / R точки инверсии распространения фазы волны в кольцах.

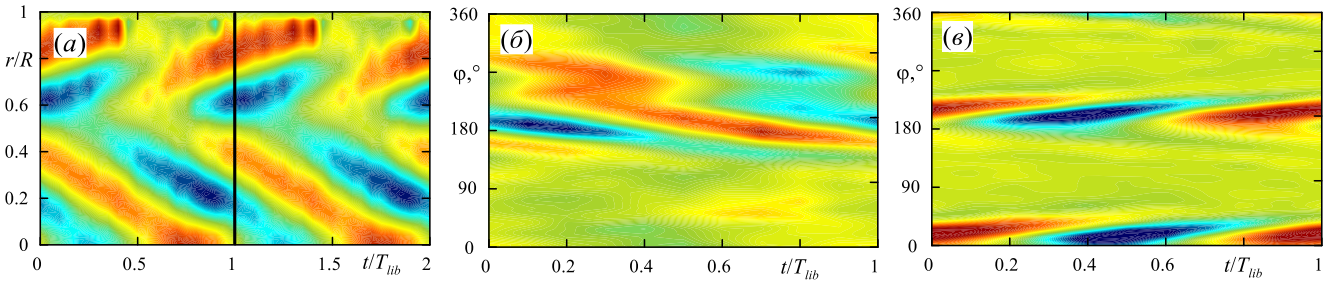


Рисунок 2.33 – Временные диаграммы z-компоненты мгновенной завихренности ξ_z / Ω_{rot} в поперечном сечении полости вдоль белых штриховых линий на рис. 2.29. Осесимметричный случай CE при $z / L_1 = 0.25$, распределение вдоль радиальной координаты r / R (*а*). Неосесимметричные случаи OSE и PS при $z / L_1 = 0.67$ и $z / L = 0.33$, соответственно; завихренность взята вдоль кольца радиуса $r / R = 0.6$ (*б* и *в*)

Мгновенные поля скорости при наличии неосесимметричных торцов показаны на рис. 2.29*б, г, з*. Видно, что теперь структура азимутального поля скорости меняется с координатой φ. В связи с этим временная динамика завихренности ξ_z / Ω_{rot} построена вдоль кольца радиуса $r / R = 0.6$ (рис. 2.33*б, в*). В случае PS сечение $z / L = 0.33$ симметрично проходит через две ветви (1,1) аттрактора, поэтому в любой момент времени поле скорости характеризуется азимутальным волновым числом 2. При перемещении z / L эта симметрия будет нарушаться и вблизи тупых углов мгновенное поле скорости больше напоминает рис. 2.29*з*. Тем не менее положение максимумов завихренности лежит в плоскости $\varphi \approx 20°$. Это означает, что аттрактор лежит в плоскости, немного наклоненной относительно плоскости радиального градиента наклона торцов. На это косвенно указывает и то, что интенсивность пульсационного движения жидкости в осевом сечении неоднородна вдоль ветвей аттрактора (рис. 2.29*а*); можно предположить, что по ходу движения луч отклоняется в азимутальном направлении и покидает плоскость лазерного ножа в эксперименте. В течение периода либраций вихри перемещаются на периферию полости и затухают, на смену им приходят вихри с противоположным знаком завихренности. В то же время наблюдения показывают, что отдельные частицы жидкости совершают антициклоническое вращение по круговой траектории в поперечном сечении полости. Таким образом, волновой аттрактор $\mathrm{A}(1,1)$

имеет тенденцию к двухмерности в плоскости, наклоненной относительно осевого сечения.

При OSE наибольшая неоднородность завихренности локализована вблизи направления $\varphi \approx 180°$. Это означает, что в этом случае (1,1) аттрактор также не является осесимметричным. Причем сечение $z / L_1 = 0.67$ выбрано так, что проходит только через нижнюю ветвь аттрактора (рис. 2.29*ж*). С течением времени происходит чередование знака ξ_z / Ω_{rot}, связанное с перемещением вихревых структур на рис. 2.29*з* вдоль радиальной координаты.

2.3.2.2. Азимутальный захват волн

Наличие выделенного направления в полости сильно влияет на пространственную структуру аттрактора. По всей видимости, это связано с тем, что отражение волновых лучей не является плоским, как это предполагается в рамках лучевой модели и соотношения (2.6). На самом деле при отражении от наклонной стенки у волновых лучей появляется дополнительная азимутальная составляющая [63, 120]. Это приводит к тому, что фокусировочное отражение аттрактора является неосесимметричным и не совпадает с плоскостью радиального градиента наклона стенки.

В трехмерном случае законы отражения волн являются более сложными. При отражении от наклонной границы угол θ сохраняется, т.е. волновые лучи должны лежать в одном пространственном конусе. Однако азимутальные направления γ_i и γ_r (внутри пространственного конуса), вдоль которых лежат падающий и отраженный лучи, отличаются [63, 82, 114]:

$$\sin\gamma_r = \frac{\left(s^2 - 1\right)\sin\gamma_i}{2s\cos\gamma_i + s^2 + 1}, \tag{2.26}$$

где $s = \tan\alpha / \tan\theta$, а начальное направление угла γ_i отсчитывается от направления градиента наклона торца вдоль оси *z*. На рис. 2.34*а* показаны карты зависимостей отраженного луча $\gamma_i' = \gamma_r + 180° = \Upsilon\left(\gamma_i, \theta\right)$. Сразу заметим, что вместо γ_r для представления информации удобнее использовать величину $\gamma_i' = \gamma_r + 180°$, по-

скольку в следующей итерации падающий луч внутри пространственного конуса будет обладать именно этим азимутальным направлением. Действительно, после отражения зеленый луч (рис. 2.34*в*) преобразуется в красный, который после отражения от боковой стенки цилиндра вернётся к наклонной стенке уже с углом $\gamma_i' = \gamma_r + 180°$ (синий луч на рис. 2.34*в*). Видно, что для любого значения θ функция Υ пересекает диагональную линию в точках $\gamma_i = 0$ и $\pm 180°$, которые являются неподвижными. При этом точка $\gamma = 0$ соответствует распространению луча вверх по склону. Поэтому отражение от наклонной стенки волнового луча имеет систематическую тенденцию к уменьшению его угла относительно направления $\varphi = 0$. Напомним, что φ отсчитывается от острого угла. Эффект захвата тем сильнее, чем ближе значение угла θ к α. На рис. 2.34*б* представлена эволюция одного луча γ_i' как функция γ_i для $\theta = 30°$. Уже после четырёх последовательных отражений лучи будут стягиваться к азимутальному направлению линии наклона торцов.

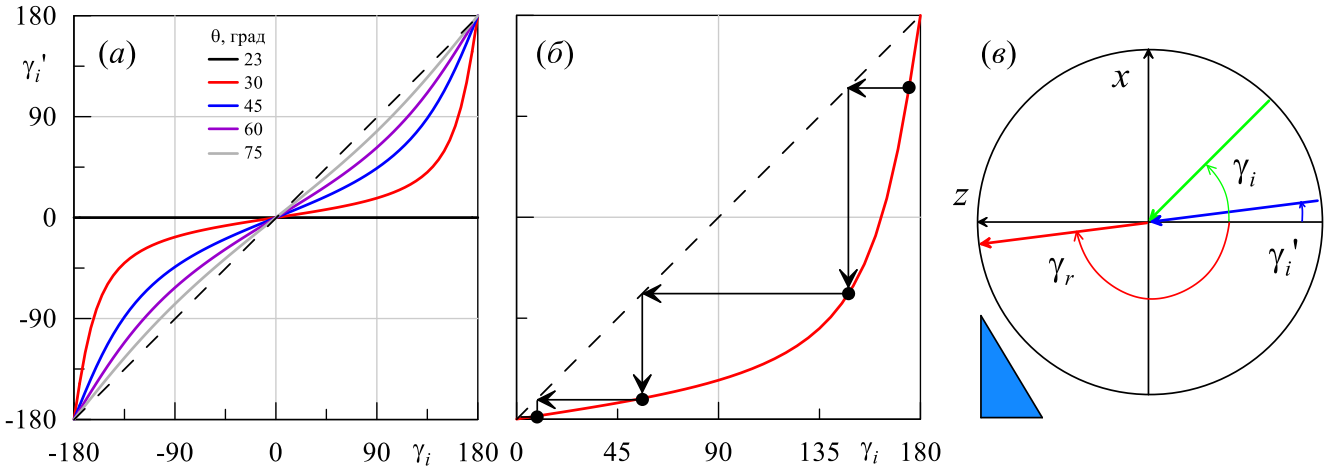


Рисунок 2.34 – Зависимости угла отражения $\gamma_i' = \gamma_r + 180°$ от угла падения γ_i для различных значений угла θ (*а*) и для $\theta = 30°$ в увеличенном масштабе (*б*) для $\alpha = 23°$; стрелками показана эволюция значений γ_i' после серии последовательных отражений. На (*в*) показана схема расположения азимутальных углов относительно направления наклона торцов (синий прямоугольный треугольник)

Отдельно можно рассмотреть случай $s = 1$, когда угол наклона торца совпадает с апертурой двойного конуса, $\theta = \alpha$. Из (2.26) следует, что для данного угла

захват является полным с самого первого отражения. Оценки показывают, что из (2.6) полному захвату соответствует частота $\sigma = 2\sin\theta \approx 0.78$. По всей видимости, именно этот эффект захвата мы и наблюдаем на рис. 2.29*б, г, з*. В частности, этот же эффект приводит к тому, например, что в длинном канале с трапециевидным сечением аттрактор $\mathrm{A}(1,1)$ оказывается в своеобразной ловушке, расположенной в плоскости перпендикулярной наклонной границе [123]. Если накачка энергии в систему исходит от одной стенки, то волновая энергия распределяется неравномерно по длине канала: ветви аттрактора четко проявляются только в зоне $\sim 1/4$ от общей длины канала. Эффекты захвата наблюдаются в самых разных постановках задач. В случае сферического слоя волновые аттракторы подвергаются меридиональному захвату после серии отражений от границ полости [120]. Можно отметить ещё один пример, где изучалось взаимодействие внутренних волн с подводной возвышенностью [229]. После отражения плоского волнового фронта от конического дна происходит захват волны в фиксированной плоскости. Отметим, что в сферическом слое захват лучей сопровождается другим интересным явлением, которое напоминает поведение звуковых волн в шепчущих галереях. Это происходит, когда фокусировка точно уравновешивается дефокусировкой, при этом точки отражения огибают линию критической глубины слоя, где наклон луча равен наклону дна [63, 114, 120].

Таким образом, в выбранной геометрии одновременно проявляется два эффекта: фокусировка волн в аттрактор (тенденция к стягиванию на одну траекторию с последовательным уменьшением толщины волнового пучка) из-за выполнения (2.6) и азимутальный захват из-за (2.26). «Конический веер» волн, падающих на наклонную стенку, как бы собирается и поворачивается в направлении наклона. В контексте обсуждения эффектов меридионального захвата волн необходимо отметить работу [64], в которой численно исследовалась структура волнового аттрактора во вращающемся бассейне с плоским дном и конической внешней границей. Если поперечное сечение бассейна имеет круговую форму, то фокусировка волн в аттрактор наблюдается по всем азимутальным направлениям. Это очень напоминает структуру течения, показанную на рис. 2.29*д, е*. В случае, когда

сечение имеет эллиптическую форму, веер волновых лучей после серии последовательных отражений собирается в фиксированной плоскости, проходящей через меньшую ось эллипса. Следуя [63], назовём структуру «супер-аттрактором». Таким образом, данные исследования показывают возможность экспериментального наблюдения подобных структур. Кроме того, экспериментальная реализация захвата аттрактора может осуществляться в более простых моделях, чем [64]. Для этой цели, оказывается, достаточно создать выделенное направление при помощи геометрической манипуляции над торцевыми стенками полости.

2.3.2.3. Влияние числа Экмана на характеристики волновых лучей

На рис. 2.35*а* показаны профили скорости в волновых лучах в осевом сечении полости для режима C(1,1). Фаза либраций подобрана так, что кювета находится в преддверии опережающего цикла, $\Omega_{lib}t = 0$. В этом случае траектория волны в осевом сечении полости образует параллелограмм (рис. 2.30*в*). Измерение осуществляется поперёк направления групповой скорости волн. В области малых чисел Экмана $\mathrm{E} \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ профиль скорости представляет собой две противоположно направленные струи, которые соответствуют двум волновым пучкам, отраженным от боковой стенки полости. С увеличением числа Экмана ширина струй заметно увеличивается, и при $\mathrm{E} = 7.1 \cdot 10^{-4}$ волны образуют единый сдвиговый слой. Одновременно с увеличением числа Экмана наблюдается уменьшение поперечной скорости жидкости $u_\perp$ в сдвиговых слоях.

Для изучения законов масштабирования волнового пучка перейдем в систему отсчета сдвигового слоя и введем локальную координату $s_C / R_\perp$, где начало отсчета соответствует середине струи и располагается вблизи экстремума. Поскольку законы масштабирования исследуются в линейном режиме, поперечная скорость нормирована на амплитуду либраций и линейную скорость на боковой границе $\varepsilon\Omega_{rot}R$. Стоит отметить, что при различных значениях E положение точки $s_C / R_\perp = 0$ отличается. На рис. 2.35*б* показано амплитудное значение скорости в волновом пучке. Видно, что в диапазоне чисел Экмана $\mathrm{E} = 10^{-4} - 10^{-3}$ скорость

жидкости уменьшается по закону $\sim \varepsilon \mathrm{E}^{-2/5}$. Полученный закон хорошо описывает результаты, полученные для различных частот либраций. Однако уже при $\mathrm{E} < 10^{-4}$ наблюдается противоположная зависимость – скорость $u_\perp / (\varepsilon \Omega_{rot} R)$ увеличивается с числом Экмана по закону $\sim \varepsilon \mathrm{E}^{2/5}$. Далее эмпирическим способом подбирается масштаб для ширины волнового пучка, данные хорошо согласуются между собой при выборе нормировки следующим образом $\sim \mathrm{E}^{1/5}$ (рис. 2.35*в*).

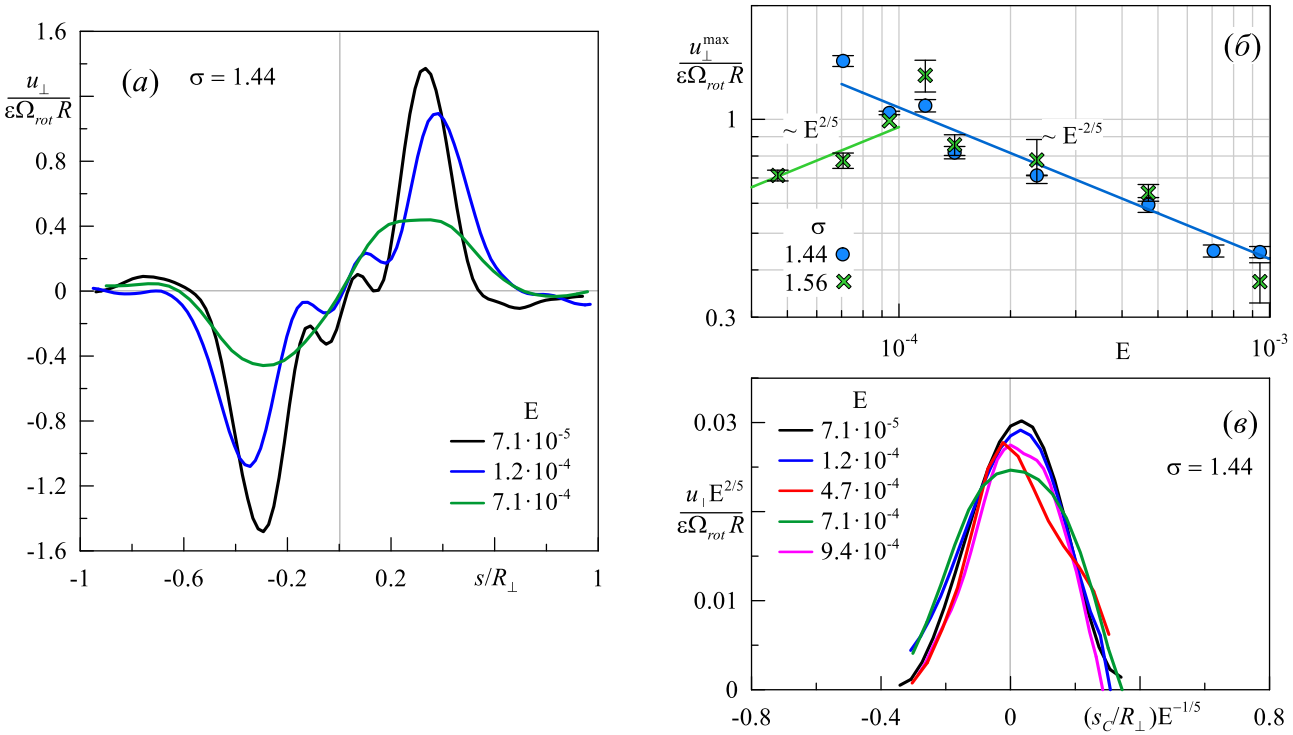


Рисунок 2.35 – Профили безразмерной скорости жидкости $u_\perp / \varepsilon \Omega_{rot} R$ в плоскости, проходящей поперек волновых лучей при частоте $\sigma = 1.44$, амплитуде $\varepsilon = 0.03$, фазе $\Omega_{lib} t = 0$ и различных числах Экмана (*а*). Максимальная скорость жидкости в волновых лучах в зависимости от E (*б*). Профили скорости в системе отсчёта волнового луча $s_C / R_\perp$, нормированные на $\varepsilon \mathrm{E}^{-2/5}$ и $\mathrm{E}^{1/5}$

Прямое сравнение результатов экспериментов с известными численными и теоретическими результатами является затруднительным, поскольку обычно в качестве характеристики потока используется азимутальная скорость u_φ. Тем не менее оценки законов масштабирования волновых пучков провести можно. В [94] исследовалась динамика жидкости в неравномерно вращающемся сферическом

слое. Инерционные волны рождались как на внешней (вогнутой), так и внутренней (выпуклой) границе слоя. Для удобства рассматривался случай периодических орбит, который полностью соответствует режиму C(1,1). В теории ширина волновых пучков, рождённых внешними широтами, масштабируется как $s_C / R_\perp \sim \mathrm{E}^{1/5}$, в то же время для внутренних широт работает закон $s_C / R_\perp \sim \mathrm{E}^{1/3}$. Аналогичный результат был получен в теории [117] и численных исследованиях [97, 141] для диапазона чисел Экмана $\mathrm{E} = 10^{-7} - 10^{-5}$. В данных экспериментах волны генерируются внутренними углами полости, а полученный результат хорошо согласуется с законом $\mathrm{s}_C / R_\perp \sim \mathrm{E}^{1/5}$ для волн, возбуждаемых вогнутыми границами сферического слоя.

Из асимптотической теории [94] следует, что азимутальная скорость в сдвиговых слоях зависит от числа Экмана по закону $u_\varphi \sim \varepsilon \mathrm{E}^{3/10}$. Это означает, что по мере уменьшения ширины сдвигового слоя (уменьшения числа Экмана) инерционный отклик жидкости уменьшается. В настоящей работе данные были получены за пределами асимптотического предела малых чисел Экмана. Тем не менее уже при $\mathrm{E} < 10^{-4}$ для частоты $\sigma = 1.56$ скорость $u_\perp$ также уменьшается с понижением E, что качественно согласуется с теоретическими предсказаниями. Подобный результат был получен в численных экспериментах [97] для диапазона $\mathrm{E} = 10^{-7} - 10^{-5}$, при этом закон сильно зависел от того, где генерируются волны. Если источником являлась внешняя сфера, т.е. вогнутая граница слоя, азимутальная скорость изменялась как $u_\varphi \sim \varepsilon \mathrm{E}^{1/5}$. В другом случае, когда внешняя сфера вращалась равномерно, а либрации совершала внутренняя сфера, $u_\varphi \sim \varepsilon \mathrm{E}^{1/12}$. При $\mathrm{E} > 10^{-4}$ рассматриваемая система явно выходит за границы асимптотического предела: волновые лучи внутри параллелограмма становятся настолько широкими (рис. 2.25*a*), что начинают взаимодействовать между собой, что и приводит к противоположному результату $\varepsilon \mathrm{E}^{-2/5}$.

2.3.3. Зональное течение в условиях линейных режимов волн

Рассмотрим осреднённое азимутальное течение, генерируемое либрациями в линейном режиме волн. Как было показано в Разделе 2.2.4.2, инерционные волны вносят сильную корректировку в дифференциальное вращение жидкости. Причем азимутальная структура осреднённого течения определяется пространственной конфигурацией пульсационного течения. Поскольку в линейном режиме скорость азимутального течения невелика, для удобства процедуры осреднения в PIV-расчетах из всей последовательности кадров выбираются только кратные периоду либраций T_{lib}. При таком подходе частицы визуализатора участвуют только в медленном стационарном движении, а пульсационная компонента скорости исключается из рассмотрения.

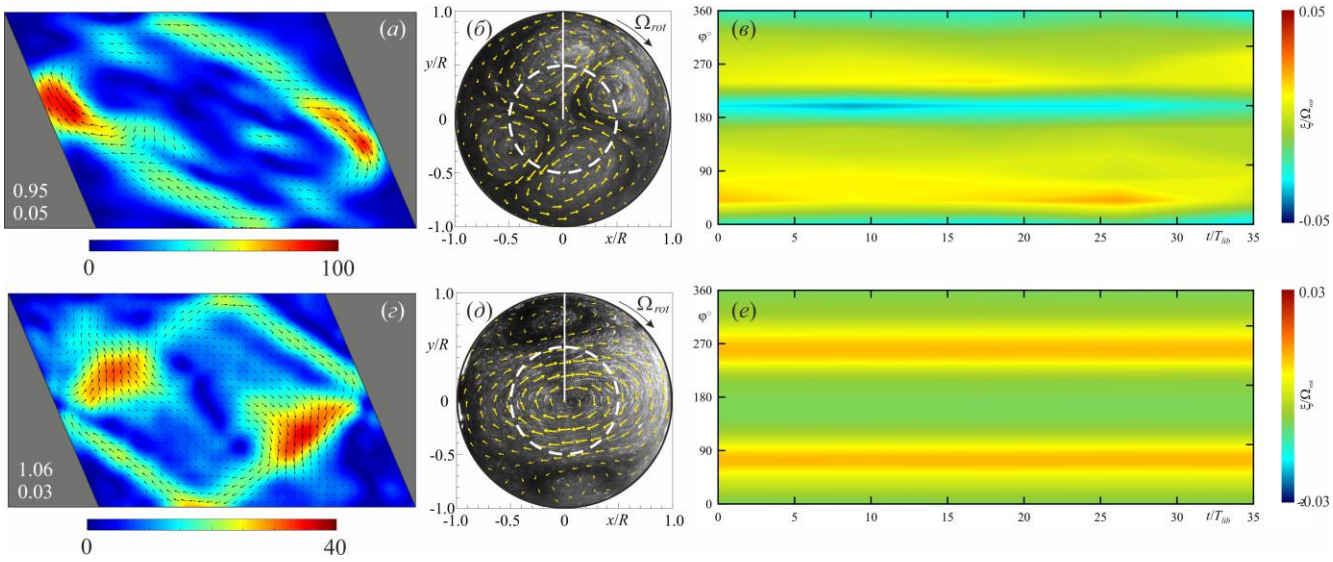


Рисунок 2.36 – Мгновенные и соответствующие осреднённые поля скорости в поперечном сечении полости $z/L=0.5$ при $\sigma=0.96$, $\varepsilon=0.04$ (*а*, *б*) и $\sigma=1.06$, $\varepsilon=0.03$ (*г*, *д*); фоном на *б* и *д* показана трековая визуализация, а вертикальными белыми линиями – положение $\varphi=0$. Справа представлены соответствующие временные распределения *z*-компоненты завихренности $\langle\xi_z\rangle/\Omega_{rot}$ вдоль белых окружностей на центральных фрагментах; положительные значения $\langle\xi_z\rangle/\Omega_{rot}$ означают циклоническую закрутку (по часовой стрелке), отрицательные – антициклоническую. Число Экмана составляет $\mathrm{E}=1.2\cdot10^{-4}$

Для примера на рис. 2.36 представлены поля скорости при частотах, соответствующих различным формам аттрактора A(1,1). Так, при $\sigma = 0.96$ в полости циркулируют две пары согласованно вращающихся вихрей (рис. 2.36*а–в*). Радиальное и азимутальное положение вихрей не меняется со временем: вихри с антициклонической закруткой (ACV) ориентированы вдоль направления градиента наклона торцов, в то время как циклонические вихри (CV) наклонены под углом $\varphi \sim 45°$ и $270°$. При увеличении частоты либраций происходит формирование циклонического ядра, в котором жидкость совершает опережающее вращение (рис. 2.36*г–е*). Структура ядра неосесимметричная и имеет форму эллипса. Эксперименты, выполненные в различных поперечных сечениях z / L, показывают, что азимутальное положение вихревых структур не меняется (рис. 2.37). То же относится и к скорости азимутального течения. В целом структуры представляют собой стационарные двумерные валы, за исключением области вблизи торцов, где наблюдается тенденция к трехмерности.

Перестройка осреднённого течения с частотой связана с изменением конфигурации волнового аттрактора. Например, при частоте $\sigma = 0.96$ точки фокусирующего отражения аттрактора смещены с оси вращения к острым углам плоскости сечения. В то же время расстояние, на которое разнесены антициклонические вихри от оси вращения, в целом согласуется с положением точек отражения ветвей аттрактора от наклонных стенок. Здесь же стоит отметить, что плоскость фокусировки волновых лучей в осевом сечении полости совпадает с линией, соединяющей центры антициклонических вихрей, т.е. примерно вдоль $\varphi = 0$ и $180°$. Это указывает на то, что формирование вихревых структур связано с нелинейными эффектами в пограничных слоях на наклонных границах. Поскольку геометрия торцов несимметрична, осреднённое течение имеет вид системы стационарных вихрей. Аналогичным образом отражение волновых лучей аттрактора от осесимметричных стенок (коническое дно [A3] или сферический слой [A5]) приводит к возникновению геострофической циркуляции (см. Разделы 3.3.1, 4.1.4.2).

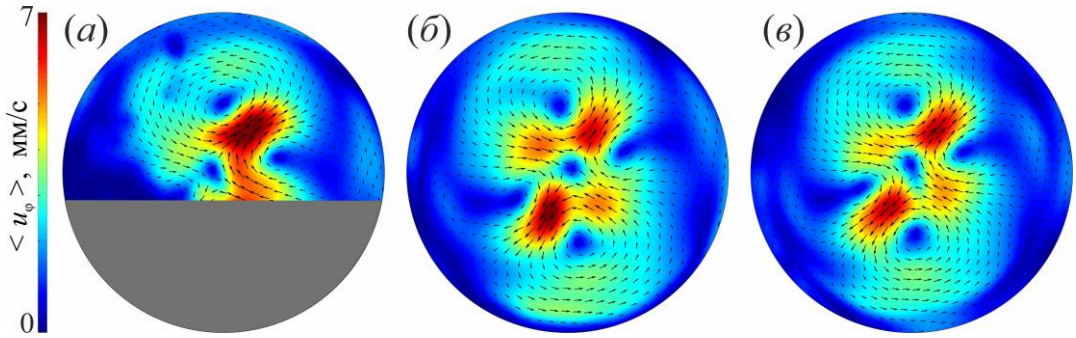


Рисунок 2.37 – Поле осреднённой скорости в различных поперечных сечениях: $z/L = 0.16$ (*а*); 0.31 (*б*); 0.50 (*в*) при $\sigma = 1.0$, $\varepsilon = 0.08$, $\alpha = 23.0°$ и $\mathrm{E} = 1.2 \cdot 10^{-4}$; координата z/L отсчитывается от острого угла полости

Сравнение настоящих результатов с описанными в Разделе 2.2.4.1 показывает, что нарушение осевой симметрии торцов вносит существенные корректировки в зональное течение, которое имеет вид системы вытянутых двухмерных валов. Для характеристики интенсивности осреднённого течения в поперечном сечении можно использовать максимальную скорость жидкости в вихрях на расстоянии $z/L = 0.5$. Так, например, на рис. 2.37*в* максимальной скоростью обладает жидкость вдоль линии соединения вихрей с CV и ACV. Отметим, что при трансформации структуры течения измерения скорости осуществляются в пределах одного и того же вихря. При наличии нескольких максимумов полученные данные усредняются по каждому из них. Так на рис. 2.37*в* находится среднее от скорости в двух максимумах, представляющих собой струи, направленные из центра полости. С увеличением амплитуды либраций интенсивность осреднённой циркуляции в вихрях увеличивается. При фиксированной частоте либраций σ скорость $\Delta u^{\max}$ пропорциональна квадрату амплитуды $\sim \varepsilon^2$. Для сравнения результатов экспериментов обезразмерим скорость $\Delta u^{\max}$ через линейную скорость вращения боковой границы полости $\Omega_{rot} R$ и ε^2. Зависимость скорости осреднённого течения в валах от обратного числа Экмана E^{-1} представлена на рис. 2.38. Экспериментальные точки, полученные для различных частот σ во всем диапазоне чисел Экмана, хорошо описываются зависимостью

$$\Delta u^{\max} / \Omega_{rot} R \varepsilon^2 \sim \mathrm{E}^{-1}. \qquad (2.27)$$

Т.е., понижение числа Экмана E приводит к монотонному росту скорости в валах. Этот результат согласуется с предыдущими экспериментами в цилиндре с прямыми торцами. Обозначим амплитуду скорости пульсационного движения жидкости вблизи боковой стенки следующим образом $\Delta\varphi \cdot \Omega_{lib} R = \tilde{u}$ и примем во внимание, что амплитуда либраций $\varepsilon = \Delta\varphi \cdot \sigma$. Тогда можно получить, что скорость осреднённого течения полностью определяется параметром

$$\Delta u^{\max} / \tilde{u} \sim \mathrm{Re}_p, \qquad (2.28)$$

где $\mathrm{Re}_p = \Delta\varphi\Omega_{lib} R^2 / \nu$ – пульсационное число Рейнольдса.

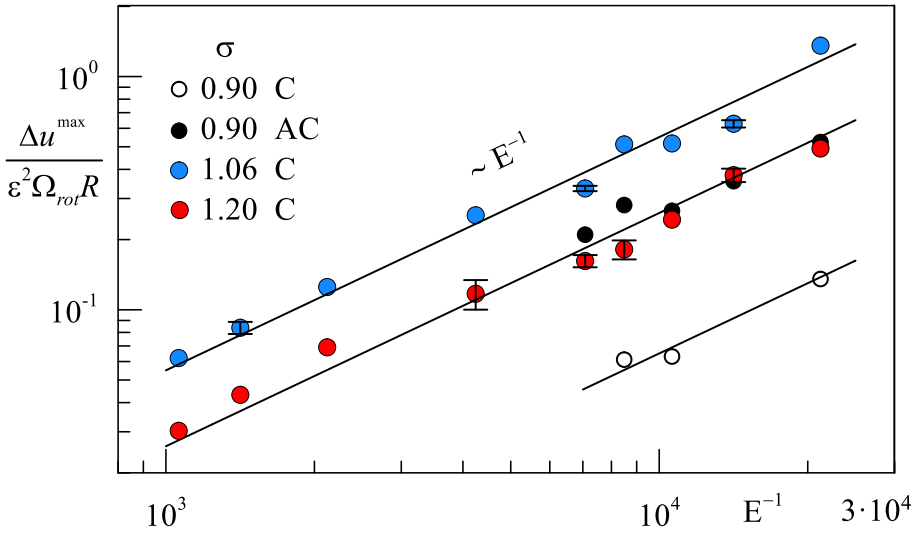


Рисунок 2.38 – Максимальная скорость жидкости в осреднённых вихрях в зависимости от числа Экмана E

Для характеристики глобальной азимутальной циркуляции осредним поля скорости по азимутальному углу $\varphi = 0 - 2\pi$. Если течение состоит из системы циклонов и антициклонов (например, рис. 2.36*б*), глобальная циркуляция будет слабой. И, наоборот, если течение состоит преимущественно из одного вихря, средняя азимутальная скорость жидкости будет больше. Таким образом, чем осесимметричнее течение, тем сильнее полный азимутальный поток.

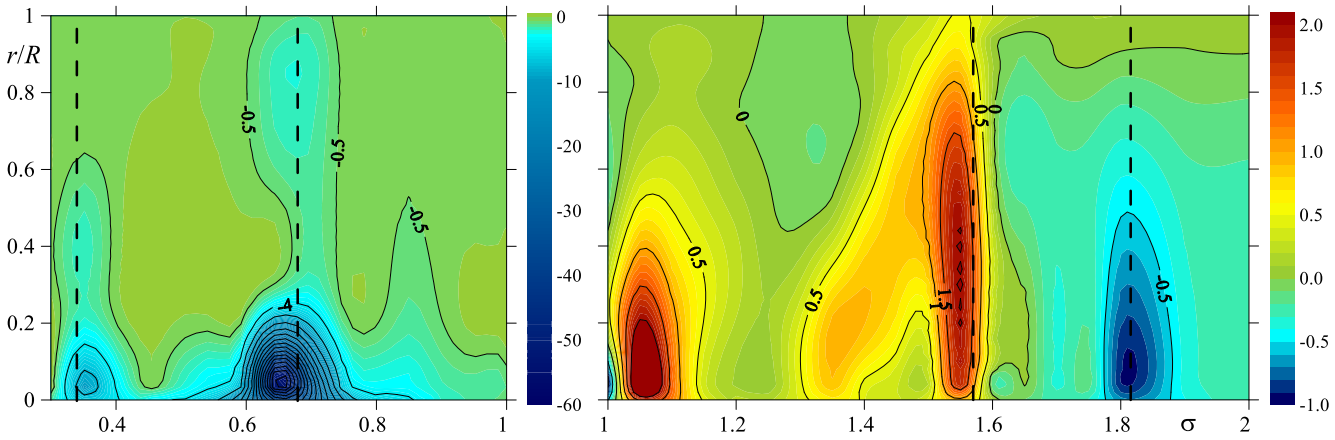


Рисунок 2.39 – Распределение осреднённой по азимуту φ угловой скорости жидкости $\langle \Delta\Omega \rangle_{\varphi} / \Omega_{rot}\varepsilon^2$ на плоскости параметров $(\sigma, r/R)$ при $\mathrm{E} = 1.2 \cdot 10^{-4}$. Красный цвет соответствует опережающему дифференциальному вращению жидкости (по часовой стрелке, циклоническому), а синий – отстающему (против часовой стрелки, антициклоническому). Вертикальными пунктирными линиями показаны собственные частоты основных неосесимметричных инерционных мод (табл. 2.5)

На рис. 2.39 представлено распределение глобальной циркуляции в терминах угловой скорости $\langle \Delta\Omega \rangle_{\varphi} / \Omega_{rot}\varepsilon^2$ в зависимости от безразмерной частоты либраций σ на расстоянии $z/L = 0.5$ от острого угла. Можно заметить, что максимумы угловой скорости хорошо согласуются с положением экстремумов в пульсационном течении (рис. 2.27*a*). Так, вблизи частот возбуждения инерционных мод $\mathrm{M}(1,2,1)$, $\mathrm{M}(1,1,1)$ и $\mathrm{M}(5,1,1)$ возникает интенсивное ретроградное дифференциальное вращение. Причем угловая скорость быстро нарастает с уменьшением расстояния до оси вращения. Хотя есть и моды, которые не возбуждают сильных зональных течений, например, $\mathrm{M}(1,1,2)$. При частотах, соответствующих аттрактору $\mathrm{A}(1,1)$ и режиму симметричного отражения волновых лучей $\mathrm{C}(1,1)$, качественно отличается как направление глобальной циркуляции, так и распределение угловой скорости. Так, в условиях $\mathrm{A}(1,1)$ на расстоянии $r/R < 0.2$ возникает опережающе вращающееся цилиндрическое ядро. По мере удаления от оси вращения $r/R > 0.2$ угловая скорость жидкости монотонно понижается. При частоте $\sigma = 1.55$ глобальная циркуляция имеет вид кольца шириной $0.2 < r/R < 0.5$, в котором жидкость также совершает опережающее вращение. Отметим, что при дан-

ной частоте структура пульсационного течения аналогична инерционной моде $\mathrm{M}(3,1,1)$ (рис. 2.31). Тем не менее, как обсуждалось ранее, мода $\mathrm{M}(3,1,1)$ сильно деформирована торцевыми стенками полости.

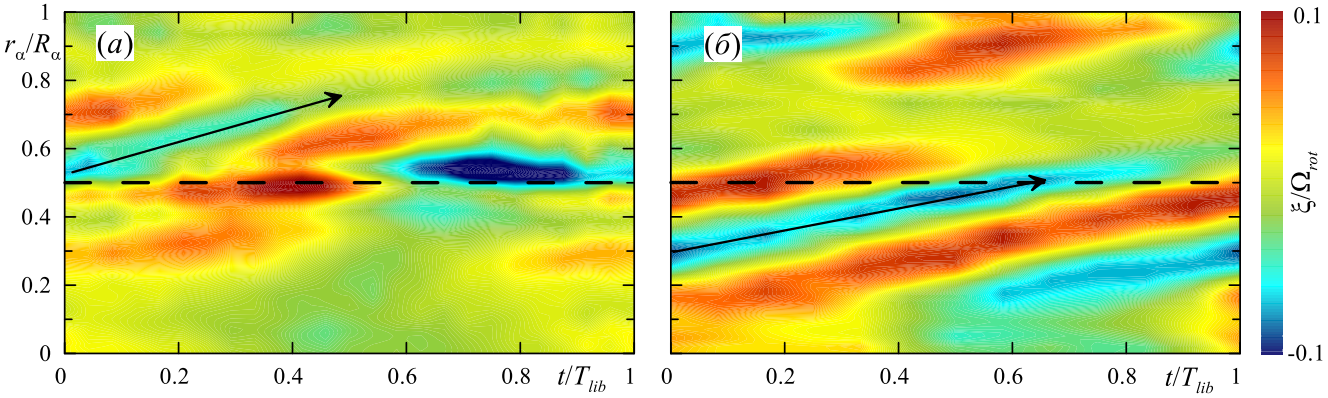


Рисунок 2.40 – Временная зависимость безразмерной завихренности вблизи наклонного торца при $\sigma = 0.96$ (*а*) и $\sigma = 1.08$ (*б*). Координата r_α / R_α измеряется от тупого угла полости

Направление глобальной циркуляции жидкости зависит от динамики инерционных волн вблизи наклонных границ. Так, при частоте $\sigma = 0.96$ положение точек отражения ветвей аттрактора смещено с оси вращения к острым углам (рис. 2.36*а*). При этом фаза волны вблизи границ распространяется от оси вращения к периферии (рис. 2.40*а*). Для выполнения закона сохранения момента импульса скорость частиц жидкости, сносимых волной на больший радиус, должна уменьшаться. Это приводит к тому, что в среднем вся жидкость совершает медленное ретроградное вращение. Противоположная картина наблюдается при частоте $\sigma = 1.08$ (рис. 2.40*б*). Фокусировочное отражение ветвей аттрактора расположено ближе к тупым углам. В то же время инерционная волна сносит частицы жидкости от периферии к центру, поэтому их азимутальная скорость должна увеличиваться. В результате в силу закона сохранения момента импульса в полости возникает опережающее вращение. Дополнительные исследования волновой динамики при частотах $\sigma = 1.55$ и $\sigma = 1.80$ подтверждают сделанный вывод.

Можно предположить, что перенос частиц жидкости вдоль наклонной границы инерционной волной связан со стоксовым дрейфом. Аналогичный эффект наблюдается для внутренних гравитационных волн, которые способны обеспечи-

вать перенос массы не только вдоль направления распространения энергии, но и вдоль направления фазовой скорости [230–232]. Интересным примером является перенос планктона в океане внутренними волнами [230]: авторы отмечают, что вблизи границ нейтрально плавучие организмы дрейфуют в направлении распространения фазовой скорости волны. Поскольку дисперсионные соотношения инерционных и внутренних волн однотипны, можно ожидать, что и механизм стоксового дрейфа аналогичен.

2.3.4. Неустойчивость зонального течения

С увеличением амплитуды либраций при фиксированном значении σ осреднённое зональное течение испытывает неустойчивость, которая проявляется в разрушении вихревых структур, показанных на рис. 2.36*б*, *д*. В начальный момент времени наблюдается периодическая деформация формы осреднённых вихрей с частотой, отличающейся от частоты либраций. Этот процесс наблюдается только в самом пороге неустойчивости при критическом значении ε. Дальнейшая надкритическая динамика системы сильно зависит от частоты либраций и режима пульсационного течения. Далее подробно рассматриваются два режима: аттрактор A(1,1) с частотой $\sigma = 0.96$ и инерционная мода M(1,1,1) с частотой $\sigma = 0.66$. Результаты представлены для кюветы с параллельным наклоном торцов $\alpha = 23°$.

2.3.4.1. Пороги неустойчивости и структурообразование

На рис. 2.41 показаны пороги возникновения неустойчивости в зависимости от частоты либраций σ. Для определения порогов эксперименты проводились для каждого фиксированного значения σ сначала при постепенном повышении ε, а потом при понижении ε. Гистерезисы в переходах обнаружены не были. Полученная зависимость имеет немонотонный вид и хорошо коррелирует с графиком для скорости пульсационного течения (рис. 2.27*а*). Основные минимумы соответствуют собственным частотам инерционных мод M (1,2,1), M (1,1,2), M (1,1,1), M (3,1,1) и M (5,1,1). Это довольно ожидаемый результат, поскольку в условиях резонанса создаются благоприятные условия для развития неустойчивости.

Наиболее опасной оказывается частота $\sigma = 0.66$, при которой неустойчивость возникает при наименьшем значении ε. При изменении частоты либраций относительно резонанса пороги неустойчивости достаточно быстро смещаются в область более высоких значений ε. Особого внимания заслуживает форма кривой в условиях аттрактора A(1,1). Наименьшее критическое значение амплитуды ε приходится на частоту $\sigma = 0.96$. Это в целом согласуется с положением максимума на рис. 2.27*a*. Тем не менее в области $1 < \sigma < 1.2$ (рис. 2.41) наблюдается второй экстремум, который выражен не так ярко. Локального повышения интенсивности пульсационного течения в этом диапазоне частот нет, но именно здесь формируется опережающее цилиндрическое ядро вблизи оси вращения (рис. 2.39).

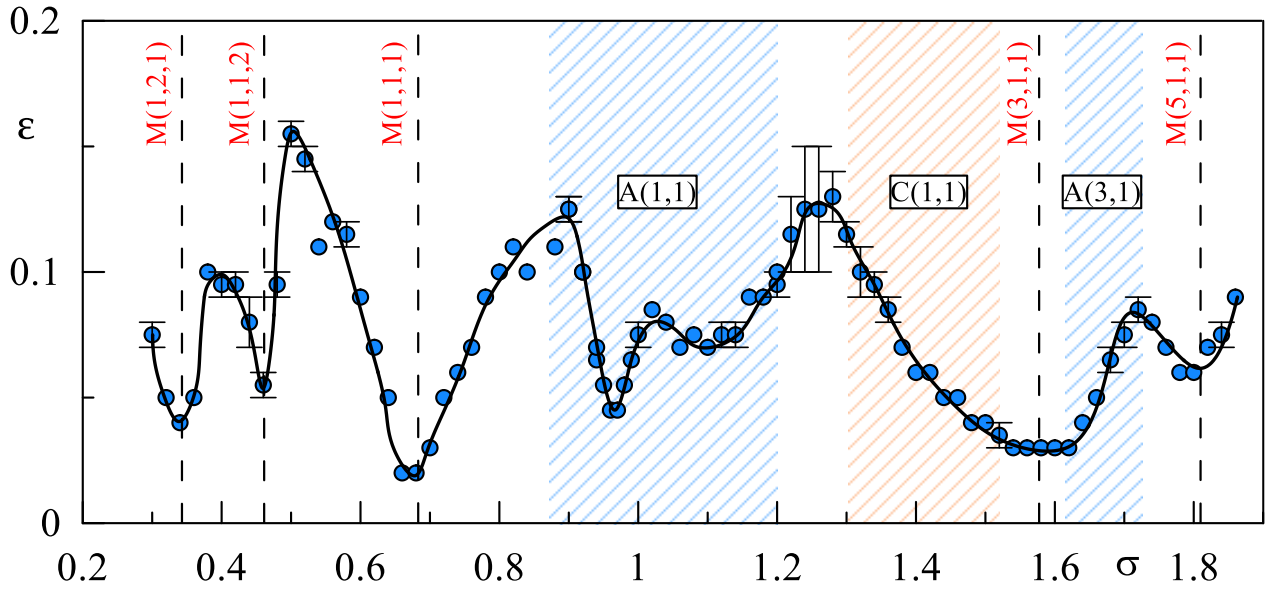


Рисунок 2.41 – Пороги неустойчивости азимутального течения в зависимости от безразмерной частоты либраций при E = $4.7 \cdot 10^{-5}$. Вертикальными штриховыми линиями обозначены собственные частоты невязких инерционных мод

На рис. 2.42 показаны критические значения амплитуды колебаний в зависимости от числа Экмана E. Систематические исследования указывают, что показатель степени E во многом определяется режимом пульсационного течения. Так, в условиях аттрактора (частоты $\sigma = 0.96$, 1.10) экспериментальные точки подчиняются закону $\varepsilon \sim \mathrm{E}$. Аналогичный результат получен при частоте $\sigma = 1.42$ в режиме симметричного отражения волн. Учитывая, что $\varepsilon = \Delta\varphi\Omega_{lib} / \Omega_{rot}$, для характе-

ристик порогов неустойчивости можно использовать пульсационное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_p = \varepsilon \mathrm{E}^{-1}$. Интересно, что полученный параметр не содержит характеристик вращения системы и может быть переписан через соотношение характерных размеров: $\mathrm{Re}_p \sim \Delta\varphi R^2 / \delta^2$. В условиях выполненных экспериментов при частоте $\sigma = 0.96$ значение числа Рейнольдса составляет $\mathrm{Re}_p^* = 1120 \pm 40$. Можно отметить, что этот же параметр отвечает за осреднённую скорость азимутального течения до порога возникновения неустойчивости (Раздел 2.3.3) [A14].

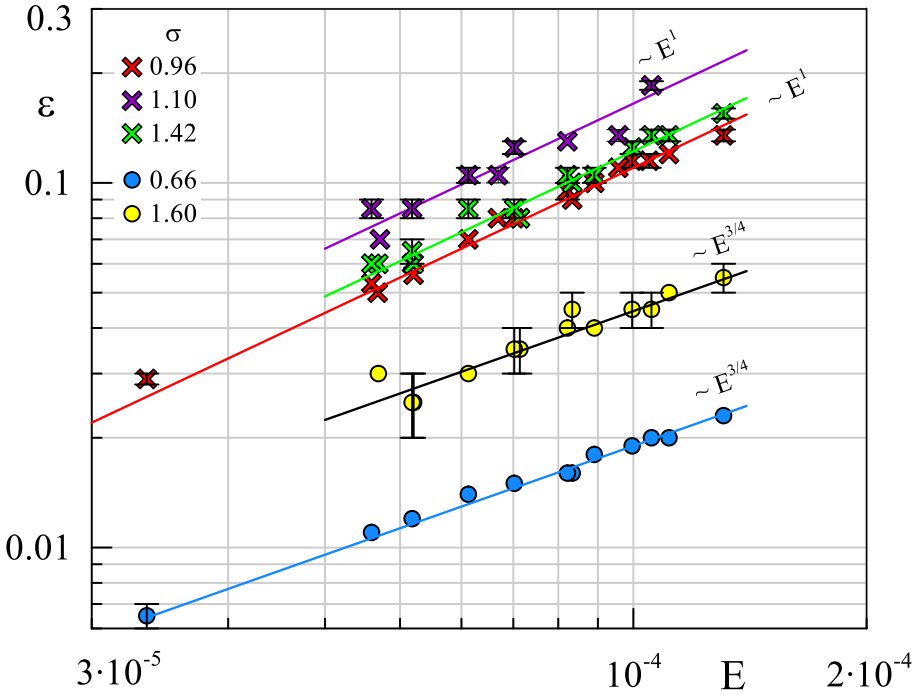


Рисунок 2.42 – Влияние числа Экмана на пороги неустойчивости при различных частотах либраций

Вблизи порога неустойчивости тяжелые частицы слюды формируют систему горизонтальных полос (рис. 2.43*а*). Структуры распределены неравномерно по длине полости и расположены преимущественно вблизи мест отражения ветвей аттрактора от боковой стенки (рис. 2.36*а*). Это означает, что неустойчивость возникает локально, где амплитуда пульсационного течения максимальна. С течением времени полосы медленно смещаются вдоль азимута в направлении, противоположном вращению, причем пространственный период λ_h сохраняется. Оценки

показывают, что в условиях выполненных экспериментов расстояние между полосами составляет $\lambda_h \approx 2$ мм. Соответствующее безразмерное волновое число принимает значение $\tilde{k}_h = 2\pi\delta / \lambda_h = 0.57$. Этот результат согласуется с теоретически предсказанным волновым числом $\tilde{k}_\delta \approx 0.5$ для неустойчивости пограничного слоя между колеблющимся внутренним цилиндром и неподвижным внешним цилиндром [233]. С увеличением амплитуды либраций постепенно формируется система поперечных к оси вращения структур, воспринимающихся как вертикальные полосы. Последние образуют своеобразный «хвост», в который переходят горизонтальные полосы (рис. 2.43*б*). Пространственные масштабы структур обоих типов сравнимы по величине, тем не менее, измерения длины волны между вертикальными линиями даёт значение $\lambda_v \approx 2.5$ мм, что соответствует $\tilde{k}_v = 2\pi\delta / \lambda_v = 0.46$. При дальнейшем повышении ε вертикальные линии становятся более выраженными и сильнее накладываются на горизонтальный паттерн (рис. 2.43*в*). По всей видимости, вертикальные полосы связаны с неустойчивостью типа Тейлора–Гёртлера, которая ранее наблюдалась в различных постановках, например, для пульсирующего течения в цилиндрическом слое, границы которого вращаются с одинаковыми скоростями [234], в экспериментальных и численных исследованиях течения в либрирующем цилиндре и сферическом слое [68, 100, 148], в кольцевом слое маловязкой жидкости в быстро вращающемся горизонтальном цилиндре [179]. В либрирующем цилиндре и сферическом слое [68, 148] течения визуализировались при помощи каллироскопа, при этом неустойчивость проявлялась только в фазе ретроградного движения полости. В [179] колебания совершала свободная поверхность жидкости, а для визуализации течений вблизи боковой стенки использовалась алюминиевая пудра. Структура течения представляла собой серию колец из алюминиевой пудры в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. В пределе тонких пограничных слоёв $R/\delta > 20$ безразмерное волновое число принимало значение $\tilde{k}_v = 2/3$, что близко к результату данной работы. Таким образом, можно предположить, что при $\sigma = 0.96$ неустойчивость осреднённого зонального течения обусловлена дестабилизацией вязких

пограничных слоёв. На это также указывают результаты работы [227], где исследовались нелинейные инерционные режимы в либрирующем и прецессирующем кубе. Было показано, что неустойчивость в объеме жидкости является результатом взаимодействия осциллирующего пограничного слоя и отражённых инерционных волн.

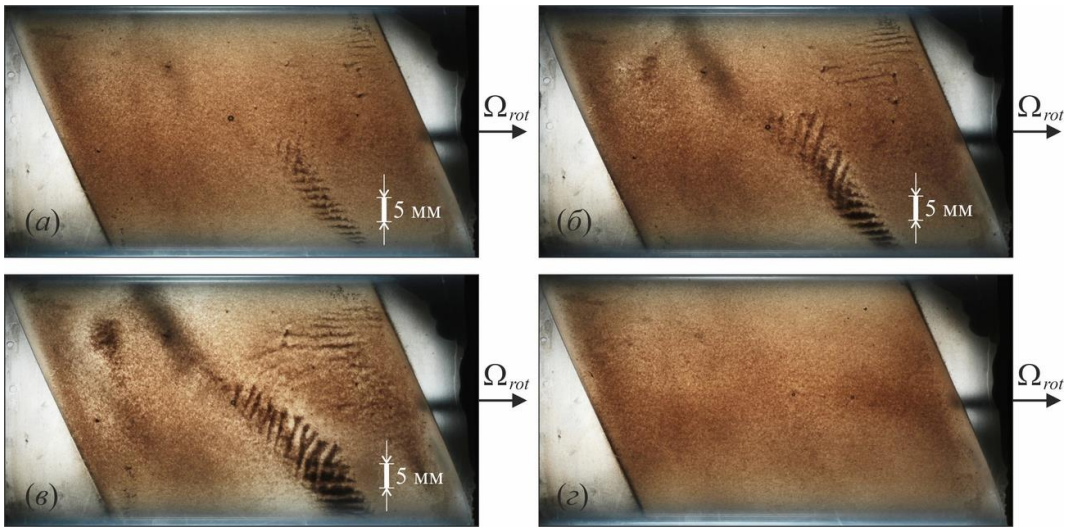


Рисунок 2.43 – Фотография распределения тяжелых частиц на боковой стенке полости в проходящем свете при $\sigma = 0.96$, $\mathrm{Re}_p / \mathrm{Re}_p^* = 0.95$ (*а*), $\mathrm{Re}_p / \mathrm{Re}_p^* = 1.33$ (*б*), $\mathrm{Re}_p / \mathrm{Re}_p^* = 1.89$ (*в*) и $\sigma = 0.66$, $\mathrm{Re} / \mathrm{Re}^* = 1.56$ (*г*); во всех случаях число Экмана $\mathrm{E} = 2.4 \cdot 10^{-5}$. Вращение полости на фото направлено вниз

В случае резонансного возбуждения инерционной моды пороги неустойчивости могут быть описаны зависимостью $\varepsilon \sim \mathrm{E}^{3/4}$ (рис. 2.42). Это означает, что переход к неустойчивому режиму характеризуется другим параметром $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_p \cdot \mathrm{E}^{1/4}$. В этом выражении фигурирует толщина слоя Стюартсона $\delta_S^o \sim R \cdot \mathrm{E}^{1/4}$, который характеризует скачок азимутальной скорости между боковой границей полости и жидкостью за пределами пограничного слоя. Для частоты $\sigma = 0.66$ критическое значение модифицированного числа Рейнольдса составляет $\mathrm{Re}^* = 19.2 \pm 0.5$. Можно отметить, что аналогичным параметром описывался порог возникновения вихрей Тейлора–Гёртлера в либрирующем цилиндре с прямыми торцами [148]. В диапазоне чисел Экмана $\mathrm{E} \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ переход характеризовал-

ся постоянным числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = 250 \pm 5$. Это значение намного превышает то, что получено в настоящих экспериментах. Кроме того, визуализация структуры течения при помощи частиц слюды не обнаруживает паттерна на стенке (рис. 2.43*г*). Отсюда следует, что в случае возбуждения инерционной моды M(1,1,1) неустойчивость осреднённого азимутального течения не связана с эффектами в пограничных слоях.

2.3.4.2. Нелинейные режимы волнового аттрактора: спектральный анализ

Далее проведём спектральный анализ азимутального пульсационного поля. Для этой цели использовалась методика, ранее успешно зарекомендовавшая себя при анализе неустойчивости волнового аттрактора во вращающемся кольцевом слое с косым дном [117]. Для расчётов используется оконное преобразование Фурье в среде MATLAB [235]:

$$S(\omega,t) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_\varphi(\tau) e^{-i\omega\tau} h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right|^2 \right\rangle_{(r,\varphi)}, \qquad (2.29)$$

где $h(t)$ – окно Хэмминга. Внимание уделено плоскости поперечного сечения $z/L = 0.5$ для области $0 \le r/R \le 1$ и $0 \le \varphi \le 2\pi$. Спектрограммы азимутальной скорости в условиях (1,1) аттрактора показаны на рис. 2.44. Цветом на графике изображены значения $\log_{10}[S(\omega,t)/S_0]$, где S_0 – осреднённый по времени спектр на основной частоте σ. Для частоты $\sigma = 0.96$ период колебаний составлял $T_{lib} = 104.2$ мс, в то время как промежуток времени между двумя последовательными отсчётами равнялся 2.78 мс. Это означает, что один период либраций разрешался 37.5 точками. До порога неустойчивости в спектре наблюдаются две частоты, одна из которых совпадает с частотой либраций $\omega/\Omega_{rot} = \sigma$, а вторая равна средней частоте вращения всей системы $\omega/\Omega_{rot} = \sigma_{rot} = 1$ (рис. 2.44*а*). Последняя частота возникает в результате перехода из лабораторной системы отсчета в равномерно вращающуюся с частотой Ω_{rot}. Напомним, что для этой процедуры каждое изображение поворачивается против направления вращения полости с постоянным шагом. Эта операция не учитывает возможную ошибку параллакса при

съемке, а также неравномерное вращение полости. Вклад этой частоты в спектр зависит от качества первоначальной настройки положения оси объектива камеры относительно оси вращения и не влияет на обсуждаемые физические эффекты. Эта частота $\omega / \Omega_{rot} = 1$ далее будет проявляться и в других задачах, где переход во вращающуюся систему отсчёта осуществлялся посредством поворота кадров (см. Разделы 3.4, 5.2) [А3, А4].

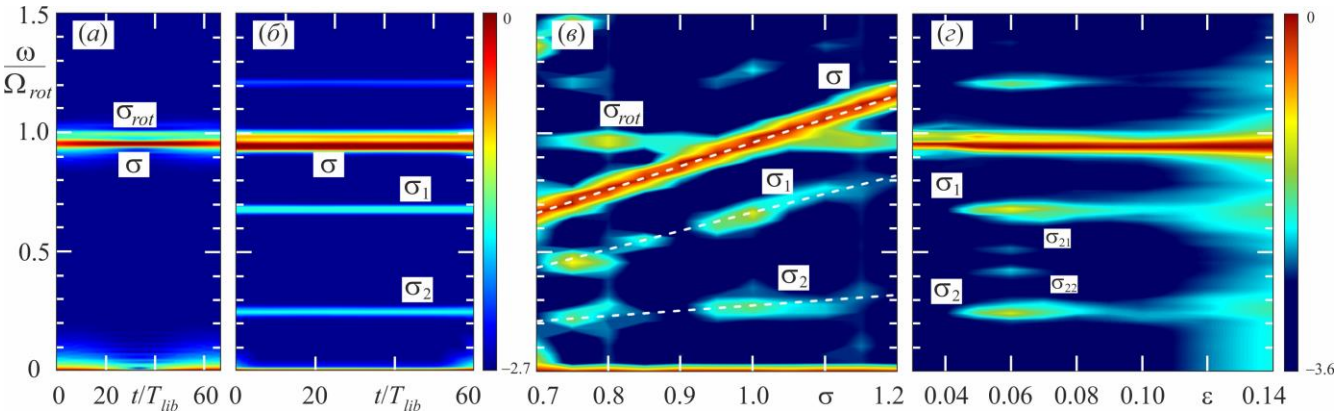


Рисунок 2.44 – Спектрограммы азимутальной скорости при $\sigma = 0.96$ до порога неустойчивости (*а*, $\varepsilon = 0.04$) и в пороге неустойчивости (*б*, $\varepsilon = 0.05$). На фрагменте (*в*) показано влияние частоты либраций на субгармоники триадного резонанса при фиксированной амплитуде $\varepsilon = 0.10$ и (*г*) влияние амплитуды либраций на спектр возмущений при частоте $\sigma = 0.96$. Число Экмана составляет $\mathrm{E} = 4.7 \cdot 10^{-5}$

В нелинейном режиме аттрактора в спектре возникают две субгармоники с частотами $\sigma_1 = 0.69$ и $\sigma_2 = 0.25$ (рис. 2.44*б*). В данных экспериментах момент времени $t / T_{lib} = 0$ не соответствует времени начала эксперимента, поэтому представленным режимам течения уже предшествовал момент наступления неустойчивости. Видно, что значение частот σ_1 и σ_2 не меняются в течение эксперимента, при этом их сумма близка к фундаментальной частоте $\sigma_1 + \sigma_2 \approx \sigma$. Это указывает на то, что основным механизмом разрушения стационарного вихря является *триадный субгармонический резонанс* [25, 29], когда фокусировка волн в аттрактор приводит к каскаду энергии по сценарию триадных взаимодействий [236]. Триадный резонанс предполагает линейную комбинацию между частотами и волновыми векторами для основной волны и рождаемых субгармоник. Остановка

каскада в экспериментах обусловлена вязкой диссипацией энергии вторичных волн. Напомним, что неустойчивость триадного резонанса хорошо известна со времен работы Макэвана, который обнаружил так называемый «резонансный коллапс» во вращающемся цилиндре вблизи резонансной частоты инерционной моды [84]. Позже использование современной PIV-техники позволило показать, что неустойчивость в цилиндрических полостях связана с генерацией двух свободных инерционных мод цилиндра и одной вынужденной моды [102, 203, 207].

Изменение частоты либраций при фиксированном значении ε приводит к изменению значения частот субгармоник σ_1 и σ_2 таким образом, что их сумма всегда близка к значению фундаментальной частоты (рис. 2.44*в*). Можно отметить, что с увеличением σ темп роста второй субгармоники существенно меньше, чем первой. Зависимость положения экстремума первой субгармоники σ_1 практически параллельна прямой для фундаментальной частоты. Зависимость спектра возмущений от амплитуды либраций показана на рис. 2.44*г*. Интересно, что количество субгармоник и их вклад в спектр немонотонно меняются с ε. Так, при амплитуде $\varepsilon = 0.05$ мы наблюдаем только две субгармоники $\sigma_1 = 0.69$ и $\sigma_2 = 0.25$. Однако уже при $\varepsilon = 0.06$ появляется ещё одна «внутренняя» пара субгармоник с частотами $\sigma_{21} = 0.52$ и $\sigma_{22} = 0.44$. Это говорит о том, что реализуется второй энергетический каскад. Дальнейшее повышение амплитуды либраций ε приводит к исчезновению «внутренней» пары частот. Спектр становится проще, при этом интенсивность основных субгармоник σ_1 и σ_2 также уменьшается. При $\varepsilon > 0.11$ в спектре снова можно различить «внутренние» частоты σ_{21} и σ_{22}, кроме того, появляется непрерывная компонента.

2.3.4.3. Осреднённые течения, генерируемые аттрактором

Рассмотрим структуру осреднённого по периоду либраций течения в нелинейном режиме A(1,1). На рис. 2.45*а, в, д* показаны поля азимутальной скорости при амплитудах $\varepsilon = 0.05, 0.08, 0.10$ и фиксированной частоте $\sigma = 0.96$. В пороге неустойчивости ($\varepsilon = 0.05$) структура течения представляет собой систему осред-

нённых нестационарных вихрей. Сравнение временных динамик в докритическом и надкритическом режимах (рис. 2.45*а* и рис. 2.36*в*) показывает, что вдоль направлений $\varphi = 0$ и $180°$ происходят периодические разрушение вихрей с антициклонической закруткой, на месте которых рождаются центры новых завихренностей. Последние дрейфуют в азимутальном направлении и затухают. Скользящее среднее на рис. 2.45*б* получено вдоль окружности $r/R = 0.5$ с временным шагом между окнами $\Delta t/T_{lib} = 0.18$, чего достаточно для получения достоверной информации о динамике осреднённых вихрей. Интересно, что на временной диаграмме можно различить одновременное существование нескольких типов осреднённого движения с разными временными масштабами (чёрные и красные стрелки). Наиболее медленное движение различимо в нижней части диаграммы и связано с опережающим дрейфом максимума завихренности в направлении роста φ. Если учесть, что в промежутке времени $\Delta t/T_{lib} = 0 \div 50$ структура повторяется 14 раз, можно оценить частоту возникновения вихрей как 0.27. Это значение близко к частоте второй субгармоники триадного резонанса $\sigma_2 = 0.25$ (рис. 2.44*б*). Аналогичным образом можно оценить частоту появления отстающих вихрей, которые распространяются в направлении уменьшения φ (красные стрелки). Видно, их частота выше и примерно равна $T/\Delta t \approx 0.71$. Полученное значение также близко к частоте первой субгармоники $\sigma_1 = 0.69$. Таким образом, можно заключить, что неустойчивость триадного резонанса является генератором ненулевого зонального течения. В течение каждого периода колебаний $\Delta t_1/T = 1/\sigma_1$ и $\Delta t_2/T = 1/\sigma_2$ возникает осреднённый вихрь, дрейфующий вдоль азимута. По всей видимости, направление азимутального дрейфа определяется знаком частоты субгармоники триадного резонанса.

При достижении амплитуды либраций $\varepsilon = 0.08$ вклад субгармоник σ_1 и σ_2 заметно ослабевает (рис. 2.44*г*). Это сопровождается качественным изменением надкритической динамики осреднённого течения. На расстоянии $r/R = 0.5$ формируется один антициклонический «глаз» (рис. 2.45*в*). За время наблюдения за системой ($\Delta t/T_{lib} = 50$) не замечено какого-либо существенного движения этого

вихревого образования вдоль радиуса. В то же время обнаружен очень слабый азимутальный ретроградный дрейф со временем (рис. 2.45*г*). Оценки показывают, что угловая скорость этого движения составляет $< \Delta\Omega >_d / \Omega_{rot} = 10^{-3}$.

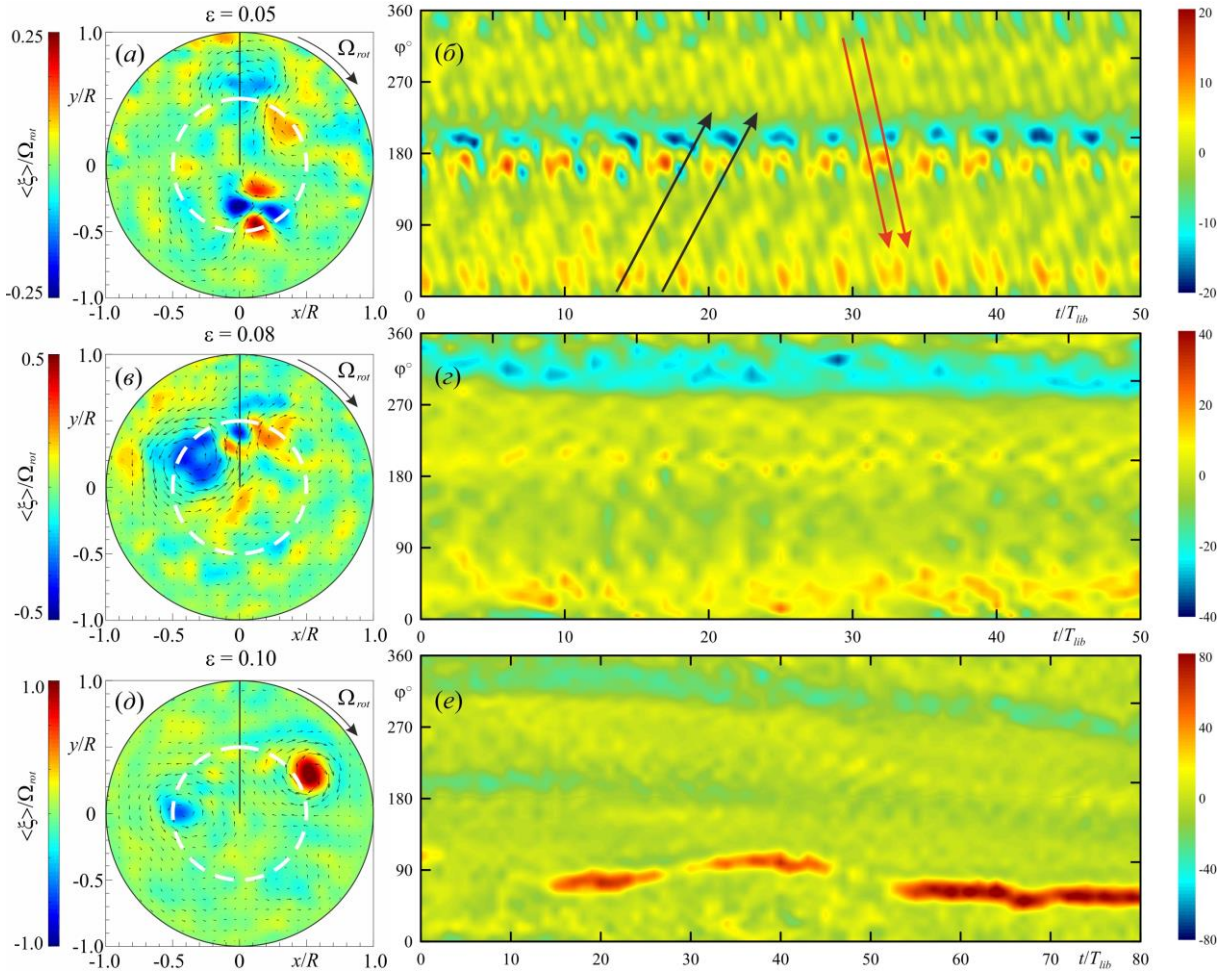


Рисунок 2.45 – Типичные осреднённые по времени либраций поля скорости в нелинейном режиме A(1,1) при $\sigma = 0.96$ и $\mathrm{E} = 4.7 \cdot 10^{-5}$ (левая колонка). Временная динамика осреднённой завихренности вдоль круга радиуса $r / R = 0.5$ (правая колонка)

Описанное поведение напоминает обратный каскад энергии, в результате чего когерентная квазигеострофическая структура демонстрирует увеличение пространственного масштаба. Таким образом, при $\varepsilon = 0.08$ структура осреднённого течения кажется более регулярной по сравнению с амплитудой $\varepsilon = 0.05$. Стоит отметить, что на фоне ярко выраженного крупномасштабного образования наблюдается достаточно быстрое движение меньшей интенсивности, которое

воспринимается как система наклонных линий с постоянным значением завихренности (рис. 2.45*г*). Причем, в некоторые моменты времени линии постоянной завихренности образуют переплетающиеся узоры.

При увеличении амплитуды либраций до $\varepsilon = 0.10$ формируется второй вихрь с циклонической закруткой (рис. 2.45*д*). Азимутальное положение этого вихря также слабо меняется со временем (рис. 2.45*е*). В диапазоне $\Delta t / T_{lib} = 15 \div 80$ первоначально наблюдается опережающий дрейф на величину $\sim 20°$, после чего направление среднего дрейфа меняется на противоположное. Наблюдения показывают, что смена направления связана с радиальным перемещением: опережающий дрейф сопровождается перемещением вихря на периферию, в то время как отстающий – к оси вращения полости. Интересно, что с момента времени $\Delta t / T_{lib} \approx 40$ азимутальное движение циклонического и антициклонического вихрей синхронизируется. Т.е. можно говорить об образовании вихревой пары.

Наконец, при $\varepsilon = 0.12$ и $\mathrm{Re}_p = \varepsilon \mathrm{E}^{-1} = 2.6 \cdot 10^3$ спектр мгновенного течения становится более сложным (рис. 2.44*г*). Эксперименты показывают, что появление непрерывной составляющей связано с регулярным возникновением новых центров осреднённой циклонической и антициклонической завихренности. На рис. 2.46 представлена динамика осреднённых вихревых структур в различные моменты времени при $\varepsilon = 0.105$ но близком значении числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_p = 3 \cdot 10^3$. Можно заметить, что вихри с разной закруткой имеют тенденцию к образованию вихревых пар. При сближении вихрей на расстояние $r / R \sim 0.3$ возникает их согласованное движение. Происходит это следующим образом. Обычно циклонический вихрь с ускорением закручивается вокруг антициклона в направлении, противоположном вращению. Достигая периферии, циклон движется вдоль боковой стенки полости, после чего затухает. В это же время в полости могут рождаться новые циклоны, которые также могут провзаимодействовать с тем же самым антициклоном. Т.е. среднее время жизни антициклонов обычно существенно больше. Можно отметить, что в полости могут одновременно существовать несколько вихревых пар (см. например, рис. 2.46*е*). Для того, чтобы не за-

громождать дополнительными траекториями верхний ряд рис. 2.46, их динамика не показана.

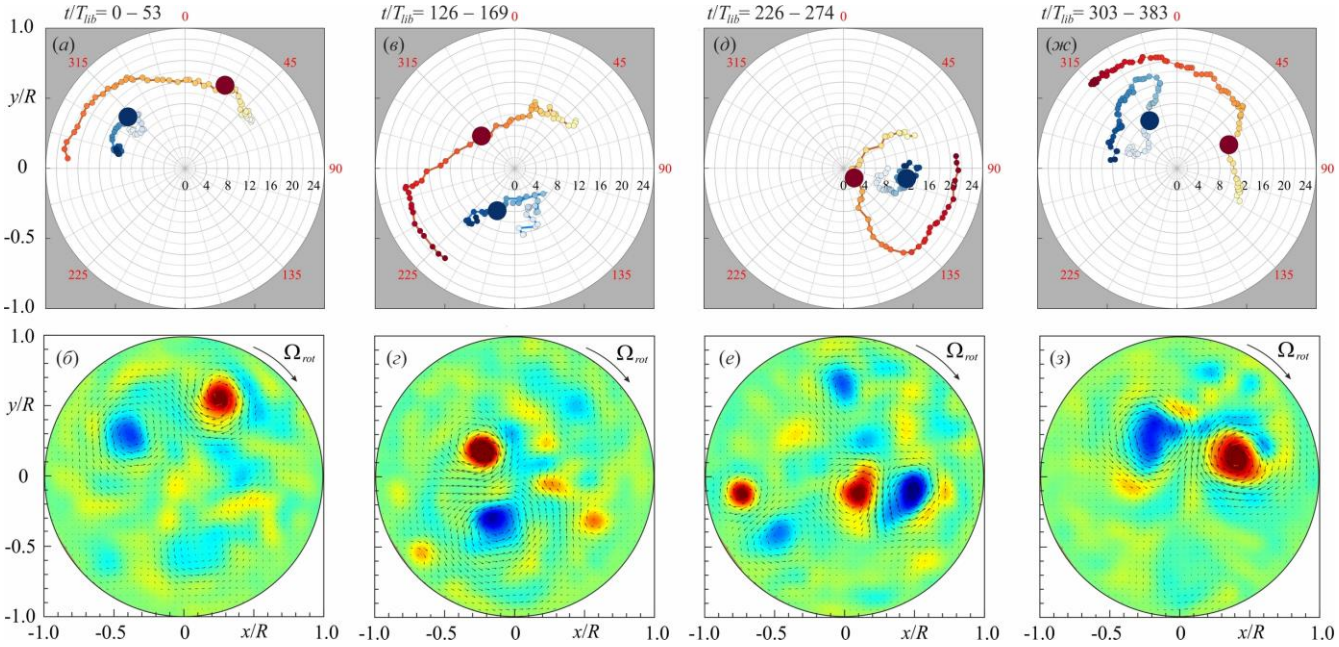


Рисунок 2.46 – Положение вихревых пар в различные моменты времени в сечении $z/L=0.45$ при $\sigma=0.96$, $\varepsilon=0.105$, $\mathrm{E}=3.5\cdot10^{-5}$ и $\mathrm{Re}_p=3\cdot10^3$ (верхний ряд); красные символы соответствуют вихрю с циклонической закруткой (по часовой стрелке), синие вихри – антициклонической закрутки (против часовой стрелки); градиент цвета от светлого к тёмному соответствует ходу времени. В нижнем ряду показаны осреднённые по периоду либраций поля азимутальной скорости, соответствующие положениям больших красных и синих точек

2.3.4.4. Нелинейные режимы инерционных мод: спектральный анализ

Теперь рассмотрим динамику жидкости в нелинейном режиме инерционной моды $\mathrm{M}(1,1,1)$. На рис. 2.47 показаны спектрограммы мгновенной азимутальной скорости при частоте $\sigma=0.66$. В пороге неустойчивости при $\mathrm{Re}=19.2$ в спектре появляются две новые субгармоники с частотами $\sigma_1=0.43$ и $\sigma_2=0.23$, которые удовлетворяют условию триадного резонанса $\sigma_1+\sigma_2=\sigma$ (рис. 2.47*а*). Неустойчивость проявляется не сразу, а спустя $t/T_{lib}\sim100$ периодов либраций с момента начала эксперимента. Важно отметить пульсирующий характер возмущений в спектре. При заданной амплитуде $\varepsilon=0.012$ энергия субгармоник сначала монотонно возрастает, после чего наблюдается достаточно резкое их ослабление. Да-

лее весь процесс повторяется с периодом $\Delta t / T_{lib} \sim 80$ четыре раза за время наблюдения.

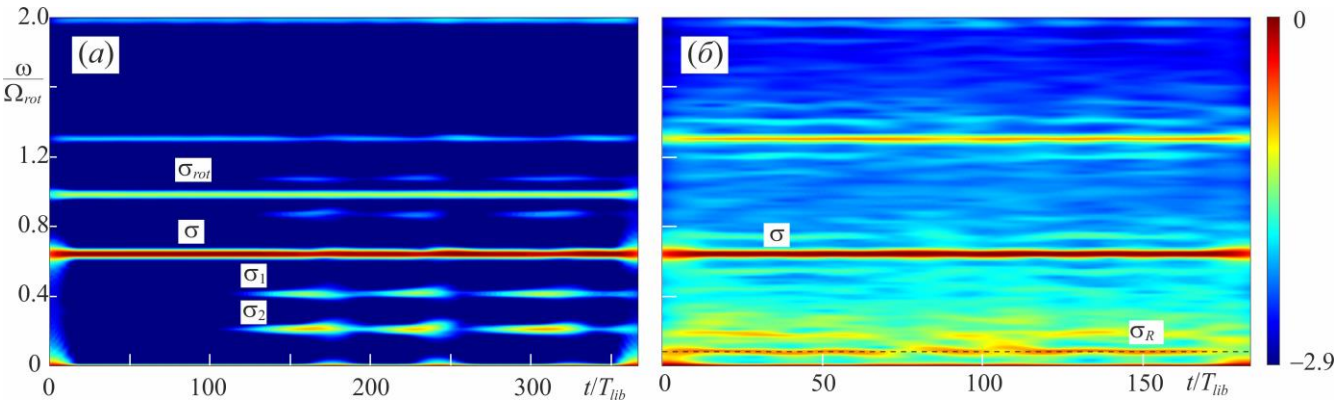


Рисунок 2.47 – Спектрограммы азимутальной скорости при частоте $\sigma = 0.66$ и амплитудах $\varepsilon = 0.012$, $\mathrm{E} = 4.7 \cdot 10^{-5}$ (*а*) и $\varepsilon = 0.06$, $\mathrm{E} = 3.5 \cdot 10^{-5}$ (*б*)

С увеличением амплитуды либраций спектр азимутальной скорости становится более сложным (рис. 2.47*б*). Появляются дополнительные субгармоники, спектральная плотность которых сопоставима с σ_1 и σ_2. Значения этих частот не постоянны в течение эксперимента – их величина может как увеличиваться, так и уменьшаться; кроме того, в некоторые моменты времени отдельные субгармоники могут сильно затухать. На фоне хорошо различимых дискретных компонент спектра также наблюдается слабый непрерывный фон. Наиболее ярко в спектре выглядит новая низкочастотная составляющая $\sigma_R = 0.07$. Её высокочастотная пара $\sigma_{R1} = 0.59$ лежит немного ниже гармоники с фундаментальной частотой $\sigma = 0.66$ и обладает существенно меньшей интенсивностью. Следует отметить, что с увеличением амплитуды либраций артефакт на частоте $\omega / \Omega_{rot} = 1$ исчезает. Это связано с тем, что амплитуда вносимых возмущений существенно превышает вклад паразитных гармоник. Отметим, что спектры также содержат кратные гармоники 2σ, которые не вносят вклад в среднее движение жидкости. По данным, полученным в азимутальном сечении (аксиальный вид), можно сделать вывод, что первичные и вторичные волны удовлетворяют временным условиям триадного резонанса $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$, а также пространственным условиям $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ для ради-

альной и азимутальной компонент волнового вектора. Поскольку используется неподвижная в лабораторной системе отсчета камера, проверка пространственных условий триадного резонанса для компонент волнового поля, наблюдаемых сбоку, проблематична по чисто техническим причинам.

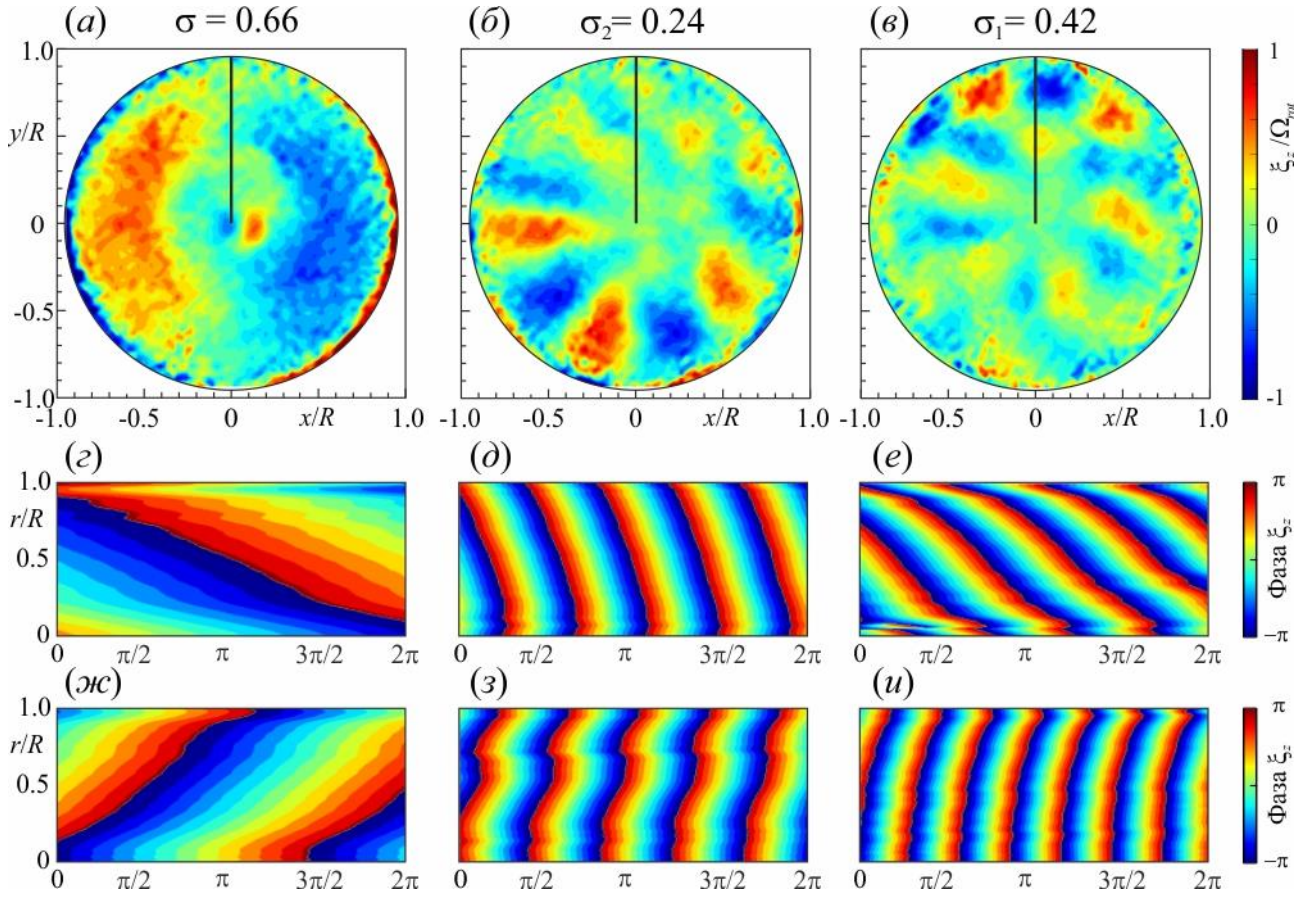


Рисунок 2.48 – Поля мгновенной завихренности в проекции на ось *z*, отфильтрованные на фундаментальной частоте $\sigma = 0.66$ (*а*) и субгармониках $\sigma_2 = 0.24$ (*б*) и $\sigma_1 = 0.42$ (*в*) для момента времени $t / T_{lib} = 160$ при $\varepsilon = 0.012$, $\mathrm{E} = 4.7 \cdot 10^{-5}$; направление вращения полости по часовой стрелке. В рядах (*г–е*), (*ж–и*) показаны фазовые диаграммы, интерполированные на плоскость $(\varphi, r / R)$ при помощи преобразования Гильберта в пространстве для выбранных направлений *m* и числа *k*, которые удовлетворяют условию триадного резонанса: (*г*) $m > 0$, $k = 1$, (*д*) $m > 0$, $k = 5$, (*е*) $m < 0$, $k = -4$; (*ж*) $m > 0$, $k = -2$, (*з*) $m < 0$, $k = 5$, (*и*) $m > 0$, $k = -7$

На рис. 2.48 показаны поля завихренности ξ_z / Ω_{rot} в поперечном сечении $z / L = 0.45$, отфильтрованные на фундаментальной частоте 0.66 (рис. 2.48*а*) и двух субгармонических частотах $\sigma_2 = 0.24$ и $\sigma_1 = 0.42$ (рис. 2.48*б* и *в*, соответ-

ственно) при помощи преобразования Гильберта [198]. Общее видимое вращение отфильтрованных волн на частотах $\sigma = 0.66$ и $\sigma_1 = 0.42$ является антициклоническим. Для исследования направления распространения волны и волновых чисел данные интерполируются на прямоугольную область в плоскости $(\varphi, r/R)$, где положение $\varphi = 0$ показано вертикальной черной линией; положительное направление φ по часовой стрелке. Далее к преобразованным данным применяется фильтрация Гильберта по пространству. Сначала проверяются четыре возможные комбинации для азимутального и радиального «направлений» волнового вектора для $\sigma = 0.66$: $k > 0,\ m > 0;\ k < 0,\ m > 0;\ k > 0,\ m < 0;\ k < 0,\ m < 0$. В результате только два варианта дают волны значительной амплитуды: $k > 0,\ m > 0$ и $k < 0,\ m > 0$ с азимутальным волновым числом $k = 1$ в положительном направлении φ и в отрицательном направлении $k = -2$. Фазовые диаграммы для этих случаев представлены на рис. 2.48*г* и *ж*, соответственно. Та же процедура может быть применена и к двум другим субгармоническим частотам. Отметим, что фазовая диаграмма содержит информацию о знаке радиальной составляющей волнового вектора m и знаке азимутального волнового числа k (положительное направление – от красного к синему). При применении фильтрации в пространстве выявляется только волна определенного направления.

Тем не менее результаты получаются неоднозначными, поскольку на первый взгляд волны с разными волновыми числами удовлетворяют пространственному условию триадного резонанса (рис. 2.48*д*, *е* и *з*, *и*). Далее данные фильтруются при помощи преобразования Фурье по азимутальному волновому числу k, показанному на рис. 2.49 для трех частот. Спектр нормирован на свое максимальное значение за пределами $k = 0$. Результаты для $\sigma_2 = 0.24$ оказались наиболее достоверными, поскольку имеют только один пик при $k = 5$ как для положительного, так и для отрицательного направления m. Фазовые диаграммы для $\sigma_2 = 0.24$ показаны на Рис. 2.48*д* для $m > 0$ и Рис. 2.48*з* для $m < 0$. Чтобы найти волновые числа, удовлетворяющие условиям триадного резонанса, необходимо рассмотреть отрицательные волновые числа для частоты $\sigma_1 = 0.42$. Фазовые диаграммы для

$k = -4$ и -7 показаны на рис. 2.48*e*, *u*. Таким образом, существуют две возможные комбинации волн, которые удовлетворяют условиям триадного резонанса в терминах частот и азимутальных волновых чисел. Из фазовых диаграмм следует, что соответствующие радиальные волновые числа также будут удовлетворять условию для триад (см. вставку на рис. 2.49).

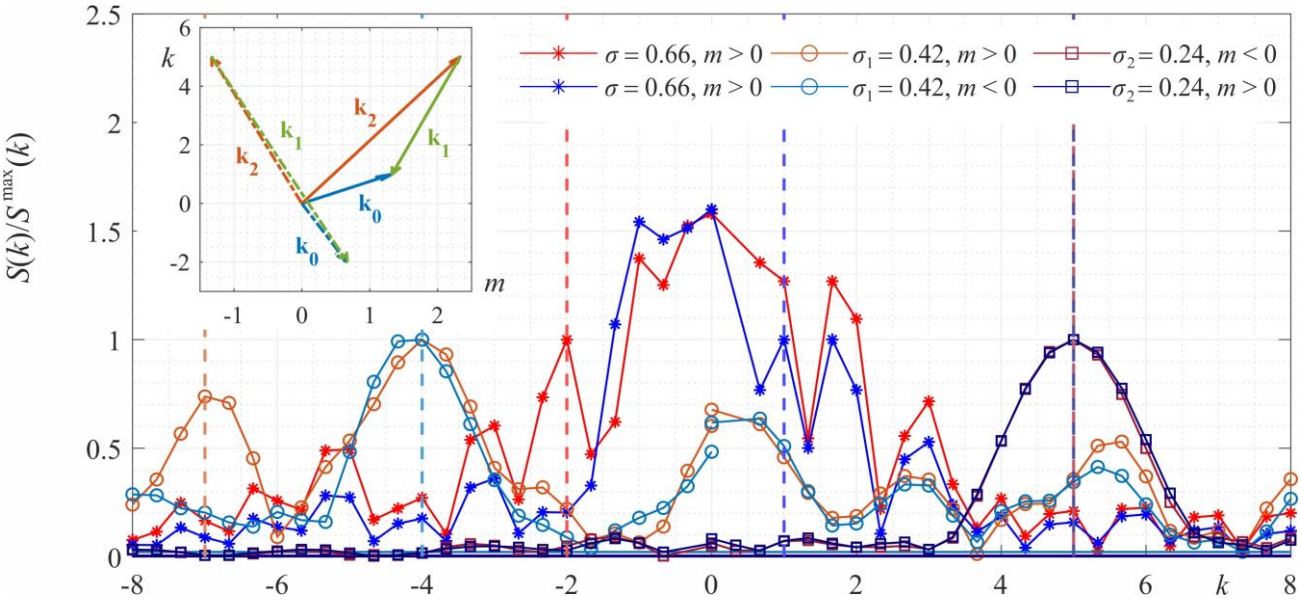


Рисунок 2.49 – Азимутальный спектр Фурье для волн на основной и двух субгармонических частотах при $t / T_{lib} = 160$; вертикальные линии соответствуют потенциально возможным собственным значениям азимутальных волновых чисел инерционных мод. Фрагмент в левом верхнем углу показывает волновые векторы на плоскости радиальных и азимутальных волновых чисел; $\varepsilon = 0.012$, $\mathrm{E} = 4.7 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2.6 – Собственные значения невязких неосесимметричных инерционных мод в цилиндре с аспектным соотношением a = 0.34 и $|k| > 1$

n	m	k	σ_{theory}
1	1	5	0.246
2	2	-4	0.394
3	3	-5	0.412
2	1	-6	0.432
3	2	-7	0.432
3	2	-8	0.398

Используя формулу (2.10), можно подобрать собственные значения невязких инерционных мод, соответствующих значениям субгармоник σ_1 и σ_2. Расчёты показывают, что частоте $\sigma_2 = 0.24$ соответствует инерционная мода $\mathrm{M}(1,1,5)$. Для частоты σ_1 можно подобрать несколько инерционных мод с различными азимутальными волновыми числами (табл. 2.6). Тем не менее для пространственного условия триадного резонанса наиболее подходящей является мода $\mathrm{M}(2,2,-4)$. В этом случае для азимутального, осевого и радиального волновых чисел выполняются следующие соотношения: $k_1^f = k_{-4}^s + k_5^s$, $n_1^f = n_2^s - n_1^s$, $m_1^f = m_2^s - m_1^s$ (индексы *f* и *s* относятся к основной гармонике и субгармоникам триадного резонанса соответственно). К сожалению, из-за сильного азимутального течения используемая методика не позволяет однозначно идентифицировать осевое и радиальное волновые числа. Хорошее согласие эксперимента с расчетом значений собственных частот σ_1^* и σ_2^* говорит о правильной интерпретации результатов. Также следует отметить, что радиальное волновое число *m* на рис. 2.48 является действительным числом и округляется до целого числа для сравнения с теоретическими значениями (табл. 2.6).

2.3.4.5. Осреднённые течения, генерируемые инерционными модами

На рис. 2.50*а* показана структура течения, осреднённого на частоте $\sigma = 0$ в нелинейном режиме моды $\mathrm{M}(1,1,1)$. В отличие от A(1,1) неустойчивость сопровождается возникновением периодической системы двухмерных валов. На первый взгляд наиболее отчетливо проявляется режим со средним азимутальным волновым числом $k_T = 6$. Однако на самом деле в осреднённом за период либраций поле скорости содержатся как опережающе, так и отстающе распространяющиеся вихри (рис. 2.50*б*). Опережающее движение с $k_T = 5$ существует в области $90 < \varphi < 360$ градусов, а отстающее – в области $0 < \varphi < 90$ градусов. Последнее движение и идентифицируется как шестой вихрь. Из рис. 2.39 видно, что на частоте $\sigma = 0.66$ в режиме инерционной моды M(1,1,1) глобальное дифференциаль-

ное вращение $\langle \Delta\Omega \rangle_\varphi$ является отстающим. Несмотря на это валы вращаются в обоих азимутальных направлениях. Важно отметить, что с течением времени интенсивность вихревого движения не постоянна. Наиболее ярко неустойчивость проявляется в моменты возникновения субгармоник в спектре азимутальной скорости (рис. 2.47*а*). При уменьшении интенсивности вихри не затухают полностью, а их фазовая скорость сохраняет постоянное значение. Кроме того, значения волновых чисел осреднённого течения k_T и субгармоник инерционных мод k близки. Это указывает на то, что неустойчивость триадного резонанса является определяющим механизмом в генерации двухмерных вихрей.

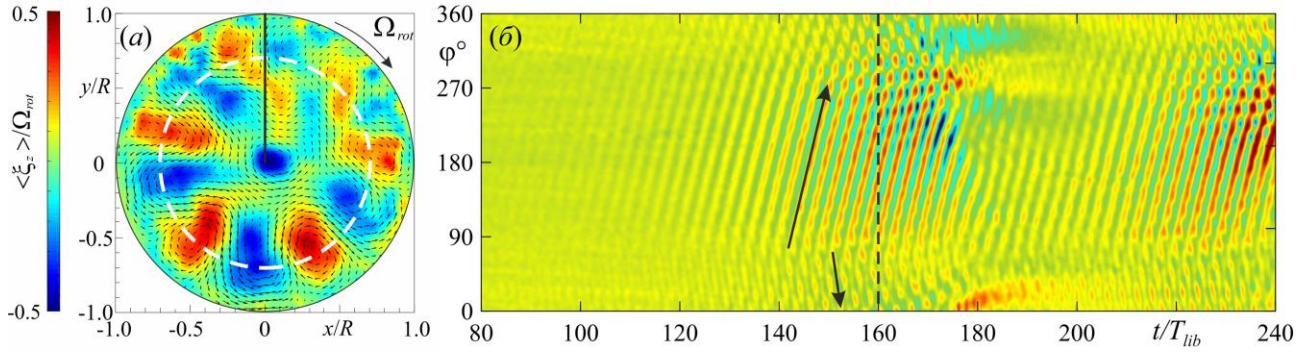


Рисунок 2.50 – Осреднённые за период либраций T_{lib} поля скорости (стрелки) и завихренности (цвет) в момент времени $t/T_{lib}=160$, при $\sigma=0.66$ и $\varepsilon=0.012$ (*а*). Временная зависимость скользящего среднего завихренности (*б*) вдоль белого кольца на фрагменте (*а*) с шагом по времени между окнами $\Delta t/T_{lib}=0.18$; временная шкала соответствует спектрограмме на рис. 2.47*а*

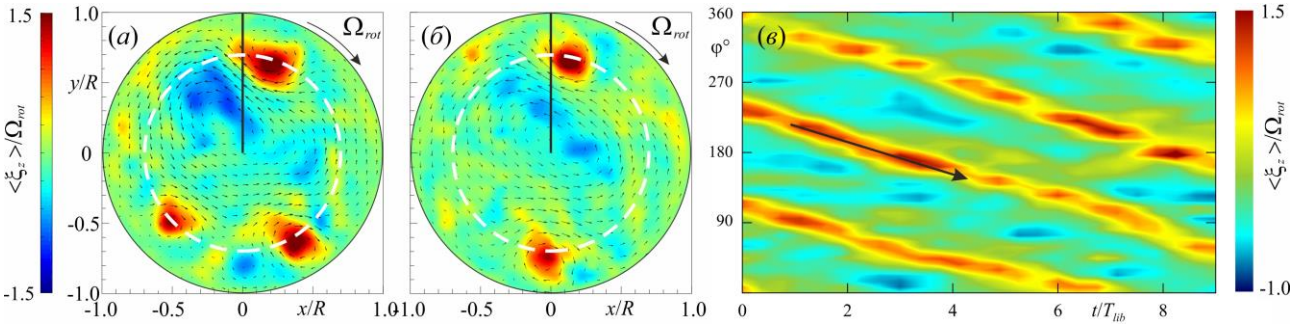


Рисунок 2.51 – Осреднённые поля скорости при $\sigma=0.66$ и амплитудах $\varepsilon=0.04$ (*а*) и $\varepsilon=0.06$ (*б*). Зависимость от времени осреднённой завихренности (*в*) вдоль белого кольца на фрагменте (*а*)

Анализируя рис. 2.50*б*, визуально можно оценить частоту появления осреднённых вихрей вдоль фиксированного радиального направления, как $\sigma = 0.231$. Это значение хорошо согласуется со второй субгармоникой триадного резонанса $\sigma_2 = 0.23$ на рис. 2.47*а*. Так как σ_2 соответствует опережающей волне, можно предположить, что именно она вносит определяющий вклад в структуру надкритического течения. Вблизи углового положения $\varphi = 0$ на временной диаграмме завихренности (рис. 2.50*б*) можно заметить «следы» ретроградно вращающихся вихрей с частотой $\sigma = 0.429$. Данная частота, в свою очередь, близка к значению первой субгармоники триадного резонанса $\sigma_1 = 0.43$. Таким образом, в целом осреднённая динамика системы аналогична той, что была описана для аттрактора в слабонелинейном режиме.

Как было отмечено ранее, с увеличением амплитуды либраций при фиксированном значении частоты $\sigma = 0.66$ динамика системы усложняется. Это сопровождается появлением низкочастотной гармоники в спектрограмме $\sigma_R = 0.07$ (рис. 2.47*б*). Осреднение азимутального поля скорости по периоду либраций в данном режиме также даёт интересный результат. На смену системе опережающе вращающихся вихрей приходят циклонические вихри, совершающие отстающее азимутальное вращение (рис. 2.51*а, б*). В диапазоне амплитуд $\varepsilon = 0.02 - 0.07$ количество вихрей k_R меняется от 5 до 2. Наблюдения за временной динамикой показывают, что угловая скорость вихрей постоянная (рис. 2.51*в*). В некоторые моменты времени при фиксированном значении ε волновое число k_R может меняться на единицу. Например, наблюдаются переходы между волновыми числами 2 и 3 или 3 и 4. Конечно же, такие перестройки сопровождаются изменением фазовой скорости вихревой системы. Для амплитуды $\varepsilon = 0.06$ можно также оценить частоту возникновения вихрей как $\sigma = 0.094$, значение которой близко к низкочастотной субгармонике в спектре азимутального течения.

На рис. 2.52 показана зависимость угловой скорости вихревой системы $\Delta\Omega_T / \Omega_{rot}$ от амплитуды либраций. При $\varepsilon < 0.018$ угловая скорость, как и азимутальное волновое число k_T, не меняются. Все экспериментальные точки могут

быть описаны законом $\sigma / k_T = \Delta\Omega_T / \Omega_{rot} = 0.046 \pm 0.001$. При $\varepsilon > 0.018$ происходит пороговый переход к ретроградно вращающейся системе циклонических вихрей. Можно заметить, что с ростом ε скорость азимутального дрейфа $|\Delta\Omega_R| / \Omega_{rot}$ вихрей также увеличивается. Причем более длинные волны распространяются быстрее. Отметим, что для волновых чисел $k_R = 2$ разброс экспериментальных точек по оси ординат достаточно велик. Можно предположить, что обнаруженные изменения скорости связаны с перестройкой среднего течения вдоль оси вращения.

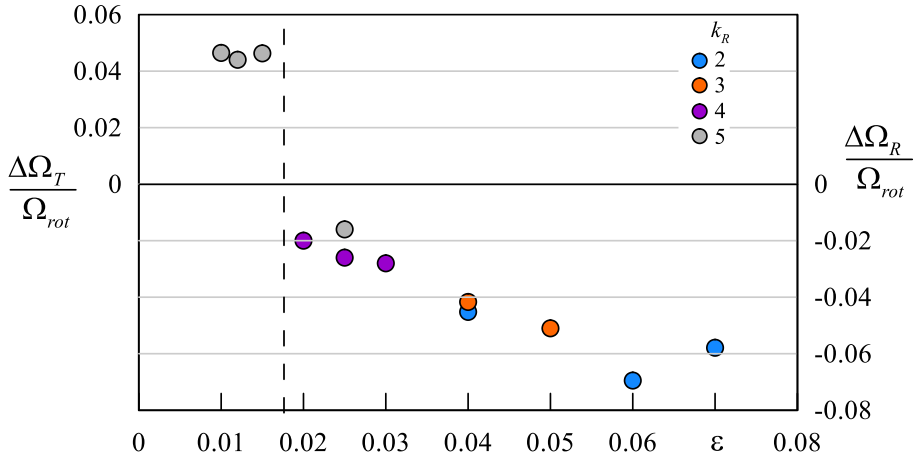


Рисунок 2.52 – Угловая скорость дрейфа системы вихрей в зависимости от ε. Цвета символов соответствуют различным азимутальным волновым числам. Опережающие вихри в слабонелинейном режиме относятся к левой оси $\Delta\Omega_T / \Omega_{rot}$, в то время как отстающе вращающиеся вихри в сильно нелинейном режиме относятся к правой оси $\Delta\Omega_R / \Omega_{rot}$

Аналогичная надкритическая динамика жидкости наблюдается во вращающемся кольцевом слое с наклонным дном [А3], см. Главу 3. Однако, в отличие от данной задачи, глубина полости изменялась с радиальной координатой, а возмущения вносились в систему прецессирующим диском, расположенным вблизи одного из торцов системы. В слабонелинейном режиме также образуется осреднённый вихревой кластер. Кластер вращался в направлении, противоположном глобальному вращению. По мере увеличения амплитуды прецессии система переходила в режим с дисперсионным соотношением $\upsilon_\varphi \sim -k_R^{-2}$. Этот переход интерпре-

тируется как возникновение волн типа Россби, которые сопровождаются появлением низкочастотной компоненты в азимутальном спектре скорости. Другим примером такого перехода к волнам Россби является вращающийся сферический слой с колеблющимся внутренним ядром [A15]. Таким образом, эти волны в лабораторных экспериментах фактически моделируются с помощью эквивалентного топографического бета-эффекта, когда глубина полости изменяется с расстоянием от оси вращения. Особенность конфигурации цилиндра с параллельными торцами заключается в том, что «осевая глубина» – т.е. расстояние между наклонной вершиной и наклонным дном в каждом радиальном и азимутальном положении экваториальной плоскости цилиндра, одинакова: длина $L = \text{const}$. Это подразумевает, что топографический бета-эффект отсутствует, поэтому возникновение волн типа Россби в данной геометрии является спорным вопросом. Последние «живут» на градиенте фоновой потенциальной завихренности $\Pi \equiv 2\Omega_{rot} / L = \text{const}$, градиент которой исчезает $\beta = \nabla\Pi = 0$. Обсудим возможные механизмы формирования осреднённых вихрей при отсутствии прямого бета-эффекта.

i) Случай, если вихри имеют небольшой наклон к оси вращения и совершают трехмерное движение, которое включает угловые колебания. Тогда существует потенциальная возможность изменения эффективной длины вихря с радиальным расстоянием от оси вращения.

ii) Сложное взаимодействие эффекта изменения наклона стенки как функция азимутальной координаты. Действительно, мы имеем ситуацию, когда вдоль разных азимутальных направлений наклон бета-плоскости различен. Под действием сильного либрационного воздействия частицы жидкости будут существенно смещаться по азимуту, что приведет к изменению завихренности. Этот эффект усиливается ретроградным средним дифференциальным вращением жидкости. По сути, этот эффект эквивалентен меридиональной неоднородности параметра Кориолиса, что характерно для атмосферы и океана, где широко распространены планетарные волны Россби.

iii) Наблюдаемая картина может быть также проявлением специфической неустойчивости зонального течения, которое имеет весьма своеобразное радиаль-

ное распределение угловой скорости именно в случае M(1,1,1), как это можно видеть на рис. 2.39. Существует литература по исследованиям, которые рассматривают бета-эффект в сочетании с эффектом радиального сдвига скорости зонального потока, например [237]. Значительный сдвиг с ненулевой второй производной по радиальной координате, который появляется в последних скобках в уравнении (1) работы [237] может способствовать формированию наблюдаемых закономерностей. Поскольку радиальное распределение среднего потока заранее неизвестно, трудно адаптировать существующие теории к нашим экспериментальным данным. Потенциально могут иметь место все сценарии, включающие и неустойчивость зонального течения при отсутствии бета-эффекта, что обсуждалось, например, в [43]. При отсутствии полной информации о трехмерной структуре течения идентификация точного механизма выходит за рамки данной работы.

2.4. Основные выводы по главе

Экспериментально исследовано движение жидкости в цилиндрической полости, скорость вращения которой периодически меняется по закону $\sim \varepsilon \sin\left(\Omega_{lib} t\right)$ (либрации). Показано, что динамика системы во многом определяется геометрией торцевых стенок. Первоначально рассмотрен классический случай прямого цилиндра. В отсутствие инерционных волн осциллирующее движение жидкости в пограничных слоях Экмана на торцах приводит к возникновению осреднённого азимутального течения. Интенсивность и направление этого течения зависят от безразмерной частоты либраций $\sigma = \Omega_{lib} / \Omega_{rot}$. Так, при $\sigma < 8$ жидкость совершает отстающее дифференциальное вращение, которое при $\sigma > 8$ меняется на опережающее, что хорошо согласуется с известными теоретическими результатами [146, 147] и вычислительными данными [90]. Обнаружено, что наряду с осреднённым азимутальным течением вблизи мест соединения боковой и торцевых стенок полости генерируются осреднённые угловые потоки, скорость которых пропорциональна квадрату амплитуды либраций ε^2.

Впервые обнаружено, что наличие инерционных волн в диапазоне частот $0 < \sigma < 2$ качественно меняет двумерный характер осреднённого течения вблизи

боковой стенки полости. Осциллирующее движение жидкости, возбуждаемое при отражении инерционной волны от боковой стенки, либо резонансное возбуждение осесимметричной инерционной моды $\mathrm{M}(n,m,0)$ приводит к формированию системы осреднённых тороидальных вихрей. Эффект хорошо подтверждается распределением тяжелых частиц на боковой стенке полости в виде однородных по азимуту кольцевых структур. Положение колец сильно зависит от частоты либраций σ. Скорость осреднённого течения в торах немонотонным образом зависит от σ, испытывая серию экстремумов, соответствующих резонансному возбуждению той или иной моды. Обнаружено, что появление меридиональной циркуляции в свою очередь влияет на структуру осреднённого зонального течения: профиль угловой скорости сильно меняется вдоль осевой координаты, где появляются чередующиеся области отстающего и опережающего дифференциального вращения жидкости.

Показано, что структура осреднённого течения при фиксированном значении σ сильно зависит от безразмерной частоты колебаний жидкости $\tilde{\omega} = \Omega_{lib} R^2 / \nu$, определяющей квадрат отношения размера полости к толщине динамического слоя на боковой стенке. Так, в случае высоких $\tilde{\omega}$ количество осреднённых вихрей определяется соотношением $n+2$. Дополнительная пара вихрей обусловлена наличием углового течения. Поперечный размер вихрей ограничивается несколькими толщинами динамического пограничного слоя, а осевой размер сопоставим с размером осциллирующих вихрей. В высокочастотном пределе независимо от номера инерционной моды скорость течения не зависит от $\tilde{\omega}$ и полностью определяется параметром $V\mathrm{E}^{1/2} = < u_z^m > \mathrm{E}^{1/2} / \Omega_{rot} R\varepsilon^2$. С уменьшением безразмерной частоты толщина пограничных слоев увеличивается, что приводит к трансформации структуры осреднённого течения. В случае моды $\mathrm{M}(6,1,0)$ вихревые структуры, наиболее отдаленные от торцов полости, не чувствуют угловые течения. Вследствие этого скорость осреднённого движения жидкости в этих вихрях определяется только амплитудой пульсационного течения в объеме полости.

Показано, что в диапазоне чисел Экмана $\mathrm{E} = 6 \cdot \left(10^{-4} - 10^{-3}\right)$ скорость осреднённой меридиональной циркуляции $< u_z^m > / \Delta\varphi\Omega_{lib} R \sim \tilde{\omega}$.

Экспериментально исследованы эффекты фокусировки инерционных волн на замкнутую траекторию в виде волнового аттрактора. Для этой цели геометрия торцевых стенок цилиндра была модифицирована. Рассмотрены варианты с параллельным (PS) и антипараллельным (APS) наклоном противоположных торцов на угол α, а также торцы в виде конусов (CE) и диаметральный наклон только одного торца (OSE). При этом важнейшей задачей является определение пространственной структуры аттрактора. В осесимметричной постановке (конические торцы) для предсказания эффектов фокусировки можно пользоваться известным дисперсионным соотношением между направлением распространения волны и её частотой, $\theta = \arcsin\left(\sigma / 2\right)$. В неосесимметричном случае необходимо принимать внимание закон отражения Филлипса [82]. Угол θ при этом также сохраняется, но из-за сложной формы торцов пути волновых лучей вдоль азимута являются несимметричными (2.26). Результаты экспериментов дополнительно сравниваются с предсказаниями 2D лучевой теории для фиксированного осевого сечения. Очевидно, что в CE случае пути всех волновых лучей являются симметричными, поэтому азимутальная структура аттрактора является осесимметричной – в поперечном сечении мгновенная завихренность представлена системой вложенных колец. В случаях PS, APS и OSE азимутальное течение качественно отличается. При OSE наблюдается структура, которая сильно напоминает (1,1) аттрактор внутренних волн в трапецеидальной полости [8]. Однако полной фокусировки, как будто бы, не происходит – в осевом сечении волны не образуют замкнутую траекторию, что, вероятно, связано с более сложной трёхмерной траекторией волновых лучей. При PS и APS фокусировка волн в осевом сечении визуально проявляется более ярко, ясно идентифицируется замкнутая траектория. Плоскость аттрактора лежит вблизи направления диаметрального наклона торцов, что соответствует так называемому «супер-аттрактору», возможность которого теоретически обсуждалась в [63] и [64]. Таким образом, геометрия торцов является удоб-

ным инструментом для управления пространственным положением и формой сфокусированного отражения инерционных волн. Кроме того, обнаружен новый ранее не предсказанный режим, также характеризующийся локализацией волновой энергии вдоль замкнутой траектории, связанный с симметрией распространения волновых лучей в полости. В данном режиме получены зависимости ширины и скорости сдвиговых слоев в волне от числа Экмана; показано, что ширина слоя масштабируется как $s_C \sim \mathrm{E}^{1/5}$, что хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями [94] и численными результатами [97]. В свою очередь, с увеличением s_C величина инерционного отклика жидкости уменьшается по закону $\sim \varepsilon \mathrm{E}^{-2/5}$.

Обнаружено, что диаметральный наклон торцевых стенок обеспечивает существование неосесимметричных инерционных мод с $|k| > 0$, при этом наиболее сильный инерционный отклик связан с модами $\mathrm{M}(1,1,1)$ и $\mathrm{M}(2,1,1)$. Важно отметить, что в случае PS геометрия полости способна поддерживать инерционные моды только с нечетными осевыми волновыми числами, $n = 1, 3, \ldots$, а в случае APS – с чётными $n = 2, 4, \ldots$.

Независимо от режима пульсационного течения, инерционные волны генерируют неосесимметричное осреднённое по времени азимутальное течение. Структура течения представляет собой систему стационарных двухмерных валов, радиальное и азимутальное положение которых зависит от координаты места отражения волны на наклонных стенках. Показано, что максимальная скорость жидкости в валах обратно пропорциональна числу Экмана $\Delta u^{\max} / \Omega_{rot} R\varepsilon^2 \sim \mathrm{E}^{-1}$. Дополнительное осреднение течения по азимутальной координате позволяет вычислить глобальную зональную циркуляцию $\langle \Delta\Omega \rangle_\varphi / \Omega_{rot}\varepsilon^2$, которая может быть как опережающей, так и отстающей. Показано, что направление зонального течения определяется направлением распространения фазы инерционной волны вблизи наклонных стенок.

Наконец, экспериментально исследовано влияние инерционно-волновых режимов, таких как аттрактор и инерционная мода, на устойчивость осреднённого

зонального течения. С увеличением амплитуды либраций в спектре проявляются пары новых гармоник, частотное соотношение которых удовлетворяет условию триадного резонанса. Обнаружено, что в нелинейном волновом режиме происходит разрушение осреднённого азимутального течения. В пороге это визуально воспринимается как периодическая деформация основных вихрей с частотой, отличной от фундаментальной частоты. Устойчивость течения в режиме аттрактора и инерционной моды определяется различными безразмерными комплексами. Так, в случае аттрактора основным критерием является пульсационное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_p = \varepsilon \mathrm{E}^{-1}$. В случае инерционной моды определяющим является комплекс $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_p \cdot \mathrm{E}^{1/4}$. Показано, что различие заключается в механизме первоначальной дестабилизации течения. Нелинейные режимы аттрактора зарождаются в местах фокусировочного отражения от границ – в динамических пограничных слоях – и далее диффундируют в объем жидкости. Этот результат подтверждается численными исследованиями нелинейных режимов аттракторов в прецессирующем/либрирующем кубе [227]. В случае инерционной моды основная мода распадается на пару свободных инерционных мод, поэтому неустойчивость зарождается в объеме жидкости.

Детально исследована временная надкритическая динамика жидкости в азимутальном сечении. В слабонелинейном режиме аттрактора идентифицируется одновременное существование двух систем осреднённых двухмерных вихрей, распространяющихся в противоположных направлениях с разными временными масштабами. Частоты появления структур хорошо согласуются с частотами субгармоник триадного резонанса. Это указывает на то, что каждая субгармоника является генератором осреднённых валов. В области больших амплитуд либраций в полости формируется когерентная структура в виде антициклонического «глаза». В данном случае на фоне достаточно интенсивных колебаний в полости поддерживается глобальное, медленно дрейфующее вихревое течение. При дальнейшем повышении амплитуды либраций в полости регулярно появляются новые центры завихренности, которые объединяются в вихревые пары. Неустойчивость триад-

ного резонанса инерционной моды также сопровождается генерацией азимутально-периодической системы валов. При этом в сильно нелинейном режиме пороговым образом генерируется отстающе вращающаяся система циклонов, локализованных вблизи боковой стенки полости.

Сравнение данных экспериментов с результатами по исследованию нелинейной динамики инерционных волн в других постановках показывает наличие большого числа схожих эффектов, таких как триадный резонанс, генерация среднего течения, появление осреднённого вихревого кластера [117, А3, А15]. Наличие наклонных границ, совершающих либрации, дает новую специфику. Прежде всего, нужно отметить, что в большинстве работ, где используется либрационное воздействие [31, 42, 43, 100, 148], движение жидкости возбуждается посредством вязких пограничных слоев. При неосесимметричном расположении торцов помимо вязких сил движение индуцируется толчками границы. Таким образом, в настоящей постановке энергия, закачиваемая в систему, гораздо больше благодаря созданию дополнительного давления при азимутальном движении границы. Это позволяет исследовать динамику жидкости в сильно нелинейных режимах. Примером является регулярная генерация осреднённых вихрей в нелинейном режиме аттрактора. Результаты работы важны для понимания механизмов генерации течений в геофизических системах при наличии развитой волновой турбулентности.

ГЛАВА 3. АТТРАКТОРЫ ИНЕРЦИОННЫХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КОЛЬЦЕВОМ СЛОЕ С КОНИЧЕСКИМ ТОРЦОМ

В данной главе представлены результаты экспериментального исследования течений, возбуждаемых инерционными волнами во вращающемся кольцевом слое с осевым сечением в виде прямоугольной трапеции. С геометрической точки зрения постановка задачи эквивалентна работе [117], в которой жидкость ограничена двумя коаксиальными цилиндрами, коническим дном и подвижным диском, расположенным с противоположной стороны (рис. 3.1). Тем не менее, способ возбуждения колебаний жидкости принципиально отличается, что в итоге даёт свою специфику. С одной стороны, форма полости при соответствующем выборе диапазона частот воздействия (см. (2.23)) поддерживает инерционно-волновой аттрактор в каждом «меридиональном» осевом сечении. С другой стороны, изменение глубины полости с радиальной координатой обеспечивает существование топографического бета-эффекта. При соответствующей амплитуде вносимых возмущений он допускает существование волн Россби [см., например, 237, 238]. В отличие от [117] закачка энергии осуществляется при помощи плоского прецессирующего кольцевого диска, приводимого в движение перпендикулярно расположенным рычагом. Рычаг совершает прецессионное движение от эксцентрика, вращающегося на валу двигателя, тем самым возбуждая азимутальную моду ± 1 (знак отвечает за направление движения края диска по отношению к глобальному вращению). Данный тип воздействия представляет большой интерес с геофизической точки зрения из-за его соответствия возмущениям приливного типа (движение поверхности около амфидромической точки) и ранее уже использовался в ряде работ [84, 119, 239]. В контексте данной работы прецессия представляет особый интерес из-за возможности *i*) исследования триадных резонансных взаимодействий, ранее выявленных при прямом численном моделировании [118], *ii*) генерации зонального течения, *iii*) физических параллелей с круговыми колебаниями сферического ядра во вращающейся сферической полости (Глава 4) и потенциальной возможности возникновения волн Россби, *iv*) реализации нетривиаль-

ных насыщенных режимов волновой турбулентности, развивающихся при последовательном увеличении амплитуды прецессии [117].

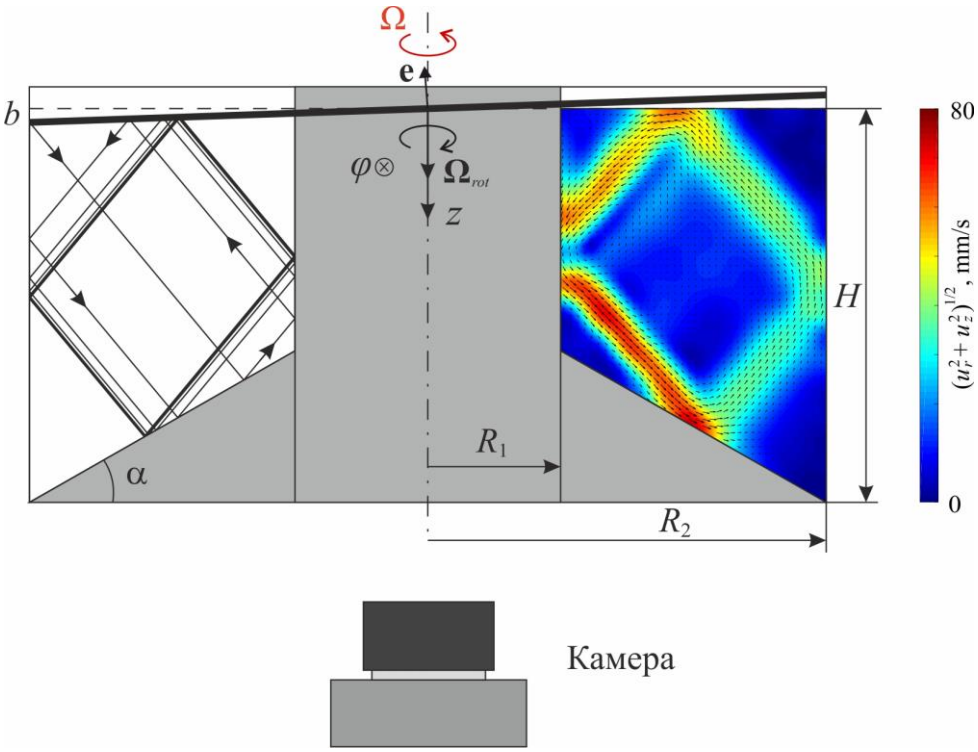


Рисунок 3.1 – Схематическое изображение кюветы (вид сбоку). Слева показана волновая картина, дающая в предельном цикле аттрактор A(1,1), справа – мгновенное поле при безразмерной частоте n = – 1.27

Обнаружено, что при относительно низкой интенсивности волн генерируется зональное течение в виде осесимметричного кольца, радиус которого совпадает с радиальным положением точки фокусировочного отражения от конической стенки. По мере увеличения амплитуды воздействия наблюдается серия нелинейных режимов, которая начинается с яркого возникновения триадного резонанса. Далее частотный спектр постепенно обогащается появлением дополнительных дискретных компонент и достигает состояния «перегретой» волновой турбулентности со значительным непрерывным фоном частотного спектра и четко отделяемыми низкочастотными компонентами. Наконец, при больших амплитудах низкочастотная компонента становится доминирующей, а непрерывный фон спектра резко исчезает. Низкочастотная компонента в спектре полностью соответствует азимутально-периодической структуре, идентифицированной как волны Россби. Результаты опубликованы в работе [А3].

3.1. Экспериментальная установка и методика

Эксперименты проводятся в кольцевом слое с радиусами $R_1 = 19$ мм и $R_2 = 57$ мм (рис. 3.1). Один из торцов полости ограничен усеченным конусом, образующая которого наклонена под углом 30° к основанию конуса. Вблизи второго прямого торца расположен плоский металлический кольцевой диск, который служит генератором инерционных волн. Полная глубина полости составляет $H = 57$ мм. Кювета заполнена водным раствором глицерина с кинематической вязкостью ν и вращается с постоянной угловой скоростью Ω_{rot}, при этом диск совершает прецессионные колебания с угловой частотой Ω (во вращающейся системе отсчёта) и амплитудой b. Частота колебаний Ω соответствует условию фокусировки инерционных волн в аттрактор A(1,1).

На рис. 3.2 приведена подробная кинематическая схема всей экспериментальной установки. Кювета закреплена в шарикоподшипниках вертикальных металлических опор и вращается вокруг горизонтальной оси. Внешние стенки кюветы изготовлены из прозрачного плексигласа, при этом для обеспечения наблюдений вдоль оси вращения в качестве одной опоры фланца выступает подшипник большого внутреннего диаметра. Для минимизации оптических искажений со стороны боковой поверхности кювета помещена в плексигласовый параллелепипед, заполненный рабочей жидкостью. Показатель преломления оргстекла равен $\tilde{n}_1 = 1.49$, тогда как показатель преломления рабочей жидкости (≈ 40% массовой концентрации глицерина в воде) составляет около $\tilde{n}_2 = 1.42$. Поскольку толщина стенки внешнего цилиндра составляет 3 мм, а разность показателей преломления мала, параллельное смещение световых лучей при наблюдении сбоку составляет десятые доли миллиметра. Это говорит о том, что при расчете полей скоростей оптические искажения можно не учитывать. Таким образом, конструкция экспериментальной установки, как и в предыдущей главе, предусматривает возможность изучения структуры течения в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Вращение кюветы осуществляется посредством ременной передачи от шагового двигателя *1* FL86STH118-6004A; нестабильность вращения не превышает 0.3% от Ω_{rot}. Генератор волн (диск) соединен с внутренним цилиндром кюветы

при помощи тонкого уплотнительного резинового кольца толщиной 2 мм. Кольцо расположено в специальных канавках, суммарная глубина которых немного меньше диаметра кольца. Внешняя сторона диска соединяется с боковой поверхностью кюветы посредством резиновой мембраны. Внешний край мембраны плотно прижат цилиндрической стенкой к технологическому выступу на фланце кюветы. Описанная конструкция обеспечивает возможность колебаний края диска относительно полости, а также исключает дифференциальное вращение диска. С внешней стороны в ось диска плотно запрессован каленый стержень длиной 200 мм и толщиной 5 мм. Свободный конец стержня соединен с эксцентриком, вращающимся с частотой Ω_{osc} (в лабораторной системе отсчёта) при помощи шагового двигателя *2* FL86STH80-4208A. Отклонение конца стержня от оси вращения кюветы приводит к возникновению кругового движения края диска относительно полости. Для крепления стержня в эксцентрике используется сферический подшипник, который может свободно перемещаться вдоль выфрезерованного Т-паза. Амплитуда колебаний края диска определяется радиальным положением подшипника и меняется в диапазоне $b = 0.2 \div 2.5$ мм. Рассматриваются ситуации опережающих (положительная прецессия) и отстающих (отрицательная прецессия) колебаний. При этом важным параметром задачи является безразмерная частота $n = \Omega / \Omega_{rot}$, где $\Omega = \left(\Omega_{osc} - \Omega_{rot}\right)$ – частота колебаний диска относительно полости. В представленных экспериментах n варьируется произвольно в диапазоне $-1.1 \geq n \geq -1.5$ (отрицательная прецессия) или $n = +1.27$ (положительная прецессия). Отметим, что смысл параметра n полностью эквивалентен σ из предыдущей главы. Размерные значения угловых частот Ω_{osc} и Ω зависят от скорости вращения полости Ω_{rot} и приведены в табл. 3.1. Число Экмана рассчитывается через внешний радиус полости и составляет $\mathrm{E} = \nu / \left(\Omega_{rot} R_2^2\right) = \left(1.5 \div 4.9\right) \cdot 10^{-5}$.

Управление двигателями *1* и *2* осуществляется парой контроллеров SMD-9.0 через USB-порт компьютера. Для повышения точности вращения полости и стержня основной шаг двигателя 1.8° делится драйверами до значения 0.45°. В

качестве генератора сигналов используется двухканальный модуль ЦАП ZET 210 Sigma USB.

Таблица 3.1. Основные обозначения и значения параметров в экспериментах

Параметр	Определение	Значение
R_1	Внутренний радиус полости	19 мм
R_2	Внешний радиус полости	57 мм
H	Максимальная глубина полости	57 мм
α	Наклон торцевой стенки	30°
Ω_{rot}	Угловая скорость вращения	31.4; 62.8 рад/с
Ω_{osc}	Частота прецессии диска в лабораторной системе отсчёта	–15.7 ÷ –3.14; +71.3 рад/с ($\Omega_{rot} = 31.4$ рад/с) –31.4 ÷ –6.28; +142.6 рад/с ($\Omega_{rot} = 62.8$ рад/с)
Ω	Частота прецессии диска относительно полости	–47.1 ÷ –34.5; +39.9 рад/с ($\Omega_{rot} = 31.4$ рад/с) –94.2 ÷ –69.1; +79.8 рад/с ($\Omega_{rot} = 62.8$ рад/с)
$n = \Omega / \Omega_{rot}$	Безразмерная частота прецессии диска	–1.5 ÷ –1.1; +1.27
b	Амплитуда колебаний края диска	0.2 ÷ 2.5 мм
ν	Кинематическая вязкость жидкости	3 ÷ 5 сСт
$\mathrm{E} = \nu / \left(\Omega_{rot} R_2^2\right)$	Число Экмана	$(1.5 \div 4.9) \cdot 10^{-5}$
$\Delta\Omega$	Осреднённая по времени угловая дифференциальная скорость жидкости	
$\langle\Delta\Omega\rangle_\varphi$	Осреднённая по времени и азимуту дифференциальная скорость жидкости	
$\Delta\Omega_T$	Угловая скорость вихревого кластера, ассоциированного с неустойчивостью триадного резонанса	
$\Delta\Omega_R$	Фазовая скорость волн Россби	
k_T, k_R	Азимутальное волновое число осреднённых вихрей	
$\pm k$	Азимутальное волновое число субгармоник	

Эксперимент проводится следующим образом. После установления амплитуды b кювета приводится в быстрое равномерное вращение со скоростью Ω_{rot}. После установления режима твердотельного вращения жидкости включается прецессия с частотой Ω. Момент включения воздействия соответствует моменту времени $t / T_0 = 0$, где $T_0 = 2\pi / \Omega$. Амплитуда колебаний и частота в течение одного эксперимента поддерживаются постоянными. Для изменения параметров

воздействия кювета останавливается, после чего описанная выше процедура повторяется.

3.1.1. Особенности исследования поля скорости

Движение жидкости исследуется PIV-методом. В целом методика аналогична той, что использовалась для цилиндрической полости (Раздел 2.1.1). Видеорегистрация также осуществляется на неподвижную в лабораторной системе отсчёта скоростную камеру Optronis CamRecord CL600x2. При этом для освещения используются два одноваттных непрерывных лазера KLM-532/h-1000 с толщиной ножа 2 мм. Для изучения азимутального поля скорости съёмка ведется со стороны прозрачного торца с частотой 360 кадров/с и разрешением 800×800 пикселей. Время экспозиции во всех экспериментах составляет 0.3 мс, чего достаточно для получения четких изображений частиц-трассеров в каждом кадре. Для перехода во вращающуюся систему отсчёта вся последовательность кадров поворачивается относительно оси вращения до полного совмещения углового положения. Кросскорреляционная обработка поля скорости осуществляется в программе PIVlab [65].

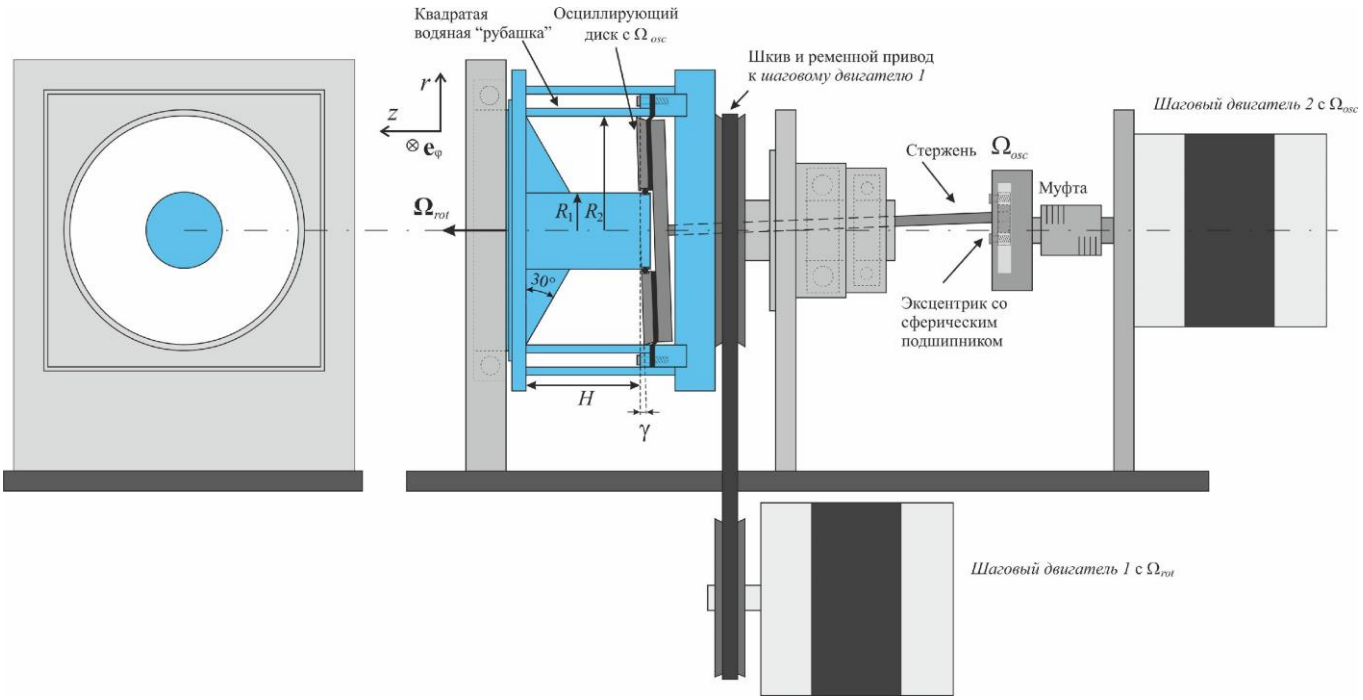


Рисунок 3.2 – Детализированная схема экспериментальной установки

Для изучения меридионального поля скорости жидкость освещается лазерным ножом вдоль оси вращения, при этом съёмка осуществляется с частотой 20 кадров/с. Поскольку внешняя граница полости имеет форму параллелограмма, фазы вращения и съёмки подбираются так, что положение грани кюветы в каждом кадре перпендикулярно оптической оси видеокамеры. Описание результатов экспериментов ведется в цилиндрической системе координат (r, φ, z) (рис. 3.2).

3.2. Наблюдение (1,1) аттрактора инерционных волн

Осциллирующее движение диска относительно полости приводит к возникновению в объеме жидкости неосесимметричных инерционных волн. Направление групповой скорости волны определяется выражением (2.6): $n/2 = \pm\sin\theta$, где θ – угол между волновым лучом и осью вращения. Как было отмечено ранее, для монохроматической волны угол θ фиксирован и сохраняется при отражении волновых лучей от границ полости. В зависимости от направления ($n > 0$ или $n < 0$) и частоты прецессии диска в полости возникают различные волновые паттерны. Результат эффекта прецессионного воздействия показан на плоскости r, z (рис. 3.1 и рис. 3.3). В случае отрицательной прецессии ($n < 0$) инерционные волны концентрируются на аттракторе A(1,1) в форме параллелограмма. Результаты наблюдений хорошо согласуются с лучевой моделью: волна, генерируемая краем диска, после серии отражений от границ фокусируется на замкнутую траекторию (рис. 3.1, слева). Достаточно широкая толщина ветвей аттрактора, наблюдаемого в эксперименте, обусловлена балансом геометрической фокусировки и вязкой диссипацией при $\mathrm{E} \sim 10^{-5}$. Отметим, что в осевом сечении волновая картина является антисимметричной относительно оси вращения, что согласуется с рассматриваемым типом воздействия, предписывающего азимутальную моду $k = -1$.

Для интегральной характеристики полной кинетической энергии колебаний жидкости используется средняя скорость пульсаций в осевом сечении $u = \frac{1}{N}\sum\left(u_r^2 + u_z^2\right)^{1/2}$, которая осредняется по периоду прецессии T_0 аналогично случаю либраций цилиндрической полости (см. формулы (2.7 – 2.8)). Здесь u_r и u_z

– радиальная и осевая компоненты мгновенной скорости для данного элемента поля скорости соответственно; количество элементов N определяется разрешением PIV-метода. Далее величина $<u>$ нормируется на амплитуду скорости пульсаций края диска $b\Omega$. В линейном режиме энергия колебаний жидкости немонотонно меняется с частотой прецессии n (рис. 3.3*а*), при этом результаты, полученные при различных амплитудах b, хорошо согласуются между собой и качественными наблюдениями, представленными в [28, 119, 240]. Немонотонный характер этой зависимости обусловлен изменением соотношения ветвей аттрактора с частотой прецессии. Так, наиболее интенсивное течение наблюдается при частоте $n = -1.3$, что соответствует ромбовидной форме аттрактора с симметричным расположением точек отражения от границ полости. При повышении (понижении) n относительно экстремума в результате изменения направления волновых лучей θ аттрактор сжимается в поперечном сечении, а энергия пульсационного течения становится меньше (рис. 3.3*б–г*).

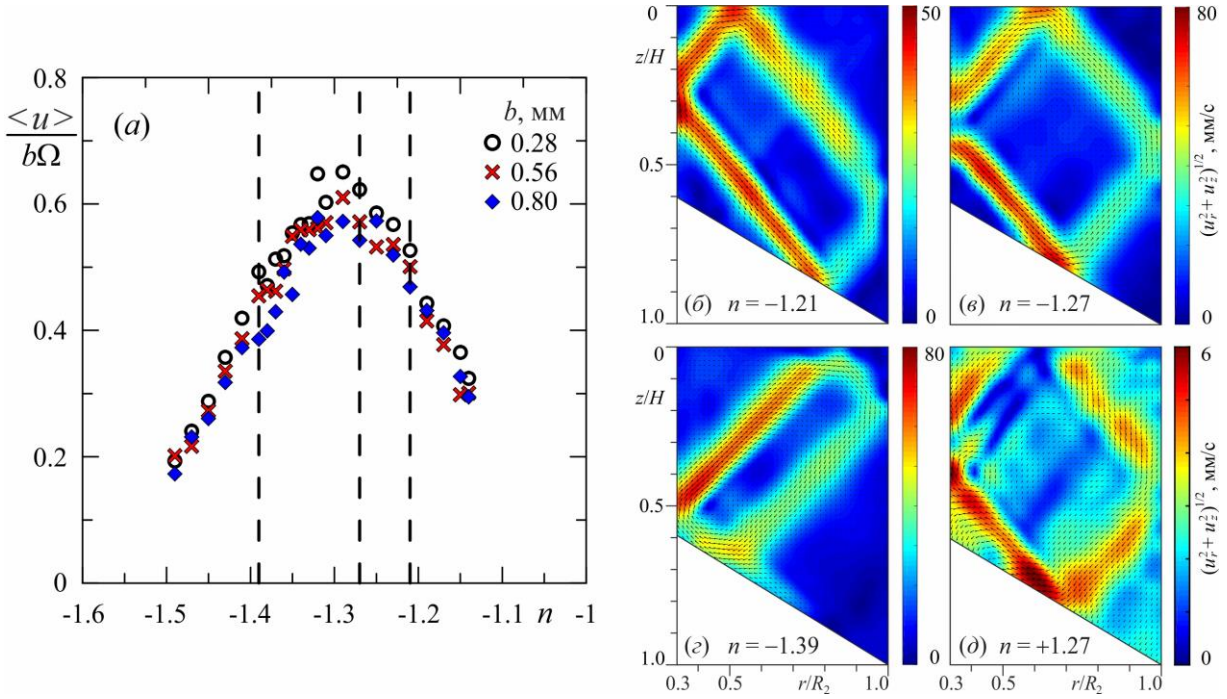


Рисунок 3.3 – Скорость пульсационного движения жидкости в осевом сечении полости в зависимости от безразмерной частоты n при различных амплитудах и числе Экмана $E = 3 \cdot 10^{-5}$ (*а*). На (*б–г*) показаны мгновенные поля скорости при частотах, отмеченных вертикальными штриховыми линиями на (*а*). Поле скорости, представленное на фрагменте (*д*), соответствует положительной прецессии с частотой $n = +1.27$; на (*б–д*) амплитуда составляет $b = 0.28$ мм

В случае положительной прецессии (n = +1.27, рис. 3.3*д*) инерционные волны не фокусируются на аттрактор и, как следствие, их скорость на порядок меньше, чем в случае $n < 0$. И хотя пространственная картина отдельных волновых лучей может напоминать форму аттрактора, в центральной части поля скорости присутствуют несфокусированные лучи. Это указывает на меньшую способность лучей к фокусировке в случае опережающего воздействия. В целом экспериментальные результаты качественно согласуются с результатами прямого численного моделирования инерционных волн во вращающемся кольце с трапециевидным поперечным сечением [118]. Таким образом, здесь экспериментально подтверждается, что направление прецессии по отношению к фоновому вращению системы имеет принципиальное значение. Впервые важность знака прецессии была экспериментально обнаружена для спектра инерционных мод во вращающемся круговом цилиндре [84], а позднее и для вращающегося сферического слоя с колеблющимся ядром (Глава 4, [А5]).

Азимутальное поле скорости на расстоянии z/H = 0.5 имеет форму двух спиралей (внутренняя и внешняя), вращающихся относительно полости вместе с диском (по часовой стрелке на Рис. 3.4*а*). Фазы осцилляций жидкости вдоль фиксированного радиального направления во внешней и внутренней спиралях не совпадают, что объясняется сложной трёхмерной структурой волнового аттрактора. Описанная структура течения отличается от той, что наблюдалась в осесимметричной постановке [117]. В последнем случае в поперечном сечении частицы жидкости совершали осесимметричные колебания.

Для более детального анализа структуры течения в линейном режиме рассчитываются частотно-временные диаграммы азимутальной скорости согласно (2.29) [235]. Измерения основаны на едином временном ряде из ~ 25000 изображений (28 изображений на период колебаний) с длиной окна 1024 точки по времени и проводятся по всей кольцевой области ($R_1 / R_2 < r / R_2 < 1,\ \ 0 < \varphi < 2\pi$). Спектрограмма при n = –1.27 приведена на рис. 3.4*б*. Полный спектр инерционных волн лежит в диапазоне частот $\omega \in [0, 2\Omega_{rot}]$, поэтому в дальнейшем все спектры рассматриваются в диапазоне ниже частоты, соответствующей удвоен-

ной частоте вращения. Цветом на графике изображены значения $\log_{10}\left[S(\omega,t)/S_0\right]$, где S_0 – осреднённое по времени значение спектрального пика на частоте Ω.

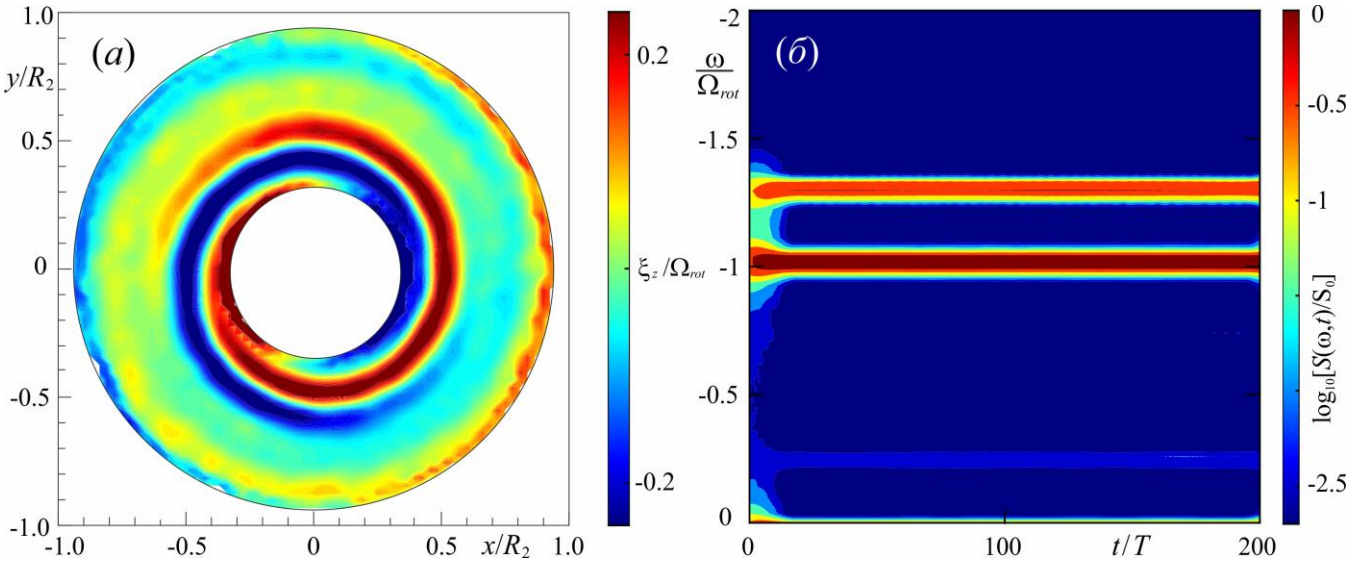


Рисунок 3.4 – Безразмерная завихренность ξ_z / Ω_{rot} на расстоянии z/H = 0.5 при частоте n = – 1.27 и амплитуде b = 0.42 мм (*а*). На (*б*) показана соответствующая спектрограмма азимутальной скорости

Хорошо видно, что в спектре присутствуют три гармоники, одна из которых соответствует частоте $n = n_0 = \omega / \Omega_{rot} = -1.27$, две другие – артефактным частотам $\omega / \Omega_{rot} = -1$ и -0.27. Природа этих сигналов обсуждалась ранее в главе, посвящённой цилиндрической полости (Раздел 2.3.4.2), и связана с небольшим параллаксом видеокамеры относительно оси вращения полости. Далее на рис. 3.9*а* эти частоты отмечены черными стрелками. Поскольку величина этих сигналов при фиксированной частоте n не зависит от амплитуды воздействия b, в отличие от других спектральных компонент, при больших b проявление этого эффекта в частотном спектре сильно уменьшается. Отметим, что вблизи временных границ измерений наблюдаются артефакты краевых эффектов. На рис. 3.4*б* видно, что это проявляется только для первых 10 периодов колебаний, тогда как общее время наблюдения составляет несколько сотен периодов.

3.3. Осреднённые течения в линейном режиме аттрактора

3.3.1. Зональное течение

Фокусировка волны в аттрактор сопровождается возникновением осреднённого зонального течения. В линейном режиме (малые амплитуды b) последнее имеет вид системы осесимметричных колец, в которых жидкость совершает дифференциальное вращение. На рис. 3.5*а* приведен пример среднего поля скорости при частоте $n = -1.30$. Основное течение сосредоточено в кольце толщиной $\Delta r \sim 0.1R_2$, которое расположено на расстоянии $r \sim 0.7R_2$. Жидкость в этом кольце совершает отстающее дифференциальное вращение, что согласуется с направлением прецессии диска. Интенсивность ретроградного движения жидкости монотонно уменьшается с повышением n. Радиальное положение кольца хорошо согласуется с точкой отражения аттрактора на конусе (рис. 3.5*б*, штриховая линия) и практически линейно зависит от частоты. Смещение точки отражения к периферии приводит к увеличению радиуса кольца дифференциально вращающейся жидкости. Это свидетельствует о том, что неоднородность пульсационного движения, возбуждаемого волной на конусе, действует как генератор осреднённой геострофической циркуляции в жидком цилиндре, поперечное сечение которого показано на рис. 3.5*а*.

Важно отметить, что с точки зрения возможных нелинейных эффектов, порождающих зональные течения, интерес представляет не только конический торец, но и цилиндрическая граница. Вблизи внутренней стенки полости структура течения более сложная – два узких кольца, в которых жидкость вращается в противоположных направлениях. Во внутреннем кольце движение жидкости опережающее, в то время как во внешнем – отстающее. С повышением (понижением) частоты n форма волнового аттрактора меняется, что приводит к трансформации структуры зонального течения (рис. 3.5*б*). Радиальное положение двух внутренних колец не меняется с n, в то же время опережающее течение существует только в узком диапазоне частот $-1.37 \le n \le -1.25$. Стоит отметить, что при $n < -1.37$ внешнее и внутренние кольца соединяются, а дальнейшее понижение частоты

приводит к уменьшению толщины кольца дифференциально вращающегося слоя жидкости.

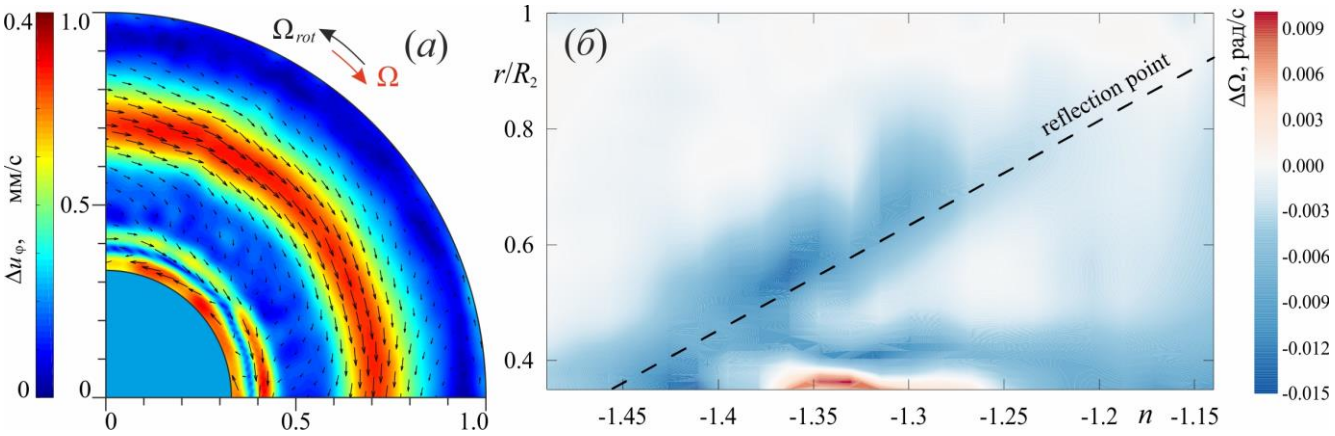


Рисунок 3.5 – (*а*) Осреднённое поле скорости при $n = -1.30$, $b = 0.31$ мм и $z/H = 0.5$; здесь и далее азимутальное течение Δu_φ показано со стороны наклонного дна; черная стрелка указывает направление вращения полости; красная стрелка указывает направление прецессии диска, который периодически проходит через фиксированную точку во вращающемся резервуаре, тем самым создавая осциллирующее течение. (*б*) Распределение угловой скорости $\Delta\Omega = \Delta u_\varphi / r$ в зависимости от безразмерной частоты n. Число Экмана составляет $\mathrm{E} = 3.0 \cdot 10^{-5}$; штриховая линия соответствует радиальному положению точки отражения аттрактора на коническом дне

3.3.2. Меридиональная циркуляция

Механизм возникновения внутренних колец связан с нелинейным взаимодействием волнового аттрактора с пограничным слоем Стокса на границе внутреннего цилиндра. Это хорошо продемонстрировано на рис. 3.6, где цветом показана осреднённая осевая скорость $< u_z >$, а черными линиями – фокусировочное отражение аттрактора в рамках лучевой модели. Видно, что вблизи точек отражения от внутренней границы наблюдается нарушение симметрии осевого течения. Принимая во внимание, что рис. 3.5*б* построен в сечении $z/H = 0.5$, локализация опережающего течения в узком диапазоне частот n объясняется перемещением точки отражения волны вдоль z/H. Таким образом, в отличие от ретроградного азимутального потока в виртуальном цилиндре, простирающегося на всю глубину жидкости и возникающего при фокусирующем отражении на конической стенке,

опережающий азимутальный поток, обусловленный отражением волн на внутреннем цилиндре, имеет ограниченную протяженность вдоль оси вращения, сравнимую с шириной зоны отражения.

Ранее нелинейный отклик в виде осреднённой циркуляции на боковой стенке был рассмотрен в неравномерно вращающемся цилиндре с прямыми торцами (Раздел 2.2.4.3). Поскольку наклонные границы внутри полости отсутствовали, фокусировка инерционных волн в аттракторы была невозможна. Тем не менее, при совпадении частоты либраций с одной из собственных частот колебаний жидкости в полости возникал другой тип резонанса – инерционные моды. Колебания жидкости в объеме полости индуцировали осреднённое течение в динамическом пограничном слое вблизи боковой поверхности полости [A6]. Последнее имело форму системы осесимметричных тороидальных вихрей. В то же время отдельные волновые лучи также способны генерировать осреднённую завихренность в пограничном слое Стокса, правда меньшей интенсивности [A17].

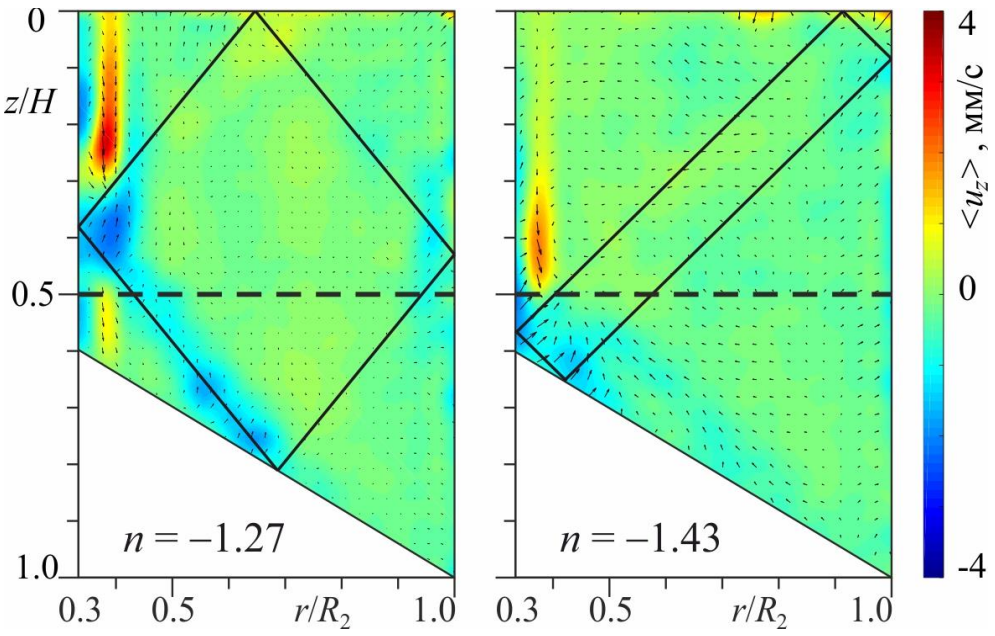


Рисунок 3.6 – Осреднённое поле скорости в осевом сечении полости при b = 0.28 мм и двух различных частотах n = −1.27 и −1.43. Цветом показана осреднённая z-компонента скорости; черные линии показывают контуры волновых аттракторов; горизонтальные штриховые линии показывают положение светового ножа для данных, представленных на рис. 3.5

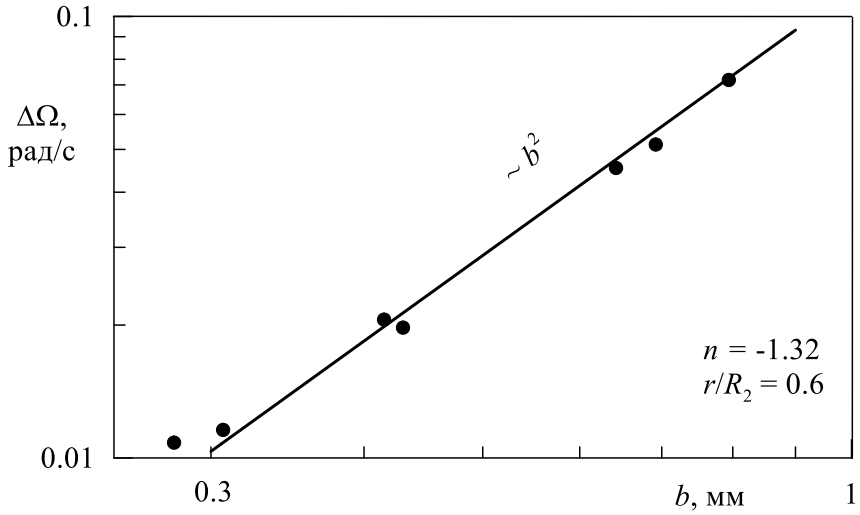


Рисунок 3.7 – Скорость зонального течения в зависимости от амплитуды прецессии диска при $z/H = 0.50$ $r/R_2 = 0.60$

С повышением амплитуды колебаний диска b скорость дифференциального вращения жидкости увеличивается по квадратичному закону (рис. 3.7). Стоит отметить, что в линейном режиме изменение b не приводит к качественной перестройке структуры течения. Частота колебаний влияет только на значение коэффициента пропорциональности, при этом наиболее сильный осреднённый азимутальный отклик ожидается в окрестности частоты $n = -1.3$ (рис. 3.3*а*).

3.4. Нелинейные режимы аттрактора

При увеличении амплитуды колебаний b волновое движение становится нелинейным. Ранее уже обсуждалось, что полный инерционный отклик жидкости на прецессионное воздействие немонотонно зависит от частоты n (рис. 3.3*а*). Для изучения нелинейной динамики волн сосредоточимся только на частоте $n = -1.27$, которая близка к экстремуму энергии пульсационного течения. Именно здесь можно ожидать появления наиболее богатой нелинейное поведение системы с ростом амплитуды воздействия. Далее основное внимание будет уделено детальному изучению различных режимов течения при четырех амплитудах колебаний диска: $b = 0.73$ мм, 1.17 мм, 2.01 мм и 2.46 мм (рис. 3.8, рис. 3.9). При $b = 0.73$ мм основная гармоника явно доминирует, а волновая картина в поперечном сечении состоит из двух спиралей, как в линейном режиме (рис. 3.4*а*), кото-

рые также хорошо проявляются при фильтрации на частоте прецессионного воздействия (рис. 3.10*а*). Однако на больших временах $t / T_0 > 200$ в спектре появляются две субгармоники с частотами $n_1 = -0.85$ и $n_2 = -0.42$ (рис. 3.9*а*), сумма которых дает основную частоту $n = -1.27$. Соответственно, форма спирали усложняется вторичными вихревыми «пятнами».

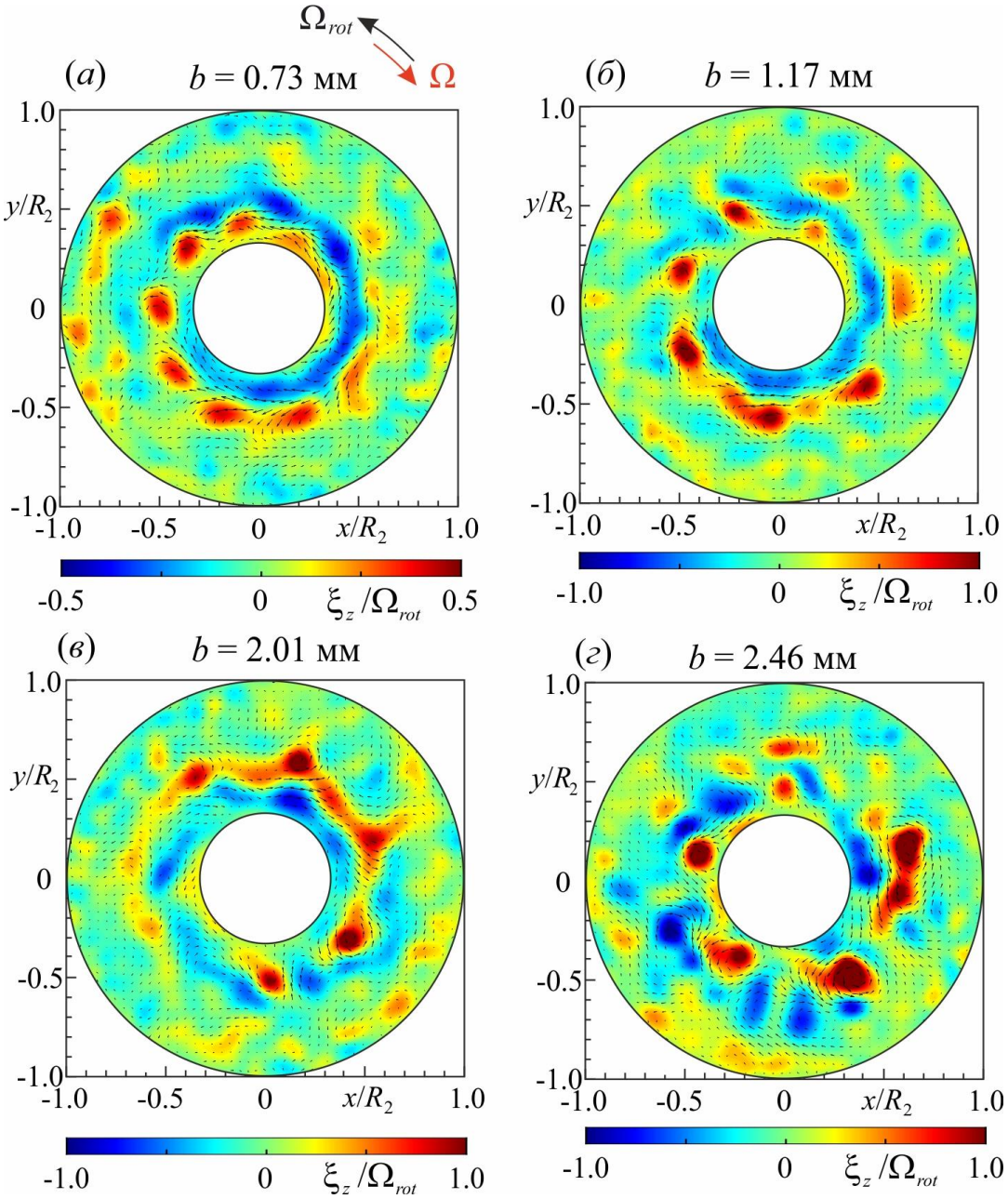


Рисунок 3.8 – Мгновенные поля завихренности при частоте $n = -1.27$ и различных амплитудах колебаний диска в момент времени t/T_0 = 450; красный и синий цвета означают циклоническую и антициклоническую завихренность; число Экмана составляет E = $1.5 \cdot 10^{-5}$

Как и в линейном режиме (рис. 3.4*б*), здесь наблюдаются два дополнительных артефактных пика на частотах $\omega/\Omega_{rot} = -1$ и -0.27 (обозначены горизонтальными стрелками на рис. 3.9*а*). Как уже было отмечено, оба пика хорошо отделены от частот, на которых происходят обсуждаемые ниже физические процессы, поэтому эти артефакты далее не обсуждаются. Также в спектре имеется супергармоника, удовлетворяющая условию $n + n_2 = -1.69$. Компонента на частоте $n + n_1$ также присутствует в спектре, но она находится за пороговым значением $2\Omega_{rot}$ и не показана.

Применяя преобразование Гильберта [198, А3] по времени, можно отфильтровать волновые компоненты по частотам n, n_1 и n_2. Чтобы охарактеризовать азимутальное волновое число отфильтрованной субгармоники в поперечном сечении, вводится $\pm k$, где «знак» определяет азимутальное направление: положительный знак для циклонического движения (против часовой стрелки, если смотреть со стороны конического дна), и отрицательный для антициклонического движения (по часовой стрелке). Осевая завихренность ξ_z/Ω_{rot}, связанная с основной волной с волновым числом $k = -1$, имеет спиральную структуру и вращается в поперечном сечении $z/H = 0.5$ по часовой стрелке вместе с диском (рис. 3.10*а*). Субгармоническая компонента на частоте n_2 с волновым числом $k = -9$ также вращается по часовой стрелке, в то время как другая субгармоническая компонента на частоте n_1 с волновым числом $k = 8$ вращается против часовой стрелки.

На рис. 3.10*б* и *в* можно одновременно выделить несколько спиралей, закрученных как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки. Например, визуально на рис. 3.10*б* доминируют спирали, закрученные против часовой стрелки. В [А3] показано, что полная информация о компонентах волн, которые удовлетворяют условиям триадного резонанса, может быть получена после фильтрации данных по определенному направлению. Детальное обсуждение этого анализа выходит за рамки диссертационного исследования. В целом можно сказать, что сумма волновых чисел субгармоник на частотах n_1 и n_2 равна волновому числу

основной волны n. То же самое справедливо и для волновых векторов $\mathbf{k}^0 = \mathbf{k}^1 + \mathbf{k}^2$, где $\mathbf{k}^i = \mathbf{k}_r^i + \mathbf{k}_z^i$. Здесь $\mathbf{k}_r^i$ и $\mathbf{k}_z^i$ – радиальные и осевые компоненты волновых векторов. Причем, если радиальную компоненту можно непосредственно измерить, то осевая составляющая $\mathbf{k}_z$ в силу специфики методики эксперимента не может быть напрямую восстановлена по наблюдениям полей скорости со стороны боковой поверхности. Значение последней может быть оценено по частоте $n = 2\sin(\theta)$, которая определяет наклон волнового вектора относительно оси вращения $k_z = \tan(\theta) k_r$. По всей видимости, это допущение справедливо только при условии слабого дифференциального вращения жидкости и может нарушаться при развитии сильнонелинейного режима. Интересно, что развитие субгармоник триадного резонанса сопровождается генерацией сильного опережающего зонального течения вблизи внутреннего цилиндра (рис. 3.9*б*).

Те же триады видны при амплитуде колебаний $b = 1.17$ мм (рис. 3.9*в*) и $b = 2.01$мм (рис. 3.9*д*), но проявляются существенно раньше $t / T_0 \in [50, 150]$ и $t / T_0 \in [20, 90]$, соответственно. Следует отметить, что с увеличением амплитуды b артефактные частоты $\omega / \Omega_{rot} = -1$ и -0.27 исчезают. На большем времени $t / T_0 > 100$ генерируются две новые субгармонические волновые компоненты на частотах $n_{11} = -1.12$ и $n_{22} = -0.15$ (рис. 3.9*в*). Как показано в [А3], их волновые числа соответственно равны $k = 6$ и $k = -7$, а радиальные компоненты волновых векторов образуют замкнутый треугольник. Тем не менее, волновые векторы, восстановленные для осевого сечения, не удовлетворяют пространственному условию триадного резонанса из-за сильной трёхмерности течения. С увеличением амплитуды колебаний b сигналы на частотах $n_{11} = -1.12$ и $n_{22} = -0.15$ увеличиваются. При этом их влияние проявляется в изменении направления осреднённого зонального течения при $t / T_0 > 350$ для $b = 1.17$ мм, $t / T_0 > 90$ для $b = 2.01$мм и $t / T_0 > 20$ для $b = 2.46$ мм. Дальнейший анализ осреднённого зонального течения рассмотрен в Разделе 3.5.

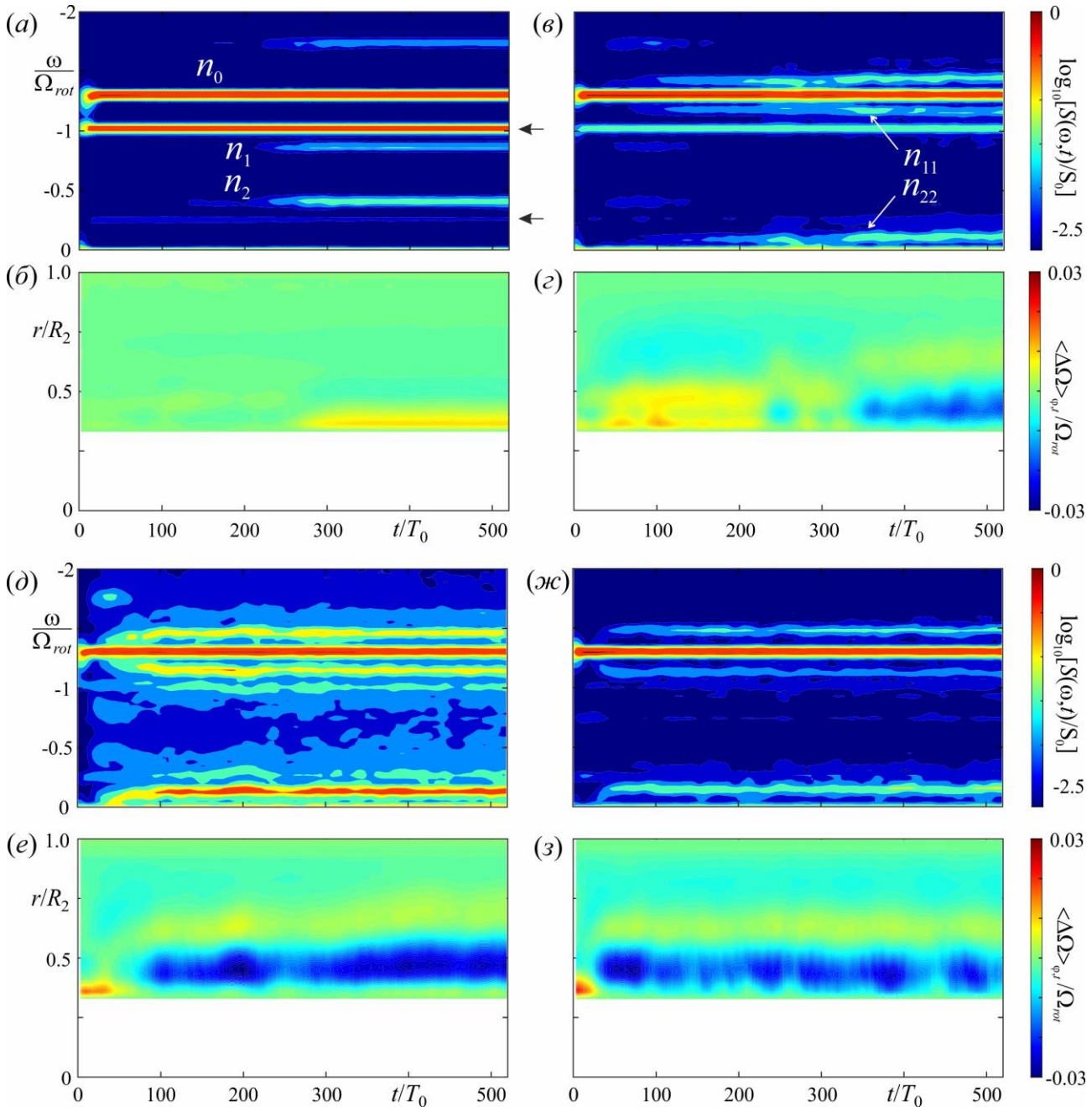


Рисунок 3.9 – Спектрограммы азимутальной скорости при $n=-1.27$ и $b=0.73$мм, 1.17мм, 2.01мм и 2.46мм (*а*, *в*, *д*, *ж*) и соответствующие скользящие средние по времени для осреднённого по азимуту радиального профиля угловой скорости (*б*, *г*, *е*, *з*) при E = $1.5\cdot10^{-5}$. Стрелками на (*а*) показаны артефактные частоты

Обратим внимание на режим, наблюдаемый при амплитуде $b=2.01$мм (рис. 3.9*д*). Спектр становится более сложным, со значительным непрерывным фоном. Тем не менее, основные субгармоники n_{11} и n_{22}, возникающие вследствие триадного резонанса, остаются легко различимыми, а их спектральный вклад растёт. Значения соответствующих частот остаются близкими к измеренным при

$b = 1.17$ мм и сохраняются при последующем увеличении амплитуды. Это качественно согласуется с численными результатами для осесимметричного аттрактора [117]. Интересно, что при амплитуде $b = 2.46$ мм спектр восстанавливает четко различимые дискретные компоненты, непрерывный фон практически отсутствует (рис. 3.9*ж*). Это свидетельствует об изменении распределения волновой энергии между компонентами волнового движения и эффективной передаче энергии крупномасштабным вихрям. Переход сопровождается значительным энергетическим обогащением низкочастотной области спектра.

3.5. Зональное течение в режиме аттрактора

Эволюция зонального течения $\langle \Delta\Omega \rangle_\varphi / \Omega_{rot}$ при различных значениях амплитуды b показана на рис. 3.9*б, г, е, з*. На каждом шаге диаграммы осуществляется осреднение данных по азимутальному углу $\varphi = 0 \div 2\pi$ и скользящему временному окну $20T_0$. Сильное опережающее течение в виде зональной струи возникает вблизи внутреннего цилиндра при $b = 0.73$ мм и $t / T_0 > 200$ (рис. 3.9*б*). Интересно, что между моментами времени появления в спектре субгармоник и изменением структуры осреднённого течения существует небольшая задержка $\Delta t / T_0 \sim 50$. Это указывает на то, что причиной формирования течения является нелинейный отклик жидкости на неустойчивость триадного резонанса. Наблюдения за системой показывают, что ширина струи составляет $\sim 0.1R_2$ и практически не меняется на протяжении длительного времени.

При повышении амплитуды до $b = 1.17$ мм осреднённая динамика системы становится более сложной (рис. 3.9*г*). Первоначально всё происходит по сценарию, описанному выше, при этом ширина опережающей струи увеличивается в несколько раз. Однако уже при $t / T_0 > 200$ наблюдается инверсия осреднённой скорости вблизи внутреннего цилиндра: вместо опережающего течения возникает отстающее. Это происходит после развития второй пары субгармоник с частотами n_{11} и n_{22}. Отметим, что в период времени $t / T_0 = 250 \div 350$ движение жидкости нестационарное: в определенные моменты течение меняет свое направление, что

связано с усилением или ослаблением компонент триадного резонанса. Полный переход к инвертированной структуре течения происходит при $t/T_0 > 350$. При $b = 2.01$мм (рис. 3.9*е*) генерация отстающего течения происходит существенно раньше при $t/T_0 = 60$, а при $b = 2.46$ мм уже при $t/T_0 = 20$ (рис. 3.9*з*).

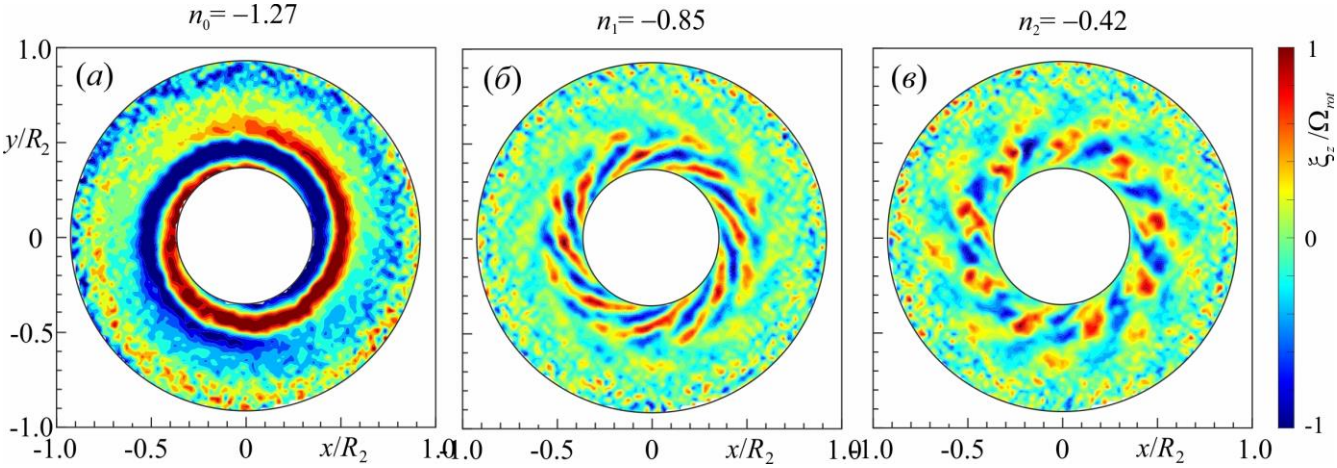


Рисунок 3.10 – Структуры мгновенных полей осевой завихренности, полученные при $b = 0.73$ мм и отфильтрованные во времени на фундаментальной частоте $n_0 = -1.27$ (*а*), $n_1 = -0.85$ (*б*), $n_2 = -0.42$ (*в*)

3.6. Вихревые кластеры и волны Россби

Развитие неустойчивости триадного резонанса и дальнейшее появление в спектре набора дискретных низкочастотных и, в то же время, энергосодержащих компонент, вносит сильную корректировку в структуру зонального течения. В нелинейном режиме на фоне существования сложной волновой картины осреднённое течение теряет азимутальную симметрию, что проявляется в генерации квазидвумерного вихревого кластера. Рассмотрим подробнее механизм возникновения вихревых структур и их динамику.

Как было отмечено ранее, при $b = 0.73$мм триадный резонанс сопровождается формированием опережающей зональной струи вблизи внутреннего цилиндра (рис. 3.9*б*). Наблюдения показывают, что при $t/T_0 > 250$ за пределами струи на расстоянии $r/R_2 \sim 0.5$ развивается вихревой кластер, подобный тому, что показан на рис. 3.11*а* и 3.12*а*. Вихри проявляются в поле скорости при осреднении данных по периоду прецессии T_0. Направление циркуляции жидкости в каждом

вихре антициклоническое (по часовой стрелке, синие пятна), при этом весь кластер дрейфует в ретроградном (отстающем) направлении. Стоит отметить, что неустойчивости сопутствует структурообразование светорассеивающих PIV-частиц, которые аккумулируются в вихревых структурах вблизи внутреннего цилиндра (рис. 3.12*б*). Структурообразование происходит постепенно и проявляется на больших временах $t / T_0 > 450$, при этом долговременные наблюдения за системой показывают, что она является стабильной, а волновое число k_T не меняется со временем. Скорость азимутального дрейфа структур из частиц хорошо согласуется со скоростью вращения вихревого кластера. В последнем случае измерения осуществлялись по наблюдениям за полем осреднённой завихренности $\langle \xi_z \rangle / \Omega_{rot}$.

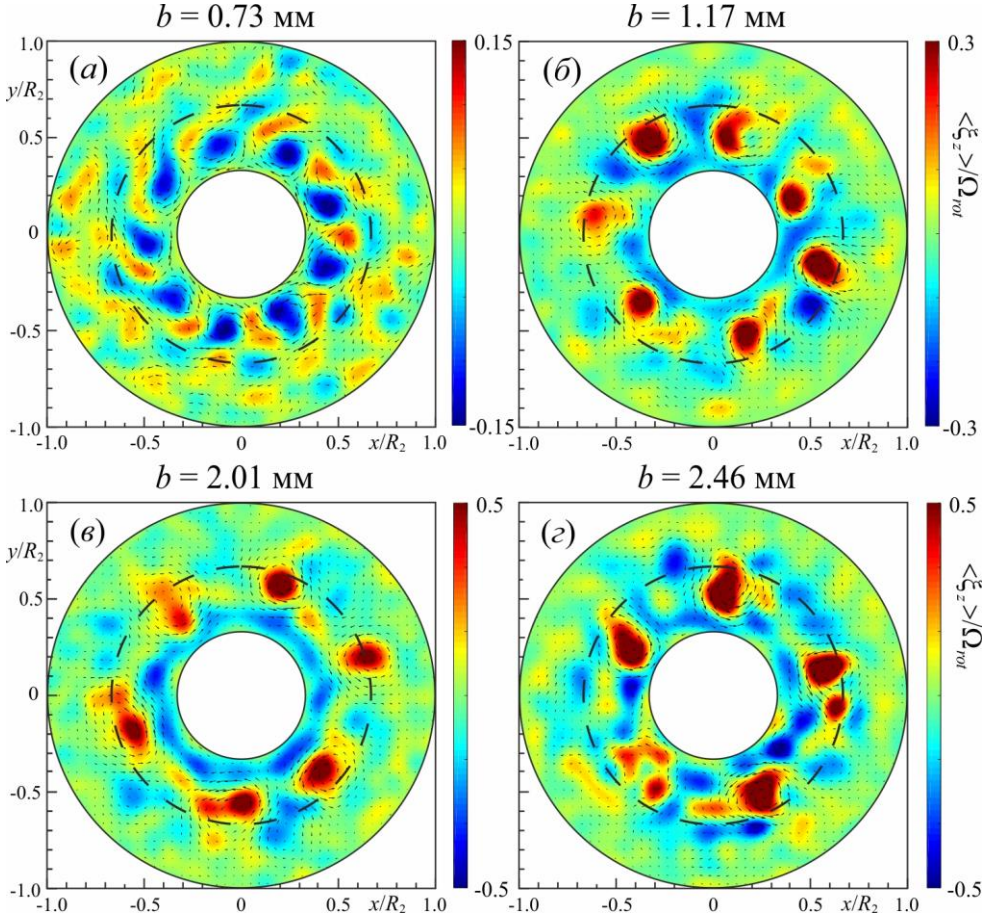


Рисунок 3.11 – Осреднённые по периоду прецессии поля скорости, соответствующие случаям, представленным на рис. 3.8 и рис. 3.9 при $t / T_0 = 450$; синие пятна соответствуют антициклонам, а красные – циклонам; пунктирными окружностями обозначено положение точки отражения аттрактора от наклонного дна

Для характеристики энергии, закачиваемой в систему, можно ввести аналог числа Россби

$$\mathrm{Ro} = \frac{b\Omega}{R_2\Omega_{rot}} = n\frac{b}{R_2}, \qquad (3.1)$$

где $b\Omega$ – аксиальная пульсационная скорость на краю диска. В слабонелинейном режиме ($|\mathrm{Ro}| < 0.02$) с повышением $|\mathrm{Ro}|$ угловая скорость ретроградного вращения вихревого кластера практически не изменяется и принимает значение $\Delta\Omega_T / \Omega_{rot} \approx -0.033$ (рис. 3.13, нижняя кривая). Видно, что изменение безразмерной частоты n и среднего волнового числа k_T не приводит к существенному изменению скорости, а полученные экспериментальные точки ложатся на одну зависимость. Заметим, что значение азимутального волнового числа k_T совпадает с волновым числом одной из субгармоник триадного резонанса $\pm k$. Так, при частоте $n = -1.27$ и амплитуде $b = 0.73$ мм волновое число для вихревого кластера составляет $k_T = 9$, что согласуется с $(-k)$ на частоте $n_2 = -0.42$ (рис. 3.10). Таким образом, неустойчивость триадного резонанса волнового аттрактора провоцирует нелинейный отклик, проявляющийся в генерации осреднённых структур. Ранее подобного рода взаимосвязь между триадным резонансом инерционных волн и осреднённым течением наблюдалась в либрирующей цилиндрической полости (Раздел 2.3.4). Там же было указано, что, по всей видимости, вихревой кластер является осреднённым отпечатком триадного резонанса на азимутальном потоке. На схожесть природы вихревых структур также указывает сравнение скоростей азимутального дрейфа: в области малых амплитуд либраций $\varepsilon < 0.018$ скорость принимала значение ≈ 0.046, что по порядку согласуется с тем, что наблюдается в настоящем исследовании (рис. 3.13). Несмотря на то, что направление дрейфа структур отличается, экспериментальные точки также согласовывались между собой для различных волновых чисел k_T.

С увеличением амплитуды колебаний диска до $b = 1.17$ мм временная динамика осреднённых надкритических структур усложняется. Первоначально вблизи внутреннего цилиндра возникает вихревой кластер, аналогичный тому, что пока-

зан на рис. 3.11*а*. Однако при $t / T_0 = 300$ на смену приходит режим, характеризующийся другой фазовой скоростью и набором волновых чисел. Смена вихревого режима сопровождается изменением волнового числа и инверсией скорости вблизи внутреннего цилиндра. Так, осреднение поля скорости по периоду T_0 показывает, что на расстоянии $r / R_2 \sim 0.65$ развиваются вихри с $k_R = 7$ (рис. 3.11*б*). Направление вращения жидкости в каждом вихре циклоническое, в то время как весь кластер продолжает дрейфовать в ретроградном направлении. Переход из слабонелинейного режима в сильнонелинейный характеризуется появлением в спектре новых частот n_{11} и n_{22}, а также скачкообразным уменьшением волнового числа и относительной фазовой скорости. Дальнейшее повышение $|\mathrm{Ro}|$ приводит к уменьшению волнового числа вплоть до $k_R = 5$ (рис. 3.11*в*, *г*). Эксперименты показывают, что переходы между волновыми числами можно описать одной зависимостью $\Delta\Omega_R \sim k_R^{-2}$. При этом все точки, полученные в экспериментах с различными частотами n и амплитудами $|\mathrm{Ro}|$, ложатся на одну линию $\Delta\Omega_R k_R^{\,2} / \Omega_{rot} = -0.9$ (рис. 3.13, верхняя кривая). Полученное дисперсионное соотношение указывает, что возможным триггером перехода между двумя режимами является возбуждение волны Россби. Эти волны как раз характеризуются отрицательной фазовой скоростью и квадратичной зависимостью от волнового числа и характерны для систем с бета-эффектом [241]. Действительно, дисперсионное соотношение для этих волн имеет вид

$$\omega = -\frac{\beta k_R}{\left(k_R^2 + l^2\right)}, \tag{3.2}$$

где β – параметр Россби, связанный с наклоном дна в наших экспериментах, k_R и l – зональное и меридиональное волновые числа соответственно. Для нашего случая $k_R >> l$, поэтому средняя зональная фазовая скорость

$$\upsilon_\varphi = \frac{\omega}{k_R} \sim -\frac{1}{k_R^{\,2}}. \tag{3.3}$$

Относительную угловую скорость $\Delta\Omega_R / \Omega_{rot}$ можно понимать как «фазовую скорость». Важно, что волны Россби возникают только на фоне сильного ретроград-

ного зонального течения. Вихри располагаются в непосредственной близости от точки отражения (рис. 3.5), где ветви аттрактора отражаются от наклонной границы. На поле средней скорости (рис. 3.11) это положение схематически показано штриховой окружностью. Причем с ростом амплитуды колебаний число вихрей уменьшается, но радиальное положение (задаваемое фиксированной частотой n) остается неизменным.

Переход от слабонелинейного режима вихревого кластера к волнам Россби происходит в окрестности амплитуды $\mathrm{Ro} \approx -0.02$ (рис. 3.13). При этом вблизи порогового перехода могут одновременно существовать осреднённые структуры обоих типов. Это хорошо проявляется в экспериментах с $\mathrm{Ro} \approx -0.018$ (при $b = 0.82$ мм и $n = -1.27$). В этом случае доминирующими являются антициклонические вихри, локализованные на расстоянии $r / R_2 \sim 0.5$ (подобно рис. 3.11*а*) и хорошо проявляющиеся при осреднении поля скорости по периоду колебаний T_0. Вихри, связанные с волной Россби, расположены на $r / R_2 \sim 0.7$ и характеризуются существенно меньшей завихренностью и фазовой скоростью. Для их отождествления осреднение осуществляется по четырем периодам T_0. За это время «медленная» волна Россби успевает сместиться по азимуту не более чем $\varphi \sim 10$ градусов. В то же время вихревые структуры первого типа смещаются на величину $\varphi \sim 30$ градусов и при осреднении по четырем периодам существенно смазываются по азимуту. Интересно, что в этом режиме, несмотря на то что фазовые скорости структур сильно отличаются, волновые числа совпадают и равны $k = k_T = 9$. В экспериментах с амплитудой $b = 1.17$ мм развившиеся волны Россби становятся доминирующими и подавляют первоначальный слабонелинейный вихревой кластер и опережающее течение около внутреннего цилиндра. Анализ результатов показывает, что при $b = 1.17$ мм в поле скорости всё-таки присутствуют субгармоники первого триадного резонанса с волновыми числами $k = -8$ и 7 (рис. 3.9). Тем не менее, их энергия существенно меньше энергии субгармоник n_{11} и n_{22}, связанных с волной Россби.

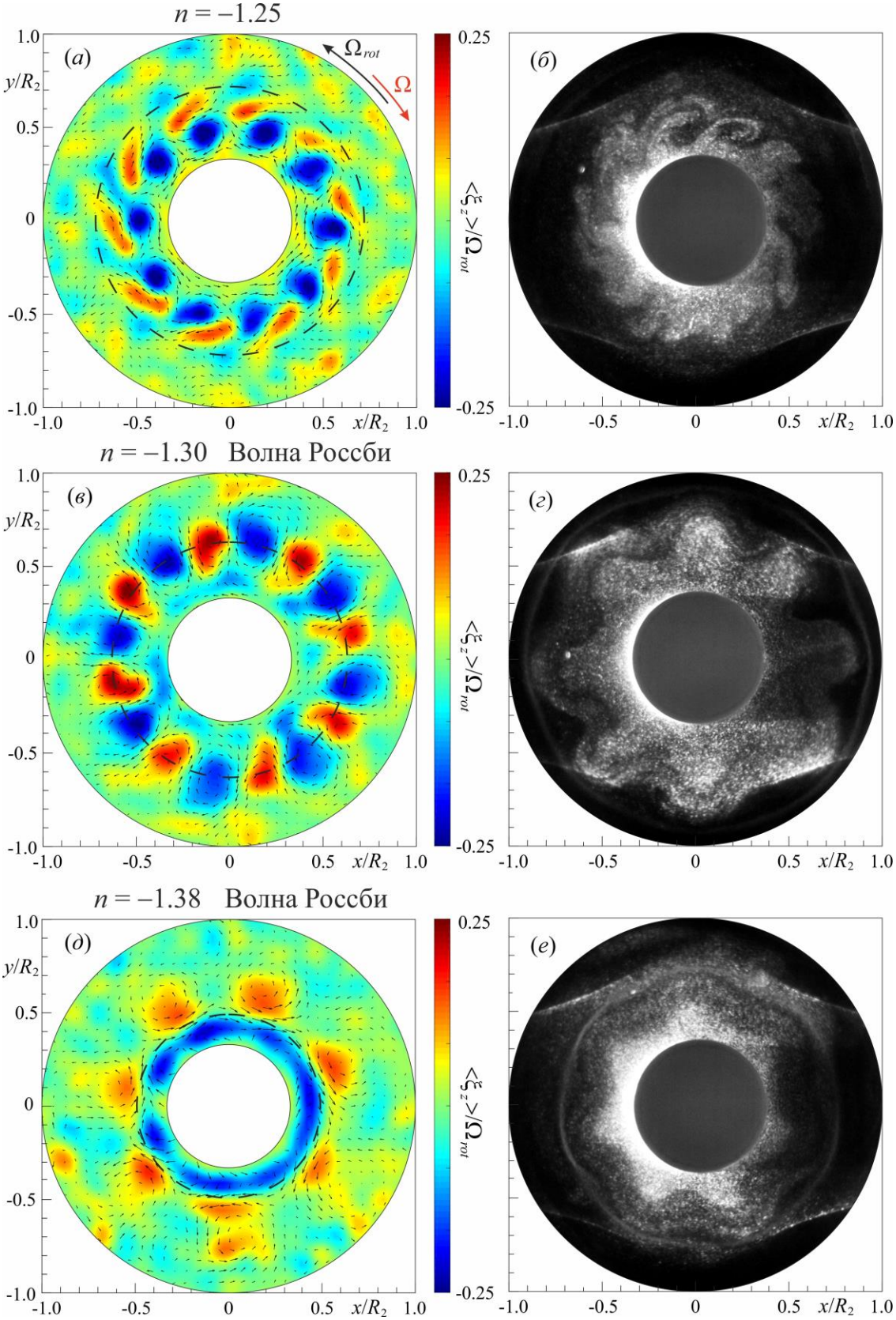


Рисунок 3.12 – Осреднённые по времени (левый столбец) поля осевой завихренности (цвет) и скорости (стрелки) при фиксированной амплитуде $b = 0.92$ мм и различных частотах $n = -1.25$ (*а*), -1.30 (*в*) и -1.38 (*д*). В правом столбце (*б*, *г*, *е*) показаны фотографии структуры течения при $t / T_0 > 450$. Направление вращения полости против часовой стрелки, прецессии диска – по часовой стрелке

Таким образом, система может находиться в двух различных режимах. Первый характеризуется слабонелинейными эффектами благодаря неустойчивости триадного резонанса аттрактора инерционных волн. Второй режим наблюдается при высоких амплитудах колебаний диска и характеризуется развитием волны Россби.

На рис. 3.12 продемонстрировано влияние частоты прецессии на структуру осреднённого течения и соответствующий паттерн из частиц визуализатора. В зависимости от параметров воздействия система может находиться в разных режимах. Слабонелинейный режим доминирует в случае колебаний с частотой $n = -1.25$. Неустойчивость локализована вблизи внутреннего цилиндра, а частицы визуализатора сосредоточены в антициклонических вихрях и выглядят как языки, закрученные по часовой стрелке (рис. 3.12*б*). Поскольку плотность частиц немного меньше плотности водно-глицеринового раствора ($\rho_L \approx 1.1$г/см^3), при больших временах частицы центрифугируются. Интенсивное вихревое движение вблизи внутреннего цилиндра препятствует полному осаждению и поддерживает «ожиженное» состояние частиц.

При $n = -1.30$ и $n = -1.38$ в полости сразу развиваются волны Россби, что приводит к тому, что структура частиц становится более регулярной (рис. 3.12*г*, *е*). Отметим, что отличие между осреднёнными полями скорости, представленными на рис. 3.12*а* и рис. 3.12*в*, связано с различной надкритичностью, т. е. $\mathrm{Ro} = -0.020$ и $\mathrm{Ro} = -0.021$ соответственно. С уменьшением частоты до $n = -1.38$ граница сдвиговой зоны ретроградно вращающейся жидкости смещается ближе к внутреннему цилиндру (пунктирное кольцо на рис. 3.12*д*). При этом антициклонические «синие» вихри кажутся смещенными к внутреннему цилиндру, в то время как циклонические «красные» вихри остаются расположенными далеко от внутреннего цилиндра.

Для демонстрации двумерности зонального течения поле скорости исследовалось в различных сечениях z / H. Так, на рис. 3.14 показаны зависимости средней скорости $\langle \Delta\Omega \rangle_\varphi$ в режиме развитой волны Россби. Первоначально ($t / T_0 = 20$, сплошная линия) движение жидкости происходит сложным трёхмерным образом.

Особенно это заметно вблизи внутреннего цилиндра, где направление вращения жидкости меняется с увеличением координаты z/H. Это связано с постепенным формированием среднего зонального течения. Вблизи внутреннего цилиндра возникает опережающее зональное течение. Исключение составляют лишь области вблизи диска ($z/H = 0.1$, синяя кривая на рис. 3.14) и в непосредственной близости от конического дна, где доминирует ретроградное течение ($z/H = 0.8$, зеленая кривая на рис. 3.14). Далее, с течением времени, ретроградное течение захватывает все пространство вблизи внутреннего цилиндра. Хорошо видно, что на больших временах ($t/T_0 = 700$) осреднённые профили угловой скорости согласуются между собой. Наконец, осредняя поля завихренности только по периоду прецессии T_0, можно убедиться, что при фиксированных параметрах в разных поперечных сечениях z/H возникает одинаковое количество вихрей. Волновое число k_R и радиальный размер вихревого кластера хорошо согласуются друг с другом. Это указывает на почти двумерный характер вихревого движения в виде валов, как это было в случае осесимметричного воздействия [117].

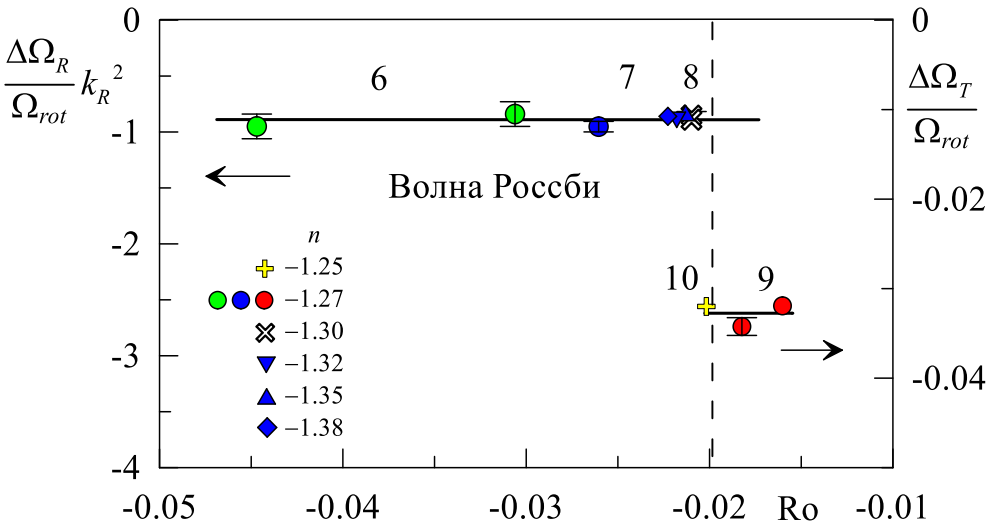


Рисунок 3.13 – Угловая скорость вращения осреднённого вихревого кластера. Разные символы соответствуют разным значениям частоты прецессии, а цвет соответствует азимутальному волновому числу, обозначенному цифрами. Число Экмана составляет $E = 1.5 \cdot 10^{-5}$

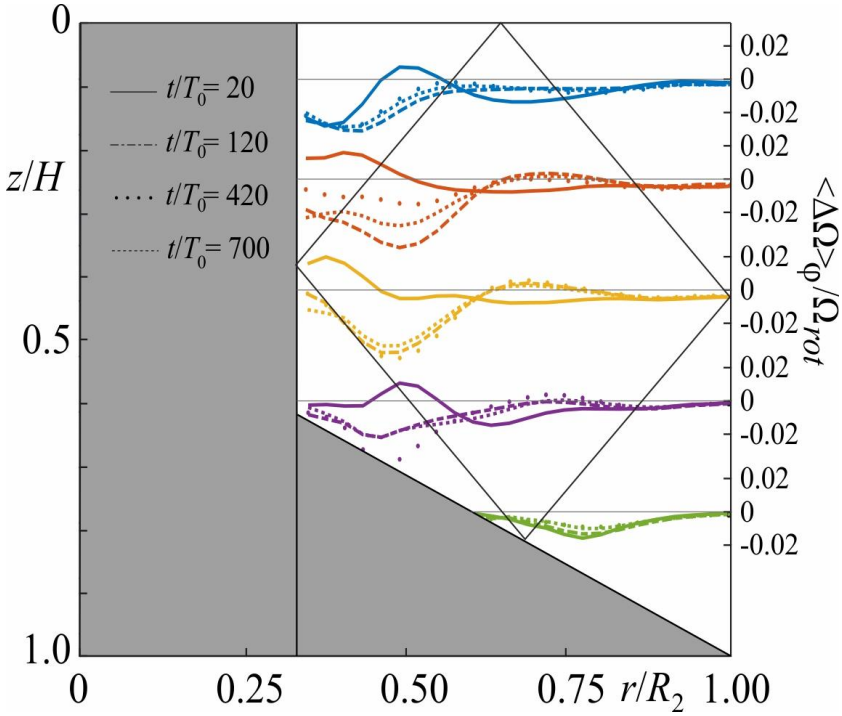


Рисунок 3.14 – Профили безразмерной угловой скорости, осреднённой по времени и азимуту $\langle \Delta\Omega \rangle_{\varphi,t} / \Omega_{rot}$ при частоте $n = -1.27$ и амплитуде $b = 1.30$ мм в различных поперечных сечениях z / H и моментах времени t / T_0. Число Экмана составляет $E = 1.5 \cdot 10^{-5}$

3.7. Основные выводы по главе

В данной главе исследована последовательность нелинейных режимов инерционных волн во вращающемся кольцевом слое, ограниченном с торцов осесимметричным коническим дном и плоским диском, совершающим колебания относительно полости. В отличие от предыдущих работ [117], где деформируемая крышка вносила осесимметричное возмущение, здесь диск совершал прецессию, тем самым генерируя азимутальную моду ±1. Данный тип возмущения имеет много общих черт с возмущениями, вносимыми либрирующим цилиндром с наклонными торцами (Раздел 2.3) и круговыми колебаниями внутреннего ядра в сферической полости (Главы 4, 5). Таким образом, экспериментальная установка представляет собой богатую динамическую систему, которая поддерживает

- волновые аттракторы в осевом трапециевидном поперечном сечении;
- эквивалентный топографический бета-эффект из-за наличия конического дна, в условиях возмущающего фактора, играющего важный геофизический аспект.

В первом случае подробно исследованы линейные и слабонелинейные режимы, где вносимая энергия уравновешивается чисто вязкой диссипацией. Показано, что аттрактор является трёхмерным и возникает только в случае ретроградной прецессии, в соответствии с результатами предварительных численных расчетов [118]. Именно этому случаю посвящено основное внимание. Обнаружено, что наличие инерционно-волнового аттрактора оказывает сильное влияние на вторичные зональные течения: отстающее кольцеобразное зональное течение генерируется в окрестности радиальной координаты фокусировочного отражения аттрактора на коническом дне установки. Смещение точки фокусировочного отражения к внешней цилиндрической стенке приводит к увеличению радиуса жидкого кольца. В неравномерно вращающейся призме с трапециевидным сечением инерционно-волновой аттрактор генерирует циклонический поток, но в этом случае глубина жидкости уменьшается с увеличением радиуса [116], в отличие от рассматриваемой ситуации. По-видимому, механизм генерации связан с фазовой неоднородностью азимутальной скорости в вязком пограничном слое на наклонном дне. Последнее приводит к появлению ненулевой азимутальной завихренности, которая диффундирует в объем жидкости.

По мере увеличения амплитуды прецессионного воздействия в полости развивается серия нелинейных режимов, причём можно выделить четыре отдельных случая. Во-первых ($b = 0.73$ мм), явно реализуется неустойчивость триадного резонанса, генерирующая две вторичные волны с довольно высокими азимутальными числами, $k = 8$ и $k = -9$. В свою очередь подкачка энергии в данные моды идет от первичной волны с азимутальным числом $k = -1$. В [А3] показано, что радиальные компоненты волновых векторов $\mathbf{k}_r$ для всей триады, непосредственно наблюдаемые в поперечном сечении полости, образуют замкнутый треугольник. Возбуждение неустойчивости триадного резонанса сопровождается генерацией опережающего течения в окрестности внутреннего цилиндра.

Во втором случае ($b = 1.17$ мм) наблюдается появление пиков в низкочастотной области спектра. Это обстоятельство приводит к генерации ретроградного зонального течения в окрестности внутреннего цилиндра (т.е. зональное тече-

ние инвертировано по направлению по сравнению со случаем первоначального развития триадного резонанса). Азимутальные волновые числа уменьшаются, а интенсивное зональное существенным образом влияет на дисперсионное соотношение для волновых триад [А3].

В третьем случае ($b = 2.01$мм) частотный спектр имеет значительный непрерывный фон и богатое дискретное содержимое в низкочастотном диапазоне. При этом скорость ретроградного зонального течения в окрестности внутреннего цилиндра увеличивается. Наконец, при $b = 2.46$ мм «перегретое» состояние волновой турбулентности претерпевает «фазовый переход»: непрерывный фон частотного спектра резко уменьшается, а структура течения упрощается в том смысле, что крупномасштабные азимутальные структуры становятся явно доминирующими.

Изучено дисперсионное соотношение крупномасштабных азимутально периодических осреднённых структур. Показано, что последние можно интерпретировать как волны Россби. Радиальное положение вихрей хорошо коррелирует с радиальной координатой фокусировочного отражения волнового аттрактора от наклонной границы полости. Экспериментально обнаружена тенденция к уменьшению среднего азимутального волнового числа k_R с ростом амплитуды прецессионного воздействия. В изученном диапазоне амплитуд значение волновое число уменьшается с 9 (начало неустойчивости триадного резонанса) до 5, в то время как все остальные параметры системы (частота прецессии и число Экмана) сохраняются.

Выполненные эксперименты затрагивают важные вопросы о механизмах выбора частот и волновых чисел вторичных волн, генерируемых неустойчивостями. Этот вопрос был довольно подробно изучен для самого начала развития триадного резонанса в стратифицированных по плотности и невращающихся жидкостях (см. обзор [193] и литературу в нем). Важным фактором является ненулевое значение вязкости, которое ограничивает ширину волновых лучей в аттракторе. Кроме того, как было отмечено в [28, 119], в замкнутых полостях важную роль в выборе параметров вторичных волн играют собственные моды колебаний жидко-

сти, в том числе так называемый глобальный резонанс (аналоги инерционных мод во вращающейся жидкости). Обнаруженные результаты показывают, что с увеличением амплитуды основного возмущения может развиваться целая серия энергетических каскадов по сценарию триадных взаимодействий. Наличие эквивалентного топографического бета-эффекта играет определяющую роль в выборе конкретных значений ключевых параметров низкочастотной вторичной волны, возбуждающей в конечном итоге волну Россби. Экспериментальные результаты связаны с течениями в прибрежной зоне океана в приливных условиях и особенностями течения в планетарных жидких оболочках.

ГЛАВА 4. ИНЕРЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И ОСРЕДНЁННЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Экспериментально исследуются потоки, возбуждаемые относительным движением внутреннего ядра во вращающейся сферической полости. Рассматриваются следующие постановки задачи:

- колебания ядра в отсутствие его дифференциального вращения (Раздел 4.1);
- колебания *свободного ядра* при наличии *собственного* дифференциального вращения (Разделы 4.2, 4.4);
- заданное дифференциальное вращение в отсутствие колебаний (Раздел 4.3).

В первом случае система вращается вокруг вертикальной оси, в свою очередь ядро движется по круговой траектории в экваториальной плоскости полости. Рассматриваются сонаправленное (опережающее) и противонаправленное (отстающее) по отношению к глобальному вращению движение, которое является источником неосесимметричных инерционных волн. Пространственная структура пульсационного течения сильно зависит от значения безразмерной частоты вносимых возмущений n. Каждому режиму течений соответствует сильный нелинейный отклик жидкости в виде осреднённого зонального течения, представляющего собой систему вложенных геострофических жидких цилиндров, вращающихся с различными угловыми скоростями. Исследуется вклад инерционных волн в зональное течение в зависимости от чисел Экмана и Рейнольдса. Показано, что за пределами области частот существования инерционных волн структура зонального течения напоминает классический столбик Тейлора–Праудмена, внутри которого жидкость совершает практически твердотельное вращение.

Детально исследован частный случай колебаний свободного ядра, совершающего дифференциальное вращение относительно полости, с частотой $n=-1$. Выбор постановки задачи обусловлен простотой реализации эксперимента. При быстром вращении сферической полости вокруг горизонтальной оси сферическое ядро, плотность которого меньше плотности жидкости, центрифугируется и в лабораторной системе отсчёта располагается на некотором стационарном расстоя-

нии от оси вращения. С точки зрения системы отсчёта полости поле силы тяжести вызывает круговые колебания ядра в направлении, противоположном вращению и его дифференциальное вращение. Исследуется динамика ядра и жидкости в зависимости от величины безразмерного ускорения осциллирующего поля силы тяжести и вязкости жидкости. Проведены дополнительные эксперименты с ядром, расположенным строго в центре полости и совершающим заданное дифференциальное вращение. Сделан вывод о независимом проявлении двух механизмов генерации потоков, действующих в экмановских пограничных слоях при вращении ядра относительно полости и в осциллирующих пограничных слоях при его колебаниях.

Наконец, исследовано влияние многочастотных колебаний свободного ядра на его осреднённую динамику и структуру осреднённых течений. Показано, что при одновременном наличии нескольких осциллирующих полей результирующее течение определяется линейной суперпозицией течений, возбуждаемых колебаниями с различными частотами. Результаты исследований опубликованы в работах [А5, А8–А10, А15, А19, А22–А24, А26, Б3].

4.1. Динамика жидкости в отсутствие дифференциального вращения ядра

4.1.1. Экспериментальная установка и методика

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 4.1. Лёгкое сферическое ядро радиуса $R_1 = 17.7$ мм расположено в заполненной маловязкой жидкостью сферической полости радиуса $R_2 = 36.0$ мм. Полость вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью Ω_{rot}. Ядро не совершает дифференциальное вращение, но сохраняет возможность радиального смещения в поперечном оси вращения направлении. Для этой цели оно соединено с нижним полюсом кюветы при помощи тонкой нейлоновой лески толщиной 0.37 мм. Длина лески такова, что в отсутствие внешнего переменного инерционного поля ядро располагается в геометрическом центре полости. В качестве внутреннего ядра используются полые сферические тела одинакового радиуса, но разной плотности $\rho_C = 0.22$ и 0.93г/см^3. Последнее влияет на инерционный отклик системы на

внешнее механическое воздействие. В качестве рабочей жидкости используются водные растворы глицерина кинематической вязкости $\nu = 1.7 \div 5.7$ сСт и плотности $\rho_L = 1 \div 1.150$ г/см^3. В отдельных экспериментах в жидкость добавляется поваренная соль NaCl концентрации C = 24% с целью повышения плотности ρ_L до 1.180 г/см^3 при незначительном повышении вязкости.

Кювета изготовлена из двух прозрачных плексигласовых параллелепипедов, в которых выточены две полусферы одинакового радиуса. Несоосность соединения полусфер и отклонение от сферичности не превышают 0.3%. Полусферы изготовлены на вертикальном фрезерном станке следующим образом. Предварительно подготовленный плексигласовый параллелепипед закрепляется в поворотном столе на рабочей поверхности станка. Дисковая фреза устанавливается под углом 45º по отношению к верхней грани параллелепипеда. Полусфера получается при последовательном опускании фрезы в оргстекло и вращении заготовки вокруг оси. Радиус сферы определяется радиусом фрезы. После изготовления первой полусферы в поворотный стол крепится второй, точно такой же параллелепипед, и процедура повторяется. Прямоугольная форма внешней границы полости позволяет в значительной степени снизить оптические искажения как при наблюдении вдоль оси вращения, так и сбоку. Кювета закреплена в шарикоподшипниках неподвижных опор, которые, в свою очередь, жестко соединены с массивной платформой. С одной из сторон кюветы в качестве опоры используется подшипник большого диаметра, что позволяет наблюдать положение тела и всю полость вдоль оси вращения. Подробное описание конструкции можно найти в [А10].

Для возбуждения поперечных оси вращения колебаний ядра используются две методики. В первом случае кювета установлена на платформе кругового вибростенда (рис. 4.1). Перемещение в плоскости *xy* осуществляется благодаря системе линейных направляющих, расположенных в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Верхние направляющие крепятся непосредственно к платформе, на которой установлена кювета, а нижняя – к раме вибростенда. Движение платформы по круговой траектории задается вращающимся диском с эксцентрично закрепленным на нем пальцем. Вращение диска со скоростью Ω_{osc} задается

при помощи серводвигателя EMG-15ASA22 и измеряется цифровым тахометром. Точность измерения частоты составляет 0.01 рад/с, точность поддержания скорости вращения – не менее 0.2%. Скорость вращения полости принимает значения $\Omega_{rot} = 31.4, 62.8$ рад/с. В то же время скорость вращения платформы в лабораторной системе отсчёта меняется в диапазоне $\Omega_{osc} = 0 \div 92.4$ рад/с. Движение платформы возбуждает в неинерциальной системе отсчёта, связанной с кюветой, поляризованное по кругу силовое поле, вращающееся со скоростью $\Omega = \pm\Omega_{osc} - \Omega_{rot}$. Знак перед скоростью Ω_{osc} определяется направлением круговых колебаний относительно направления вращения полости. Направление наведенного инерционного поля (опережающее или отстающее) определяется величиной скорости и направлением движения платформы в лабораторной системе отсчёта. В качестве безразмерной характеристики частоты колебаний ядра относительно полости используется параметр $n = \Omega / \Omega_{rot} = -2.3 \div 2.0$.

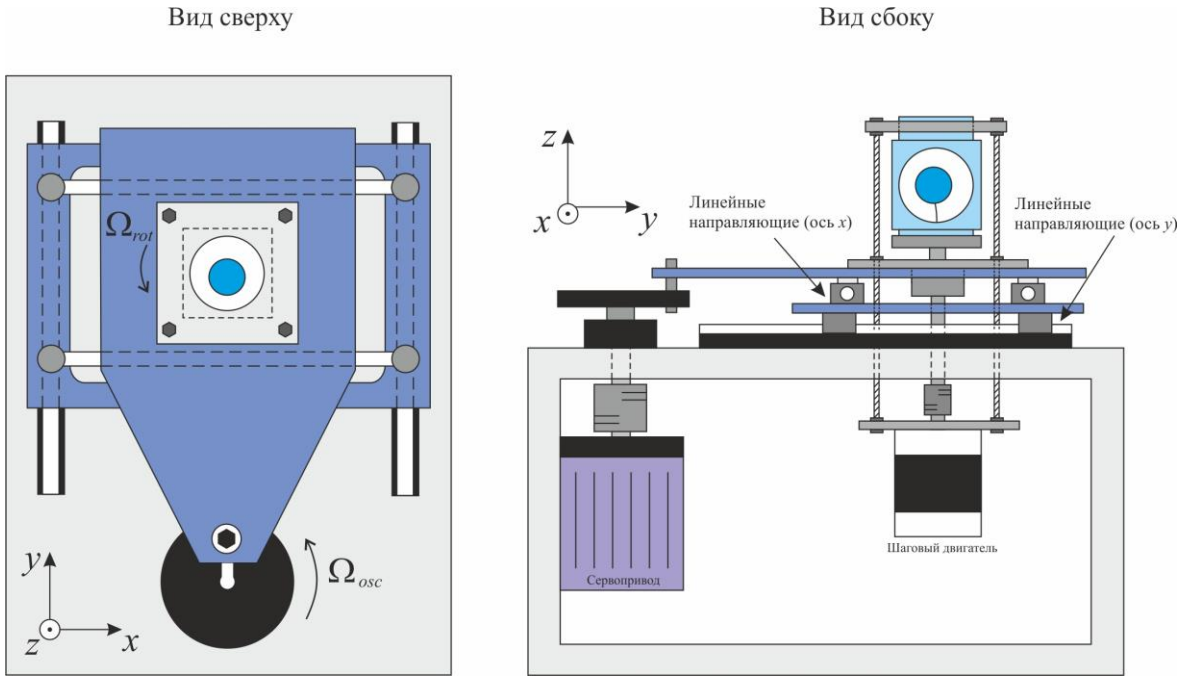


Рисунок 4.1 – Схематическое изображение кругового вибростенда, а также схема расположения кюветы на нём

Амплитуда круговых вибраций задается положением пальца относительно оси вращения диска и варьируется в диапазоне $b_{osc} = 0 \div 1.2$ мм. Внутреннее ядро откликается на внешнее инерционное поле круговыми колебаниями в экватори-

альной плоскости. При этом амплитуда колебаний ядра относительно полости зависит от значения относительной плотности $\rho = \rho_C / \rho_L$ и варьируется в диапазоне $b = 0 \div 1.45$ мм. Такая методика оказывается особенно эффективной для возбуждения отстающих колебаний ($n < 0$) вплоть до скорости вращения $\Omega_{rot} = 62.8$ рад/с. Эксперименты на круговом вибростенде при опережающих колебаниях ($n > 0$) проводятся при меньшем значении скорости $\Omega_{rot} = 31.4$ рад/с. Это связано с тем, что при скорости вращения $\Omega_{rot} = 62.8$ рад/с требуются более существенные вибрационные ускорения $b_{osc}\Omega_{osc}^2$, которые недостижимы на данной экспериментальной установке.

Отмеченный недостаток устраняется при использовании вибростенда, задающего линейно-поляризованные вибрации. В этом случае кювета устанавливается на столик электродинамического вибростенда типа VEB GERATE UND REGLER WERKE TELTOW 3.19.39 (рис. 4.2). В лабораторной системе отсчёта вибрации происходят по закону $b_{osc}\sin\Omega_{osc}t$ и направлены поперек оси вращения. Колебания задаются с помощью генератора ZET 210 SigmaUSB, сигнал с которого регулируется с помощью усилителя Digisynthetic DP3200. Амплитуда вибраций b_{osc} вычисляется путем анализа осциллограммы сигнала, полученного с одноосного акселерометра типа ПАМТ 4 0.225, и дополнительно контролируется оптическими методами. Амплитуда варьируется в диапазоне $b_{osc} = 0 \div 2$ мм. Спектральный анализ сигнала с акселерометра указывает, что основная гармоника значительно превышает паразитные. Относительная погрешность измерения амплитуды вибраций не превышает 5%. Как будет показано далее, поступательные колебания полости в лабораторной системе отсчёта возбуждают круговые трансляционные колебания ядра во вращающейся системе отсчёта. В данном случае скорость вращения полости составляет $\Omega_{rot} = 62.8$ рад/с, при этом круговая частота вибраций изменяется в диапазоне $\Omega_{osc} = 47.1 \div 251.2$ рад/с, что соответствует безразмерным частотам $n = -0.25 \div 3.0$. Параметры, при которых проводятся эксперименты, для обеих методик суммированы в Табл. 4.1.

Вращение полости со скоростью Ω_{rot} задается шаговым двигателем FL86STH118-6004A, который питается от источника постоянного тока Mastech HY5005E и управляется драйвером SMD-42. Точность поддержания скорости вращения Ω_{rot} не хуже 0.1 рад/с. Число Экмана, как и ранее, рассчитывается через радиус ядра и принимает значения $\mathrm{E} = \nu / \Omega_{rot} R_1^2 = 8.6 \cdot 10^{-5} \div 1.7 \cdot 10^{-4}$.

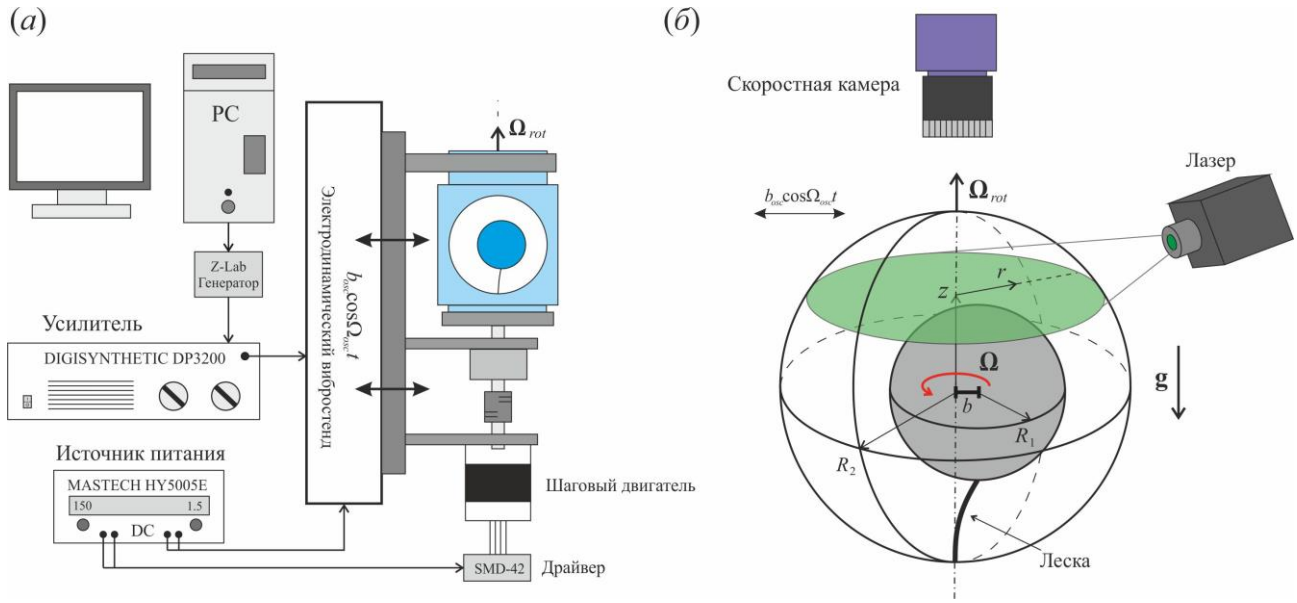


Рисунок 4.2 – Схема расположения кюветы на линейном вибростенде (*а*), а также схемы колебаний ядра относительно полости и исследования течений (*б*)

Методика проведения экспериментов следующая. Первоначально кювета приводится в равномерное вращение вокруг вертикальной оси со скоростью Ω_{rot}. После установления твердотельного режима вращения жидкости включаются вибрации полости с частотой Ω_{osc} и амплитудой b_{osc}. В ходе эксперимента амплитуда колебаний полости поддерживается постоянной, в то время как частота Ω_{osc} изменяется. Отметим, что на каждом шаге эксперимента ожидается выход системы на установившийся режим. При включении вибраций ядро откликается круговыми осцилляциями с частотой Ω и одновременно закручивается в азимутальном направлении относительно полости. Наблюдения показывают, что за время менее 1 минуты вязкие сдвиговые напряжения на границе ядра уравновешиваются упругим моментом сил лески, и дифференциальное вращение ядра $\Delta\Omega_C$ исчезает. Для

визуализации движения жидкости в меридиональной и азимутальной плоскости кюветы используются пластиковые частицы-трассеры размером $\sim 60\,\mu$м и средней плотностью ~ 1.05 г/см^3.

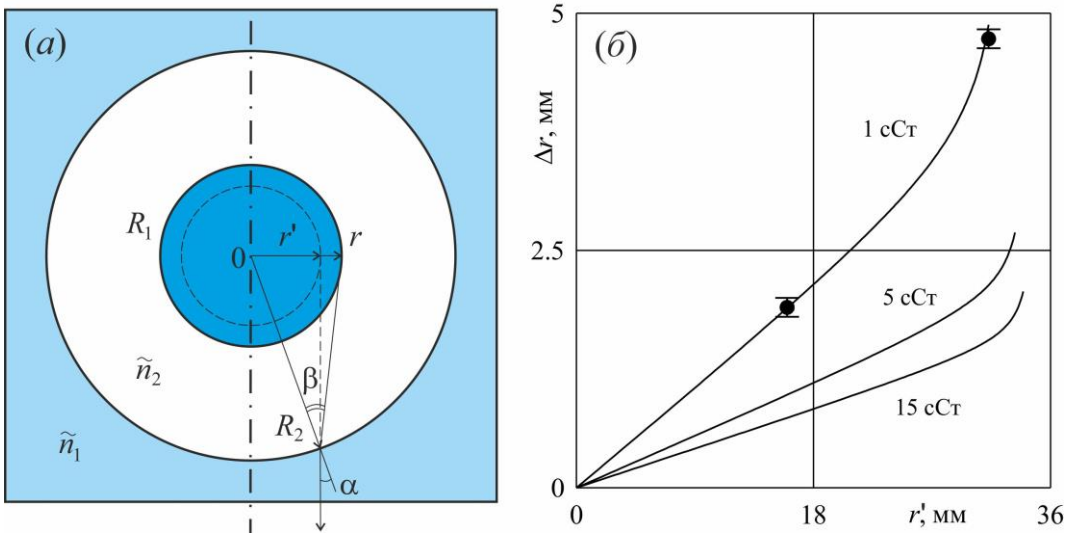


Рисунок 4.3 – Оптический ход лучей в кювете для случая положения сферы в экваториальной плоскости (*а*); сплошной линией показана граница тела, штриховой – ее изображение. На фрагменте (*б*) приведена поправка Δr к измерениям положения границы сферы (положения точки, где измеряется азимутальная скорость) вдоль радиального направления r'; круги – экспериментальные точки

При расчете профиля скорости учитывается его искажение в результате преломления света на сферической поверхности кюветы, которая работает как рассеивающая линза (рис. 4.3*а*). Показатель преломления оргстекла $\tilde{n}_1 = 1.49$, а показатель преломления жидкости изменяется, $\tilde{n}_2 = 1.33 - 1.45$ (массовое содержание глицерина в воде варьируется в интервале $0 - 85\%$). С увеличением концентрации глицерина в воде (с понижением разности между $\tilde{n}_1$ и $\tilde{n}_2$) оптические искажения уменьшаются. В экспериментах с маловязкой жидкостью искажение размеров тела может быть существенным. Например, в отсутствие вращения сфера располагается вблизи верхней границы полости, при этом кажется, что сфера отстоит от границы на несколько миллиметров. Из оптической схемы видно, что реальное расстояние r, на котором измеряется азимутальная скорость жидкости, превосходит кажущееся r' на величину $\Delta r = r - r'$; на рис. 4.3*а* для примера пока-

зано искажение размера ядра. Пользуясь законом преломления света на границе жидкость – оргстекло можно найти истинное положение границы ядра

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1}. \qquad (4.1)$$

Величина поправки с учётом координаты светового ножа z:

$$\Delta r=\left(R_2\sqrt{1-a^2}-z\right)\tan\arcsin\left[a\frac{\tilde{n}_1}{\tilde{n}_2}\left(\sqrt{1-a^2}-\sqrt{\frac{\tilde{n}_2^2}{\tilde{n}_1^2}-a^2}\right)\right], \qquad (4.2)$$

где $a=r'/R_2$; z отсчитывается от экваториальной плоскости. Зависимость $\Delta r(r')$ представлена на рис. 4.3*б*. Экспериментальные точки, полученные для центрального и крайнего положений тела, хорошо согласуются с расчетной кривой.

Таблица 4.1. Основные обозначения и значения параметров в экспериментах

Параметр	Определение	Значение
R_1	Радиус ядра	17.7 мм
R_2	Радиус сферической полости	36.0 мм
$\eta=R_1/R_2$	Аспектное соотношение	0.49
Ω_{rot}	Угловая скорость вращения полости	31.4; 62.8 рад/с
Ω_{osc}	Частота колебаний полости в лаб. СО	0 ÷ 251.2 рад/с
Ω_C	Угловая скорость вращения свободного ядра в лаб. СО	
$\Delta\Omega_C=\Omega_C-\Omega_{rot}$	Угловая скорость дифференциального вращения ядра	
$\Omega=\pm\Omega_{osc}-\Omega_{rot}$	Частота колебаний ядра относительно полости	–144.4 ÷ 188.4 рад/с
$n=\Omega/\Omega_{rot}$	Безразмерная частота колебаний ядра	–2.3 ÷ 3.0
b_{osc}	Амплитуда колебаний полости (лаб. СО)	0 ÷ 2.0 мм
b	Амплитуда колебаний ядра относительно полости	0 ÷ 3.2 мм
b/R_1	Безразмерная амплитуда колебаний ядра относительно полости	0 ÷ 0.18
ν	Кинематическая вязкость жидкости	1.0 ÷ 5.7 сСт
$\delta=\sqrt{2\nu/\Omega}$	Толщина динамических пограничных слоёв	<1.4 мм
$\rho=\rho_C/\rho_L$	Относительная средняя плотность ядра	0.19 ÷ 0.21; 0.82
$\mathrm{E}=\nu/\left(\Omega_{rot}R_1^2\right)$	Число Экмана	$8.6\cdot10^{-5}\div1.7\cdot10^{-4}$
$\mathrm{Re}_b=b^2/R_1\delta\mathrm{E}$	Вибрационное число Рейнольдса	$<10^4$
$\mathrm{Ro}_b=b^2/R_1\delta$	Вибрационный аналог числа Россби	<1.6
$\mathrm{Re}=\lvert\Delta\Omega_C\rvert R_1^2/\nu$	Число Рейнольдса	$<10^3$

В целом для изучения структуры течений и полей скорости используется PIV-методика, ранее получившая подробное описание в Главе 2. В связи с этим отметим здесь только новые подходы для изучения движения жидкости. Для визуализации потоков вблизи границы полости дополнительно используются пластиковые частицы, плотность которых $\sim 1.14\,\text{г/см}^3$ незначительно превосходит плотность жидкости. Под действием центробежной силы такие частицы располагаются преимущественно вблизи стенки полости. Размер этих частиц колеблется в пределах $\sim 0.1-0.5\,\text{мм}$. Самые крупные из них превосходят толщину динамических пограничных слоёв и служат для визуализации потоков за пределами динамических слоёв, при этом мелкая фракция визуализирует течение непосредственно в слоях. В отдельных экспериментах в жидкость добавляется измельченный активированный уголь (размер частиц не превышает 100 мкм). Плотность угольных частиц превосходит плотность жидкости, они также располагаются вблизи границы полости. В отличие от крупных пластиковых частиц размер угольных частиц существенно меньше толщины динамических пограничных слоёв, и их распределение на стенке полости позволяет судить о направлении потоков непосредственно у границы полости.

4.1.2. Траектория движения ядра относительно полости

В отсутствие вибраций под действием центробежной силы ядро располагается на оси вращения полости. Вибрационное воздействие приводит к созданию в неинерциальной системе отсчёта вращающегося силового поля с частотой Ω. Последнее вызывает радиальное смещение ядра в поперечном оси вращения направлении. Для исследования динамики ядра относительно полости используется скоростная видеокамера, которая закрепляется над вибрирующей установкой. Для минимизации ошибки на параллакс среднее положение оси симметрии полости совмещено с оптической осью объектива камеры. На рис. 4.4 представлена траектория движения ядра относительно полости при различных частотах *n*. В первом случае (рис. 4.4*a*) ось вращения полости совершает поступательное круговое движение в горизонтальной плоскости *xy* с частотой Ω_{osc}. Ядро откликается на внеш-

нее воздействие и совершает колебания относительно полости по закону $\mathbf{r}_C = b\left(\sin\Omega t\mathbf{i} + \cos\Omega t\mathbf{j}\right)$ с амплитудой b, которая отличается от амплитуды колебаний полости b_{osc}. Видно, что в широком диапазоне частот траектория движения ядра близка к круговой. С изменением частоты вибраций величина b может меняться, что связано с наличием у ядра собственных трансляционных круговых мод. Природа этих мод связана с наличием ненулевой плавучести ядра. В связи с этим в исследуемом диапазоне частот существуют области интенсификации амплитуды b.

Наличие собственных частот позволяет возбудить круговые колебания ядра вибрациями линейной поляризации [А5, А8, А9]. Инерционный отклик ядра на вибрационное воздействие наблюдается вблизи двух резонансных частот. Это объясняется тем, что линейные вибрации в лабораторной системе отсчёта можно разложить на две поляризованные по кругу составляющие:

$$b_{osc}\sin\Omega_{osc}t\mathbf{i} = \frac{b_{osc}}{2}\left(\sin\Omega_{osc}t\mathbf{i} + \cos\Omega_{osc}t\mathbf{j}\right) + \frac{b_{osc}}{2}\left(\sin\Omega_{osc}t\mathbf{i} - \cos\Omega_{osc}t\mathbf{j}\right). \qquad (4.3)$$

Эти колебания противоположны по направлению и соответствуют двум вращающимся в противоположных направлениях инерционным полям. Одно поле вращается в направлении вращения полости с частотой $+\Omega_{osc}$, а другое – в противоположном направлении с частотой $-\Omega_{osc}$. Соответственно в системе отсчёта полости эти поля вращаются с безразмерными частотами $n_+ = \Omega/\Omega_{rot} > 0$ и $n_- = \Omega/\Omega_{rot} < 0$. В случае с линейными вибрациями рассматриваются колебания, возбуждаемые только опережающим инерционным полем. Так, у ядра с относительной плотностью $\rho = 0.19$ собственные частоты опережающих и отстающих круговых колебаний составляют $n_+^* \approx 1.4$ и $n_-^* \approx -0.13$ соответственно. Например, при частоте воздействия $f_{osc} = \Omega_{osc}/2\pi = 25.0\,\text{Гц}$ внешнее инерционное поле может быть разложено на компоненты $n_+ = 1.50$ и $n_- = -3.50$. Очевидно, что инерционный отклик будет наблюдаться только на положительную компоненту, поскольку противоположно вращающееся силовое поле находится далеко за пределами резонансных областей и в силу малости вибрационного ускорения практиче-

ски не вызывает колебаний ядра. Отметим, что границы резонансной области опережающего движения ядра зависят от амплитуды воздействия и могут лежать в достаточно широком диапазоне частот. Например, при амплитуде $b_{osc} = 0.40$ мм этот диапазон составляет $n = 0.7 - 1.7$. При удалении от резонансной частоты инерционный отклик ядра уменьшается, при этом его траектория становится эллиптической (например, при частоте $n = 2.0$, рис. 4.4*б*). Оценки показывают, что максимальное смещение ядра от оси вращения $b / R_1 < 0.18$, а соответствующий выход из экваториальной плоскости не превышает величины $\Delta z / R_1 < 0.016$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что осевая составляющая колебаний ядра не вносит существенного вклада в течение жидкости.

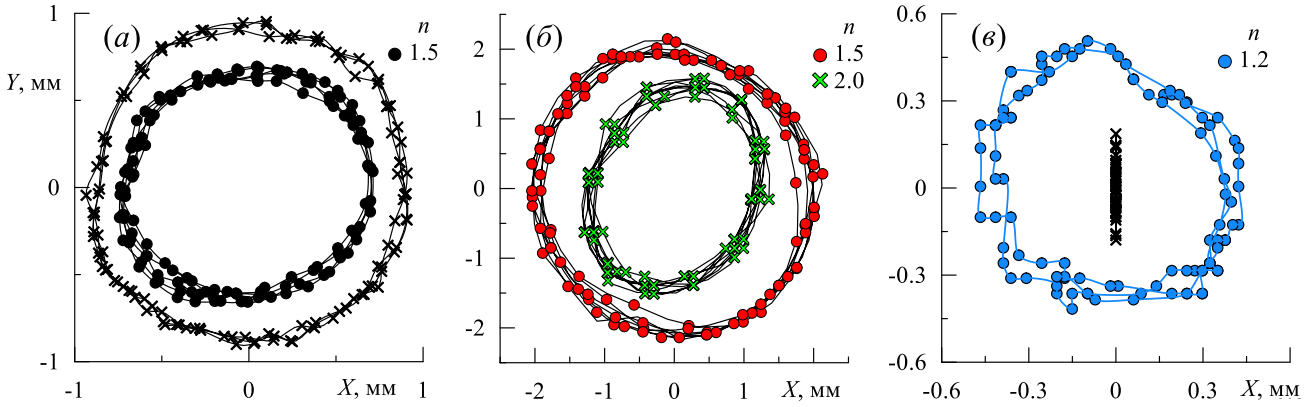


Рисунок 4.4 – Примеры траекторий движения ядра относительно полости в экваториальной плоскости при круговых (*а*) и линейно-поляризованных (*б*, *в*) колебаниях полости. Чёрными крестиками на (*а*) и (*в*) показана траектория движения полости в лабораторной (неподвижной) системе отсчёта

Стоит отметить, что значения частот n_+^* и n_-^* не зависят от частоты внешнего воздействия и определяются только инерционными свойствами ядра. Подробное исследование резонансных областей колебаний свободного ядра будет далее рассмотрено в Разделе 4.4. Синими точками на рис. 4.4*в* показаны результаты измерений положения ядра в системе отсчёта полости за время нескольких периодов вращения. Видно, что траектория колебаний, действительно, также как и в первом случае, близка к круговой, что подтверждает сделанные рассуждения.

4.1.3. Линейная динамика инерционных волн

В диапазоне частот $-2 < n < 2$ колебания ядра являются источником инерционных волн, которые образуют систему конусообразных свободных сдвиговых слоёв в объеме жидкости. В отличие от цилиндрической геометрии волны рождаются на критических широтах (точках излучения) колеблющегося ядра и распространяются касательно к его границе. Как было показано в [94], рождение волнового движения связано с разрушением пограничного слоя Экмана на сферической поверхности. Направление распространения волн также определяется отношением частоты колебаний к удвоенной скорости вращения системы, $\theta = \arcsin(n/2)$. При этом, достигая твердой границы, инерционные волны отражаются с сохранением угла θ относительно оси вращения.

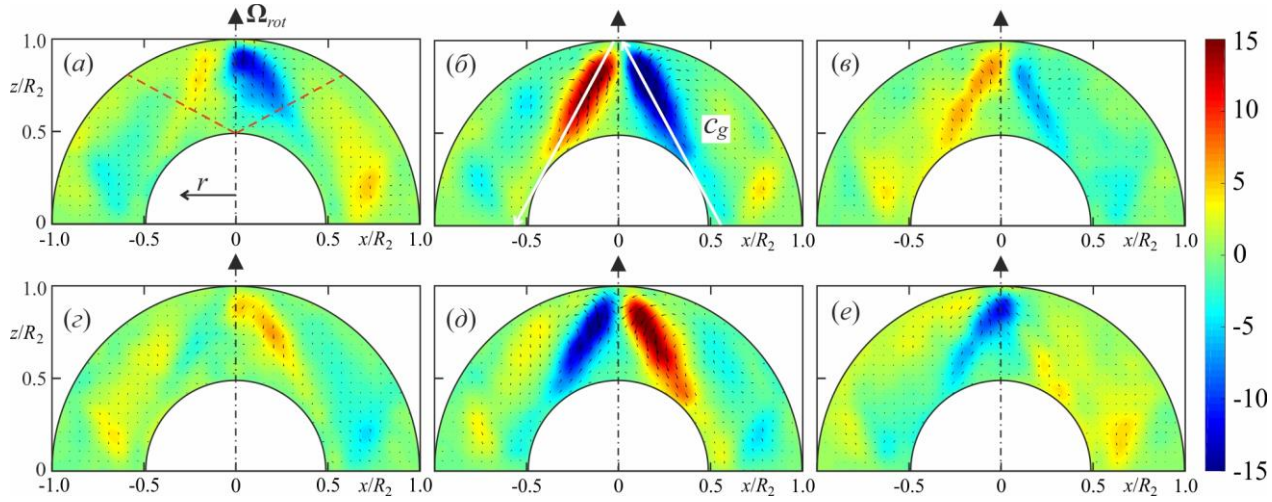


Рисунок 4.5 – Мгновенные поля скорости в фиксированной меридиональной плоскости кюветы при частоте $n = 0.95$, амплитуде $b = 0.09$ мм и различных фазах осцилляций ядра: $t/T_0 = 0.05,\ 0.25,\ 0.45,\ 0.55,\ 0.75,\ 0.95$ (*а–е*). Число Экмана составляет $E = 1.48 \cdot 10^{-4}$. Цветом показана вертикальная компонента скорости u_z (мм/с), белыми стрелками на (*б*) показано теоретически рассчитанное направление распространения волновых лучей, соответствующих частоте воздействия

На рис. 4.5 представлена последовательность мгновенных полей скорости в меридиональной плоскости в различные моменты времени при частоте $n = 0.95$. Эксперименты показывают, что инерционные волны являются неосесимметричными, что объясняется спецификой колебаний ядра с азимутальным волновым

числом $k=1$. В процессе осцилляций величина и знак вертикальной компоненты скорости u_z периодически меняются, при этом поля скорости в противоположных фазах колебаний (рис. 4.5*а–в* и *г–е*) являются практически зеркально симметричными. После отражения от границ полости направление групповой скорости волновых лучей меняется, а значение угла θ хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями (белые стрелки) [1]. Стоит отметить, что наиболее интенсивное пульсационное движение жидкости наблюдается внутри тангенциального цилиндра, являющегося геометрическим продолжением ядра вдоль оси вращения.

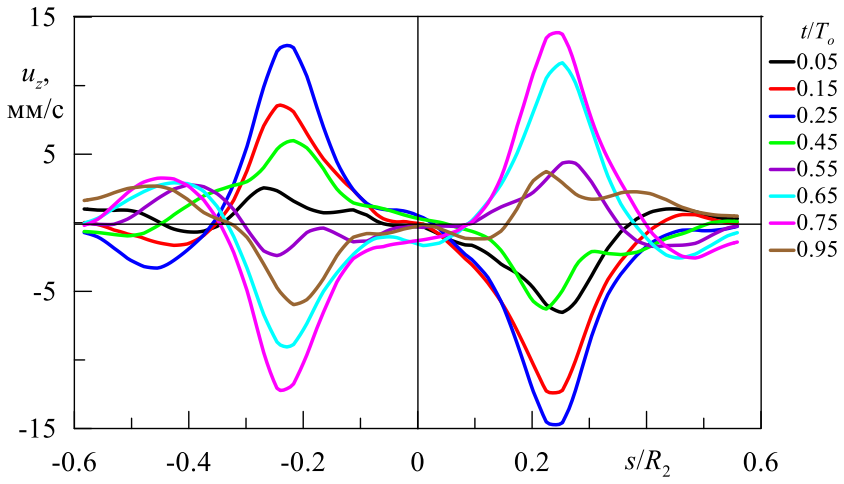


Рисунок 4.6 – Мгновенные профили вертикальной скорости u_z в меридиональной плоскости вдоль красной штриховой линии на рис. 4.5 при n = 0.95, b = 0.09 мм и различных фазах колебаний ядра

Примеры профилей вертикальной компоненты скорости в различные моменты времени при частоте n = 0.95 представлены на рис. 4.6. Измерение скорости проводилось вдоль красной штриховой линии, положение которой относительно оси вращения определялось как $\beta=\arccos(n/2)$. Величина и знак скорости жидкости в меридиональной плоскости определяются радиальным положением ядра. Максимальное значение скорости наблюдается в моменты времени $t/T_0=0.25$ и 0.75, когда радиальное смещение достигает максимального значения в фиксированной меридиональной плоскости, для которой осуществляются измерения. В фазе максимального смещения вправо (рис. 4.5*б*) жидкость выталкивает-

ся из верхней правой точки излучения под углом θ влево вверх по направлению к оси вращения, где далее испытывает отражение. В то же время от верхней левой точки излучения возмущение распространяется влево вниз. Движение жидкости в нижней полусфере является зеркально симметричным и не показано, поскольку в экспериментах освещение кюветы лазерным ножом осуществлялось сверху. В фазе максимального смещения влево (рис. 4.5*д*) инерционная волна распространяется в противоположном направлении. Отметим, что на расстоянии $s/R_2 \approx 0.45$ (рис. 4.6) наблюдается вторая серия экстремумов существенно меньшей интенсивности. Их наличие связано с последующей серией отражений волновых лучей от границ полости.

В горизонтальной плоскости *xy* структура течения представляет собой сложную систему сдвиговых слоёв, закрученных в спираль (рис. 4.7). В экваториальной плоскости (рис. 4.7*а*) наблюдается одна спираль, в то время как в плоскости $z / R_2 = 0.6$ – две (рис. 4.7*б*). Первая располагается вблизи оси вращения $r / R_2 < 0.5$, а вторая – на периферии $r / R_2 > 0.5$. Это качественно отличается от осесимметричных наклонных сдвиговых слоёв, генерируемых, например, либрациями в осесимметричных полостях [13, 43, 97, 100, 225, A17]. Наиболее близкой по постановке к рассматриваемой ситуации является прецессия оси вращения сферы [34, 35, 95, 135, 136, 209] или прецессия крышки в осесимметричной полости, рассмотренная в Главе 3. Обе спирали вращаются вдоль азимута синфазно с движением ядра по круговой траектории. Т.е. в системе отсчёта ядра колебания жидкости отсутствуют. На рис. 4.7*в* показана трансформация мгновенного профиля азимутальной скорости u_φ со временем в экваториальной плоскости. Здесь хорошо видно, что в системе отсчёта полости возмущение представляет собой бегущую азимутальную волну с частотой *n*. Таким образом, наблюдаемые пульсации жидкости в фиксированной меридиональной плоскости связаны с поворотом азимутально-неоднородной структуры относительно полости во времени t / T_0. Интенсивность движения жидкости во внутренней и внешней спиралях зависит от безразмерной частоты осцилляций *n*. Как будет показано далее, это объясняется

тем, что при изменении частоты n в полости возбуждаются различные инерционные режимы. Можно отметить, что наблюдаемые спиральные структуры (рис. 4.7*б*) напоминают инерционные моды в приполярной области конвективной зоны Солнца [242, 243].

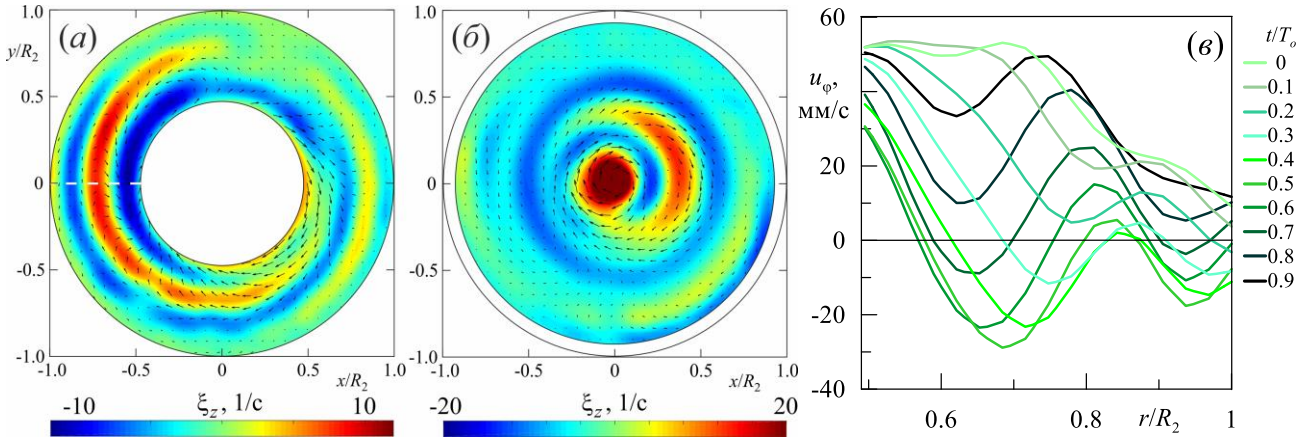


Рисунок 4.7 – Мгновенные поля скорости в экваториальной плоскости ($z/R_2 = 0$) и в плоскости $z/R_2 = 0.60$ при $n = 0.90$ и $b = 0.19$ мм (*а* и *б*, соответственно); здесь и далее направление вращения полости – по часовой стрелке. На фрагменте (*в*) показаны профили азимутальной скорости u_φ вдоль белой штриховой линии на (*а*)

Стоит отметить, что представленная структура течения сильно отягощена опережающим зональным потоком. На это указывает преобладание положительных значений скорости в поле скорости на рис. 4.7*в*, а также формирование циклонического течения вблизи оси вращения на расстоянии $r / R_2 < 0.2$. Описание нелинейного отклика жидкости будет сделано в Разделе 4.1.4.

4.1.3.1. Роль направления круговых колебаний ядра

Как и ранее, для характеристики полного динамического отклика жидкости на вносимые возмущения рассчитывается средняя скорость осцилляций в меридиональной плоскости по формулам (2.7–2.8): $< u > = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left[\frac{1}{N} \sum \left(u_z^2 + u_r^2 \right)^{1/2} \right] \mathrm{d}t$.

Поскольку в экспериментах часть плоскости находится в области геометрической тени, создаваемой ядром, и не освещается лазерным ножом, для расчетов используется полукольцевая область, ограниченная экватором. Для расчетов $< u >$ ис-

пользуются данные, полученные по не менее десяти периодам вибраций. Для сравнения результатов экспериментов, полученных при разных значениях амплитуды и частоты, средняя по времени скорость жидкости нормируется на скорость пульсационного движения ядра $b\Omega$.

Безразмерная скорость жидкости $<u>/b\Omega$ для отрицательных и положительных частот n представлена на рис. 4.8. Видно, что зависимость имеет немонотонный вид с серией ярко выраженных экстремумов, соответствующих резонансному возбуждению различных инерционных режимов. Следует отметить, что большинство результатов, полученных при различных параметрах вибраций, хорошо согласуются между собой. Исключение составляет случай линейно поляризованных вибраций с частотами $-0.3 < n < 0.2$ (желтые крестики, lin. 1). Это обусловлено тем, что при $n < 0.2$ система выходит из области резонанса, а траектория движения ядра отличается от круговой.

Перейдем к обсуждению влияния знака безразмерной частоты n на особенности линейного отклика. Интенсивность осциллирующего движения жидкости оказывается сильно чувствительной к направлению круговых колебаний (рис. 4.8). График зависимости $<u>/b\Omega(n)$ является несимметричным по отношению к знаку n, при этом наибольшие значения скорости достигаются в четырех максимумах: $n = 1.22, -0.23, -1.72$ и -1.90. Визуализация поля скорости PIV-методом показывает, что при одинаковых по величине, но противоположных по знаку частотах возбуждаются различные волновые режимы (рис. 4.9). Левый и центральный ряд картинок получены в момент максимального смещения ядра слева вправо. Это означает, что поля скоростей на двух противоположных значениях частоты соответствуют близким фазам колебаний. Дополнительно результаты экспериментов сравниваются с 2D лучевой моделью в меридиональной плоскости (рис. 4.9, правая колонка). Модель аналогична той, которая использовалась для цилиндрической полости, изменения касаются лишь геометрии (Раздел 2.3.1). Напомним, что важной особенностью работы программы является сохранение угла θ при отражении волновых лучей от границ ядра и полости. Предполагается, что в силу азимутальной неоднородности гармонического воздействия две проти-

воположные точки на критической широте дают разные волновые картины (в соответствии с описанием в предыдущем разделе). Отметим, что рассматривается невязкая модель, при этом пограничные слои на твёрдых стенках не учитываются. Кроме того, не учитывается влияние зонального течения на направление волновых лучей.

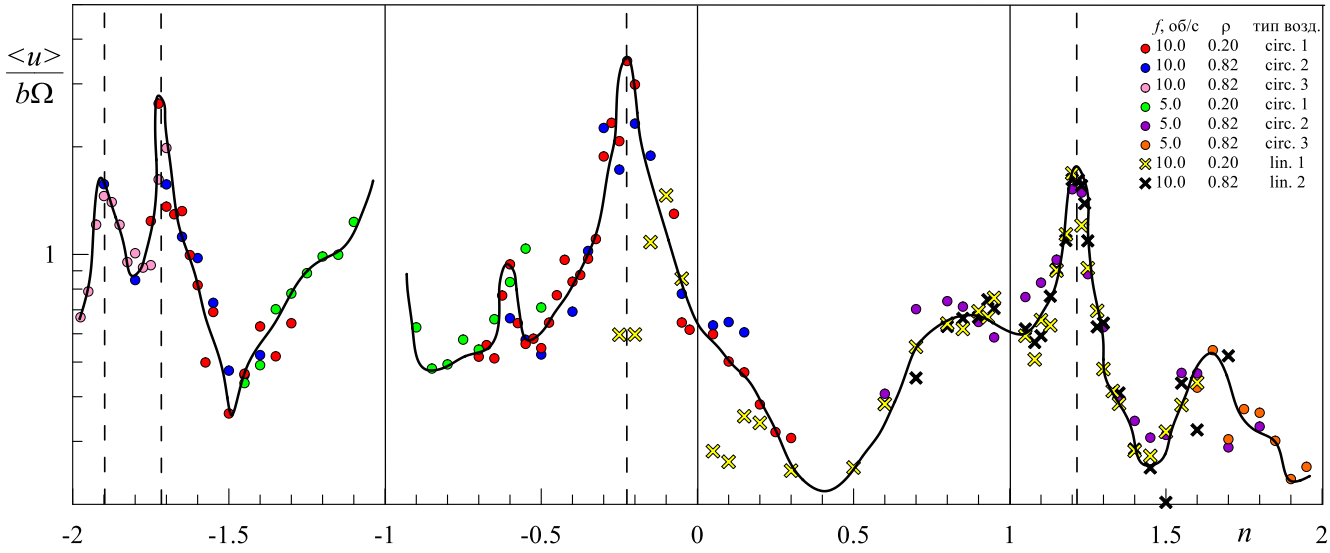


Рисунок 4.8 – Интенсивность осцилляционного течения в меридиональной плоскости в зависимости от безразмерной частоты n при круговых и линейных вибрациях полости. Номер в колонке «тип воздействия» соответствует различным амплитудам b_{osc}

Независимо от знака гармонического воздействия углы наклона отдельных волновых лучей хорошо согласуются с предсказаниями лучевой модели во всем диапазоне n. В то же время в большинстве случаев общая волновая картина для отрицательных частот не соответствует теоретическим предсказаниям. Так, например, при $n = -0.70$ в приполярной области возникает интенсивное вихревое течение, знак завихренности в котором меняется в течение периода колебаний. Аналогичные вихревые структуры, ориентированные по направлению распространения лучей, наблюдаются в приэкваториальной области вблизи критических широт. При положительной частоте n распространение инерционной волны не создает такой сильной меридиональной циркуляции, и траектория лучей совпадает с той, что наблюдается в модели. Стоит отметить, что в обоих случаях интеграль-

ная пульсационная скорость примерно одинаковая и составляет $< u > /b\Omega(n) \approx 0.5$.

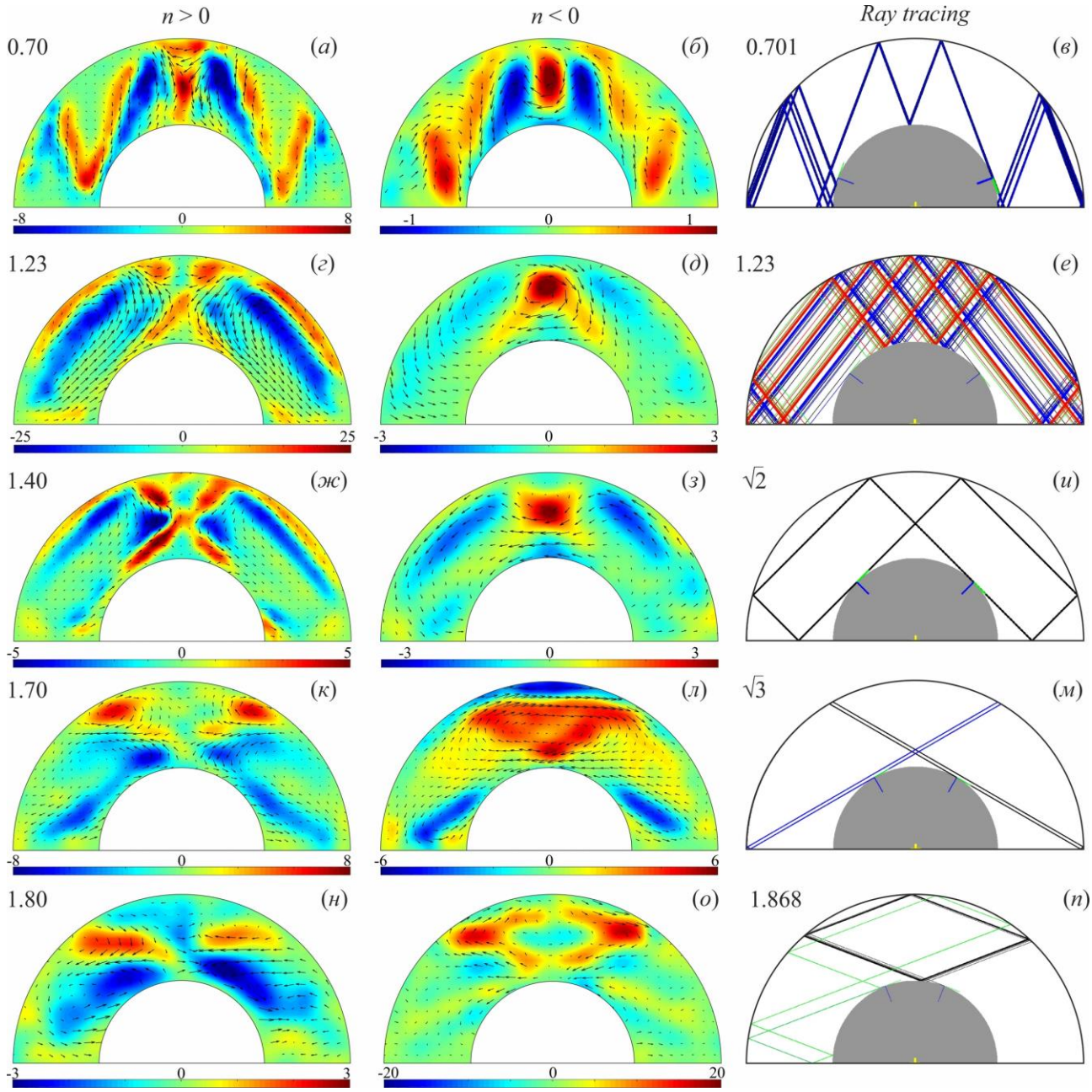


Рисунок 4.9 – Серия мгновенных полей скорости в фазе максимального смещения ядра слева направо при различных частотах n и $\mathrm{E} = 1.48 \cdot 10^{-4}$; цветом показана y-компонента завихренности (ось y направлена от нас). Рисунки в левом и центральном столбцах отличаются только знаком частоты n. В правом столбце показаны траектории распространения лучей в рамках линейной теории (представлены только первые 50 отражений); синими отметками показаны критические широты излучения волн; ось вращения направлена вертикально

В диапазоне частот $n = 0.8 \div 1.0$ средняя скорость пульсаций практически не меняется. При этом направление групповой скорости волновых лучей изменяется

в диапазоне $\theta = 23 \div 30°$, а мгновенная структура течения в целом подобна представленной на рис. 4.5*а*. В диапазоне частот $n = 1.00 \div 1.10$ происходит локальное уменьшение интенсивности пульсаций, которое сменяется резким ростом при увеличении безразмерной частоты n. Максимальное значение параметра $< u > / b\Omega(n) = 1.7$ достигается при частоте $n = 1.22$. Визуализация мгновенного поля скорости PIV-методом показывает, что структура течения (рис. 4.9*г*) качественно отличается от показанной на рис. 4.5*а*. В некоторых фазах колебаний отдельные волновые пучки не наблюдаются, при этом жидкость совершает интенсивное глобальное движение во всем сферическом слое.

При отрицательной частоте $n = -1.23$ (рис. 4.9*д*) структура течения отличается: наиболее интенсивное пульсационное движение сосредоточено в приполярном вихре, который не наблюдается при $n > 0$. В свою очередь лучевая картина в модели предсказывает геометрическую фокусировку энергии волн в волновой аттрактор (рис. 4.9*е*). На это указывают толстые линии, которые являются предельным циклом: первый луч, рожденный на критической широте, после серии отражений фокусируется на замкнутую траекторию. Учитывая, что критические точки, расположенные на одной широте, дают разные волновые картины, лучи обозначены различными цветами: чёрным соответствует верхняя правая точка, синим – верхняя левая, зеленым – нижняя левая и красным – нижняя правая. Детальное исследование структуры течения при близкой частоте $n = 1.18$ показывает, что в определенные фазы колебаний инерционные волны хорошо просматриваются (рис. 4.10). При повороте структуры в азимутальном направлении в меридиональной плоскости инерционные волны параллельно смещаются по направлению к ядру. Благодаря этому в определенные моменты времени наблюдается пространственный резонанс: завихренности, создаваемые отраженными волнами складываются, в результате чего образуются крупномасштабные вихри. В этом случае можно говорить о резонансном возбуждении одной из собственных инерционных мод с азимутальным числом $k = 1$. При отрицательной частоте $n = -1.2$ резонансная интенсификация пульсационного течения не наблюдается.

Следует заметить, что термин «инерционная мода» для вращающегося сферического слоя с $k = 1$ можно ввести условно, тем не менее он довольно часто используется в разговорной речи и в некоторых работах для характеристики глобальных вихревых структур. Единственными известными аналитическими решениями в невязких сферических слоях являются чисто тороидальные моды. В отличие от дискретных инерционных мод во вращающейся полной сфере [106], во вращающемся сферическом слое доминируют режимы, представленные волновыми аттракторами различной степени пространственной сложности и замкнутыми периодическими орбитами [19, 43, 115, 221]. Тем не менее, на данный момент невозможно с полной уверенностью утверждать, что наблюдаемые структуры являются в строгом смысле аттракторами. Предыдущие исследования в кольцевом зазоре с наклонным дном и прецессирующим диском [А3, Глава 3] показали, что фокусировка энергии происходит только при отрицательном воздействии, тогда как в сферическом слое резонанс наблюдается при $n > 0$. Ряд авторов [47, 48] отмечают, что в относительно толстых слоях инерционные моды всё же наблюдаются экспериментально. В связи с этим необходимо сравнить настоящие результаты с невязкими модами в полной сфере. Основной интерес представляют экваториально-симметричные моды, которые естественным образом навязываются типом воздействия (Табл. 4.2). Для таких мод u_φ и u_r являются чётными, а u_z нечётной при переходе через экватор; каждая из них может быть охарактеризована двумя числами: l – задаёт степень полиномиального решения уравнения Пуанкаре и число возможных частот в семействе и по сути определяет радиальную/меридиональную сложность моды; i – задаёт номер корня частотного уравнения при заданных k и l. Например, при частоте $n_{theory} = 1.1834$ в сфере должна возникать мода с двумя глобальными замкнутыми вихревыми ячейками в меридиональной плоскости относительно полюсов. Это хорошо согласуется со структурой течения, наблюдаемой на рис. 4.9*г*. При $n_{theory} = 0.8627$ две основные ячейки тоже присутствуют, но из-за более высокой степени полинома внутри них появляются дополнительные радиальные узлы (рис. 4.9*а*). При частоте $n_{theory} = 1.5472$

существуют по два вихря в северной и южной полусферах (рис. 4.9*u*). Низкочастотные моды соответствуют квазигеострофическим течениям. Пространственная структура инерционных мод в слое при отрицательных частотах не соответствует теоретическим предсказаниям для мод в сфере.

Таблица 4.2. Собственные значения невязких экваториально-симметричных инерционных мод (k = 1) в сфере [3] и положение максимумов на рис. 4.8

l	i	n_{theory}	n_{exp}
1	1	0.1766	0.15
1	2	−1.5099	
2	1	0.0682	
2	2	−1.0456	−1
2	3	1.1834	1.22
2	4	−1.8060	−1.72
3	1	0.0361	
3	2	−0.7903	
3	3	0.8627	0.85
3	4	−1.4737	
3	5	1.5472	1.65
3	6	−1.8964	−1.90

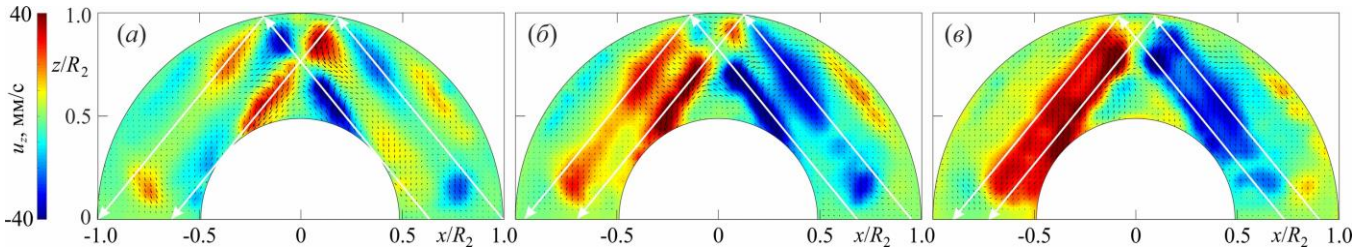


Рисунок 4.10 – Серия мгновенных полей скорости при частоте n = 1.18 с временным шагом $\Delta t / T_0 = 0.125$. Цветом показана вертикальная z-компонента скорости

Не менее интересными являются режимы так называемых периодических орбит, которые не являются аттракторами. Собственные частоты этих режимов

могут быть найдены как $n = 2\sin\left(p\pi / 2q\right)$ [19], где p и q являются целыми числами. На выбранных частотах конические сдвиговые слои, порожденные критическими широтами, распространяются в объем жидкости и образуют замкнутые траектории исключительно благодаря особенностям распространения волновых лучей [97, 100, 115, 141, 244]. В нашем случае тип гармонического воздействия не является осесимметричным, но основные свойства линейного режима течения согласуются с предыдущими экспериментами и расчетами. Например, при частоте, близкой к $n = \sqrt{2}$ (рис. 4.9*ж–и*) траектория принимает форму прямоугольника, которая хорошо воспроизводится в эксперименте с положительным воздействием. В отличие от предыдущего случая (рис. 4.9*г*) колебания жидкости происходят строго вдоль узких сдвиговых слоёв (рис. 4.9*ж*). При $n = -1.40$ (рис. 4.9*з*) лучевая траектория при том же самом числе Экмана $E = 1.48 \cdot 10^{-4}$ и фазе колебаний имеет мало общего с предсказаниями лучевой модели. В приполярной области сохраняется локальный вихрь, достигающий наибольшего размера при $n = -1.70$ (рис. 4.9*л*). Именно в нем сосредоточена практически вся энергия пульсаций. Отметим, что при соответствующем значении безразмерной частоты n наблюдается резонансная интенсификация скорости $< u > / b\Omega$ (рис. 4.8). Причем при противоположном значении частоты $n = 1.70$ энергия пульсационного движения меньше практически на порядок. В данном случае траектория распространения инерционных волн хорошо согласуется с предсказаниями 2D лучевой картины. Так, поле скорости при $n = 1.70$ (рис. 4.9*к*) визуально напоминает замкнутую орбиту на частоте $n = \sqrt{3}$ (рис. 4.9*м*). Несмотря на то, что частоты не равны в точности друг другу, углы наклонов волновых лучей θ очень близки.

При понижении частоты колебаний до $n = -1.80$ пульсации скорости сильно уменьшаются, что обусловлено качественным изменением структуры течения. Интенсивное одновихревое течение сменяется замкнутой узкой траекторией, которая является своеобразной ловушкой для инерционной волны (рис. 4.9*о*). Анализ результатов показывает, что фокусировка волны на замкнутую траекторию обусловлена формированием аттрактора, который соответствует частоте $n = 1.868$

(рис. 4.9*n*). Расхождение, наблюдаемое в эксперименте и теории, может быть обусловлено ограничениями, присущими модели трассировки лучей. С одной стороны, вязкие пограничные слои модифицируют сферический зазор, слегка его уменьшая. Более сильный эффект может быть связан с дифференциальным вращением в объеме жидкости, которое генерируется осциллирующими пограничными слоями (Раздел 4.1.4). Как показано в [245], последнее оказывает сильное влияние на направление распространения инерционных волн. В условиях дифференциального вращения направление групповой скорости непрерывно изменяется вдоль радиальной координаты, что приводит к искривлению границы характеристического конуса. Можно предположить, что в условиях настоящего эксперимента имеет место аналогичный эффект.

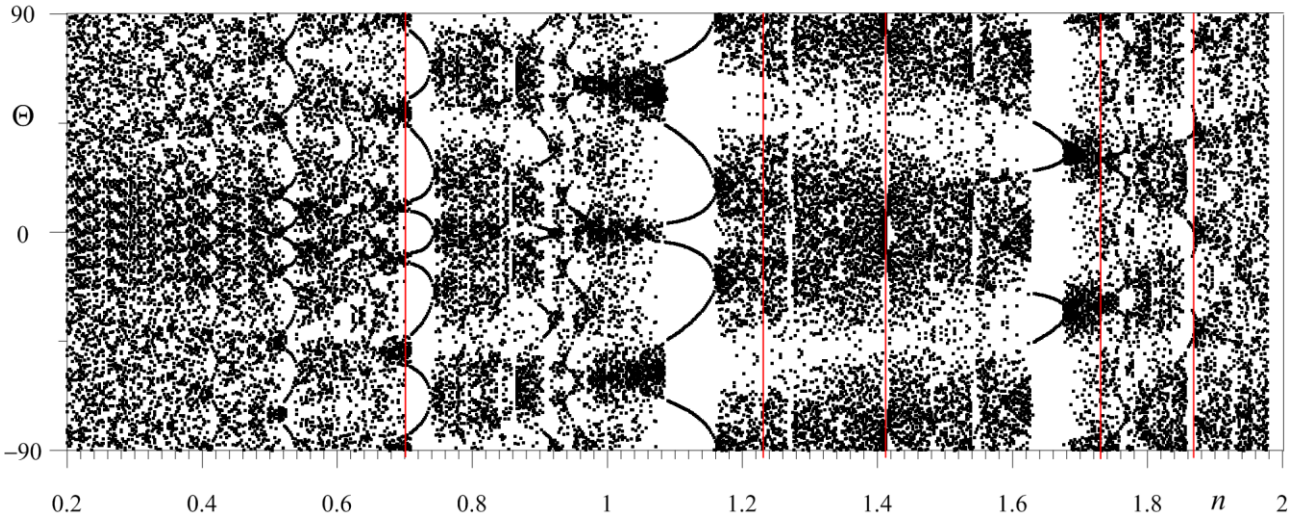


Рисунок 4.11 – Диаграмма волновых режимов в меридиональной плоскости после 500 отражений (показаны только последние 50) в рамках двумерной лучевой модели. Меридиональный угол Θ отсчитывается от оси вращения; разрешение по частоте составляет $\Delta n = 0.002$. Чёрные пятна соответствуют точкам отражения инерционных волн от границы полости. Красные вертикальные линии соответствуют режимам, показанным в правом столбце рис. 4.9

Последующее понижение частоты n приводит к разрушению аттрактора, которое сопровождается возрастанием энергии пульсаций (рис. 4.8). Стоит отметить, что для положительного воздействия описанные режимы в диапазоне частот $1.8 < n < 2$ не наблюдаются. При этом с увеличением частоты наклон волновых

лучей изменяется согласно формуле $\theta = \arcsin(n/2)$, а энергия пульсационного течения монотонно уменьшается.

Для удобства представления совокупности инерционных режимов в рамках лучевой модели можно построить диаграмму, показанную на рис. 4.11. Смысл диаграммы аналогичен рис. 2.26 в Разделе 2.3.1. Вдоль оси абсцисс отложена безразмерная частота с интервалом между соседними значениями $\Delta n = 0.002$. Вдоль оси ординат отложен меридиональный угол Θ, ноль которого соответствует оси вращения. Точки отражения лучей от границы полости образуют совокупность темных пятен. Случаи, когда точки отражения плотно распределены вдоль вертикальной оси, соответствуют сложным режимам течения. Наоборот, режимы течения, для которых наблюдается совокупность белых пятен, соответствуют аттракторам или режимам замкнутых периодических орбит. Вертикальные красные линии обозначают режимы течения, показанные на рис. 4.9. Видно, что частоты $n = 0.701$, $\sqrt{2}$ и 1.868 соответствуют частотам, при которых реализуются простые волновые траектории с небольшим числом отражений. В диапазоне частот $n = 1.18 - 1.35$ положение точек отражения изменяется более сложным образом вдоль меридионального угла. В определенных фазах колебаний суперпозиция волн обеспечивает возникновение глобальных вихревых структур, подобных рис. 4.9*г*. Для отрицательного воздействия характерно существование непредсказанного вихревого течения в приполярной области (рис. 4.9*б, д, з, л*). При этом эффект оказывается наиболее значительным при $n = -1.70$.

4.1.3.2. Азимутальные колебания жидкости

Исследования структуры пульсационного течения в меридиональной плоскости дополняются измерениями азимутального течения в горизонтальной плоскости на расстоянии $z/R_2 = 0.60$. Интересно сравнить профили скорости при двух противоположных частотах осцилляций, одна из которых соответствует резонансу «инерционной моды». Так, при $n = -1.70$ жидкость совершает интенсивные азимутальные колебания внутри тангенциального цилиндра $r / R_2 < 0.5$ (рис. 4.12*а*). Во внешней области амплитуда колебаний почти в три раза меньше.

Это согласуется с наблюдениями за структурой течения в меридиональной плоскости, где в приполярной области формируется вихрь, поперечный размер которого сравним с размером ядра (рис. 4.9*л*). При противоположном значении частоты амплитуда колебаний жидкости существенно меньше (рис. 4.12*б*). Причем в профиле скорости не наблюдается ярко выраженных локальных экстремумов. Это означает, что энергия инерционно-волнового паттерна значительно ниже.

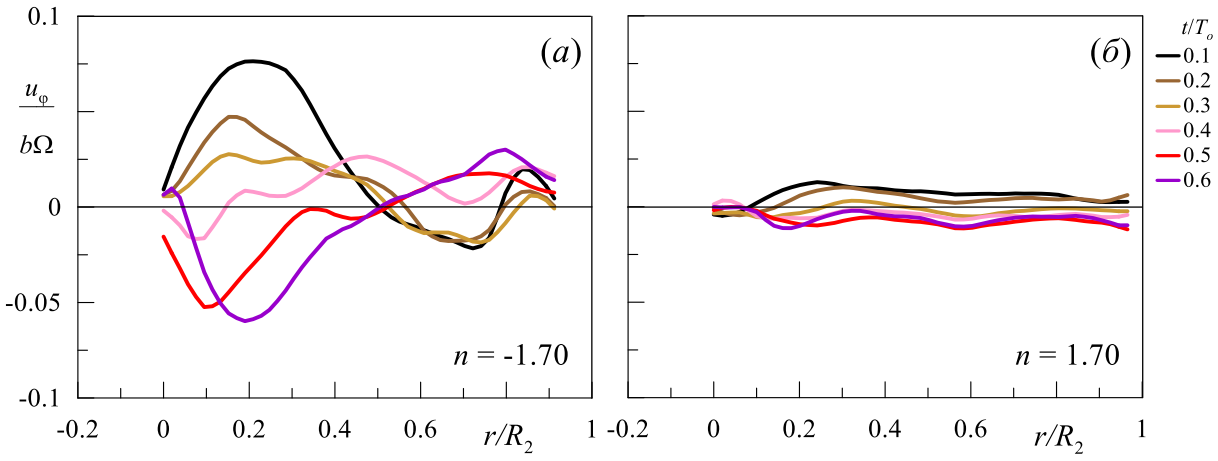


Рисунок 4.12 – Профили мгновенной азимутальной скорости u_φ вдоль фиксированного азимутального направления в различные фазы колебаний ядра при $n=-1.70$ (*а*) и $n=1.70$ (*б*)

Для вычисления полной скорости в азимутальном сечении амплитудные значения пульсаций $\left(u_x^2+u_y^2\right)^{1/2}$ осредняются по периоду колебаний T_0 ядра, по азимутальному углу φ и радиусу r (рис. 4.13):

$$<u_\varphi>=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left[\frac{1}{N}\sum\left(u_x^2+u_y^2\right)^{1/2}\right]\mathrm{d}t\,. \qquad (4.4)$$

В исследуемом диапазоне чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}_b=b^2/R_1\delta\mathrm{E}<500$ результаты экспериментов хорошо согласуются между собой. Независимо от амплитуды b и типа колебаний полости (линейные или круговые) экспериментальные точки укладываются на единую зависимость. При этом зависимости полного отклика жидкости в горизонтальной (рис. 4.13) и меридиональной плоскостях (рис. 4.8) коррелируют между собой. Величина скорости $<u_\varphi>/b\Omega$ меняется с частотой n немоно-

тонно, испытывая серию экстремумов. Азимутальные колебания жидкости наибольшей амплитуды наблюдаются в окрестности частот, соответствующих резонансному возбуждению мод.

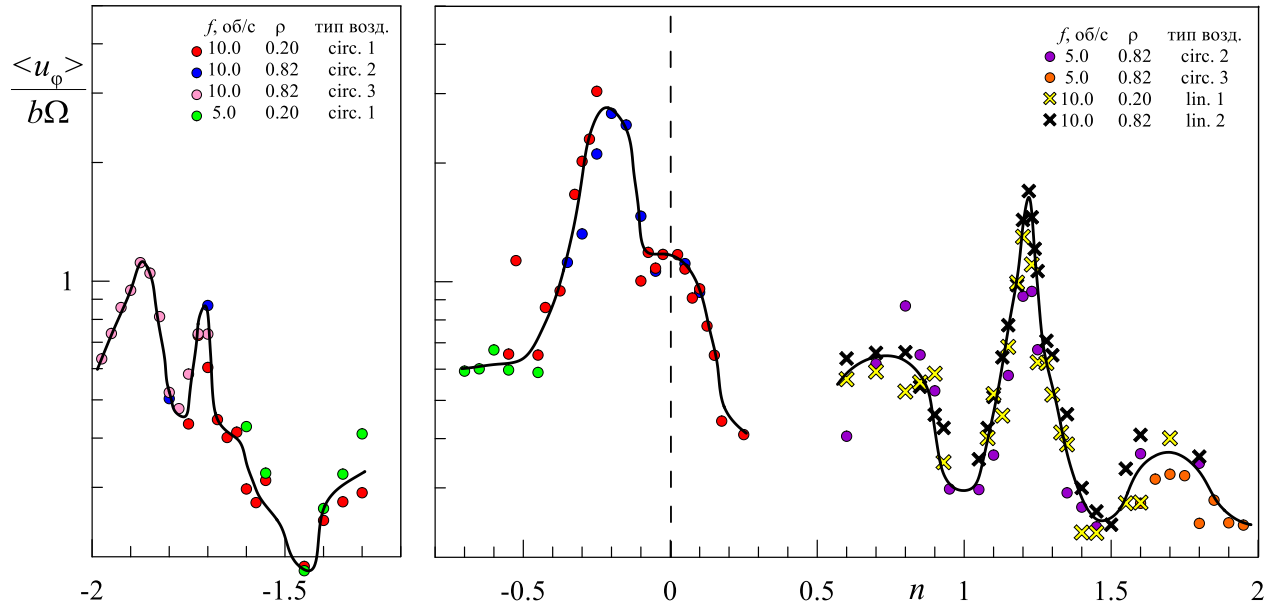


Рисунок 4.13 – Зависимость пульсационной скорости в горизонтальной плоскости $z/R_2 = 0.60$ от безразмерной частоты n при различных типах колебаний полости

Азимутальный резонанс. Наиболее интенсивное пульсационное движение жидкости как в меридиональной плоскости, так и в поперечном сечении наблюдается при $n = -0.23$. Несмотря на ожидания увидеть отдельные волновые лучи под углом $\theta \approx 7°$, локализованные колебания жидкости вдоль вертикальной оси z практически неразличимы (рис. 4.14*а*). При наблюдении за структурой течения в меридиональной плоскости кажется, что жидкость колеблется исключительно внутри тангенциального цилиндра вместе с ядром. Однако исследования поля скорости в горизонтальной плоскости показывают, что за пределами тангенциального цилиндра на расстоянии $r / R_2 > 0.5$ колебания сохраняются и направлены в противоположную сторону (рис. 4.14*б*). Вся структура стационарна в системе отсчёта ядра и поворачивается относительно полости в азимутальном направлении с частотой n.

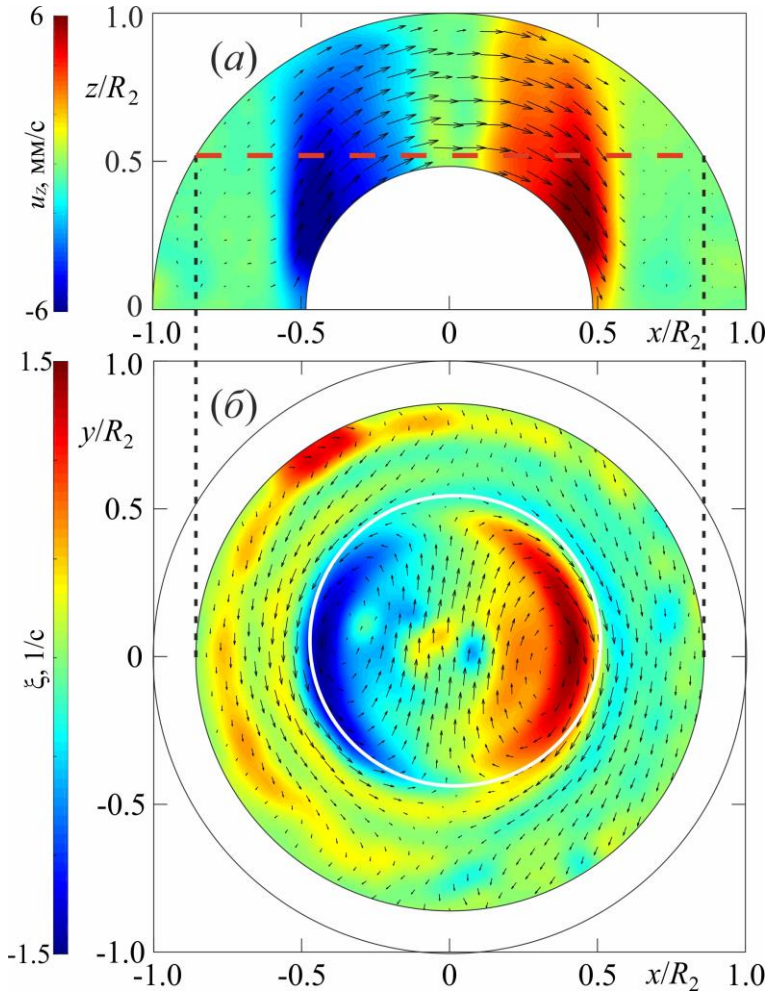


Рисунок 4.14 – Мгновенное пульсационное поле скорости в меридиональной (*а*) и горизонтальной плоскости $z / R_2 = 0.6$ (*б*) при частоте $n = -0.20$

Отметим, что интенсификация пульсационного течения не связана с возбуждением резонансных трансляционных колебаний ядра с собственной частотой плавучести. На это указывает различие значений собственных частот для ядер с различной относительной плотностью: $n_-^* = -0.13$ и -0.08 для $\rho = 0.20$ и 0.82, соответственно (Раздел 4.4) [А8]. Это означает, что амплитуда колебаний ядра *b* при $n = -0.23$ существенно меньше, чем при -0.13 или -0.08. Таким образом, интенсификация течения связана с возбуждением азимутальной моды, сильно отличающейся от моды, представленной на рис. 4.9*г*.

Описанная структура течения напоминает двумерные вихревые потоки, обусловленные возникновением волны Россби в сферическом слое. Последние распространяются против направления глобального вращения и не наблюдаются при положительных частотах $n > 0$. В [9] показано, что в случае тонкого слоя

$\eta \to 1$ частота волны Россби с азимутальным волновым числом $k = 2$ равняется $\omega / \Omega_{rot} = -1/3$. С уменьшением аспектного соотношения значение частоты монотонно повышается и при $\eta = 0.5$ смещается ближе к $\omega / \Omega_{rot} = -0.2$. Несмотря на то, что в [9] рассматривался приливное воздействие, этот результат находится в хорошем согласии с настоящими экспериментами. При $n = +0.23$ подобной структуры не наблюдается, кроме того, величина полной скорости пульсаций на порядок меньше.

4.1.4. Зональное течение

Обсудим нелинейный отклик жидкости на внешнее гармоническое воздействие. В качестве опоры будем использовать результаты теоретического исследования движения свободного цилиндрического тела во вращающейся цилиндрической полости с жидкостью под действием внешнего инерционного поля (вибрационный гидродинамический волчок) [184]. В работе рассматривались колебания кругового типа в приближении высоких частот ($\delta/R_1 << 1$), малых амплитуд колебаний ($b/R_1 << 1$), при этом неоднородность пульсационной компоненты скорости в вязких пограничных слоях на твёрдых границах создавала ненулевую зональную циркуляцию в объёме. Скорость зонального течения определялась нелинейным членом в уравнении Навье–Стокса $\left\langle (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} \right\rangle$, где угловые скобки означают осреднение по периоду колебаний T_0. В настоящих исследованиях, помимо усложнения геометрии задачи, движение жидкости отягощается присутствием инерционных волн, вклад которых сильно зависит от частоты n.

4.1.4.1. Опережающие колебания

Для примера, на рис. 4.15 приведены поля осреднённой азимутальной скорости Δu_φ и соответствующие профили угловой скорости для двух различных частот колебаний ядра. В первом случае (рис. 4.15*а*, *в*) при частоте $n = 2$ (инерционные волны отсутствуют) профиль угловой скорости напоминает классический столбик Тейлора: внутри тангенциального цилиндра жидкость совершает практи-

чески твердотельное опережающее вращение, в то время как за его пределами дифференциальное вращение отсутствует. Напомним, что в классической постановке внутреннее ядро не совершает колебаний, при этом вращается относительно полости со скоростью $\Delta\Omega_C$ [77, 188, 217, 218]. Проводя аналогию между колеблющимся и дифференциально вращающимся ядром и принимая во внимание, что внутри столбика угловая скорость жидкости $\Delta\Omega$ принимает промежуточное значение между скоростью вращения полости и ядра, $\Delta\Omega = \Delta\Omega_C / 2$, можно рассчитать классический профиль скорости при $E = 1.48 \cdot 10^{-4}$ (сплошная линия на рис. 4.15*в*) [188]. Несмотря на качественное сходство профилей, в представленных экспериментах на расстоянии $r / R_2 < 0.15$ всё же наблюдаются незначительные отклонения от равномерного распределения. Кроме этого, сдвиговый слой расположен дальше от оси вращения примерно на $\Delta r / R_2 \approx 0.1$, в сравнении с предсказаниями квазигеострофической модели [188].

Во втором случае (рис. 4.15*б*, *г*) инерционные волны качественно меняют профиль угловой скорости, делая его более сложным. В профиле появляется серия экстремумов, которые эквивалентны жидким геострофическим кольцам, вращающимся с различными угловыми скоростями. Каждое кольцо ассоциируется с отклонением движения жидкости от твердотельного вращения. Так, при частоте $n = 1.1$ можно выделить два жидких кольца, расположенных на расстоянии $r / R_2 = 0.08$ и 0.46, причем наиболее интенсивное дифференциальное вращение наблюдается во внутреннем кольце.

Повышение амплитуды колебаний приводит к увеличению скорости азимутального течения, при этом в докритической области форма профиля качественно не меняется, течение сохраняет квазидвумерную структуру в виде столбов, вращающихся с разной скоростью. При фиксированной частоте *n* интенсификация течения происходит по закону $\sim b^2$. Квадратичная зависимость следует из осреднённого анализа нелинейного члена уравнения Навье-Стокса. Другим важным параметром задачи является толщина осциллирующего пограничного слоя

$\delta \sim \sqrt{\nu / \Omega}$, в котором происходит генерация осреднённой завихренности. Из теории [184] следует, что интенсивность зонального течения определяется так:

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_{rot}} \sim \frac{b^2}{R_1 \delta}, \tag{4.5}$$

где $\Delta\Omega / \Omega_{rot} = \Delta u_\varphi / \Omega_{rot} r$. Эксперименты показывают, что с повышением параметра $b^2 / R_1\delta$ скорость жидкости линейно нарастает.

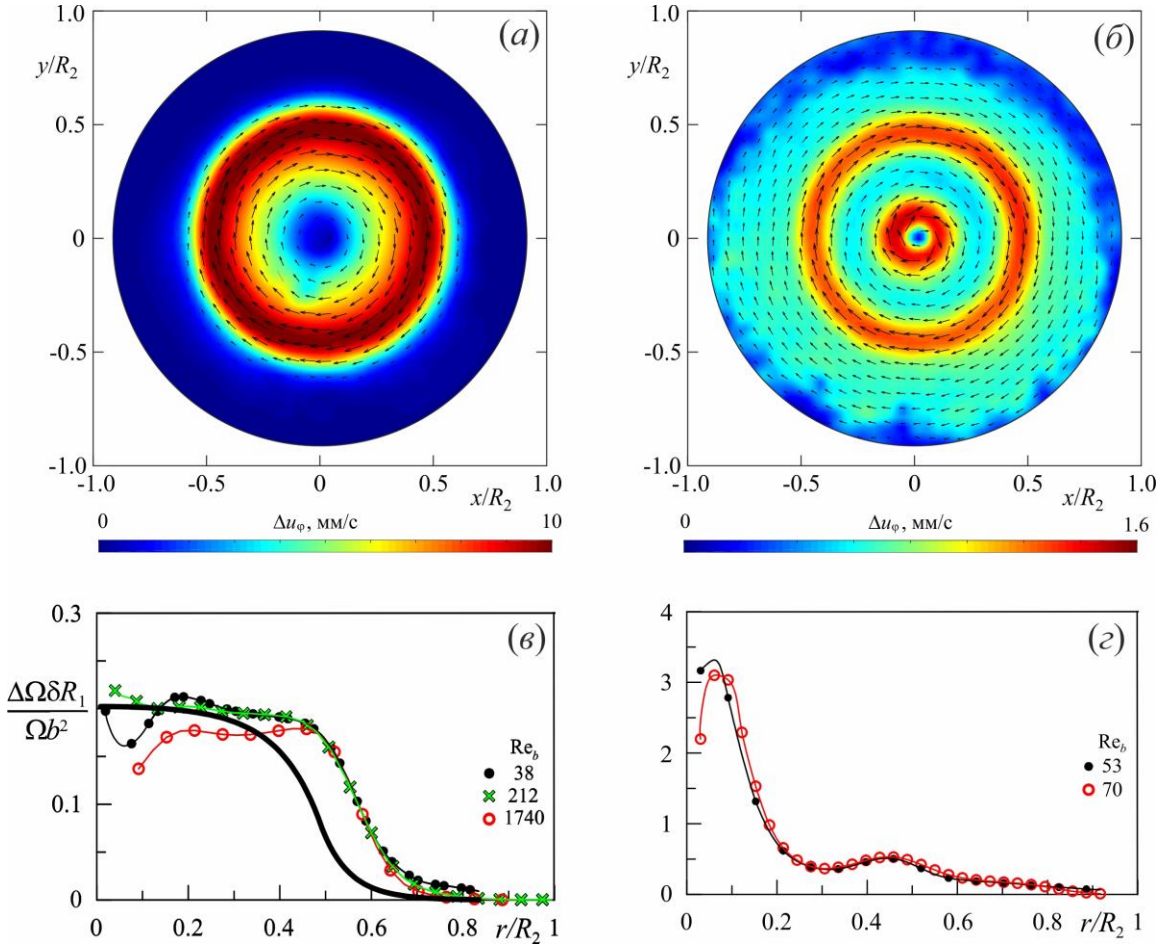


Рисунок 4.15 – Осреднённые азимутальные поля скорости в плоскости $z / R_2 = 0.60$ до порога потери устойчивости осевой симметрии при $n = 2.0$ и $\mathrm{Re}_b = 454$ (*а*); $n = 1.1$ и $\mathrm{Re}_b = 13$ (*б*). Здесь и далее направление вращения полости по часовой стрелке. На фрагментах (*в*) и (*г*) представлены соответствующие осреднённые профили угловой скорости при различных значениях числа Рейнольдса. Сплошная чёрная линия на фрагменте (*в*) соответствует теоретическому профилю скорости в отсутствие колебаний внутреннего ядра, но при наличии его дифференциального вращения [188]

Вид данного параметра предполагает, что механизм генерации осреднённого движения при колебаниях ядра во вращающейся полости также определяется нелинейными эффектами в осциллирующих пограничных слоях. С учетом выражения (4.5) для сравнения профилей скорости, полученных при различных значениях амплитуды и частоты колебаний, будем нормировать угловую скорость следующим образом $\Delta\Omega R_1\delta / \left(b^2\Omega_{rot}\right)$. На основании сказанного для удобства сравнения результатов, полученных при различных параметрах вибраций, введем вибрационный аналог числа Рейнольдса следующим образом:

$$\frac{\left|\Delta\Omega\right|R_1^2}{\nu} \sim \frac{b^2\Omega_{rot}R_1}{\delta\nu} = \frac{b^2}{\delta R_1 \mathrm{E}} \equiv \mathrm{Re}_b . \qquad (4.6)$$

Из рис. 4.15*в, г* видно, что при выбранной нормировке профили скорости, полученные при различных значениях Re_b, хорошо согласуются между собой.

С изменением *n* наблюдается трансформация структуры течения. Для представления результатов удобно использовать диаграмму, приведенную на рис. 4.16, где на оси абсцисс отложена безразмерная частота *n*, а по оси ординат – расстояние от оси вращения r / R_2; цветом показана угловая скорость азимутального течения $\Delta\Omega\delta R_1 / \Omega_{rot}b^2$. Поскольку на некоторых частотах дифференциальная скорость может изменяться на несколько порядков, для представления информации о величине скорости была выбрана логарифмическая шкала. Отрицательные значения скорости представлены по абсолютной величине и отмечены красными прямоугольниками.

В диапазоне $n = 0.2 - 0.7$ повышение частоты приводит к практически монотонному увеличению скорости зонального течения. Существенное изменение структуры профиля скорости происходит при $n = 0.8$, что выражается в перераспределении интенсивности опережающего течения в геострофических цилиндрах. Наиболее быстрое дифференциальное вращение жидкости наблюдается вблизи оси вращения. При повышении частоты до $n = 1.0$ скорость дифференциального вращения жидкости внутри тангенциального цилиндра уменьшается в несколько раз. Этот случай соответствует локальному минимуму, после преодоления кото-

рого, скорость опережающего течения снова возрастает. Наиболее интенсивное зональное течение генерируется при частоте $n=1.2$. Отметим, что интенсификация осреднённого движения жидкости происходит в пределах тангенциального цилиндра; за его пределами на расстоянии $r/R_2>0.6$ изменение частоты вибраций практически не влияет на структуру течения. Незначительное изменение частоты n приводит к выходу системы из резонансной области. При последующем повышении частоты вибраций до $n=2$ число геострофических цилиндров и скорость зонального течения уменьшаются.

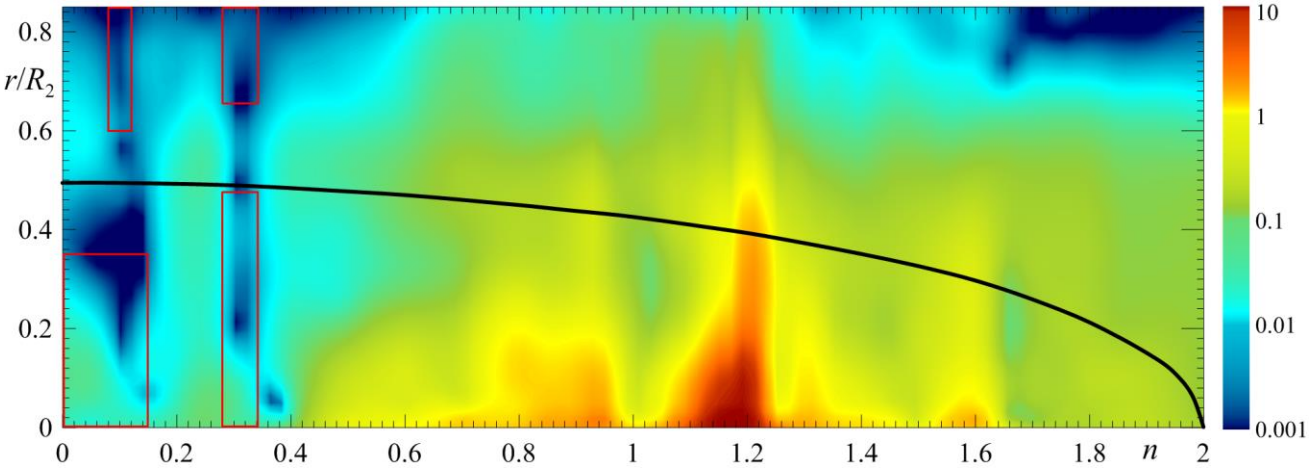


Рисунок 4.16 – Распределение безразмерной угловой скорости $\Delta\Omega\delta R_1/\Omega b^2$ на расстоянии $z/R_2 = 0.60$ от экваториальной плоскости; сплошная линия – теоретическое положение критических широт [94]. Интенсивность азимутального течения представлена в логарифмическом масштабе. Красными прямоугольниками отмечены области отстающего дифференциального вращения

Подобного типа зональные течения в виде вложенных цилиндрических сдвиговых слоёв наблюдались в ряде работ, посвященных гармоническому воздействию на вращающиеся системы. Так, в пионерской работе [133] обнаружено, что в медленно прецессирующем сфероиде возбуждается осреднённое отстающее движение в объеме жидкости и опережающий азимутальный дрейф в виде «струи» на расстоянии $r/R_2=0.86$. Буссе [129] теоретически показал, что механизм генерации такого течения связан с нелинейными эффектами в пограничных слоях Экмана вблизи критических широт. Позднее подобная структура наблюда-

лась как экспериментально [130], так и детально исследовалась численно [34] и [97].

4.1.4.2. Вклад инерционных волн в зональное течение

Механизм возникновения геострофических цилиндров определяется нелинейными эффектами именно в вязких пограничных слоях. Это подтверждается зависимостью размеров жидких цилиндров и их количества от частоты колебаний (рис. 4.17). Один из цилиндров связан с наличием критических широт на поверхности ядра, положение которых рассчитывается следующим образом: $\beta = \arccos\left(n/2\right)$ (сплошная кривая на рис. 4.16, 4.17). Как показывают эксперименты, в непосредственной близости к критической широте нелинейные эффекты в пограничном слое генерируют геострофические сдвиговые слои. Это проявляется в возникновении локального максимума угловой скорости $\Delta\Omega\delta R_1 / \Omega b^2$. При низких значениях частоты ($n < 0.5$) критические широты расположены рядом с экваториальной плоскостью. При этом положение максимума практически совпадает с границей тангенциального цилиндра. Однако при дальнейшем повышении частоты экстремум постепенно смещается к оси вращения. Вплоть до $n = 1.1$ размер геострофического цилиндра согласуется с положением критической широты.

В окрестности частоты $n = 1.2$ наблюдается качественное изменение структуры течения, связанное с резонансным возбуждением инерционной моды: размер жидкого цилиндра сильно уменьшается в поперечном сечении. По всей видимости, здесь проявляется другой, более мощный, механизм генерации зонального течения, описанный в [139]. Даже в отсутствие пограничных слоёв инерционная мода может возбуждать геострофическую циркуляцию.

После выхода системы из резонансной области в диапазоне частот $n = 1.4 - 1.6$ размеры жидкого цилиндра и положение точек излучения инерционных волн снова согласуются. При $n > 1.6$ энергия излучаемых инерционных волн при заданном гармоническом воздействии мала, при этом сдвиговых геострофических течений на расстоянии $r / R_2 < 0.4$ не наблюдается.

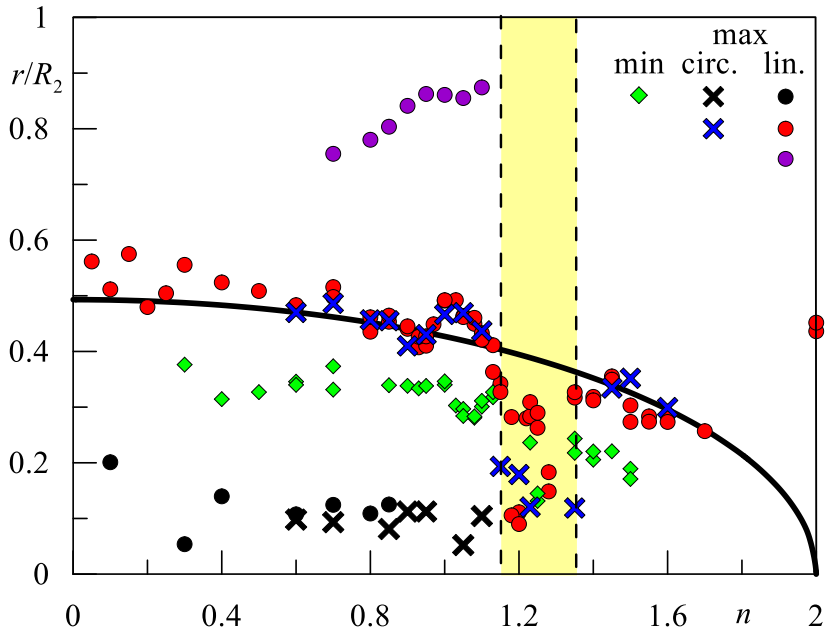


Рисунок 4.17 – Зависимость положения геострофических цилиндров от безразмерной частоты. Точки и крестики соответствуют максимумам в профиле скорости, ромбы – минимумам; желтой областью обозначены границы резонансного возбуждения инерционной моды

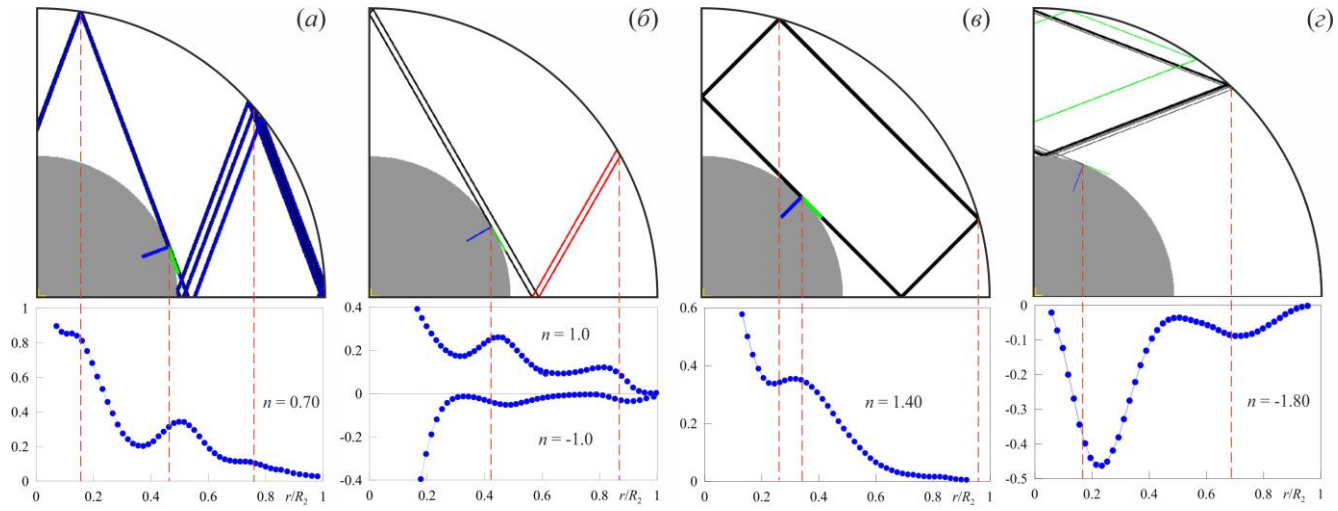


Рисунок 4.18 – Траектории распространения волновых лучей в меридиональной плоскости (верхний ряд) и профили безразмерной угловой скорости $\Delta\Omega\delta R_1 / \Omega b^2$ (нижний ряд) при $n = 0.70$ (*а*), $n = 1.0$ и -1.0 (*б*), $n = 1.40$ (*в*), $n = -1.80$ (*г*). Вертикальными пунктирными линиями показано положение критических широт на ядре, а также точки отражения волновых лучей от границы полости

Более детально взаимосвязь между положением геострофических цилиндров и критическими широтами продемонстрирована на рис. 4.18. Видно, что

вблизи точек излучения инерционных волн возникает локальная интенсификация опережающего (рис. 4.18*а–в*) или отстающего течения (рис. 4.18*б* и *г*). Аналогичный результат был получен в численной работе [97], где инерционные волны генерировались посредством либраций сферического слоя. Анализ нелинейного члена в уравнении Навье-Стокса показал, что вблизи критических широт появляется ненулевая осреднённая по времени завихренность, которая индуцирует движение в объёме жидкости.

С другой стороны, инерционные волны способны генерировать осреднённое течение в вязком пограничном слое при отражении от границ. Так, при частоте $n = 0.7$ (рис. 4.18*а*) в профиле скорости на расстояниях $r / R_2 \approx 0.15$ и 0.75 наблюдается локальное повышение скорости дифференциального вращения жидкости. Такое отклонение от твердотельного вращения эквивалентно появлению дополнительных вложенных геострофических цилиндров, поперечный размер которых согласуется с положением точек удара волновых лучей. С ростом частоты первая точка падения волнового пучка постепенно перемещается по меридиональному углу Θ, а положение внешнего максимума смещается по цилиндрическому радиусу (рис. 4.17, фиолетовые кружки). Более заметный нелинейный отклик в приэкваториальной области наблюдается при частоте $n = 1.0$, когда траектория инерционной волны соответствует периодической орбите (рис. 4.18*б*). Локальное повышение интенсивности дифференциального вращения жидкости характерно и при воздействии с противоположной частотой $n = -1.0$ (рис. 4.18*б*, нижняя кривая). В то же время при отрицательном воздействии положение экстремума смещено к периферии цилиндрического радиуса. Подробное описание течения при $n = -1.0$ будет дано далее в Разделе 4.1.4.3.

При частоте $n = 1.4$ (рис. 4.18*в*) зоны излучения (на границе ядра) и отражения (на границе полости) волновых лучей расположены на близких цилиндрических радиусах. Можно предположить, что наличие экстремума на расстоянии $r / R_2 \approx 0.3$ обусловлено перекрытием этих двух зон. Отметим, что наиболее сильное пульсационное течение в точке падения волны можно ожидать при частоте $n = -1.8$, когда волновые лучи фокусируются в аттрактор (рис. 4.9*n*). Благодаря

нелинейным эффектам в профиле скорости на расстоянии $r / R_2 \approx 0.7$ наблюдается интенсификация отстающего дифференциального вращения жидкости (рис. 4.18*г*).

Таким образом, можно заключить, что инерционные волны существенно осложняют зональное течение. За генерацию среднего зонального течения ответственны два механизма. Первый связан с резонансным возбуждением инерционной моды в сферическом слое и нелинейным взаимодействием осцилляционного течения в объёме [139]. Как можно видеть на рис. 4.16, величина этого эффекта существенна. Второй механизм связан с осреднёнными течениями в пограничных слоях в точках излучения и отражения инерционных волн. На это указывает сильная зависимость размера и числа геострофических цилиндров от безразмерной частоты колебаний ядра.

4.1.4.3. Отстающие колебания ядра с частотой $n = -1$

Перейдём к частному случаю колебаний ядра с частотой $n = -1$, главным удобством рассмотрения которого является простота экспериментальной реализации, позволяющая комплексно исследовать влияние параметров системы на характеристики течения. В данных экспериментах используется установка, показанная на рис. 4.2, при этом вращение полости осуществляется вокруг *горизонтальной* оси. Под действием центробежной силы ядро занимает стационарное положение в лабораторной системе отсчёта вблизи оси вращения, а центр ядра смещен на расстояние b от оси вращения из-за действия силы тяжести. В системе отсчёта полости ядро при этом совершает круговые колебания в экваториальной плоскости с амплитудой b в направлении, противоположном вращению полости с частотой $n = \Omega / \Omega_{rot} = \left(\pm\Omega_{osc} - \Omega_{rot} \right) / \Omega_{rot} = -1$, где $\Omega_{osc} = 0$ – частота колебаний ядра в лабораторной системе отсчёта. Для исключения дифференциального вращения ядра один из его полюсов соединён с полюсом кюветы при помощи тонкой нейлоновой лески толщиной 0.37 мм. В качестве ядра используется сферическое тело радиуса $R_1 = 17.7$ мм и средней плотности $\rho_C = 0.22$ г/см^3. Угловая скорость вращения полости задается с точностью 0.01с$^{-1}$ и варьируется в диапазоне

$\Omega_{rot} = 60 \div 240$ рад/с. В качестве рабочей жидкости используются водоглицериновые растворы разной кинематической вязкости $\nu = 1 \div 12$ сСт.

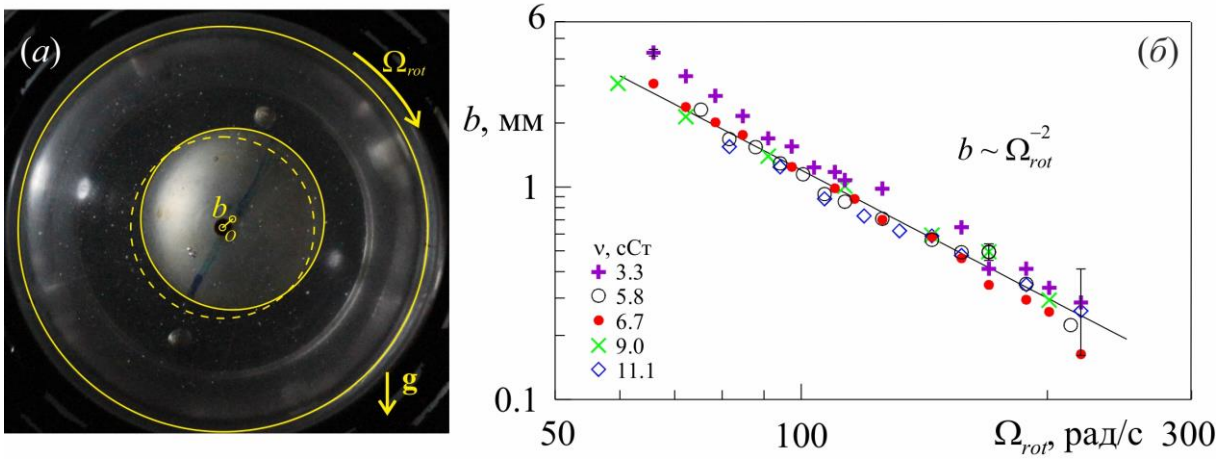


Рисунок 4.19 – Фотография положения ядра относительно полости (*а*) и зависимость b от скорости вращения полости Ω_{rot} для жидкостей различной вязкости (*б*)

Эксперимент проводится следующим образом. Во избежание перекручивания лески и образования на ней узелков первоначально кювета приводится в быстрое вращение вокруг вертикальной оси, при этом легкое ядро удерживается в центре полости леской. Лишь после этого кювета приводится в рабочее положение, т.е. поворачивается на 90 градусов. В ходе эксперимента скорость вращения полости Ω_{rot} пошагово изменяется. На каждом шаге методом фоторегистрации измеряется величина смещения легкого тела из центра полости b (рис. 4.19*а*), а также выполняется фото- и видеорегистрация структуры течения. Профиль азимутальной скорости жидкости исследуется с помощью PIV-метода в широком диапазоне поперечных плоскостей $z / R_2 = 0.08 \div 0.80$. Видеорегистрация осуществляется на неподвижную в лабораторной системе отсчёта скоростную видеокамеру типа CamRecord CL600x2 (с разрешением 700×700 пикселей) с частотой, равной частоте вращения полости. Пары фотографий, интервал времени между которыми кратен периоду вращения полости, обрабатываются с помощью программы PIVLab [65]. По результатам измерений рассчитывается осреднённая по времени азимутальная скорость жидкости в системе отсчёта полости.

При быстром вращении полости вокруг горизонтальной оси ядро, плотность которого меньше плотности жидкости, в лабораторной системе отсчёта смещается от оси вращения на расстояние $b / R_1 < 0.3$. С увеличением скорости вращения смещение ядра b из центра полости уменьшается по закону $b \sim \Omega_{rot}^{-2}$ (рис. 4.19*б*). Результаты экспериментов с жидкостями разной вязкости хорошо согласуются между собой и, как будет показано далее в Разделе 4.2, с результатами, полученными в экспериментах со свободным ядром [A19]. Это значит, что наличие лески не влияет на положение тела в полости, а только исключает его дифференциальное вращение. Отклонение от общей зависимости результатов, полученных с жидкостями малой вязкости при медленном вращении полости (при $\Omega_{rot} < 100$ рад/с), связано, как будет показано ниже, с изменением структуры осреднённых потоков в результате потери устойчивости осесимметричного движения.

Структура осреднённого течения. Профиль осреднённой азимутальной скорости жидкости Δu_φ показан на рис. 4.20. Практически во всем объеме жидкость совершает отстающее дифференциальное вращение, при этом азимутальная скорость Δu_φ немонотонно изменяется с расстоянием r / R_2 от оси вращения. Наиболее сильное отстающее вращение наблюдается в центральной части полости на расстоянии $r / R_2 \approx 0.1$. Следующий максимум отстающего движения располагается на границе геометрического продолжения ядра вдоль оси вращения, $r / R_2 \approx 0.5$. Третий максимум, больший по интенсивности, чем предыдущий, располагается на расстоянии $r / R_2 \approx 0.9$.

Распределение азимутальной скорости в объеме полости практически не изменяется с координатой z / R_2, что свидетельствует о двумерной структуре течения. Исключение составляют лишь области в непосредственной близости от твёрдых границ полости и ядра. В связи с этим отметим приэкваториальную область ($|z / R_2| < 0.4$) при $r / R_2 > 0.8$, в этом своеобразном «кармане» наблюдается

интенсивное отстающее движение. В целом структура течения сохраняет двумерную форму.

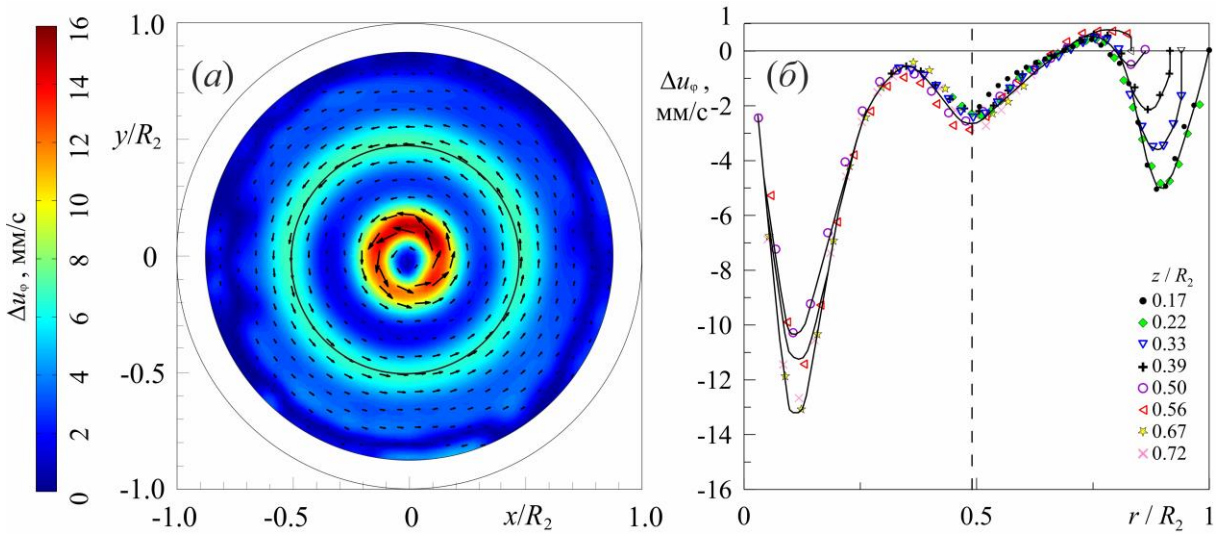


Рисунок 4.20 – Пример векторного поля азимутальной скорости жидкости на расстоянии от экваториальной плоскости $z/R_2 = 0.53$ при частоте $n = -1$, направление вращения полости – по часовой стрелке (*а*) и профили азимутальной скорости в различных поперечных сечениях z/R_2 при $\nu = 5.4$ сСт, $\Omega_{rot} = 188.4$ рад/с, $b = 0.32$ мм (*б*); вертикальной штриховой линией показана граница тела при его осесимметричном положении

Если плотность частиц визуализатора превосходит плотность жидкости, то они под действием центробежной силы оседают на внутренней поверхности полости. При этом частицы собираются в осесимметричные кольцевые структуры (рис. 4.21). В каждой полусфере формируются три концентрических кольца, при $|z/R_2| = 0.78$, 0.60 и 0.36 (*1*, *2* и *3* на рис. 4.21*б*). Наблюдения показывают, что такое распределение связано, в том числе, с инерционными волнами, возбуждаемыми колеблющимся ядром. Как отмечалось ранее, направление распространения волн определяется углом, зависящим от отношения частоты осцилляций Ω к частоте вращения системы Ω_{rot}. В рассматриваемом случае $|\Omega| = \Omega_{rot}$, при этом положение внутренних критических широт на поверхности ядра определяется углом $\beta = \arccos(\Omega / 2\Omega_{rot}) = 60^0$ к оси вращения, а угол, под которым распространяются волны, составляет $\theta = \arcsin(\Omega / 2\Omega_{rot}) = 30^0$. Из рисунка видно, что положение

колец *2* хорошо согласуется с точками падения инерционной волны на внутреннюю границу полости. В их окрестности возникают осреднённые потоки, которые приводят к перераспределению частиц визуализатора. Кольца *1* связаны с меридиональной циркуляцией жидкости вдоль границы тангенциального цилиндра (см. подробнее Раздел 4.2). Кольца *3* связаны со структурой осреднённых потоков в «карманах» (рис. 4.20*б*). При этом в кольцах происходит седиментация частиц по размеру. Так, в кольце *2* оседают только самые крупные частицы размером ~ 0.5 мм, в то время как в кольцах *1* и *3* осаждается самая мелкая фракция из частиц размером ≤ 0.1 мм.

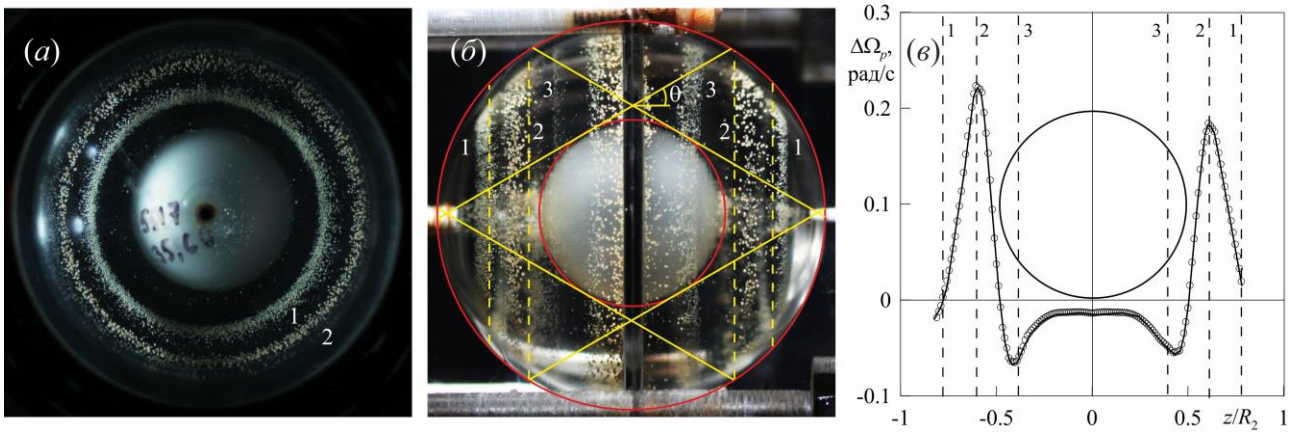


Рисунок 4.21 – Распределение тяжёлых частиц на стенке полости ($\nu = 5.2$ сСт, $\Omega_{rot} = 126$ рад/с): (*а*) – вид вдоль оси вращения; (*б*) – вид сбоку, сплошными линиями и линиями из точек показаны конические поверхности, вдоль которых распространяются инерционные волны; штриховыми линиями показаны точки удара инерционных волн о поверхность полости. На фрагменте (*в*) показано распределение угловой скорости тяжёлых частиц на стенке полости

Распределение средней азимутальной скорости частиц в кольцах имеет немонотонный характер (рис. 4.21*в*). В приэкваториальной области частицы совершают слабое отстающее вращение, скорость которого постепенно увеличивается вдоль меридиана и достигает своего максимального значения в кольцах *3*. Напротив, крупные частицы, локализованные в кольцах *2*, вращаются в противоположном направлении относительно полости, т.е. совершают опережающее вращение. При этом скорость частиц в кольцах *2* в несколько раз больше по абсолютной ве-

личине скорости в кольцах *3*. При последующем приближении к полюсам полости вдоль меридиана скорость опережающего движения частиц уменьшается и принимает минимальное значение в кольцах *1*. Отметим, что небольшая асимметрия в распределении скорости частиц на стенках полусфер связана с асимметричным положением ядра относительно полюсов полости. Положение сферы на оси вращения характеризуется безразмерным комплексом $x = \left|\left(x_1 - x_2\right)\right| / \left(x_1 + x_2\right)$, где x_1 и x_2 – расстояния от левого и правого полюсов полости до ближайшего полюса ядра. В рассмотренном на рис. 4.21 случае положению ядра соответствует $x = 0.06$. Отметим, что для измерения скорости $\Delta\Omega_p$ количество частиц было существенно увеличено, при этом они располагались практически на всех широтах полости. Исключение составляет лишь приполярные области за кольцами *1*, где частицы вблизи границы полости отсутствуют и измерение скорости их движения невозможно. Как будет показано ниже, это объясняется наличием пристеночных меридиональных потоков, направленных от полюсов к экватору.

4.1.5. Обсуждение результатов

Обсудим механизм генерации дифференциального вращения жидкости при $n = -1$. Как было отмечено ранее, в случае осцилляций ядра относительно полости жидкость приходит в дифференциальное вращение под действием осреднённых сдвиговых напряжений, генерируемых в осциллирующих пограничных слоях на твёрдых границах ядра и полости. При этом параметр $b^2 / R_1\delta$ определяет безразмерную азимутальную скорость течения (4.5). В рассматриваемом случае, на первый взгляд, ядро не осциллирует. Тем не менее, картина принципиально меняется при переходе во вращающуюся относительно полости систему отсчёта. Именно в ней ядро движется по круговой траектории в направлении, противоположном вращению с частотой $\left|\Omega\right| = \Omega_{rot}$. При этом в качестве внешнего инерционного поля, вызывающего приливной эффект, выступает поле силы тяжести. Ввиду аналогии с задачей, когда на систему влияет внешнее переменное инерционное поле,

будем предполагать, что дифференциальное вращение жидкости также определяется параметром (4.5).

На рис. 4.22*а* продемонстрировано, что азимутальная скорость отстающего движения жидкости в экстремуме $\left|\Delta\Omega_{\max}\right|/\Omega_{rot}$ на расстоянии $r/R_2=0.49$ не зависит от вязкости жидкости; результаты всех экспериментов хорошо согласуются между собой на плоскости безразмерных параметров $\left(b^2/R_1\delta,\ \left|\Delta\Omega_{\max}\right|/\Omega_{rot}\right)$. С повышением параметра $b^2/R_1\delta$ скорость жидкости линейно нарастает. Отметим, что при фиксированном значении амплитуды колебаний ядра b/R_1 скорость жидкости в геострофических цилиндрах изменяется по закону $\left|\Delta\Omega_{\max}\right|/\Omega_{rot}\sim R_1/\delta\sim\Omega_{rot}^{1/2}R_1/\nu^{1/2}\sim \mathrm{E}^{-1/2}$, что также хорошо согласуется с экспериментами (Рис. 4.22*б*). Здесь $\mathrm{E}\equiv\nu/\left(\Omega_{rot}R_1^2\right)$ – число Экмана.

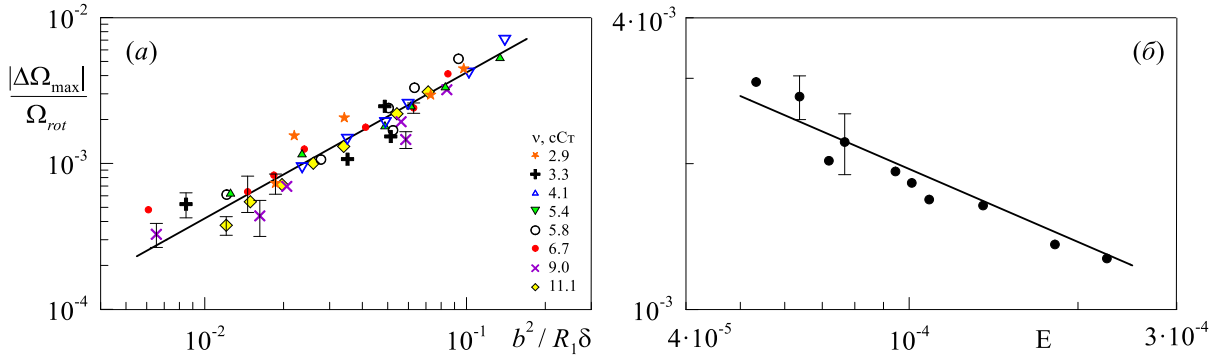


Рисунок 4.22 – Зависимость скорости дифференциального вращения жидкости при частоте $n=-1$ в экстремуме профиля при $r/R_2=0.49$ (рис. 4.20) от параметра $b^2/R_1\delta$ (*а*) и от числа Экмана (*б*)

Снова используем в качестве единицы измерения угловой скорости дифференциального вращения жидкости комплекс $\Omega_{rot}b^2/R_1\delta$. На плоскости выбранных параметров экспериментальные точки, полученные для различных значений вязкости жидкости и амплитуды колебаний ядра, хорошо согласуются между собой (рис. 4.23). Найденный профиль является универсальным для устойчивого осесимметричного движения жидкости в области малых значений числа Экмана $\mathrm{E}<10^{-3}$ при частоте $n=-1$.

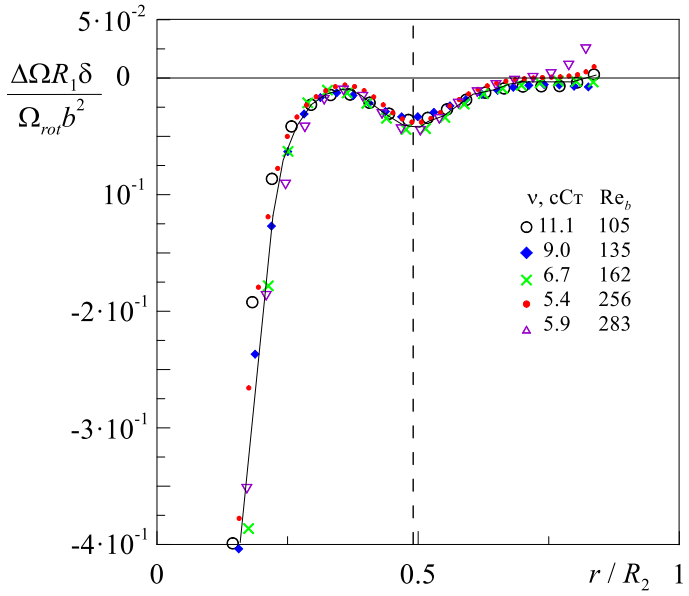


Рисунок 4.23 – Зависимость безразмерной угловой скорости осесимметричного движения жидкости при частоте $n=-1$ в сечении $z/R_2=0.56$ от r/R_2 при различных значениях вязкости жидкости и числа Рейнольдса

Следует отметить, что профили скорости при частотах $n=1$ и $n=-1$ являются практически зеркальными отражениями друг друга (рис. 4.18*б*). При $n=-1$ зональное течение направлено против направления вращения полости, в то время как при $n=1$ – по направлению вращения полости. Отличается также интенсивность движения жидкости. При отрицательном воздействии скорость движения жидкости в точке $r/R_2=0.5$ описывается выражением $\Delta\Omega_{\max}/\Omega=-0.042b^2/\left(R_1\delta\right)$, а при положительном в той же точке $\Delta\Omega_{\max}/\Omega=0.27b^2/\left(R_1\delta\right)$. По всей видимости, различие в коэффициентах связано с вкладом инерционных волн.

4.2. Влияние собственного дифференциального вращения свободного осциллирующего ядра на движение жидкости

В данном разделе экспериментально исследуется движение жидкости, возбуждаемое легким свободным сферическим ядром в быстро вращающейся вокруг горизонтальной оси сферической полости. Для данной реализации леска, связы-

вающая ядро с полостью, отсутствует. Плотность ядра меньше плотности жидкости, поэтому в отсутствие вращения ядро всплывает и располагается вблизи верхней стенки полости. При увеличении скорости вращения полости ядро увлекается потоком жидкости, и при некотором значении Ω_{rot} смещается к оси вращения – центрифугируется. Возмущающее действие внешнего статического силового поля (поле силы тяжести) зависит от разности плотностей ядра и жидкости, что определяет амплитуду радиального смещения ядра *b* из центра полости (рис. 4.24*a*). Как и в случае с леской внешняя сила вызывает колебания ядра относительно полости, поляризованные по кругу, в результате которых генерируется дифференциальное вращение, $\Omega_{rot} \neq \Omega_C$. В случае равномерного распределения плотности система совершала бы твердотельное вращение. Симметричные стационарные экмановские потоки вдоль оси вращения оказывают центрирующее действие на ядро относительно полюсов полости [187, A10]. Таким образом, исследуется центрифугированное состояние системы, при котором ядро под действием центробежной силы занимает устойчивое положение вблизи геометрического центра полости. В Разделе 4.2.2 исследуется динамика ядра и жидкости только в поле силы тяжести. Раздел 4.3 посвящен выяснению вклада дифференциального вращения ядра в результирующее зональное течение. Комбинированное действие поля силы тяжести и внешнего переменного инерционного поля с частотой Ω_{osc}, индуцирующее многочастотные колебания ядра, обсуждается в Разделе 4.4.

4.2.1. Особенности постановки задачи и методики проведения экспериментов

Главной особенностью является наличие дифференциального вращения ядра со скоростью $\Delta\Omega_C = \Omega_C - \Omega_{rot}$, которое требует дополнительного контроля величины Ω_C. Для этой цели наблюдения ведутся в свете стробоскопической лампы. В ходе эксперимента пошагово изменяется (монотонно повышается или понижается) скорость Ω_{rot}. После установления стационарного состояния на каждом шаге (при заданном значении Ω_{rot}) измеряется Ω_C, а также регистрируется структура течения. Измерение скорости Ω_C с точностью 0.001 об/с осуществляется пу-

тем синхронизации частоты вспышек стробоскопа с частотой вращения. Отрицательные значения $\Delta\Omega_C$ означают, что в лабораторной системе отсчёта сфера вращается медленнее полости. В системе отсчёта полости при этом тело вращается в обратном направлении. Положительные значения $\Delta\Omega_C$ соответствуют опережающему дифференциальному вращению.

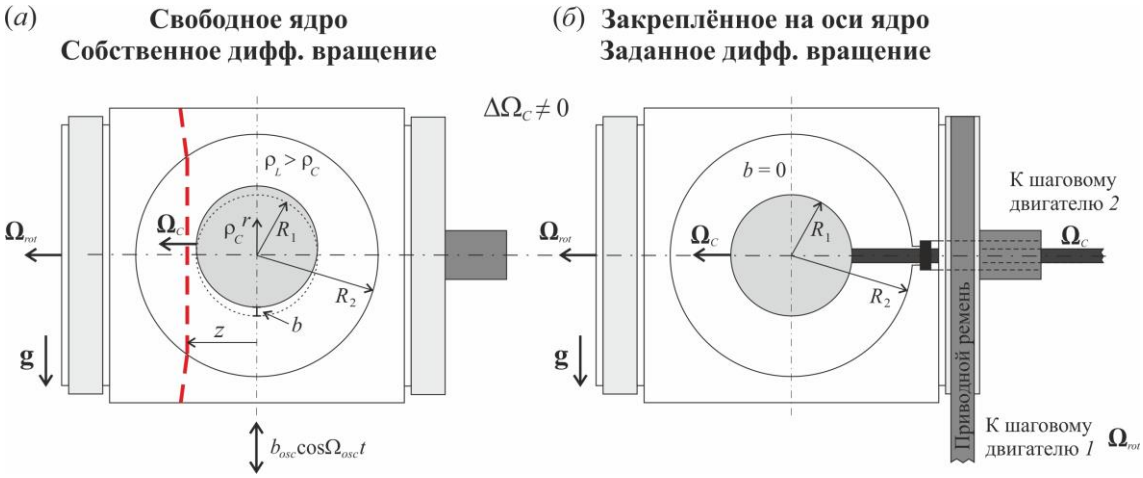


Рисунок 4.24 – Постановка задачи для изучения динамики свободного ядра и жидкости при комбинированном действии поля силы тяжести и внешнего переменного инерционного поля (*а*) и для изучения влияния дифференциального вращения ядра на структуру зонального течения (*б*)

Для возбуждения многочастотных колебаний ядра используется методика, описанная в Разделе 4.1.1. Кювета в горизонтальном положении устанавливается на столик электродинамического вибростенда VEB GERATE UND REGLER WERKE TELTOW 3.19.39, задающего нормальные к оси вибрации в лабораторной системе отсчёта по закону $\sim b_{osc}\cos\Omega_{osc}t$ (рис. 4.24*а*). Параметры колебаний столика вибростенда Ω_{osc} и b_{osc} для каждого эксперимента являются фиксированными, при этом варьируется скорость вращения полости Ω_{rot}. Величина b_{osc} вычисляется путем анализа осциллограммы сигнала, полученного с одноосного акселерометра типа ПАМТ 4 0.225. Спектральный анализ сигнала с акселерометра показал, что основная гармоника значительно превышает паразитные. Относительная погрешность измерения амплитуды вибраций не превышает 5%.

В качестве определяющих безразмерных параметров используются число Экмана $\mathrm{E} = \nu / \Omega_{rot} R_1^2$ и число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\left|\Delta\Omega_C\right| R_1^2}{\nu}, \qquad (4.7)$$

рассчитанное через скорость дифференциального вращения ядра и его радиус.

Схема экспериментальной установки для изучения вклада дифференциального вращения ядра в структуру осреднённого течения, возбуждаемого свободным ядром, приведена на рис. 4.24*б*. Сферическое тело радиуса $R_1 = 12.7$ мм закреплено в геометрическом центре полости на металлическом стержне диаметром 4.0 мм, расположенном на оси вращения. Радиус полости составляет $R_2 = 26.0$ мм, относительный размер ядра имеет то же значение, что и в экспериментах с телом на леске, $\eta = 0.49$. Стержень, установленный в герметизирующих сальниках, может вместе с ядром свободно вращаться относительно полости. Вращение ядра Ω_C с точностью 0.06 рад/с задается шаговым двигателем *2*, вал которого соединен со стержнем. Скорость вращения кюветы варьируется в диапазоне $\Omega_{rot} = 113.04 \div 200.96$ рад/с и с той же точностью задается независимо посредством ременной передачи от дополнительного шагового двигателя *1*. В качестве рабочей жидкости используется водный раствор глицерина вязкостью $\nu = 2.1$сСт. Рассматривается отстающее вращение ядра, при котором $\left|\Delta\Omega_C\right| < 1.3$ рад/с. Измерение скоростей также контролируется путем синхронизации частоты мерцаний стробоскопической лампы с частотой вращения полости (сферы). Эксперименты проводятся следующим образом. Первоначально кювета и ядро приводятся в равномерное вращение с одинаковыми скоростями $\Omega_{rot} = \Omega_C$. Далее при неизменном значении Ω_{rot} плавно понижается скорость вращения сферы на малую величину $\left|\Delta\Omega_C\right|$. По истечении характерного времени спиндауна, в течение которого происходит обмен моментом импульса и устанавливается стационарное движение жидкости, PIV-методом измеряется профиль установившегося течения.

Для визуализации структуры потоков также используется электрохимическая тимоловая методика, описанная в [246]. Суть метода заключается в измене-

нии цвета жидкости вблизи электрода, на который подается отрицательный потенциал. С этой целью в рабочую жидкость добавляется pH – индикатор тимоловый синий (тимолсульфофталеин), а на стенке полости располагаются медные электроды (рис. 4.25). Согласно Бэйкеру [246] рабочий раствор готовится путем добавления тимолового синего в дистиллированную воду в количестве 0.01% по весу. Полученный раствор титруется до значения $\mathrm{pH} \simeq 8.0$ путем добавления по каплям однонормального раствора едкого натра NaOH до тех пор, пока не появится синяя окраска. Затем добавляется одна или две капли однонормального раствора соляной кислоты HCl, при этом раствор принимает желто-оранжевый оттенок. Для увеличения проводимости в раствор добавляется небольшое количество поваренной соли NaCl (обычно достаточно 0.1% по весу). При создании на электродах разности потенциалов порядка 10 В на катоде происходит процесс восстановления воды с образованием молекул водорода (газ):

$$2\mathrm{H_2O} + 2e^- \to \mathrm{H_2} + 2\mathrm{OH}^- . \qquad (4.8)$$

В результате у катода возникают гидроксильные ионы, поэтому уровень pH повышается и жидкость приобретает синюю окраску. Окрашенная метка обладает нейтральной плавучестью и легко увлекается потоком. Одновременно на аноде происходит реакция окисления:

$$2\mathrm{H_2O} - 4e^- \to \mathrm{O_2} + 4\mathrm{H}^+ . \qquad (4.9)$$

Для визуализации потоков в полости используются два варианта расположения электродов. В первом случае анодом является стальной болт *1*, герметизирующий кювету, а катоды *2* (показаны на рис. 4.25*а* сплошными толстыми линиями) имеют форму концентрических колец из медной проволоки диаметром $d = 0.3$ мм. Они крепятся на стенке полости с помощью прозрачной самоклеящейся пленки на одинаковом расстоянии от «экватора», $z / R_2 = 0.57$. Катоды могут соединяться друг с другом, либо работать независимо. Через отверстие в полости на экваторе электроды подключаются с помощью скользящего контакта к источнику питания MASTECH HY5005E-2. Подводящие провода изолируются от жидкости, поэтому окрашивание жидкости происходит только вблизи кольцевых катодов.

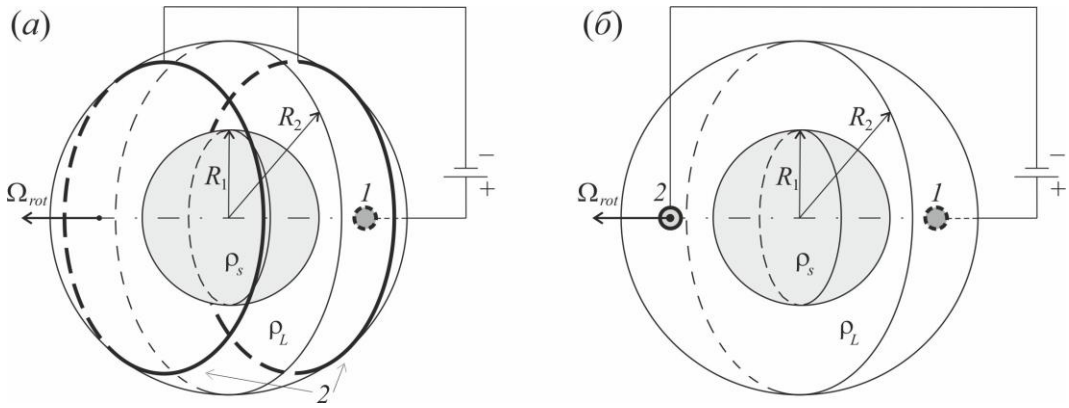


Рисунок 4.25 – Схема расположения электродов в полости (анод – *1*, катод – *2*) для электрохимической методики визуализации течений

Второй вариант расположения катода схематично изображен на рис. 4.25*б*. Катод *2* имеет форму небольшого диска диаметром 5 мм и располагается на оси вращения полости, в полюсе, противоположном аноду. Катод подсоединяется к источнику питания через отверстие в полюсе кюветы посредством скользящего контакта. Рабочее напряжение между электродами составляет 10 В. Фотосъемка осуществляется при наблюдении вдоль оси вращения и сбоку. В последнем случае наблюдения проводятся в проходящем свете от стробоскопической лампы, мерцающей с частотой вращения в определенной фазе, когда плоская боковая граница кюветы ориентирована перпендикулярно оптической оси фотоаппарата.

4.2.2. Колебания с частотой n = –1

4.2.2.1. Колебания ядра и его дифференциальное вращение

Первоначально рассмотрим динамику свободного ядра в случае влияния на систему статического поля силы тяжести, вызывающего его круговые колебания относительно полости с частотой $n=-1$. На рис. 4.26*а* показана скорость дифференциального вращения ядра $\Delta\Omega_C$ в зависимости от скорости вращения полости. С увеличением скорости Ω_{rot} центробежная сила смещает сферу к оси вращения, и скорость $\left|\Delta\Omega_C\right|$ монотонно уменьшается. При больших значениях Ω_{rot} дифференциальное вращение становится слабым, сфера и полость совершают практически твердотельное вращение. При уменьшении Ω_{rot} величина $\left|\Delta\Omega_C\right|$ увеличивает-

ся, экспериментальные точки согласуются с зависимостью, полученной при повышении Ω_{rot}. В переходах сферы в центрифугированное состояние и обратно наблюдается гистерезис. При понижении вязкости жидкости дифференциальное вращение увеличивается.

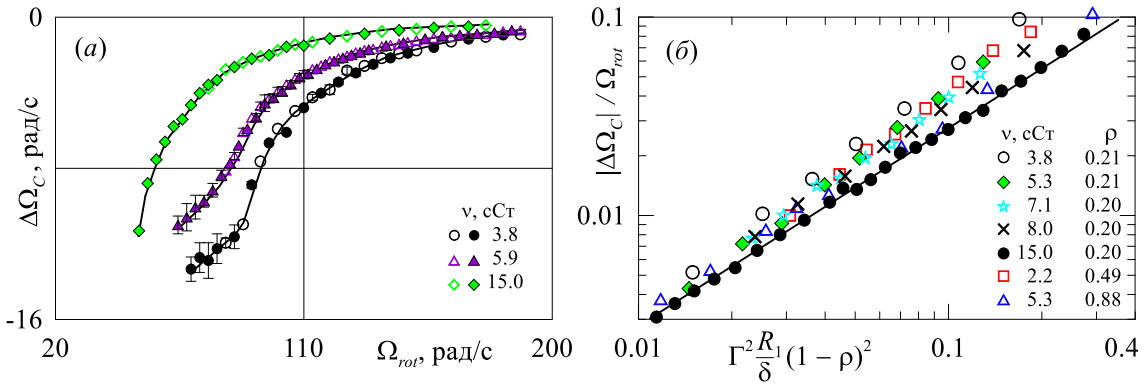


Рисунок 4.26 – (*а*) Зависимость скорости дифференциального вращения ядра от Ω_{rot}, $\rho_C = 0.22$ г/см^3; светлые символы соответствуют монотонному повышению Ω_{rot}, темные – понижению. (*б*) Безразмерная скорость вращения ядра в зависимости от параметра $\Gamma^2\left(R_1/\delta\right)\left(1-\rho\right)^2$

Динамика ядра в сферической полости схожа с ранее изученной динамикой сферы в цилиндрической полости [185–187]. При вращении полости во внешнем силовом поле осреднённая динамика определяется безразмерным гравитационным ускорением

$$\Gamma = \frac{g}{\Omega_{rot}^2 R_1}, \tag{4.10}$$

где g – ускорение свободного падения. Возмущающее действие поля силы тяжести проявляется в генерации отстающего дифференциального вращения, механизм генерации которого для двумерного случая теоретически описан в [184, A23]. Как следует из теории, скорость дифференциального вращения определяется выражением:

$$\frac{\Delta\Omega_C}{\Omega_{rot}} = -\frac{1}{4}\Gamma^2 \frac{R_1}{\delta}\left(1-\rho\right)^2\left(1-\eta^2\right), \tag{4.11}$$

где $\eta = R_1 / R_2$ – отношение размеров тела к полости. Ввиду аналогии с двумерной задачей, управляющие параметры в случае вращающейся полости сферической формы остаются теми же. При фиксированном отношении радиусов тела и полости экспериментальные точки для различных вязкостей и относительных плотностей удовлетворительно согласуются между собой на плоскости параметров $\Gamma^2 \frac{R_1}{\delta}(1-\rho)^2, |\Delta\Omega_C| / \Omega_{rot}$ (рис. 4.26*б*).

Наилучшее согласие экспериментальных результатов с представленной зависимостью во всей области исследований наблюдается для $\nu = 15\,\text{сСт}$ (сплошная кривая на рис. 4.26*б*):

$$\frac{|\Delta\Omega_C|}{\Omega_{rot}} = 0.33\Gamma^2 \frac{R_1}{\delta}(1-\rho)^2. \qquad (4.12)$$

С уменьшением вязкости показатель степени роста $|\Delta\Omega_C| / \Omega_{rot}$ с параметром $\Gamma^2 (R_1 / \delta)(1-\rho)^2$ незначительно увеличивается. Как будет показано в Главе 5, отклонение от зависимости $|\Delta\Omega_C| / \Omega_{rot} \sim \Gamma^2 (R_1 / \delta)(1-\rho)^2$ в маловязких жидкостях объясняется потерей устойчивости осесимметричного течения и развитием надкритических вихревых структур. Следует отметить, что при изменении ν изменяется значение числа Экмана $\mathrm{E} = \nu / \Omega_{rot} R_1^2$, которое, как следует из [А23], является одним из параметров, определяющих устойчивость течений, возбуждаемых дифференциальным вращением свободной сферы.

Зависимость стационарного в лабораторной системе отсчёта смещения ядра от оси (амплитуды колебаний ядра относительно полости) от скорости вращения в жидкостях разной вязкости полностью совпадает с тем, что было получено в экспериментах с леской (рис. 4.19*б*). С увеличением скорости вращения полости амплитуда b уменьшается по закону $b \sim \Omega_{rot}^{-2}$, и при этом не зависит от вязкости жидкости. Это в очередной раз доказывает, что наличие лески не изменяет законы колебаний ядра, а только ограничивает его дифференциальное вращение. Данный результат качественно согласуется с теоретическим законом, полученным для

легкого тела цилиндрической формы во вращающемся горизонтальном цилиндре [61]:

$$b_{cyl} = \frac{1}{2}\Gamma R_1 (1-\rho)\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]. \qquad (4.13)$$

Выражение (4.13) получено в приближении малых амплитуд колебаний в невязкой жидкости. Сравнение с теорией показывает, что сферическое ядро совершает колебания большей амплитуды, при этом законы изменения амплитуды с величиной внешнего поля Γ одинаковы. Разница в коэффициентах объясняется различным характером обтекания тел. Легкое сферическое тело располагается в лабораторной системе отсчёта чуть выше оси вращения полости (рис. 4.19*а*). Цилиндрическое тело, наоборот, располагается ниже оси вращения.

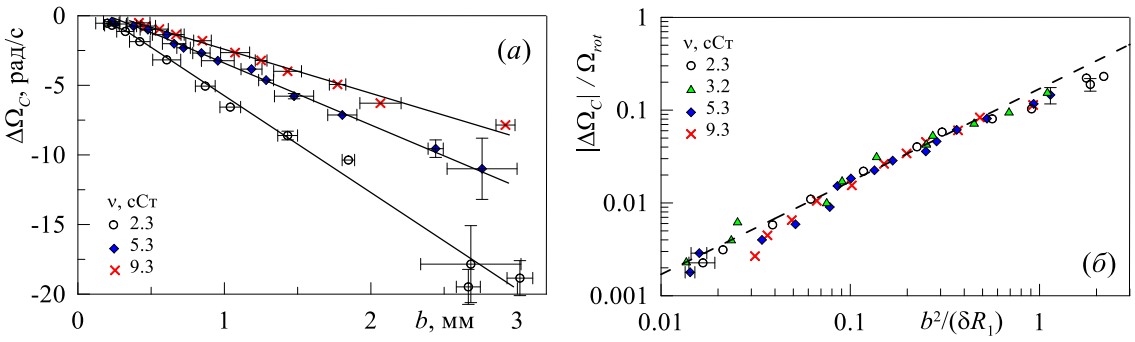


Рисунок 4.27 – Скорость дифференциального вращения сферы в зависимости от безразмерной амплитуды колебаний b (*а*) и $b^2 / R_1\delta$ (б). Штриховая линия показывает зависимость $|\Delta\Omega_C| / \Omega_{rot} \sim b^2 / R_1\delta$, полученную теоретически для цилиндрического тела [А23]

Амплитуда колебаний ядра относительно полости определяет его дифференциальное вращение. С увеличением амплитуды b скорость дифференциального вращения $\Delta\Omega_C$ увеличивается по абсолютной величине (рис. 4.27*а*). При этом $\Delta\Omega_C$ зависит от вязкости жидкости. При одинаковой амплитуде колебаний в менее вязкой жидкости ядро совершает дифференциальное вращение большей величины. Из (4.12) и (4.13) следует, что безразмерная скорость дифференциального вращения $\Delta\Omega_C / \Omega_{rot}$ определяется комплексом $b^2 / R_1\delta$, включающим в себя тол-

щину динамического пограничного слоя δ. На плоскости выбранных безразмерных параметров $\left(b^2 / R_1\delta, \Delta\Omega_C / \Omega_{rot}\right)$ экспериментальные точки, полученные в экспериментах с жидкостями различной вязкости, хорошо согласуются между собой (рис. 4.27*б*).

4.2.2.2. Структурообразование в слое и зональное течение

Дифференциальное вращение ядра приводит к формированию в жидкости квазидвумерного течения в виде столба Тейлора, вытянутого вдоль оси вращения. В докритической области (слабое дифференциальное вращение) столбик имеет форму цилиндра кругового сечения. Границы столба совпадают с геометрическим продолжением границы тела вдоль оси вращения (тангенциальный цилиндр). На Рис. 4.28*а* показано, что полиамидные частицы нейтральной плавучести аккумулируются на границе столбика – в слое Стюартсона, который при наблюдении вдоль оси вращения воспринимается как кольцо *1* (Рис. 4.28*б*). Частицы также аккумулируются в центральной части столбика Тейлора, визуализируя двумерный осесимметричный вихревой столб радиусом $\sim R_1 / 3$ (см. Рис. 4.28*а*). Скорость дифференциального отстающего вращения этого внутреннего столба значительно превосходит по величине скорость отстающего вращения тела. Как показано в [A19, A23], внутренний вихревой столб возникает в результате колебаний ядра относительно полости и не имеет аналога в случае заданного дифференциального вращения внутреннего ядра, закрепленного на оси симметрии полости [188]. В докритической области ($\mathrm{Re} < 54$) это вихревое образование сохраняет осесимметричную форму, а при больших значениях Re теряет устойчивость и делится на два или три параллельных жгута, которые совершают интенсивное отстающее вращение относительно полости (Глава 5).

Тяжёлые частицы оседают на внутренней стенке полости, формируя по три концентрических кольца в каждой половине сферы (рис. 4.28*б–в*, кольца *2 – 4*). При центральном расположении тела (на равном расстоянии от полюсов) кольца располагаются симметрично относительно экватора, при этом наблюдается сегрегация частиц по размеру: в кольцах *3* собираются крупные частицы, в кольцах *2* и

4 – только мелкая фракция. В этих кольцах собираются как мелкие угольные, так и пластиковые частицы, плотность которых лишь незначительно превышает плотность жидкости. В целом, распределение тяжёлых частиц на внутренней стенке полости такое же, как и в отсутствие дифференциального вращения ядра (рис. 4.21). Как и ранее, кольца *3* (на рис. 4.21 кольца *2*) локализованы вблизи точек отражения инерционных волн. При несимметричном расположении ядра относительно полюсов полости положение колец также асимметрично и совпадает с точками удара инерционных волн о границу [A19]. Отметим, что при горизонтальном расположении оси вращения полости центральное положение ядра является устойчивым.

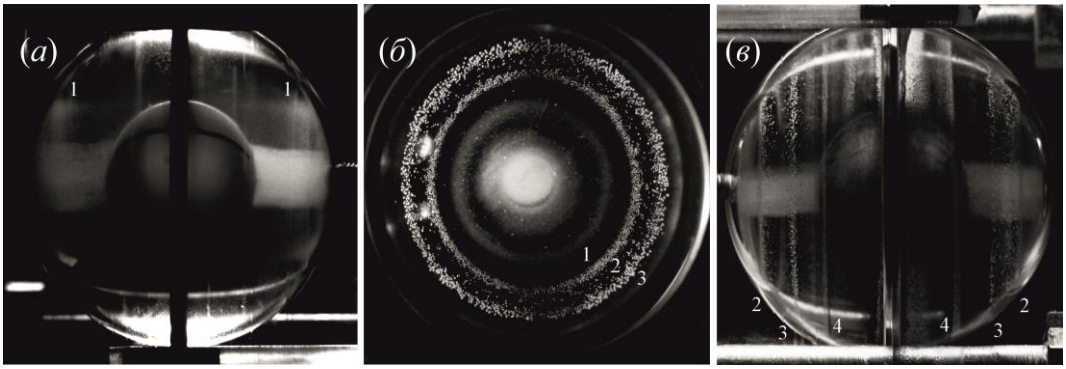


Рисунок 4.28 – Структура течений, вид сбоку (*а* и *в*) и вдоль оси вращения (*б*) при $\Omega_{rot} = 188.4$ рад/с, $\nu = 4.6$ сСт, на (*б* и *в*) наряду с мелкими частицами нейтральной плавучести в жидкости присутствуют частицы, плотность которых превосходит плотность жидкости; кольцевые структуры вырисовываются частицами разного размера

Осреднённое зональное течение. Профили осреднённой азимутальной Δu_φ и угловой скорости $\Delta\Omega$ жидкости до порога потери осесимметричного течения (при $\mathrm{Re} < 54$) представлены на рис. 4.29. PIV-измерения показывают, что в профиле азимутальной скорости (рис. 4.29*б*) присутствует серия точек перегиба, на профиле видны три минимума. Амплитудное значение скорости в минимумах уменьшается с отдалением от оси вращения. Наиболее интенсивное отстающее тангенциальное движение жидкости наблюдается на расстоянии $r / R_2 = 0.15$, где локализуется внутренний вихревой столбик. Следующий минимум соответствует поло-

жению границ внутреннего ядра $r / R_2 = 0.49$, и одновременно границе столба Тейлора. И наконец, последний минимум располагается за пределами столба Тейлора на расстоянии $r / R_2 = 0.90$.

Исследования профиля скорости в различных поперечных сечениях демонстрируют двумерную структуру осреднённого азимутального течения, которая практически не меняется при смещении из центра полости вдоль оси вращения. Значения скорости отстающего дифференциального вращения жидкости в различных сечениях (при различных значениях z / R_2) полностью согласуются между собой (рис. 4.29*б, в*). Незначительный разброс точек наблюдается на расстоянии $r / R_2 \sim 0.75$. Рассогласование обусловлено тем, что при определенных значениях z / R_2 частицы находятся не в объеме жидкости, а вблизи стенки полости. Отметим, что расстоянию $r / R_2 \sim 0.75$ соответствует положение колец *3* (рис. 4.28).

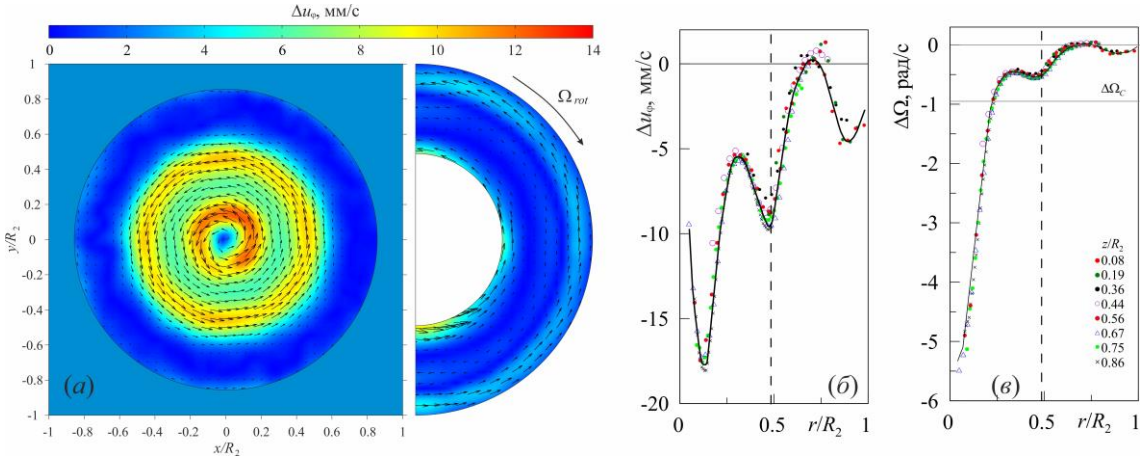


Рисунок 4.29 – (*а*) Векторное поле азимутальной скорости движения жидкости при $z / R_2 = 0.56$ (слева) и $z / R_2 = 0.08$ (справа), $\Omega_{rot} = 166$ рад/с, $\nu = 5.9$ сСт, $\mathrm{Re} = 52$ и $\mathrm{E} = 1.12 \cdot 10^{-4}$; стрелкой показано направление вращения полости. (*б*, *в*) Соответствующие профили осреднённой азимутальной скорости Δu_φ и угловой скорости $\Delta\Omega$ жидкости в различных поперечных сечениях; вертикальными штриховыми линиями показаны границы ядра

Проведенные исследования свидетельствуют, что скорость отстающего дифференциального вращения жидкости $\Delta\Omega$ вблизи границы столбика Тейлора приблизительно в два раза меньше скорости дифференциального вращения ядра

$\Delta\Omega_C$ (показана на рис. 4.29*в* горизонтальной сплошной линией). В то же время вблизи оси скорость отстающего вращения жидкости $\Delta\Omega$ в шесть раз превосходит скорость вращения ядра. В целом структура осреднённого зонального течения аналогична той, что характерна для случая отсутствия дифференциального вращения (рис. 4.20). Тем не менее, существует ряд отличий, касающихся интенсивности движения жидкости в геострофических цилиндрах. Детальное обсуждение всех нюансов будет дано в Разделе 4.3.

4.2.2.3. Меридиональная циркуляция

Измерения скорости движения жидкости в меридиональной плоскости, выполненные с помощью PIV-метода, показывают, что в точке падения инерционной волны на границу возникает слабое осевое течение $< u_z >$ (рис. 4.30*а*). Измерения радиальной компоненты осреднённой скорости отягощены значительной погрешностью вследствие движения частиц по круговой траектории вместе с полостью и не приводятся. От точки падения инерционной волны жидкость движется в осевом направлении к экваториальной плоскости, где поток поворачивает к экватору и, двигаясь вдоль границы полости, замыкается в точке падения волны. Таким образом, в приэкваториальной области формируется тороидальное течение, схема которого представлена на рис. 4.30*б*.

Природа колец *2* и *4* (рис. 4.28), в которых собирается только мелкая фракция, связана с течениями вблизи границы непосредственно в динамическом пограничном слое, возникающем в результате колебаний жидкости. Эти «внутренние» для пограничных слоёв вихри, которые увлекают и переносят мелкие частицы, схематически показаны на рис. 4.30*б* красными линиями. В настоящих экспериментах толщина пограничных слоёв составляет $\delta \sim 10^{-1}$мм, разрешить которую не удается. Поэтому предполагаемая структура потоков в пограничном слое носит гипотетический характер. В то же время она согласуется с классическими примерами генерации средних течений в осциллирующих пограничных слоях вблизи твердой границы [247, 248].

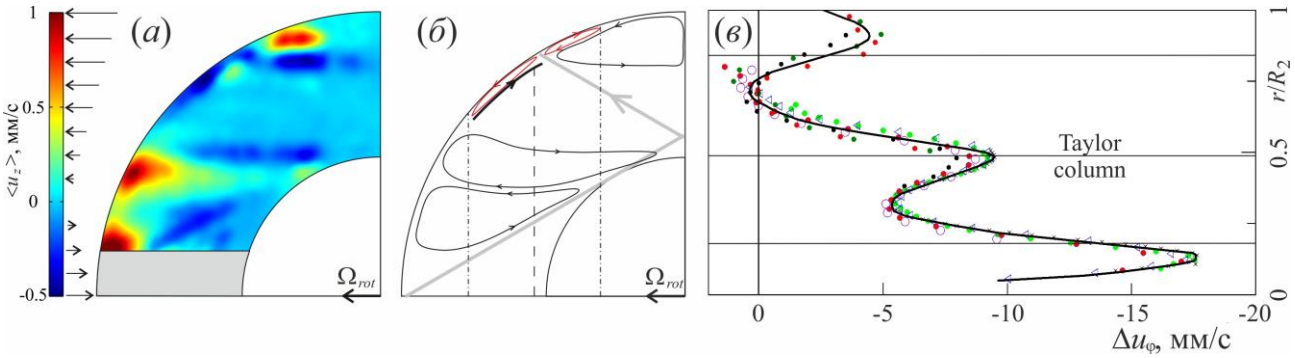


Рисунок 4.30 – (*а*) Осевая компонента скорости жидкости $< u_z >$ в меридиональной плоскости и (*б*) схема течения при $\mathrm{E} = 6.67 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_{rot} = 201$ рад/с, $\nu = 4.2$ сСт, а также (*в*) соответствующая азимутальная циркуляция Δu_φ в перпендикулярной оси вращения плоскости (рис. 4.29). Красными линиями схематично показаны течения в динамическом пограничном слое

В точке падения инерционной волны на стенку полости наряду с осевым течением возбуждается интенсивное азимутальное течение. Точка падения волны соответствует точке перегиба в профиле скорости (рис. 4.30*в*). Заслуживает внимания тот факт, что в экваториальной области, при $r / R_2 > 0.75$, профиль скорости качественно согласуется с [34], где изучалось движение в прецессирующей сфере. В то же время, ни в теоретической работе [139], ни в численных экспериментах [141], где рассматривались приливные колебания вращающегося сферического слоя жидкости, не было обнаружено дифференциальное вращение жидкости внутри столба Тейлора. Это может объясняться принятым в теоретических исследованиях отсутствием касательных напряжений на твёрдых границах.

Результаты применения электрохимической методики. Двумерное осреднённое течение в виде вложенных коаксиальных столбов сопровождается сравнительно медленными осевыми потоками, исследование которых дополнительно проводится с использованием электрохимической методики. Для этой цели в кювету помещаются электроды в соответствии со схемой на рис. 4.25. Фотографии переноса и распределения со временем красителя, который выделяется на кольцевом электроде на расстоянии $z / R_2 = 0.57$, представлены на рис. 4.31*а–г*.

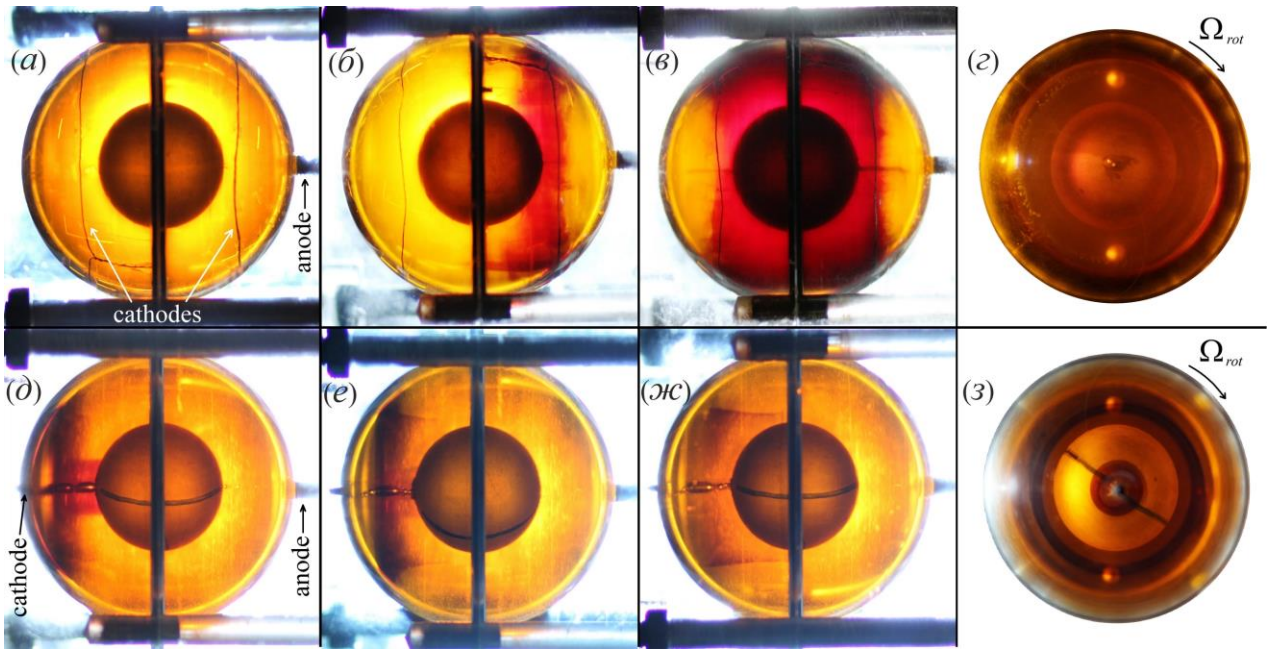


Рисунок 4.31 – Распространение красителя со временем; $\Omega_{rot} = 188$ рад/с, $\nu = 4.0$ сСт, $\mathrm{Re} = 52$, $\mathrm{E} = 6.8 \cdot 10^{-5}$. Фотографии *а–г* получены при выделении красителя на кольцевом электроде (см. Рис. 4.25*а*), фотографии *д–з* получены при выделении красителя в полярной области (см. рис. 4.25*б*)

В отсутствие напряжения между электродами кислотность жидкости нейтральна, последняя имеет желто-оранжевую окраску (рис. 4.31*а*). При подаче разности потенциалов на электроды жидкость возле катода приобретает темную окраску. Темное облако в течение нескольких минут распространяется от электродов к экватору, постепенно окрашивая всю жидкость в прилегающей области. На фрагменте рис. 4.31*б* показано распределение красителя через ~ 0.5 мин после начала выделения красителя. Отметим, что в описанном эксперименте работал только один из электродов, расположенный справа на фигуре. Через значительное время (~ 4 мин) распространение красителя завершается, он локализуется в ограниченной области $z / R_2 = \pm 0.59$, характеризующейся достаточно резкой границей (рис. 4.31*в*). Наблюдения вдоль оси вращения (рис. 4.31*г*) показывают, что область переноса красителя ограничена и по радиусу. Внутренний радиус кольца окрашенной жидкости составляет $\sim 0.78 R_2$. Таким образом, окрашенная жидкость циркулирует только в приэкваториальной области. Тот факт, что краситель не распространяется во весь объем полости, свидетельствует о том, что в этой обла-

сти существуют несколько тороидальных потоков, формирующих цилиндрическую границу раздела на расстоянии $\sim 0.78R_2$ от оси вращения. Из рис. 4.29*в* следует, что эта граница характеризуется медленным отстающим азимутальным движением. При выделении красителя в приполярной области первоначально визуализируется внутренняя цилиндрическая граница (вихревая система), поперечный размер которой составляет $\sim 0.20R_2$ (рис. 4.31*д*). Это свидетельствует о существовании интенсивного циркуляционного движения жидкости в этом внутреннем столбе. Через время ~ 1 мин на расстоянии $\sim 0.55R_2$ проявляется второе темное кольцо. Образование кольца объясняется наличием расходящегося радиального движения в пограничном слое Экмана вблизи стенки полости, направленного от оси вращения. Так как скорость вращения ядра меньше скорости вращения полости, окрашенная жидкость выбрасывается от оси вращения на периферию. Со временем краситель из кольца переносится в осевом направлении к центру полости, постепенно вырисовывая осесимметричную поверхность столбика Тейлора (рис. 4.31*д–з*). Размер данного кольца хорошо согласуется с кольцом *2* из мелкой фракции тяжёлых частиц на внутренней стенке полости (рис. 4.28). Отметим, что для интенсивного выделения красителя и получения контрастной границы на фотографиях рис. 4.31*д–з* на электроды подавалась повышенная разность потенциалов, что сопровождалось выделением пузырьков водорода, которые скапливались на оси вращения. Наблюдения свидетельствуют, что их наличие на оси не оказывает влияния на структуру потоков и результаты визуализации течения. Этот результат хорошо согласуется с результатами исследования структуры потоков с применением PIV-метода (рис. 4.30).

4.2.2.4. Роль чисел Экмана и Рейнольдса

Одним из безразмерных параметров, характеризующих структуру и интенсивность азимутального течения, является число Экмана $\mathrm{E} = \nu / \Omega_{rot} R_1^2$. Поскольку в рассматриваемом частном случае $|\Omega| = \Omega_{rot}$, данный параметр характеризует не только отношение вязких сил к силе Кориолиса, но и относительный размер ди-

намического пограничного слоя $E \sim \delta^2 / R_1^2$. Как следует из экспериментов, с увеличением E при фиксированном значении числа Рейнольдса профиль скорости не меняется, а интенсивность отстающего вращения $\Delta\Omega / \Omega_{rot}$ уменьшается (рис. 4.32*а*). Поскольку касательные напряжения, возникающие на стенке, приводят свободное ядро в дифференциальное вращение $\Delta\Omega_C$, выберем его в качестве единицы измерения скорости дифференциального вращения жидкости $\Delta\Omega$ (рис. 4.32*б*). На выбранной плоскости безразмерных параметров экспериментальные точки, полученные при различных значениях E, хорошо согласуются между собой. Это означает, что в докритической области оба эффекта (дифференциальное вращение тела и жидкости) пропорциональны друг другу.

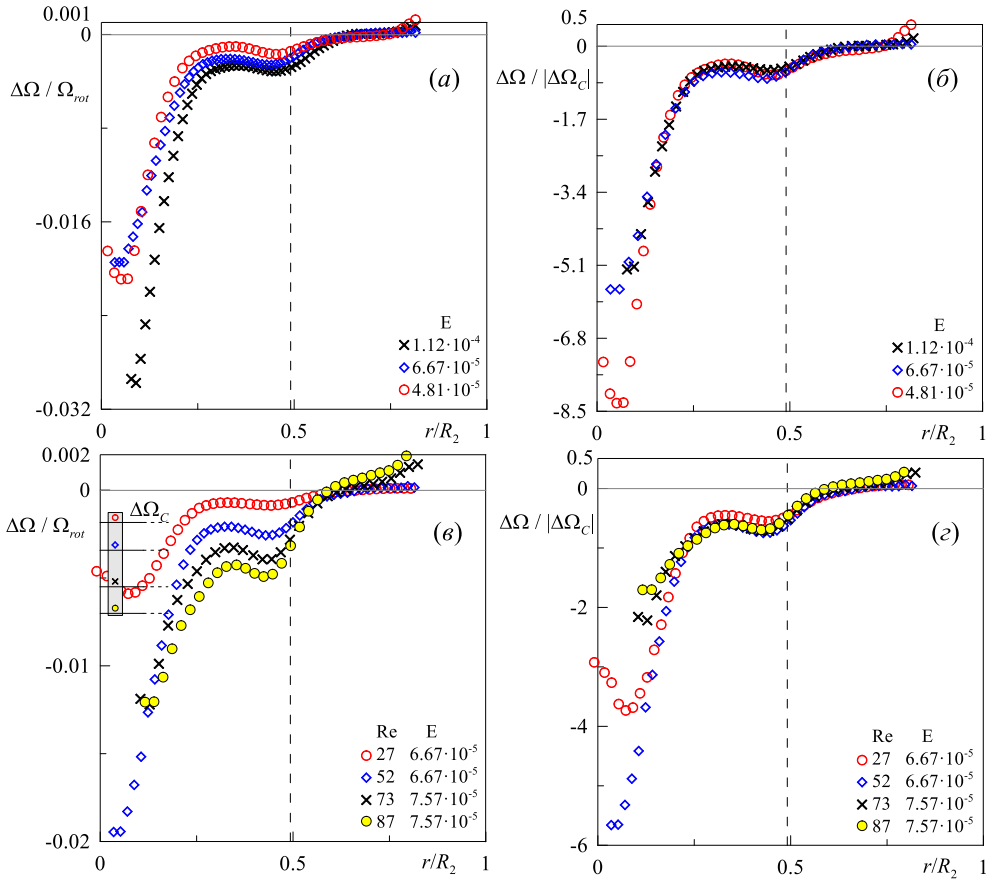


Рисунок 4.32 – Трансформация профиля скорости с изменением числа Экмана при $\mathrm{Re} = 52$ (*а*, *б*) и с изменением числа Рейнольдса (*в*, *г*) при близких значениях E; горизонтальными линиями на фрагменте (*в*) показаны значения скорости отстающего дифференциального вращения ядра $\Delta\Omega_C$. Все измерения выполнены в сечении $z / R_2 = 0.56$

При увеличении числа Рейнольдса (рис. 4.32*в*) интенсивность движения жидкости в полости, в том числе в слоях Стюартсона, возрастает пропорционально скорости дифференциального вращения ядра. Отметим, что при $\mathrm{Re} > 54$ внутри столба Тейлора развивается вихревая система из пары вихрей, поэтому экспериментальные точки в центральной части полости не приводятся. Если в качестве единицы измерения скорости жидкости снова использовать скорость дифференциального вращения ядра, то все экспериментальные точки, полученные при различных числах Рейнольдса, согласуются между собой (рис. 4.32*г*).

Зональные потоки, обнаруженные в настоящих экспериментах с круговыми колебаниями свободного (дифференциально вращающегося) внутреннего ядра и в экспериментах с другими типами гармонического воздействия, демонстрируют общие черты. Во-первых, они имеют квазидвумерную форму. Во-вторых, это общая квадратичная зависимость скорости от амплитуды воздействия. Как было показано в Разделе 4.2.2.1, дифференциальное вращение ядра $\Delta\Omega_C / \Omega_{rot} \sim b^2 / R_1\delta$. В то же время скорость $\Delta\Omega_C$ пропорциональна $\Delta\Omega$. Отсюда для скорости жидкости в геострофических цилиндрах получается зависимость $\Delta\Omega / \Omega_{rot} \sim \left(b / R_1\right)^2 \mathrm{E}^{-1/2}$, что также хорошо проиллюстрировано на рис. 4.22 для случая отсутствия собственного дифференциального вращения ядра.

4.3. Влияние заданного дифференциального вращения ядра на структуру течения

В случае свободного ядра осциллирующие пограничные слои с одной стороны генерируют в объеме жидкости двумерное азимутальное течение, с другой – вызывают дифференциальное вращение самого ядра. Последнее само по себе должно вызывать экмановскую циркуляцию жидкости [188] и вносить вклад в результирующее течение, возбуждаемое свободным ядром. Для выяснения роли дифференциального вращения ядра в рассматриваемой задаче были проведены дополнительные исследования профиля скорости в случае заданного дифферен-

циального вращения ядра, расположенного в центре полости. Эксперименты проводятся в постановке, схематично изображенной на рис. 4.24*б*.

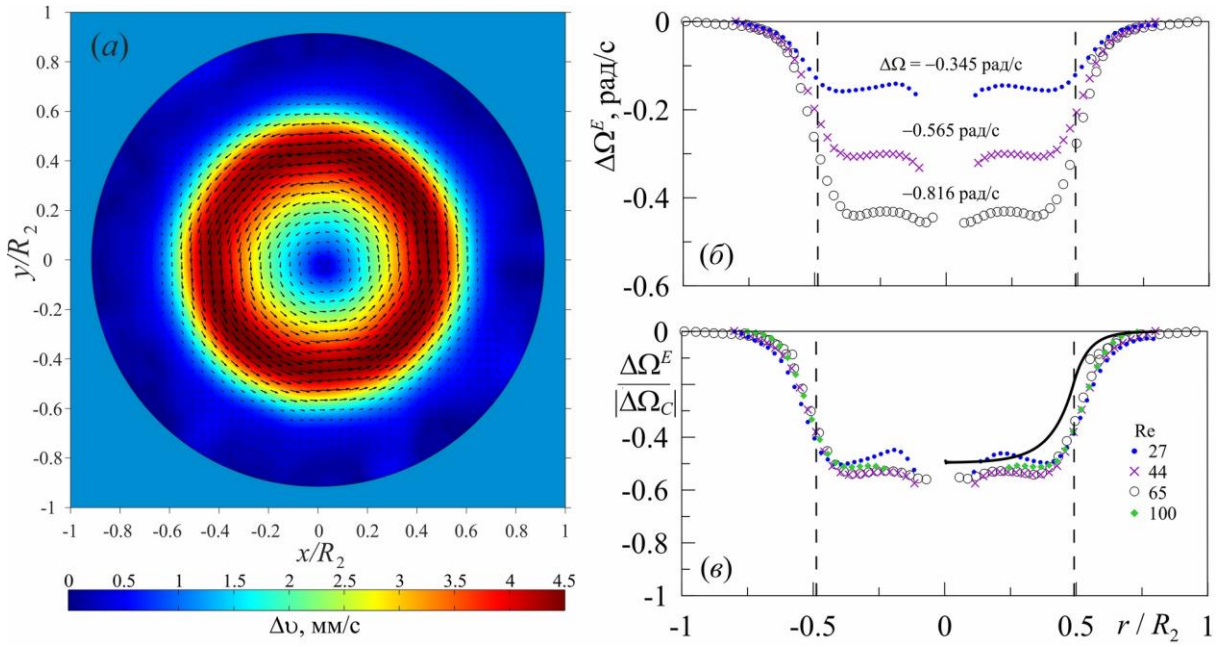


Рисунок 4.33 – (*а*) Пример векторного поля азимутальной скорости жидкости при $z / R_2 = 0.57$, $\nu = 2.1$сСт, $\Omega_{rot} = 113.04$ рад/с и $\Delta\Omega_C = -0.816$ рад/с; направление вращения полости – по часовой стрелке. (*б*, *в*) Соответствующие профили угловой скорости жидкости при различных скоростях дифференциального вращения ядра. На фрагменте (*в*) сплошной линией приведен теоретический профиль скорости [188]

При $|\Delta\Omega_C| = 0$ жидкость, ядро и полость совершают твердотельное вращение. При малых значениях $|\Delta\Omega_C|$ течение является осесимметричным и имеет вид столба Тейлора. Поле скорости и соответствующие профили при различных значениях $|\Delta\Omega_C|$ представлены на рис. 4.33. За пределами столбика жидкость вращается практически твердотельно вместе с кюветой, а внутри – со скоростью $\Delta\Omega^E \approx |\Delta\Omega_C| / 2$. Непрерывность азимутальной компоненты скорости жидкости внутри и за пределами столба Тейлора обеспечивают сдвиговые слои Стюартсона. За возникновение азимутальной циркуляции жидкости ответственны вязкие пограничные слои Экмана [1]. При дифференциальном вращении градиент давления жидкости вблизи твёрдых границы отличается от невязкой области – за предела-

ми пограничных слоёв. В тонких пограничных слоях Экмана характерной толщины $\delta_E \sim \sqrt{\nu / \Omega_{rot}}$ появляется радиальная циркуляция, выбрасывающая жидкость в слой Стюартсона. Полученные профили скорости хорошо согласуются с теоретическими исследованиями [77, 188, сплошная кривая на рис. 4.33*в*], в которых показано, что в пределе малых чисел Экмана $E << 1$ жидкость внутри столба вращается с промежуточной скоростью внешней и внутренней сферы. При выборе скорости дифференциального вращения ядра $|\Delta\Omega_C|$ в качестве единицы измерения скорости жидкости $\Delta\Omega^E$ профили скорости при различном вращении внутреннего ядра согласуются между собой.

Сравнение показывает, что течение, возбуждаемое колеблющимся ядром (рис. 4.20 и 4.29), качественно отличается от течения при заданном дифференциальном вращении (рис. 4.33). В первом случае осреднённое течение имеет вид вложенных коаксиальных столбов, вращающихся с различными скоростями. Во втором случае структура течения имеет вид столба Тейлора, вытянутого вдоль оси вращения. Можно предположить, что при одновременном действии обоих механизмов, связанных с колебаниями и дифференциальным вращением ядра, результирующее движение жидкости определяется линейной суперпозицией описанных выше течений. В соответствии с этим представим движение жидкости, возбуждаемое свободным колеблющимся ядром, совершающим дифференциальное вращение, в виде суммы $\Delta\Omega = \Delta\Omega^{osc} + \Delta\Omega^E$.

Для количественного сравнения профилей скоростей, полученных в докритическом режиме при разных параметрах экспериментов, учтем, что в задаче со свободным ядром его собственное дифференциальное вращение $\Delta\Omega_C$ можно использовать в качестве единицы измерения осреднённого движения жидкости. Из (4.12) следует, что универсальным параметром, отвечающим за скорость дифференциального вращения жидкости $\Delta\Omega$, является комплекс $\Psi = \Gamma^2 \left(R_1 / \delta \right) \left(1 - \rho \right)^2$. Данная единица измерения является универсальной, когда осциллирующее ядро совершает дифференциальное вращение, и когда последнее отсутствует. В первом

случае эта величина полностью совпадает со скоростью его дифференциального вращения $\Delta\Omega_C$.

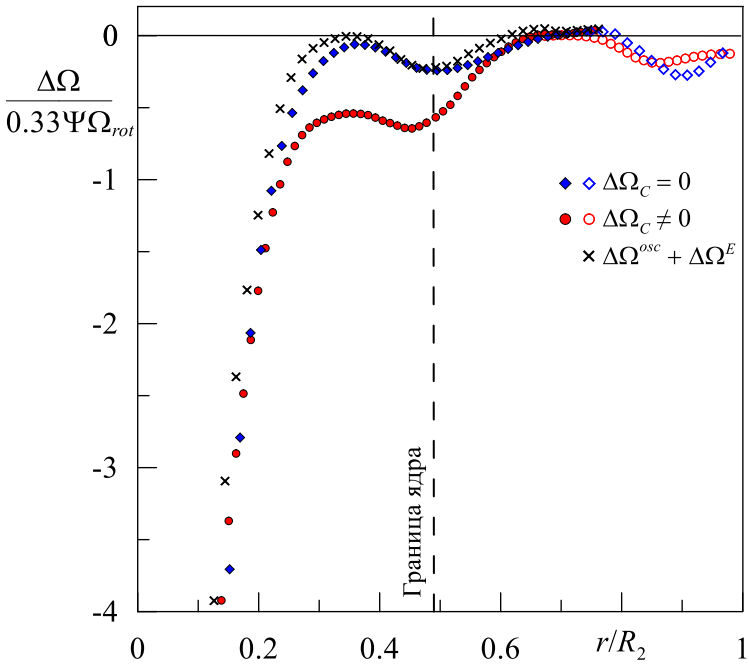


Рисунок 4.34 – Профили безразмерной скорости осесимметричного течения в отсутствие дифференциального вращения ядра (синие ромбики, $\Omega_{rot} = 200.9$ рад/с, $\nu = 5.4$ сСт, $\mathrm{E} = 8.5\cdot10^{-5}$) и при его наличии (красные кружки, $\Omega_{rot} = 166.4$ рад/с, $\nu = 5.9$ сСт, $\mathrm{E} = 1.1\cdot10^{-4}$)

На рис. 4.34 приведены профили осреднённого азимутального течения, возбуждаемого свободным колеблющимся ядром (красные кружки) и колеблющимся ядром, не совершающим дифференциальное вращение (синие ромбики). Профили имеют подобный вид и отличаются в распределении скорости лишь в области $r / R_2 < 0.6$, где скорость отстающего вращения жидкости для случая свободного ядра оказывается более высокой. Данное отличие связано с дополнительным влиянием стационарного экмановского течения. Профиль скорости $\Delta\Omega / 0.33\Psi\Omega_{rot}$, полученный в результате вычитания данного эффекта из течения, генерируемого свободным ядром, представлен на рис. 4.34 чёрными крестиками. Видно, что полученные значения скоростей хорошо согласуются с результатами при $\Delta\Omega_C = 0$.

4.4. Многочастотные колебания свободного ядра

Рассмотрим динамику системы при одновременном действии нескольких осциллирующих инерционных полей. Первое связано с действием статического поля силы тяжести, вызывающего круговые колебания ядра с частотой $n=-1$. Второе создается линейно-поляризованными вертикальными вибрациями кюветы с произвольной частотой, которая варьируется в ходе эксперимента.

Типичная динамика ядра при вибрациях приведена на рис. 4.35. Вибрации полости оказывают эффект только в двух резонансных областях, соответствующих собственным круговым колебаниям ядра [A9]. Одна область находится при $\Omega_{osc} > \Omega_{rot}$ $(n>0)$, а другая – при $\Omega_{osc} < \Omega_{rot}$ $(n<0)$. В резонансных областях ядро совершает интенсивные колебания в экваториальной плоскости с частотой вибраций $\Omega = \Omega_{osc} - \Omega_{rot}$, при этом при $\Omega_{osc} > \Omega_{rot}$ возбуждается интенсивное опережающее дифференциальное вращение, при $\Omega_{osc} < \Omega_{rot}$ происходит интенсификация отстающего (красные круги на рис. 4.35*а*). Результаты, полученные при монотонном повышении частоты вращения и понижении, согласуются между собой. Вне резонансных областей экспериментальные точки согласуются с результатами, полученными в отсутствие вибраций. При повышении частоты вибраций резонансная кривая (ромбики на рис. 4.35*а*) смещается в область более высокой частоты вращения, сохраняя свою форму. При этом в узкой области частот (показана штриховкой) наблюдается небольшой гистерезис.

Резонансное возбуждение дифференциального вращения объясняется совпадением частоты вибраций (в системе отсчёта полости) с одной из собственных частот ядра, одна из которых больше, а другая меньше частоты вращения полости. При изменении частоты вибраций положение резонансных областей меняется. Однако все экспериментальные точки согласуются, если в качестве управляющего параметра выбрать безразмерную частоту вибраций $n = \Omega / \Omega_{rot}$ (рис. 4.35*б*). На данной фигуре представлены точки, соответствующие области $n>0$, поскольку именно в этой области изучается структура течений. Аналогичным образом согласуются между собой резонансные кривые в области $n<0$ [A9].

Детально вибрационная динамика сферического ядра во вращающейся сферической полости описана в [187].

Отметим, что в случае опережающего вращения (при $\Omega_{osc} > \Omega_{rot}$) резонансная кривая асимметрична и включает две близко расположенные области интенсификации дифференциального вращения: основной экстремум в диапазоне частот $n = 1.1 - 1.5$ и дополнительный при $n = 0.8 - 1.1$. Резонансная кривая аналогичной формы наблюдалась ранее в случае вибрационного вращения сферического ядра во вращающейся цилиндрической полости [185]. Как будет показано ниже, появление дополнительного максимума при $n \approx 1$ (рис. 4.35*б*) связано с особенностью суперпозиции двух осциллирующих в системе отсчёта полости полей, силы тяжести и инерционного поля, создаваемого вибрациями.

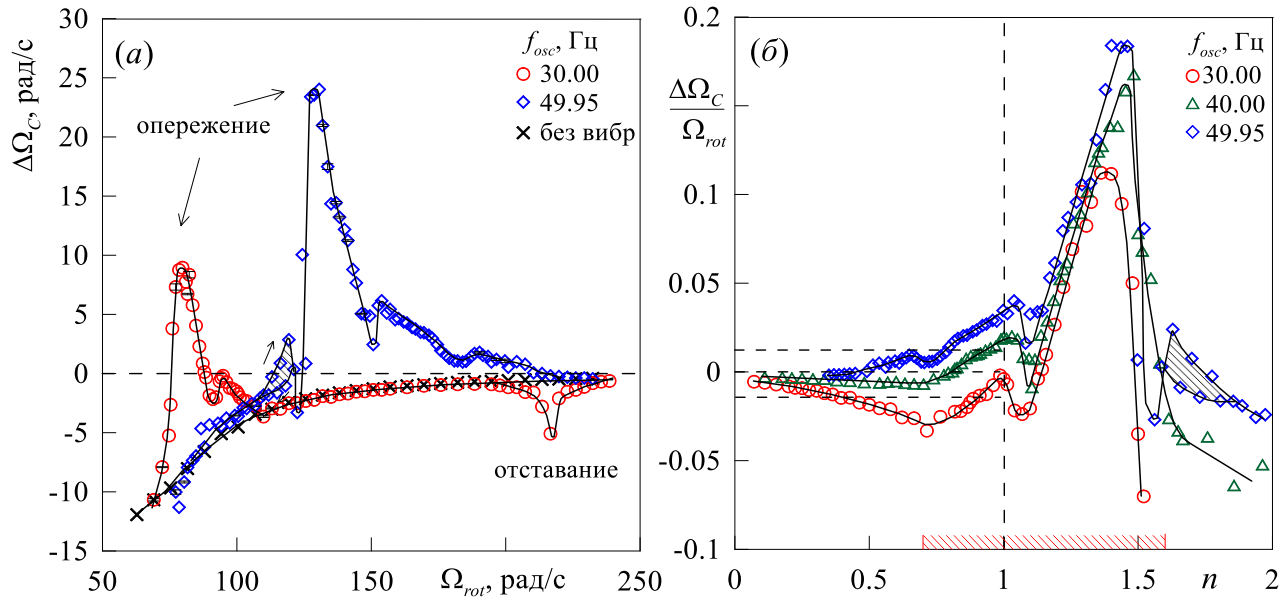


Рисунок 4.35 – Скорость дифференциального вращения ядра в зависимости от скорости вращения полости (*а*) и безразмерной частоты n (*б*) при различных значениях частоты вибраций f_{osc} и заданной амплитуде $b_{osc} = 0.4$ мм. Красной штриховкой на фрагменте *б* отмечен диапазон значений n, в котором изучается структура течения

Объяснение эффекта резонансных колебаний ядра было детально описано в Разделе 4.1.2. Линейные вибрации всегда можно разложить на два поляризованных по кругу колебания, которые противоположны по направлению и соответ-

ствуют двум вращающимся инерционным полям. В условиях резонанса частота вращения одного из полей согласована с собственной частотой круговых колебаний ядра, что и приводит к его колебаниям с амплитудой, значительно превосходящей амплитуду вибраций полости.

4.4.1. Зональное течение

В результате колебаний ядра относительно полости в жидкости генерируется осесимметричное зональное течение, вид которого показан на рис. 4.36. Если в отсутствие вибраций полости ядро колеблется относительно полости с частотой $\Omega = -\Omega_{rot}$, что приводит к возникновению отстающего течения, скорость которого немонотонно меняется с расстоянием от оси вращения r (чёрные круги и желтые треугольники на рис. 4.36*а*). Наличие дополнительных частот колебаний под действием переменного поля качественно изменяет структуру течения.

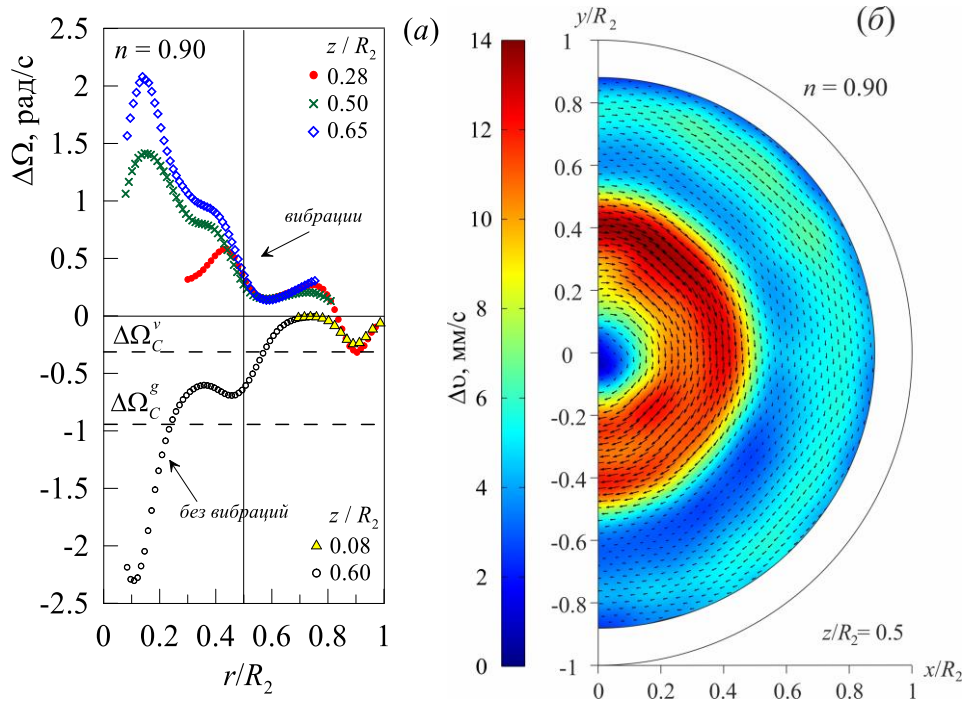


Рисунок 4.36 – Зависимость скорости дифференциального вращения жидкости от расстояния до оси (*а*) и поле азимутальной скорости (направление вращения полости по часовой стрелке) при вибрационном воздействии (*б*) при $n = 0.90$ ($\Omega_{rot} = 169.56$ рад/с); штриховыми горизонтальными линиями на фрагменте (*а*) показаны скорости дифференциального вращения ядра без вибраций $\Delta\Omega_C^g$ и при вибрациях $\Delta\Omega_C^v$

Вибрационное воздействие с частотой $n>0$ приводит к уменьшению отстающего дифференциального вращения ядра гравитационной природы, при этом наблюдается качественное изменение профиля азимутальной скорости. Так, например, при $n=0.90$ (рис. 4.36*а*) незначительное увеличение скорости дифференциального вращения ядра (которая остается отрицательной) приводит к тому, что направление движения жидкости $\Delta\Omega$ внутри тангенциального цилиндра (область $r/R_2<0.5$) меняется на опережающее. Причём максимальное значение скорости опережающего течения вблизи оси вращения сопоставимо по величине со скоростью отстающего течения в отсутствие вибраций. С расстоянием от оси опережающее дифференциальное вращение жидкости уменьшается и становится равным нулю при $r/R_2\approx 0.83$. Измерения скорости в сечении $z/R_2=0.28$ показывают, что при дальнейшем увеличении расстояния от оси вращения скорость движения жидкости при вибрациях мало отличается от случая отсутствия вибраций. Отметим, что внутри тангенциального цилиндра течение, возбуждаемое вибрациями, не является двумерным. Об этом свидетельствует существенное расхождение экспериментальных точек для угловой скорости жидкости, измеренной при различных значениях z/R_2. Видно, что ядро, совершающее ретроградное вращение, оказывает тормозящее действие на жидкость вблизи его границы.

4.4.2. Аддитивность осреднённых эффектов

В отсутствие вибраций скорость дифференциального вращения ядра определяется расстоянием гравитационного смещения b ядра от оси и толщиной динамических пограничных слоёв δ. В то же время, скорость азимутального движения жидкости $\Delta\Omega$ возрастает со скоростью дифференциального вращения ядра $\Delta\Omega_C^g$ (рис. 4.37*а*). При вибрационном воздействии дифференциальное вращение ядра $\Delta\Omega_C$ также определяет интенсивность азимутального течения. При фиксированных значениях частоты вибраций *n* и скорости вращения полости Ω_{rot} с увеличением $\Delta\Omega_C$ скорость жидкости $\Delta\Omega$ возрастает (рис. 4.37*б*). Если вибрационное влияние невелико и $\Delta\Omega_C$ мало отличается от $\Delta\Omega_C^g$, зависимость $\Delta\Omega(r)$ приход-

нимается, при этом движение внутри столба Тейлора и за его пределами становится частично опережающим. При дальнейшем увеличении $\Delta\Omega_C$, несмотря на отстающее вращение ядра, жидкость, практически во всем объеме полости, совершает опережающее вращение, $\Delta\Omega > 0$. Результирующее дифференциальное вращение ядра определяется линейной суперпозицией осреднённых эффектов, связанных с колебаниями ядра с различными частотами, $\Delta\Omega_C = \Delta\Omega_C^g + \Delta\Omega_C^v$. В связи с этим разложим результирующее поле скорости на две составляющие:

$$\Delta\Omega = \Delta\Omega^g + \Delta\Omega^v. \qquad (4.14)$$

На рис. 4.37*в* показано изменение профиля азимутальной скорости жидкости с частотой вращения при фиксированном значении вибрационной составляющей скорости ядра $\Delta\Omega_C^v$. Кривые имеют подобный вид, причем с увеличением скорости Ω_{rot} скорость жидкости $\Delta\Omega$ возрастает. Последнее объясняется тем, что при увеличении Ω_{rot} уменьшается вклад гравитационной компоненты скорости жидкости $\Delta\Omega^g$ в результирующее дифференциальное вращение $\Delta\Omega$ (рис. 4.37*а*).

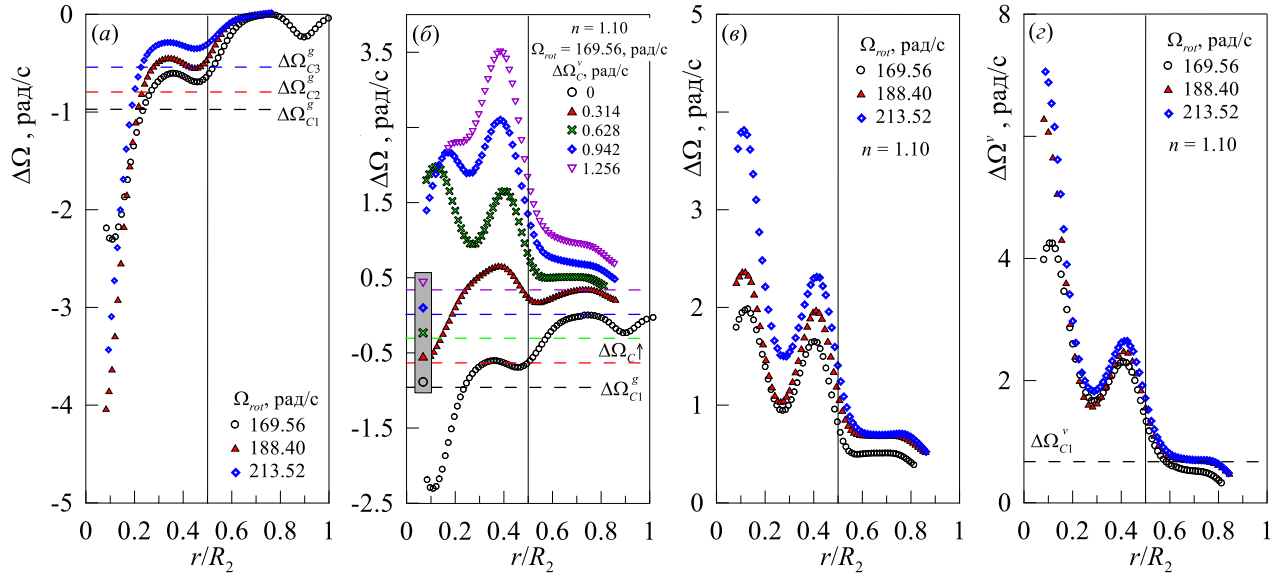


Рисунок 4.37 – Профили угловой скорости жидкости в отсутствие вибраций (*а*) и при вибрационном воздействии (*б–г*). На фрагменте (*б*) показано изменение профиля скорости зонального течения $\Delta\Omega$ со скоростью дифференциального вращения ядра $\Delta\Omega_C$; на (*в–г*) представлены распределения полной и вибрационной составляющей скорости вращения жидкости $\Delta\Omega^v$ при фиксированном значении вибрационной составляющей скорости вращения ядра $\Delta\Omega_C^v = 0.628$ рад/с

Вибрационные компоненты скорости $\Delta\Omega^{v}$, найденные методом исключения гравитационной составляющей при различных значениях Ω_{rot} и одинаковых вибрационных параметрах, хорошо согласуются между собой (рис. 4.37*г*). Это означает, что вибрационные составляющие скорости дифференциального вращения ядра и жидкости пропорциональны друг другу, $\Delta\Omega_C^{v} \sim \Delta\Omega^{v}$. Поэтому в качестве меры интенсивности течения можно использовать вибрационную скорость $\Delta\Omega_C^{v}$.

На рис. 4.38 показано изменение профиля угловой скорости вращения жидкости с безразмерной частотой вибраций n при заданном значении $\Delta\Omega_C^{v}$. Вблизи дополнительного резонанса (область частот $n = 0.70 \div 0.85$, рис. 4.35) изменение частоты вибраций практически не влияет на структуру течения (рис. 4.38*а*). В данной области экспериментальные точки хорошо согласуются между собой. С удалением от оси вращения опережающее движение жидкости монотонно возрастает, достигая максимального значения при $r / R_2 \approx 0.35$. При дальнейшем увеличении r азимутальная скорость жидкости уменьшается, и второй максимум, меньшей интенсивности, наблюдается на расстоянии $r / R_2 \approx 0.75$. При увеличении частоты до 0.90 структура течения меняется в центральной части полости. Интенсивность течения вблизи оси вращения существенно возрастает, в то время как в остальном диапазоне значений r изменений не наблюдается.

В области $n = 1.02 - 1.10$ наблюдается качественное изменение структуры течения (рис. 4.38*б*). Экстремум смещается из точки $r / R_2 \approx 0.35$ в $r / R_2 \approx 0.42$, при этом интенсивность течения возрастает вдвое. При дальнейшем увеличении n и постепенном выходе из резонансной области интенсивность зонального течения уменьшается (рис. 4.38*в*). Размер жидкого столба, в котором наблюдается наиболее выраженное опережающее вращение, уменьшается до $r / R_2 \approx 0.28$, а опережающее движение вблизи оси сменяется отстающим. При $n > 1.20$ структура течения перестает изменяться с частотой.

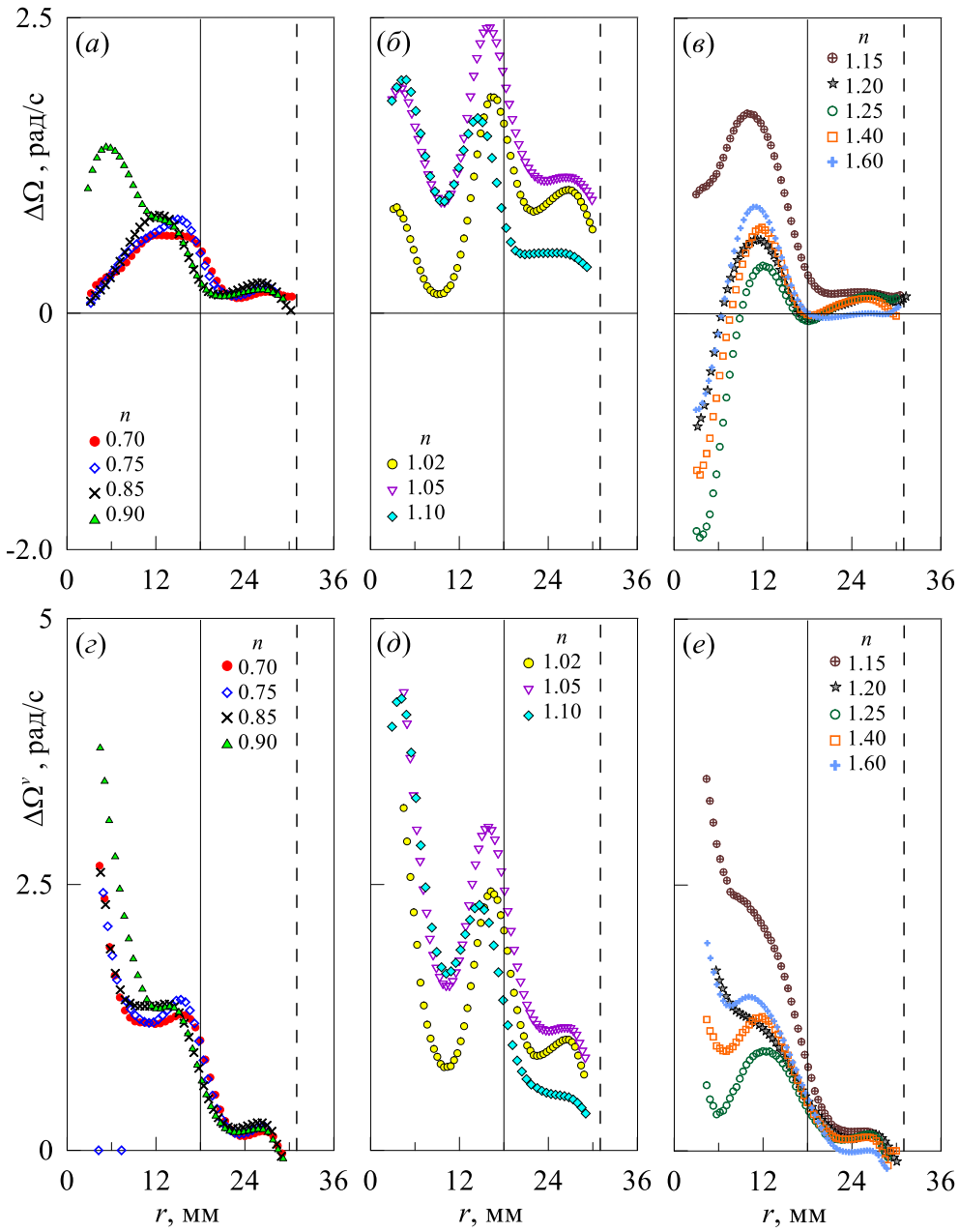


Рисунок 4.38 – Профили угловой скорости вращения жидкости при различных n на расстоянии $z / R_2 = 0.5$ от центра полости. Гравитационная и вибрационная составляющие скорости дифференциального вращения ядра поддерживаются постоянными; $\mathrm{E} = 9.4 \cdot 10^{-5}$, $\mathrm{Re}^g = 59$, $\mathrm{Re}^v = 39$. Вертикальными штриховыми линиями показаны границы полости

Выделение вибрационной компоненты скорости жидкости $\Delta\Omega^v$ позволяет увидеть структуру течения, возбуждаемую непосредственно вибрациями (рис. 4.38*г–е*). Так, интенсивное отстающее вращение в центре в отсутствие вибраций (рис. 4.37*а*) полностью компенсируется вибрационным потоком. Для вибрационной составляющей скорости характерно выраженное опережающее враще-

ние в центральной части, что особенно ярко видно из сравнения рис. 4.38*а* и рис. 4.38*г*. В области частот $n=1.02-1.10$ (рис. 4.38*д*) происходит интенсификация азимутального вращения при $r/R_2 \approx 0.42$. При этом выраженное опережающее движение вблизи оси вращения сохраняется, а профиль скорости становится более крутым. В области $n>1.15$ опережающее вращение ослабевает. С изменением частоты от $n=1.20$ до $n=1.60$ величина скорости вращения жидкости меняется немонотонно, хотя структура течения остается подобной. Таким образом, безразмерная частота n существенно влияет на структуру течения. Отметим, что вибрационная компонента зонального течения для свободного ядра (рис. 4.38*г–е*) в целом качественно согласуется со структурой течения для случая отсутствия собственного дифференциального вращения (рис. 4.16).

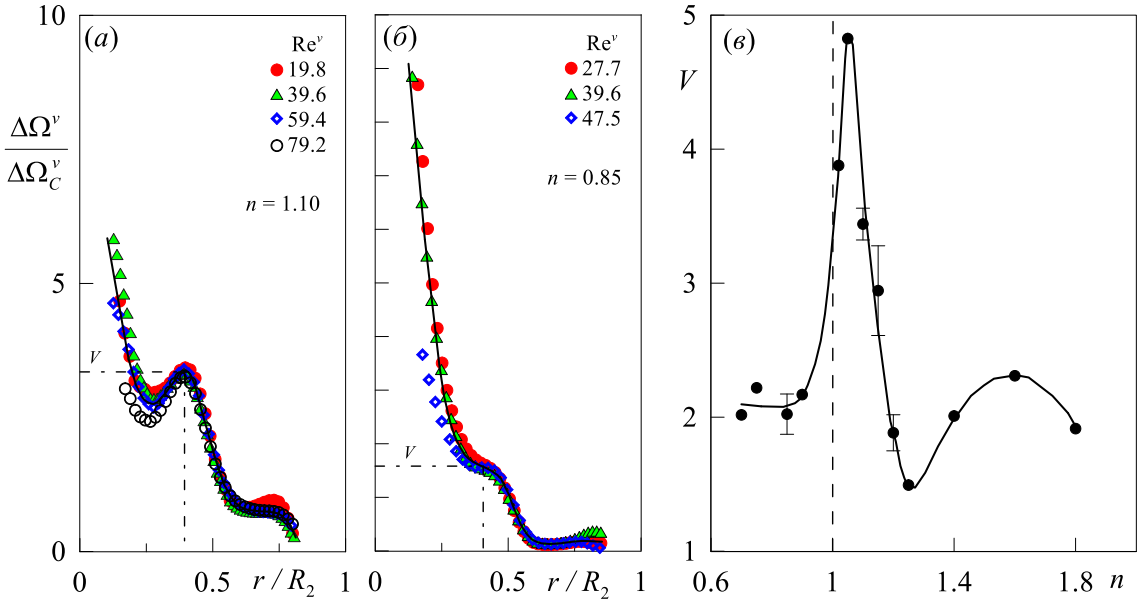


Рисунок 4.39 – Вибрационная составляющая скорости дифференциального вращения жидкости $\Delta\Omega^v$ в единицах вибрационной скорости дифференциального вращения ядра $\Delta\Omega_C^v$ при различных Re^v и значениях $\mathrm{E}=9.36\cdot10^{-5}$, $\mathrm{Re}^g=59$ (*а*) и $\mathrm{E}=8.42\cdot10^{-5}$, $\mathrm{Re}^g=47$ (*б*). На (*в*) показана зависимость безразмерной скорости вращения жидкости V от частоты вибраций n при $\mathrm{Re}^v=40$

Для характеристики интенсивности течений, возбуждаемых полем силы тяжести и вибрациями, введем соответствующие числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re}^g = \frac{\left|\Delta\Omega_C^g\right| R_1^2}{\nu}, \qquad \mathrm{Re}^v = \frac{\left|\Delta\Omega_C^v\right| R_1^2}{\nu}. \tag{4.15}$$

В качестве единицы измерения вибрационной составляющей скорости жидкости $\Delta\Omega^v$ выберем вибрационную составляющую скорости ядра $\Delta\Omega_C^v$ (рис. 4.39*а, б*). Видно, что при заданном значении частоты n все результаты, полученные при умеренных значениях Re^v, хорошо согласуются между собой.

Проведенный анализ свидетельствует, что при колебаниях ядра с несколькими различными частотами при умеренных значениях числа Рейнольдса (в условиях осесимметричного осреднённого движения жидкости) принцип линейной суперпозиции выполняется как для дифференциального вращения ядра, так и для вторичных течений. При этом интенсивность движения жидкости пропорциональна скорости вращения ядра, а профиль скорости дифференциального вращения определяется безразмерной частотой вибраций n. Когда жидкость колеблется с несколькими частотами, каждая из них независимо вносит свой вклад. Принцип суперпозиции осреднённых потоков справедлив в случае, когда их интенсивность низка по сравнению с основным движением (твердотельным вращением) $\Delta\Omega^i / \Omega_{rot} << 1$. Это позволяет выделять составляющие полей скорости, вызываемых колебаниями ядра определенной частоты, а значит, изучать структуру течения, генерируемую вибрациями в отсутствие поля силы тяжести.

Максимальная скорость зонального течения на границе столба Тейлора, размер которого близок к размеру ядра, в зависимости от n представлена на рис. 4.39*в*. Максимальная скорость $V = \Delta\Omega_{\max}^v / \Delta\Omega_C^v$ определяется из зависимостей, представленных на рис. 4.39*а, б*. В отсутствие выраженного максимума (например, на рис. 4.39*б*) в качестве $\Delta\Omega_{\max}^v$ принимается значение скорости в точке перегиба профиля скорости. Немонотонная зависимость $V(n)$ имеет выраженный максимум при $n = 1.1$. Положение резонанса хорошо согласуется с положением дополнительного экстремума для скорости дифференциального вращения ядра (рис. 4.35*б*). Далее покажем, что эти явления взаимосвязаны.

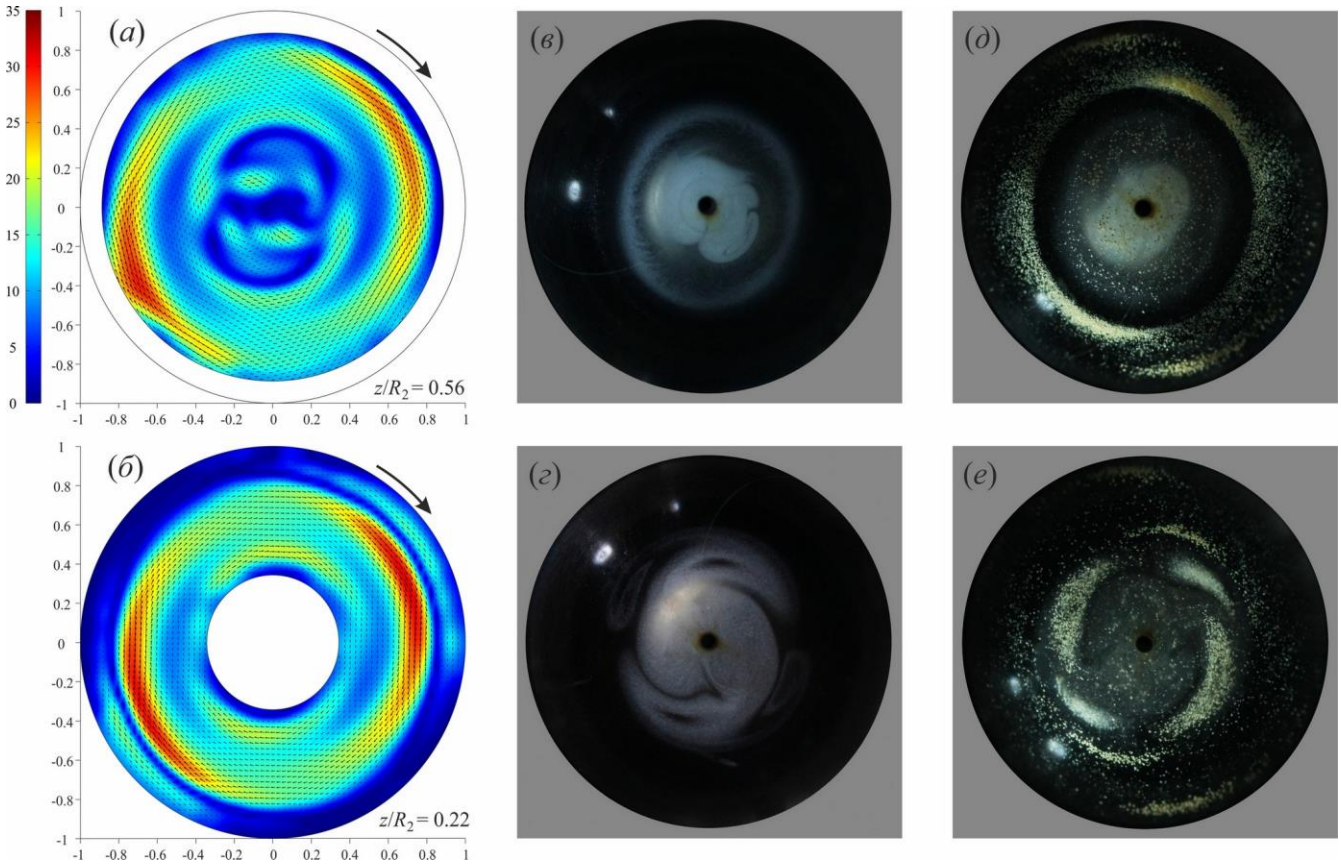


Рисунок 4.40 – Поля азимутальной скорости $\mathrm{Re}^{\nu} = 20$ (*а*, *б*) и фотографии структур течений (*в*–*е*) при частоте осцилляций n = 1, $\mathrm{E} = 9 \cdot 10^{-5}$ и $\mathrm{Re}^{\nu} = 15$, 20, 12 и 16, соответственно; направление вращения полости – по часовой стрелке

Структура течения при периодическом воздействии с частотой $n = 1$ в поле силы тяжести и вблизи этой частоты вибраций качественно отличается. Под действием вибраций цилиндрическая граница столба Тейлора принимает эллиптическую форму (рис. 4.40*в*, *д*). С увеличением амплитуды вибрационного воздействия эксцентриситет эллипса монотонно возрастает. Переход к эллиптической структуре происходит не пороговым образом. При этом густота скопления частиц в кольцах становится неравномерной вдоль азимута, что свидетельствует о возникновении двух интенсивных симметричных потоков, локализованных за пределами столба Тейлора (рис. 4.40*а*, *б*). На расстоянии $r / R_2 \approx 0.75$ рождаются два диаметрально расположенных вихря антициклонического направления, при этом тяжёлые частицы собираются между ними (рис. 4.40*д*). С увеличением амплитуды вибраций (с увеличением эксцентриситета эллипса) интенсивность течения в вихрях возрастает. При этом столб Тейлора сам вырождается в систему из четырёх

вихрей серповидной формы (рис. 4.40*г*, *е*). О направлении движения жидкости в вихрях можно судить по PIV – измерениям, представленным на рис. 4.40*а*.

Отметим, что при $n=1$ эллиптический столб и вихри на рис. 4.40 остаются неподвижными в системе отсчёта полости. Если частота вибрационного воздействия отличается от $n=1$, эллипс медленно поворачивается относительно полости. При $n>1$ эллипс опережает полость, а при $n<1$ – отстает от нее (рис. 4.41). Эксперименты показывают, что скорость дифференциального вращения эллипса $\Delta\Omega_e$ не зависит от скорости вращения полости и описывается законом $\Delta\Omega_e / \Omega_{rot} = \left(\Omega_{osc}/2 - \Omega_{rot}\right)/\Omega_{rot}$. В то же время эллиптическая форма столба наблюдается только в узком интервале частот $n=1\pm 0.05$, за пределами этой области скорость вращения эллипса становится настолько большой, что в среднем столб жидкости принимает форму кругового цилиндра.

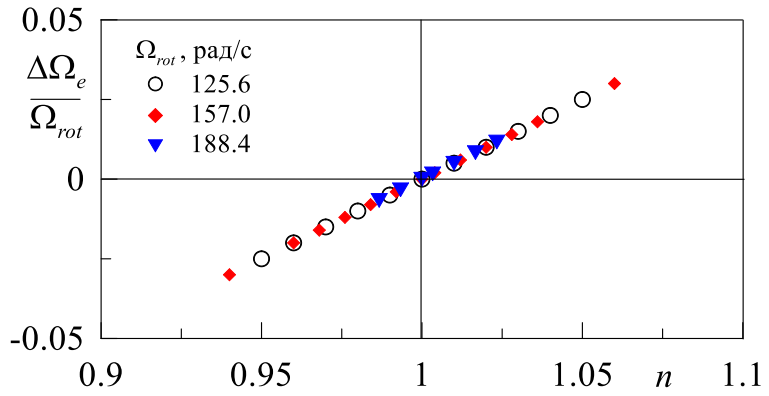


Рисунок 4.41 – Скорость вращения эллиптического столба в зависимости от безразмерной частоты внешнего периодического воздействия

Формирование столба эллиптической формы объясняется особенностью суперпозиции вращающихся в системе отсчёта полости силовых полей, гравитационного и инерционного. Как было отмечено, вызываемое линейными вибрациями инерционное силовое поле можно разложить (в лабораторной системе отсчёта) на два поляризованных по кругу силовых поля, вращающихся в противоположных направлениях. Одно поле вращается в направлении вращения полости с частотой $+\Omega_{osc}$, а другое – в противоположном направлении с частотой $-\Omega_{osc}$. При частоте

воздействия $n=1$ (когда $\Omega_{osc}=2\Omega_{rot}$) в системе отсчёта полости эти поля вращаются соответственно с безразмерными частотами $n_{+}=\left(\Omega_{osc}-\Omega_{rot}\right)/\Omega_{rot}=1$ и $n_{-}=\left(-\Omega_{osc}-\Omega_{rot}\right)/\Omega_{rot}=-3$. При этом частота $n_{+}=1$ оказывается в области резонансного отклика тела (рис. 4.35*б*), а $n_{-}=-3$ находится далеко за пределами резонансных областей и в силу малости вибрационного ускорения практически не вызывает колебаний ядра. Одновременно в системе отсчёта полости совершает отстающее вращение поле силы тяжести с частотой $n^{-g}=-1$. Суперпозиция круговых колебаний в противоположных направлениях с $n^{-g}=-1$ и $n_{+}=1$ модифицирует траекторию движения ядра. Отклонение частоты колебаний от значения $\Omega_{osc}=2\Omega_{rot}$ приводит к вращению эллипса относительно полости с $\Delta\Omega_{e}=\Omega_{osc}/2-\Omega_{rot}$ (рис. 4.41).

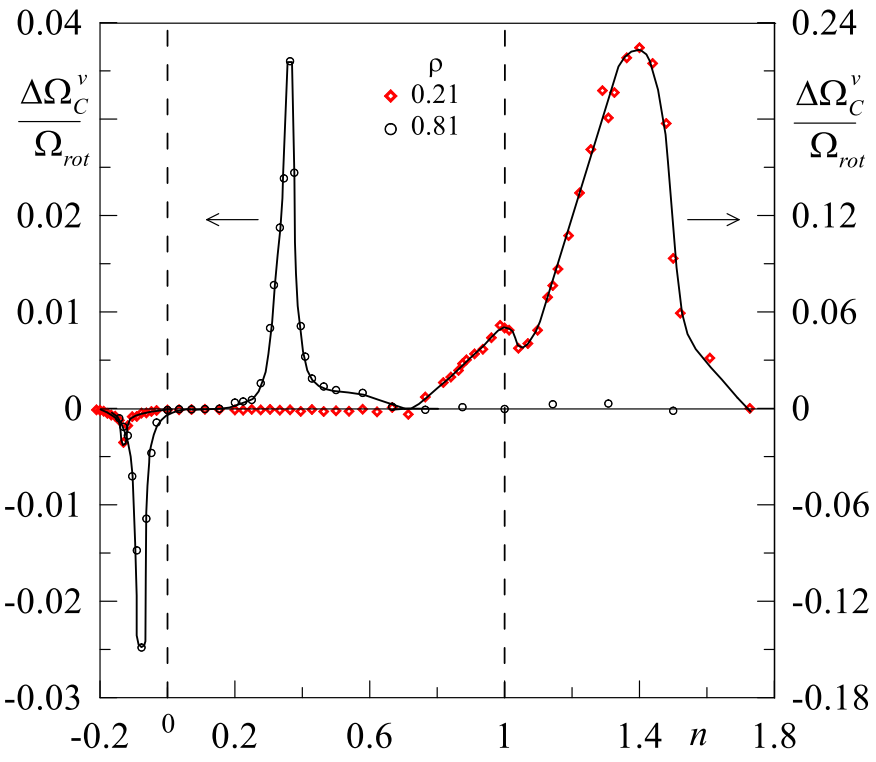


Рисунок 4.42 – Влияние относительной плотности ядра на резонансные кривые дифференциального вращения ядра, вызванного его колебаниями, при $\Omega_{osc}=188.4$ рад/с и амплитудах $b_{osc}=0.40$ мм ($\rho=0.21$) и $b_{osc}=1.17$ мм ($\rho=0.81$)

Таким образом, неожиданное поведение системы, связанное с появлением дополнительного резонансного экстремума, и формирование столба Тейлора эллиптической формы при $n=1$ в полости вращающейся вокруг горизонтальной оси в значительной мере связаны с тем, что данная частота находится в резонансном мешке. Это явление не должно наблюдаться, если амплитуда колебаний с частотой $n_+=1$ мала по сравнению с амплитудой колебаний, вызванных гравитацией, когда собственная частота далека от 1. Поскольку собственные частоты колебаний неоднородных по плотности вращающихся систем определяются относительной плотностью легкой фазы $\rho=\rho_C/\rho_L$, изменение ρ приводит к смещению резонансных частот. Зависимости безразмерной скорости дифференциального вращения ядра с различными значениями ρ от безразмерной частоты внешнего воздействия представлены на рис. 4.42. Увеличение плотности ядра до значения $\rho=0.81$ достигается путем заполнения полой сферы силиконовым герметиком. За исключением относительной плотности, все остальные параметры (радиусы ядра и полости, вязкость жидкости) одинаковы. Видно, что с повышением ρ резонансные частоты смещаются к $n=0$, при этом дополнительный экстремум при $n=1$, наблюдаемый в случае $\rho=0.21$, пропадает, а эллиптичность столба Тейлора не наблюдается.

4.5. Основные выводы по главе

Исследовано влияние инерционных волн на динамику жидкости во вращающейся сферической полости с колеблющимся ядром. Во вращающейся системе ядро движется по круговой траектории в экваториальной плоскости. Эксперименты проведены в широком диапазоне безразмерных частот осцилляций $-2.3\le n\le 3.0$, что соответствует как опережающим, так и отстающим круговым колебаниям ядра. Обнаружен сильный нелинейный отклик жидкости в виде осреднённого азимутального течения, интенсивность и структура которого зависят от значения n. Значительная корректировка структуры течения наблюдается при частотах, соответствующих резонансному возбуждению крупномасштабных

вихревых структур. Кроме того, обнаружена взаимосвязь между геострофическими цилиндрами и критическими широтами на границе ядра, где рождаются инерционные волны.

Независимо от знака колебаний пространственная структура пульсационного течения представляет собой систему конусообразных свободных сдвиговых слоёв. В силу характера гармонического воздействия с азимутальным волновым числом $k = 1$ инерционные волны являются неосесимметричными. Как показывают эксперименты, сдвиговые слои закручены в спиралеобразную структуру, которая вращается относительно полости. Движение такой структуры синхронизировано с колебаниями ядра. Важным результатом является зависимость структуры пульсационного течения от направления круговых колебаний ядра. Так, при одном и том же значении частоты n пространственно-волновая картина может существенно отличаться. При положительных частотах результаты экспериментов, полученные PIV-методом, хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями. В то время как для отрицательных частот характерно формирование в приполярной области локального меридионального вихря и фокусировка волн в аттракторы. Тем не менее, независимо от знака колебаний угол наклона волновых лучей относительно оси вращения подчиняется соотношению $\theta = \arcsin\left(n/2\right)$. С изменением безразмерной частоты полная скорость пульсаций в меридиональной и горизонтальной плоскостях меняется немонотонным образом, испытывая серию экстремумов. Поскольку при противоположных частотах могут наблюдаться различные режимы течения, величина полной скорости также несимметрична по отношению к знаку n.

При определенных частотах колебаний в полости возбуждаются крупномасштабные инерционные моды, что сопровождается резонансным усилением полной скорости пульсаций. Подобные режимы течения являются типичными для вращающихся систем при гармоническом воздействии и наблюдаются не только в сферической геометрии [36], но и в цилиндрической (Глава 2). Фокусировка волновых лучей в более простые конфигурации волновых аттракторов не вызывает столь существенного увеличения скорости пульсаций. В этих случаях колебания

жидкости происходят не во всем объеме полости, а только вдоль простой замкнутой траектории.

Колебания жидкости индуцируют нелинейный отклик в виде осреднённого зонального течения, структура которого сильно зависит от безразмерной частоты. В области частот, где инерционные волны отсутствуют ($n=2$), внутри тангенциального цилиндра формируется практически твердотельное опережающее течение, а снаружи его жидкость покоится. Таким образом, профиль скорости сильно напоминает классический столб Тейлора, когда внутреннее ядро совершает дифференциальное вращение [77, 188, Раздел 4.3]. Присутствие инерционных волн качественно изменяет структуру течения, делая ее более сложной: в профиле скорости появляется серия экстремумов, что эквивалентно системе вложенных геострофических цилиндров, вращающихся с различными угловыми скоростями. Независимо от наличия или отсутствия инерционных волн интенсивность осреднённого течения пропорциональна квадрату амплитуды колебаний ядра, $\Delta\Omega / \Omega_{rot} \sim b^2$. В целом, скорость дифференциального вращения жидкости определяется параметром $b^2 / \left(R_1 \delta\right)$, вид которого согласуется с теоретическими предсказаниями [184].

Радиальное положение экстремумов в профиле осреднённой скорости согласуется с пространственно-волновой картиной. Анализ результатов показывает, что один из экстремумов связан с критическими широтами на границе ядра, где рождаются инерционные волны. С увеличением частоты колебаний его положение постепенно смещается от границы тангенциального цилиндра к оси вращения. Следующий экстремум связан с отражением инерционных волн от границы полости и ярко проявляется при их фокусировке в волновые аттракторы. Неоднородность пульсационного движения жидкости в вязком пограничном слое генерирует осреднённую геострофическую циркуляцию вблизи точек удара волны о стенку. Наиболее интенсивное зональное течение возникает при резонансном возбуждении собственных инерционных колебаний вращающейся жидкости. В этом случае профиль угловой скорости качественно меняется: максимальное дифференциальное вращение жидкости наблюдается вблизи оси вращения полости, при

этом экстремум, связанный с наличием критических широт на поверхности ядра, не проявляется. В данном случае проявляется другой механизм генерации течений, связанный с нелинейным взаимодействием инерционных волн между собой в объеме жидкости [139].

Экспериментально исследованы осреднённые течения, возбуждаемые круговыми колебаниями ядра с частотой $n=-1$. Рассмотрены два случая – осцилляции ядра в отсутствие его собственного дифференциального вращения и при его наличии (свободное ядро). В результате колебаний в жидкости генерируется интенсивное азимутальное течение в виде жидких геострофических цилиндров, связанное, с одной стороны, с осреднёнными течениями в динамических пограничных слоях вблизи границ ядра и полости, а, с другой стороны, генерацией зональных течений инерционными волнами. Последний вывод подтверждается исследованием структурообразования из тяжёлых частиц на внутренней стенке полости в виде колец, локализация которых определяется положением точек отражения волновых лучей. Результаты подтвердили гипотезу, что осреднённое движение жидкости является суперпозицией классического движения, возбуждаемого дифференциальным вращением ядра (в виде столба Тейлора под действием экмановского механизма генерации потоков), и осреднённого движения, генерируемого в осциллирующих пограничных слоях. Для этого были проведены дополнительные эксперименты при заданном вращении ядра на оси симметрии полости. Измерение полей скорости в рассмотренных случаях и сравнение с исследованиями, выполненными со свободным телом, подтверждают заключение о том, что оба механизма (до порога устойчивости осесимметричного движения) проявляют себя независимо.

При одновременных осцилляциях свободного ядра относительно полости с несколькими частотами (под действием силы тяжести и осциллирующего инерционного поля, связанного с вибрациями полости) результирующее азимутальное движение жидкости также определяется линейной суперпозицией осреднённых эффектов, возбуждаемых колебаниями жидкости с различными частотами. Принцип разложения результирующего поля скоростей на составляющие позволяет

проследить за изменением структуры течения в зависимости от безразмерной частоты n. Обнаружено, что при совпадении частоты осцилляций внешнего силового поля с частотой осцилляций поля силы тяжести, основное течение принимает эллиптическую форму. Это объясняется изменением характера колебаний относительно полости в результате сложения осциллирующих силовых полей различной природы.

Полученные результаты проливают свет на вибрационную динамику жидкости и твёрдых включений во вращающихся системах и, в частности, могут быть важны для понимания роли возмущающих осциллирующих силовых полей в динамике жидких ядер планет.

ГЛАВА 5. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Экспериментально исследуется надкритическая динамика жидкости во вращающемся сферическом слое с колеблющимся внутренним ядром. Рассматриваются случаи отстающих и опережающих круговых колебаний с частотами $n=-1$ и $n=0.7-2.0$, соответственно. Повышение амплитуды колебаний и, как следствие, скорости дифференциального вращения жидкости приводит к потере устойчивости осесимметричного осреднённого течения. В надкритической области наблюдается серия пороговых переходов, связанных с проявлением различных мод неустойчивости. Неустойчивость проявляется в развитии азимутально периодической системы вытянутых вдоль оси вихрей; различные моды отличаются азимутальной длиной волны, расположением вихрей (расстоянием от оси вращения) и скоростью азимутального дрейфа системы вихрей относительно полости. Независимо от наличия дифференциального вращения ядра сценарий смены режимов надкритического течения остается неизменным. В то же время критические значения чисел Рейнольдса для неустойчивостей одного типа различны. Найдены границы устойчивости и построены карты режимов движения жидкости на плоскости безразмерных параметров. Проводится сравнение результатов экспериментов со свободным ядром и ядром, ось вращения которого зафиксирована на оси вращения полости (отсутствие колебаний). Показано, что в условиях колебаний порог развития неустойчивостей находится на порядок ниже по числу Рейнольдса.

Вклад инерционных волн в надкритическую динамику осреднённого течения подробно исследован для положительных колебаний с частотой $n>0$. При относительно высоких числах Рейнольдса волны испытывают неустойчивость по сценарию триадных взаимодействий. В спектре азимутальной скорости наблюдаются три различных типа значимых спектральных пиков: субгармоники с парами разных частот (T-режим), параметрические колебания жидкости (P-режим) и субгармоники с парами разных частот, содержащие медленную (низкочастотную) компоненту (L-режим). Все три режима могут сосуществовать при совпадении

частоты воздействия с частотой собственной инерционной моды. Неустойчивости возникают одновременно в нескольких зонах сферического слоя с разными частотами и волновыми числами: коротковолновые субгармоники возникают вблизи внешней стенки полости (на периферии цилиндрического радиуса), а длинноволновые субгармоники – вблизи оси вращения. За пределами резонанса инерционной моды P-режим ослабевает, в то время как L-режим (T-режим) становится доминирующим при высоких (низких) частотах n. Развитие волновой неустойчивости сопровождается генерацией квазидвумерных вихрей, проявляющихся при осреднении полей скорости по периоду воздействия. При этом тип неустойчивости осреднённого течения сильно зависит от частоты n и пространственной структуры пульсационного течения. Результаты исследований опубликованы в работах [A1, A4, A10, A15, A16, A18, A23].

5.1. Надкритические течения в условиях отстающих колебаний ядра

Эксперименты проводятся на установке, представленной на рис. 4.24*а*, в условиях свободного дифференциального вращения ядра. В качестве рабочих жидкостей используются водные растворы глицерина с кинематической вязкостью, не превышающей $\nu < 10\,\text{сСт}$, в отдельных экспериментах для яркой визуализации потоков вблизи оси вращения легкими полиамидными частицами используется иммерсионная жидкость 3M$^{\text{TM}}$ Fluorinert FC-40 ($\nu = 2.2\,\text{сСт}$, $\rho_L = 1.86\,\text{г/см}^3$). Как было отмечено ранее, в условиях быстрого вращения вокруг горизонтальной оси система находится в устойчивом центрифугированном состоянии, при этом легкое ядро совершает отстающее дифференциальное вращение со скоростью $\Delta\Omega_C = \Omega_C - \Omega_{rot} < 0$ (Раздел 4.2.2).

Дифференциальное вращение ядра приводит к формированию квазидвумерного течения в виде столба Тейлора, вытянутого вдоль оси вращения полости. При слабом дифференциальном вращении граница столбика имеет форму кругового цилиндра. Полиамидные частицы визуализатора концентрируются на границе столба (светлое кольцо *1* на рис. 4.28*б*). Границы столбика совпадают с геометрическим продолжением тела вдоль оси вращения (тангенциальный цилиндр).

Внутри столбика Тейлора частицы визуализатора аккумулируются вблизи оси вращения, формируя внутренний столбик, который характеризуется выраженным отстающим дифференциальным вращением жидкости, превосходящим $|\Delta\Omega_C|$. Движение жидкости по обе стороны от тела симметрично. В свою очередь крупные тяжелые частицы собираются в концентрические кольца на стенке кюветы, которые вращаются быстрее полости (кольца *2* и *3* на рис. 4.28*б*).

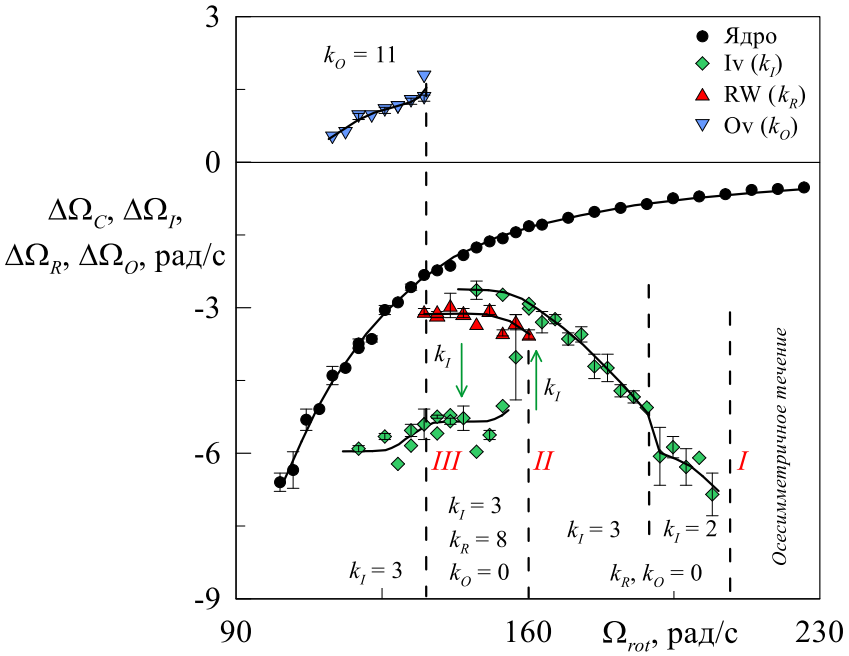


Рисунок 5.1 – Скорость дифференциального вращения ядра $\Delta\Omega_C$, приосевой вихревой системы внутри столба Тейлора $\Delta\Omega_I$ (Iv), фазовой скорости волны на границе столба $\Delta\Omega_R$ (RW), а также скорость вращения коротковолновой системы валов на периферии цилиндрического радиуса $\Delta\Omega_O$ (Ov) в зависимости от скорости вращения полости; k_I, k_R и k_O – соответствующие азимутальные волновые числа; вязкость жидкости $\nu = 3.7$ сСт; *I*, *II* и *III* – пороги развития неустойчивостей; переходы между структурами различных типов показаны стрелками

С увеличением скорости дифференциального вращения $|\Delta\Omega_C|$ (понижением Ω_{rot}) основное осесимметричное течение испытывает неустойчивость (рис. 5.1). В структуре течений наблюдается серия пороговых изменений (*I* – *III*), характеризующихся азимутальными волновыми числами k_I (внутренняя вихревая система, Iv), k_R (волна Россби вблизи границы тангенциального цилиндра, RW), k_O (внеш-

няя вихревая система, Ov). Первоначально в центральной части столбика возникают два двумерных вихря (порог *I* на рис. 5.1 и рис. 5.2*а*). Вихревые образования имеют форму жгутов (рис. 5.2*к*), вытянутых вдоль оси вращения. Вблизи порога возникновения вихри в центральной части столбика не влияют на форму его границы, она остается круговой. Направление вращения каждого из вихрей совпадает с направлением вращения полости (циклоническое). При этом вся вихревая система относительно полости вращается в противоположном направлении со скоростью $\left|\Delta\Omega_I\right| = \left|\Omega_I - \Omega_{rot}\right|$, значительно превосходящей $\left|\Delta\Omega_C\right|$. Здесь Ω_I – скорость вращения вихревой системы в лабораторной системе отсчета. С понижением Ω_{rot} величина $\left|\Delta\Omega_I\right|$ монотонно уменьшается до тех пор, пока количество вихрей не увеличится до $k_I = 3$ (рис. 5.2*б*). Изменение волнового числа k_I сопровождается сильным изменением величины $\Delta\Omega_I$.

Следующий пороговый переход (*II*, рис. 5.1) при повышении $\left|\Delta\Omega_C\right|$ связан с потерей устойчивости цилиндрической формы границы тангенциального цилиндра (рис. 5.2*г*, *д*). На границе пороговым образом возбуждается азимутальная волна. Скорость распространения волны $\left|\Delta\Omega_R\right| = \left|\Omega_R - \Omega_{rot}\right|$ выше скорости вращения ядра и не совпадает со скоростью вращения вихревой системы в столбе (Ω_R – фазовая скорость волны в лабораторной системе). Возникновение волны на границе столба нарушает осевую симметрию внешнего по отношению к столбику кольца из крупных частиц на расстоянии $r / R_2 \approx 0.85$, последнее принимает форму правильного многоугольника с числом граней, которое совпадает с волновым числом k_R волны на границе столба. Структуры на стенке полости вращаются синфазно с волной на границе и с отличной от $\left|\Delta\Omega_I\right|$ скоростью. Далее будет показано, что данный тип неустойчивости связан с возникновением в слое волны Россби.

При повышении вязкости жидкости до $\nu \approx 5\,\text{сСт}$ в пороге *II* столб Тейлора принимает форму эллипса или треугольника в зависимости от структуры надкритического течения вблизи оси вращения. При этом фазовая скорость волны совпадает со скоростью вращения вихревой системы ($\Delta\Omega_R = \Delta\Omega_I$). Таким образом,

происходит синхронизация двух разных мод, что хорошо проиллюстрировано на рис. 5.2*в*. При визуализации течения алюминиевой пудрой в объеме жидкости видно, что вихревая система деформирует столб Тейлора, навязывая ему свою моду. Несмотря на это, дестабилизации внешнего сдвигового слоя, где локализованы кольца *3* из частиц, не происходит. На это указывает осесимметричная форма внешнего яркого кольца из частиц пудры. Изменение его формы наблюдается только при развитии рассинхронизации движения внутри столба Тейлора и на его границе (рис. 5.2*е*). Это указывает на развитие системы вихрей в области $r / R_2 > 0.5$.

В пороге *III* (рис. 5.1) развивается следующий тип неустойчивости, проявляющийся в качественном изменении коллективной динамики тяжёлых частиц. Последние образуют регулярную азимутально-периодическую структуру на внутренней границе полости (рис. 5.2*ж, л*). В обеих полусферах структуры из частиц вращаются в одной фазе и с равными угловыми скоростями. В отличие от вихрей в столбе и азимутальной волны, которые совершают ретроградное движение в системе отсчёта полости, структура на стенке полости совершает опережающий дрейф со скоростью $\Delta\Omega_O = \Omega_O - \Omega_{rot} > 0$, где Ω_O – скорость азимутального дрейфа в лабораторной системе; направление вращения каждого вала циклоническое. Визуализация надкритического течения в объеме полости при помощи алюминиевой пудры представлена на рис. 5.2*и, м*. Как следует из сравнения изображений, полученных с использованием различных методик визуализации для одного и того же режима неустойчивости, азимутальная перестройка тяжелых частиц связана с развитием системы двумерных валов на периферии цилиндрического радиуса. Торцы валов взаимодействуют с тяжелыми частицами, осевшими на стенке, и заставляют их реорганизовываться в периодическую структуру, которая вращается вместе с валами. С развитием внешних валов волна на границе столба Тейлора синхронизируется с системой вихрей внутри него (рис. 5.1), при этом форма столба определяется волновым числом k_I (Ррис. 5.1, $\Omega_{rot} < 130$ рад/с).

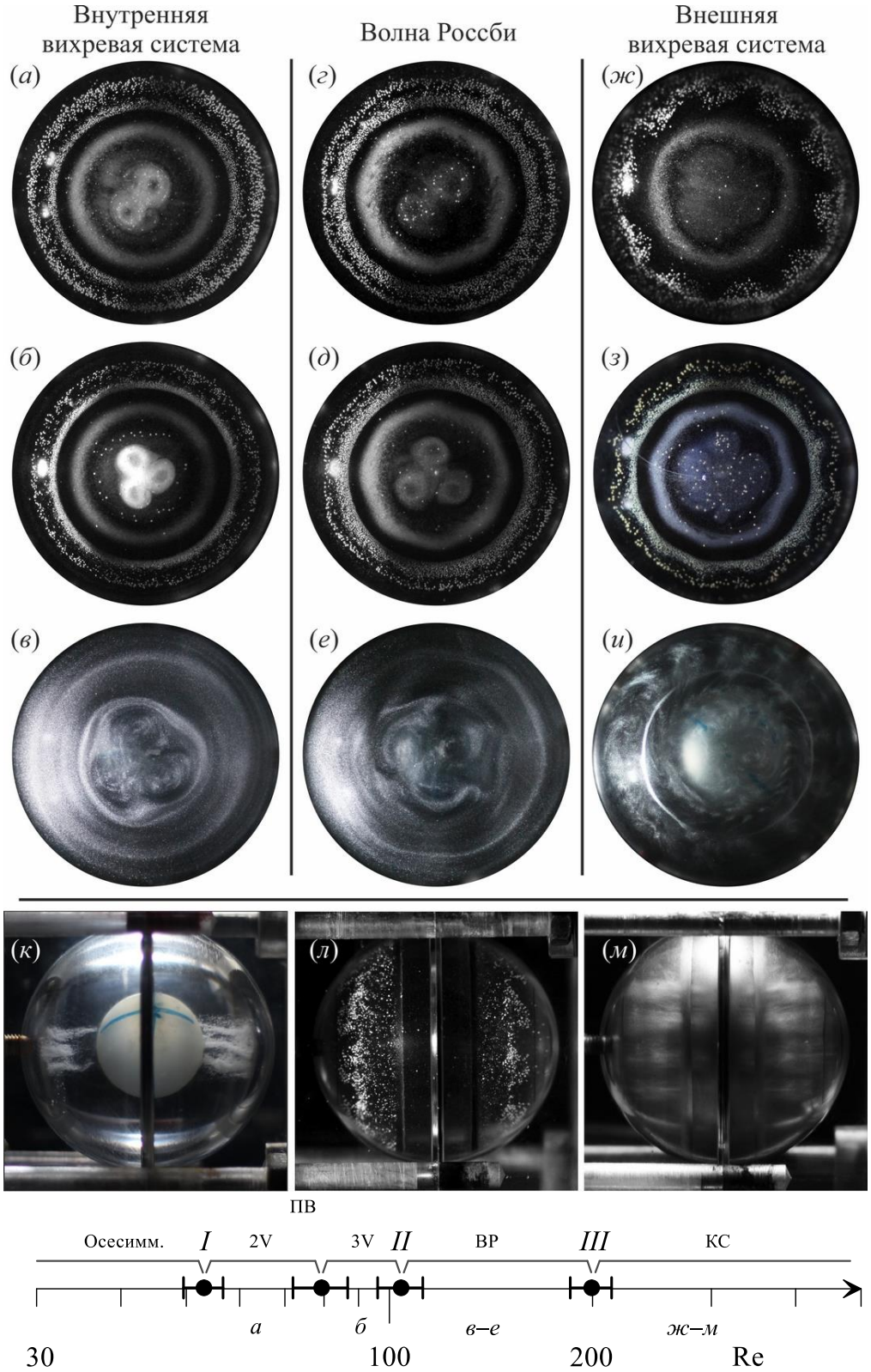


Рисунок 5.2 – Фотографии надкритических течений, вид вдоль оси вращения (*а–и*; направление вращения полости по часовой стрелке) и вид сбоку (*к–м*); Re = 67, 85, 122, 166, 182, 186, 253, 240, 342, 729, 253, 342 (*а–м*). Снизу показаны границы режимов течений. Для случая (*к*) в качестве жидкости использовался 3M™ Fluorinert FC-40, благодаря большой плотности ($\rho_L = 1.86\,\text{г/см}^3$) частицы визуализатора полностью аккумулируются внутри вихревых жгутов

Следует отметить, что вблизи порога неустойчивости возможна ситуация, когда возникновение азимутально периодических структур из тяжелых частиц не приводит к исчезновению волны Россби, а внешняя граница столба Тейлора сохраняет форму правильного многоугольника. Таким образом, волна Россби и система опережающе вращающихся валов могут существовать одновременно, образуя в сферическом слое два набора валов, распространяющихся в различных направлениях. Фотография отпечатка волны Россби с волновым числом $k_R = 8$ на внешней границе столба Тейлора и опережающе вращающейся структуры из тяжелых частиц на периферии с волновым числом $k_O = 12$ приведена на рис. 5.2*з*.

При повышении скорости вращения полости перестройка структур течения происходит в обратном порядке при тех же значениях Ω_{rot}, что и при понижении. Сначала исчезает внешняя вихревая система, и крупные частицы снова перераспределяются в кольца на стенке полости. Далее граница столба Тейлора становится круговой. При дальнейшем повышении Ω_{rot} вихревая система уменьшается в поперечном размере, а скорость вращения $\left|\Delta\Omega_I\right|$ возрастает. При некотором критическом размере поперечной системы два вихря объединяются в один. В итоге система принимает осесимметричную форму, состоящую из вложенных друг в друга круговых жидких столбов, вращающихся с отличными угловыми скоростями. Отметим, что гистерезис в переходах *I, II* и *III* отсутствует, исключением является лишь азимутальная скорость вращения вихревой системы $\left|\Delta\Omega_I\right|$, которая при повышении Ω_{rot} скачком изменяется в пороге развития волны Россби, то есть с гистерезисом (переходы показаны стрелками на рис. 5.1).

5.1.1. Пороги неустойчивостей

Для описания устойчивости движения жидкости удобно использовать безразмерную скорость дифференциального вращения ядра (число Россби) $\mathrm{Ro} \equiv \Delta\Omega_C / \Omega_{rot}$ и обратное число Экмана $\mathrm{E}^{-1} = \Omega_{rot} R_1^2 / \nu$. С увеличением E^{-1} пороги неустойчивости структур всех трёх типов изменяются по закону $\left|\mathrm{Ro}\right| \sim \mathrm{E}$ (рис. 5.3*а*). Это значит, что пороги характеризуются критическими значениями

одного параметра – числом Рейнольдса, рассчитанным через скорость дифференциального вращения ядра, и введенным в Разделе 4.2.1: $\mathrm{Re} = |\mathrm{Ro}| \cdot \mathrm{E}^{-1} = |\Delta\Omega_C| R_1^2 / \nu$. Для возникновения системы вихрей внутри столба пороговое значение числа Рейнольдса составляет $\mathrm{Re} = 53 \pm 4$, что в два раза меньше порога устойчивости границы столба Тейлора $\mathrm{Re} = 104 \pm 8$ и в четыре раза меньше порога возникновения внешней системы вихрей $\mathrm{Re} = 200 \pm 14$. На рис. 5.3*б* показаны волновые числа в порогах неустойчивости.

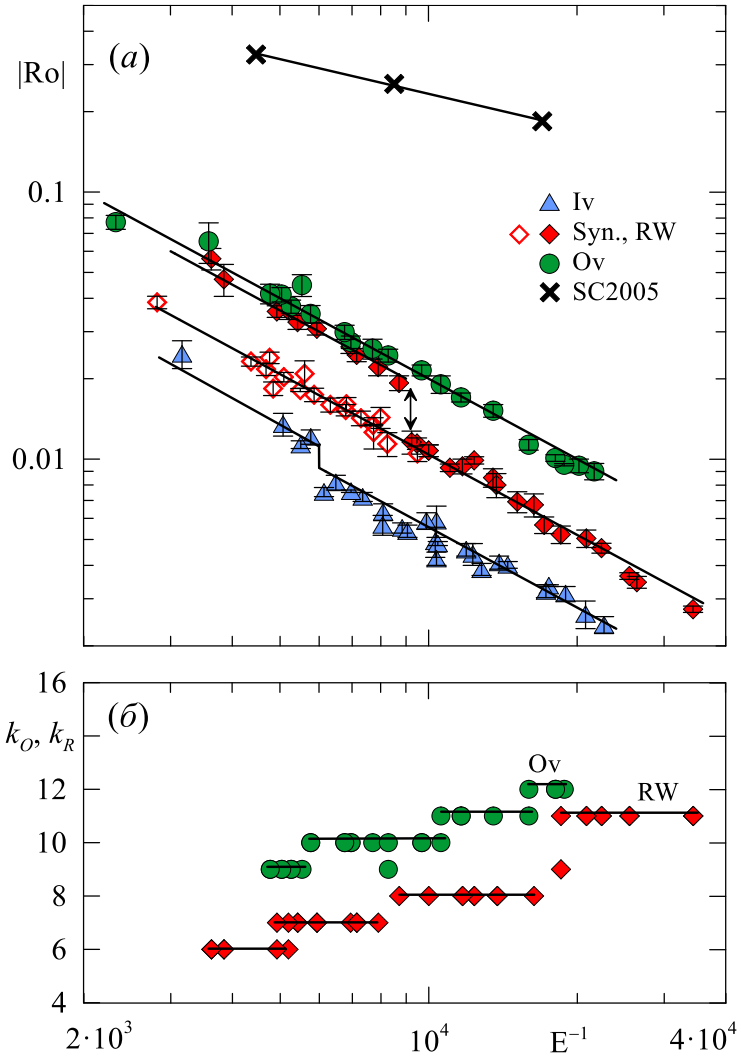


Рисунок 5.3 – (*а*) Пороги возникновения приосевой вихревой системы внутри столба Тейлора (Iv), волны на границе столба (Syn., RW), коротковолновой системы валов на периферии цилиндрического радиуса (Ov). Крестики соответствуют экспериментам [188] в слое с аспектным соотношением 1/3 и в отсутствие колебаний ядра. В обоих экспериментах рассматривается случай Ro < 0.
(*б*) Волновые числа в порогах неустойчивости RW и Ov

В области чисел Экмана $\mathrm{E}^{-1} > 10^4$ азимутальная волна на расстоянии $r / R_2 \approx 0.85$ (рис. 5.2*г–е*) возникает одновременно с волновой неустойчивостью границы столба Тейлора. В данном случае фазовые скорости и азимутальные волновые числа структур совпадают, что указывает на общий механизм дестабилизации течения (волна Россби). При $\mathrm{E}^{-1} < 10^4$ сценарий развития неустойчивости качественно отличается. Волна на расстоянии $r / R_2 \approx 0.85$ возникает при более высоких числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = 180 \pm 16$. До этого значения Re форма границы столба Тейлора полностью определяется структурой внутреннего вихревого течения, которое начинает оказывать дестабилизирующее действие при $\mathrm{Re} = 104 \pm 8$ (пустые красные ромбы на рис. 5.3).

Появление системы внешних вихрей при $\mathrm{Re} > 200$ приводит к реорганизации тяжёлых частиц на стенке полости и соответствующему резкому увеличению волнового числа до значения k_O. При этом в области малых чисел Экмана ($\mathrm{E}^{-1} > 10^4$) волна Россби, оставляющая отпечаток на границе столба Тейлора в виде многогранной призмы, сохраняется (рис. 5.2*з*). На это указывает как отличие в фазовых скоростях, так и и волновых числах k_O и k_R. Сосуществование двух мод наблюдается в узкой области чисел Рейнольдса $200 < \mathrm{Re} < 240$. В области более высокой надкритичности ($\mathrm{Re} > 240$) волна Россби подавляется, а форма границы столба определяется внутренней вихревой системой.

Главной особенностью настоящих экспериментов является способ генерации дифференциального вращения ядра, который определяет структуру течений в столбике. Дифференциальное вращение не задается, как это делается в классической постановке [см., например, 77, 188, 217], а возникает в результате генерации осреднённых сдвиговых напряжений на поверхности ядра. Эти же сдвиговые напряжения генерируют и осреднённые течения в жидкости, в том числе внутри столбика Тейлора. Как показано в Разделе 4.3, структура классического столба Тейлора, в условиях отсутствия колебаний ядра, принципиально отличается от столба, генерируемого свободным осциллирующим ядром. В связи с этим представляет интерес сравнение устойчивости течений в двух различных постановках.

В классическом случае появление волны на границе столбика связано со сдвиговой неустойчивостью слоёв Стюартсона, которая изучалась ранее теоретически [216] и экспериментально [73, 188, 217]. Общим для всех перечисленных экспериментальных работ было фиксированное положение ядра на оси вращения полости. Дифференциальное вращение задавалось с помощью нескольких приводов, один из которых приводил во вращение полость, а другой ядро. Для сравнения результатов в двух различных постановках крестиками на рис. 5.3*а* приведены пороги волновой неустойчивости, полученные экспериментально в работе [188]. В области умеренных чисел Экмана $\mathrm{E}^{-1} = 4\cdot10^{3} - 2\cdot10^{4}$ порог неустойчивости изменяется по закону $|\mathrm{Ro}| \sim \mathrm{E}^{0.45}$, что сильно отличается от свободного ядра, где $|\mathrm{Ro}| \sim \mathrm{E}$. Кроме того, неустойчивость наблюдается при сравнительно больших числах Россби, превосходящих значения в настоящем эксперименте более чем на порядок. Аналогичное падение порога волновой устойчивости было обнаружено в случае колебаний свободного ядра во вращающейся цилиндрической полости [186]. При этом в классической постановке отсутствуют аналоги внешней и внутренней (по отношению к границе столба) системы вихрей.

Следует отметить, что неустойчивость сдвигового слоя может выступать в качестве источника глобальных инерционных мод [47, 110]. Так, в работе [47] было экспериментально исследовано надкритическое течение в дифференциально вращающемся сферическом слое при отрицательных числах Россби $-2.5 \le \mathrm{Ro} \le -0.2$ и двух значениях чисел Экмана $\mathrm{E} = 1.35\cdot10^{-5}$ и $6.76\cdot10^{-6}$. Такой большой диапазон по числам Россби связан с дополнительным рассмотрением противоположного вращения полости и ядра ($\mathrm{Ro} < -1.0$), где наблюдается наиболее богатая динамика инерционных мод, сопровождаемая серией бифуркаций. В случае совращения, когда ядро вращается в том же направлении, что и полость, но отстает от нее ($-1.0 \le \mathrm{Ro} \le -0.2$), в надкритическом течении сохраняется лишь несколько неосесимметричных инерционных мод. В настоящих экспериментах диапазон значений чисел Россби и Экмана составляет $-0.1 < \mathrm{Ro} < 0$ и $2.5\cdot10^{-5} < \mathrm{E} < 5\cdot10^{-4}$, соответственно. Экстраполяция результатов [47] на диапа-

зон малых чисел Россби указывает на отсутствие вынужденных инерционных мод в сферическом слое. Таким образом, течения, представленные на рис. 5.2, связаны не с инерционными колебаниями жидкости в объёме, а с особенностями осреднённого профиля азимутальной скорости (рис. 4.29), характеризующегося множеством точек перегиба.

Динамика внутренних вихревых структур на плоскости управляющих параметров E, Re представлена на рис. 5.4. Число Рейнольдса определяет не только порог устойчивости, но и переходы между вихревыми структурами различного типа. На рис. 5.4*а* сплошными символами показано изменение безразмерных параметров в ходе отдельного эксперимента (при монотонном понижении скорости вращения полости, а значит увеличении E) при $\nu = 5.9$ сСт. Видно, что при этом в результате роста скорости дифференциального вращения число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \left|\Delta\Omega_C\right| R_1^2 / \nu$ увеличивается. Структуры течений регистрировались при пошаговом изменении E. Таким образом, дискретность, присущая эксперименту, определяла величину доверительного интервала, в котором наблюдается переход между различными типами структур.

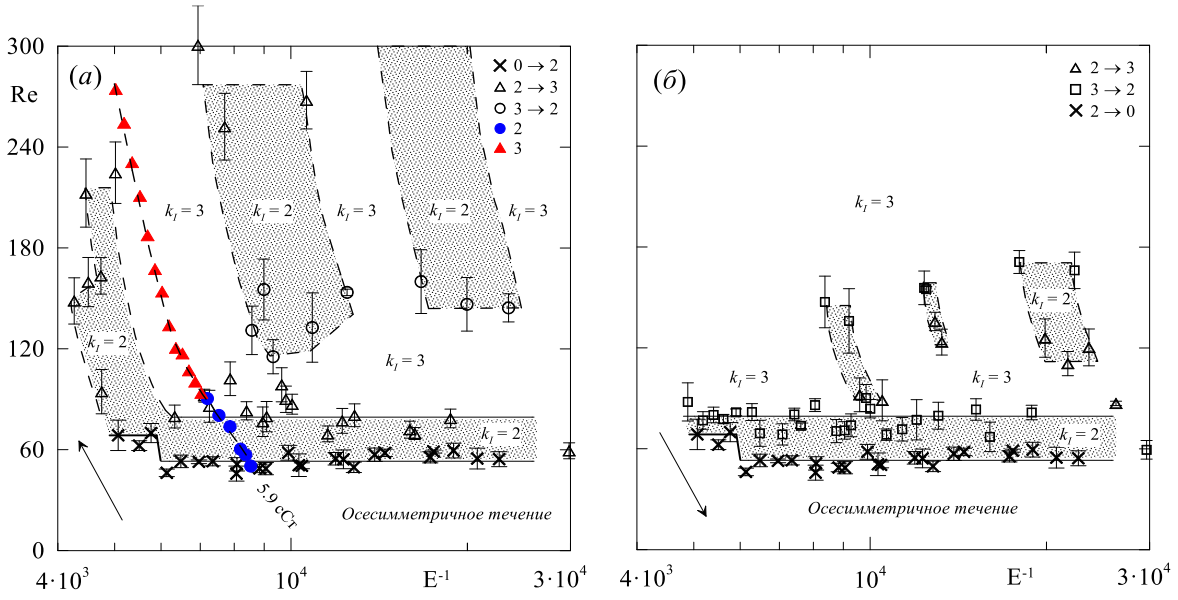


Рисунок 5.4 – Области наблюдения внутренних вихревых структур при монотонном повышении (*а*) и понижении числа Рейнольдса (*б*). Границы существования двухвихревой системы заштрихованы; сплошными символами обозначен ход эксперимента с вязкостью $\nu = 5.9$ сСт

Порог возникновения вихревой системы с $k_I = 2$ равен $\mathrm{Re} = 53 \pm 4$ во всем интервале чисел Экмана при $\mathrm{E}^{-1} > 6 \cdot 10^3$. В области $\mathrm{E}^{-1} < 6 \cdot 10^3$ обнаружено локальное повышение порога возникновения внутренней вихревой системы. Следующий пороговый переход от двухвихревой к трехвихревой системе ($k_I = 3$) наблюдается при $\mathrm{Re} = 79 \pm 7$. Отметим, что гистерезис между переходами при повышении и понижении Re отсутствует.

В области высокой надкритичности наряду с трехвихревой системой в столбике Тейлора в локализованных областях параметров наблюдается двухвихревая структура. В зависимости от направления изменения Re (повышение или понижение) в переходах наблюдается гистерезис. Сказанное наблюдается в условиях существования волновой неустойчивости границы столбика, при $\mathrm{Re} > 104$, и объясняется сложным взаимодействием вихрей внутри столба с волнами на его поверхности. Аналогичная надкритическая динамика вихревых структур также наблюдается в цилиндрической полости [186].

Результаты исследования формы границы столба в зависимости от числа Рейнольдса показаны на рис. 5.5. Развитие азимутальной двумерной волны происходит при $\mathrm{Re} = 104 \pm 8$. В области умеренных чисел Экмана $\mathrm{E}^{-1} < 10^4$ в пороге возбуждается волна с волновым числом k_R, совпадающим с числом вихрей k_I внутри столба. Фазовые скорости распространения волны и вихревой структуры также совпадают, что свидетельствует о синхронизации двух мод. Определяющее влияние вихревых структур на длину волны, развивающейся на границе столба, объясняется тем, что порог возникновения вихрей внутри столба находится при меньших Re. В надкритической области границы смены волновых картин совпадают с пороговыми переходами между вихревыми структурами различного типа.

В области $\mathrm{E}^{-1} > 10^4$ картина качественно изменяется. Оба типа неустойчивости проявляются независимо друг от друга (рис. 5.2*г, д*). На границе столба развиваются коротковолновые структуры, в то время как внутри него существует система из двух или трех вихрей. Отметим, что, несмотря на различие в волновых числах, в этой области также возможно совпадение скоростей волны на границе и

вихревой системы, что свидетельствует об их сильном нелинейном взаимодействии.

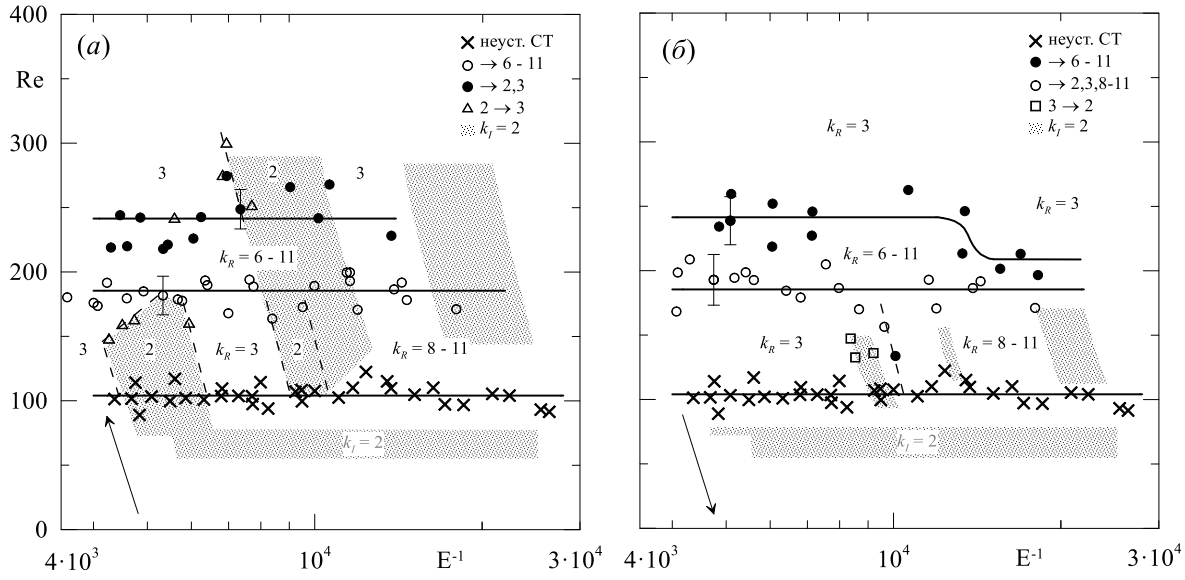


Рисунок 5.5 – Карта волновых структур на поверхности столба Тейлора при повышении (*а*) и понижении (*б*) Re. Область существования двухвихревой системы $k_I = 2$ обозначена сплошной штриховкой

При повышении надкритичности в интервале $\mathrm{Re} = 180 - 240$ наблюдается суперпозиция нескольких волновых мод на границе (рис. 5.5). Взаимодействие нескольких мод сопровождается модуляцией основной волновой моды длинноволновыми структурами, навязанными вихревой системой. Вся область характеризуется значениями волновых чисел в диапазоне $k_R = 6 - 11$. Величина волнового числа определяется числом Экмана и возрастает с увеличением E^{-1}.

В области значительной надкритичности ($\mathrm{Re} > 240 \pm 40$) внутренняя вихревая система увеличивается в поперечном размере, что ведет к сильной деформации границы столбика. В результате на границе остается только одна волновая мода, синхронизированная с вихревой системой. Отметим, что на фоне основной моды на границе могут возникать коротковолновые возмущения.

5.1.1.1. Влияние неустойчивостей на дифференциальное вращение ядра

Как было отмечено в Разделе 4.2.2.1, трансформация структуры течений оказывает влияние на скорость дифференциального вращения ядра. При умерен-

ных значениях Ω_{rot}, когда столбик Тейлора имеет устойчивую осесимметричную границу, безразмерная дифференциальная скорость вращения ядра $|\Delta\Omega_C|/\Omega_{rot}$ линейно возрастает с величиной комплекса $\Psi = \Gamma^2 (R_1/\delta)(1-\rho)^2$, что согласуется с теоретической зависимостью (4.12). Таким образом, для докритической области характерным является неизменное значение безразмерной скорости вращения ядра $|\Delta\Omega_C|/(\Omega_{rot}\Psi) = 0.33$.

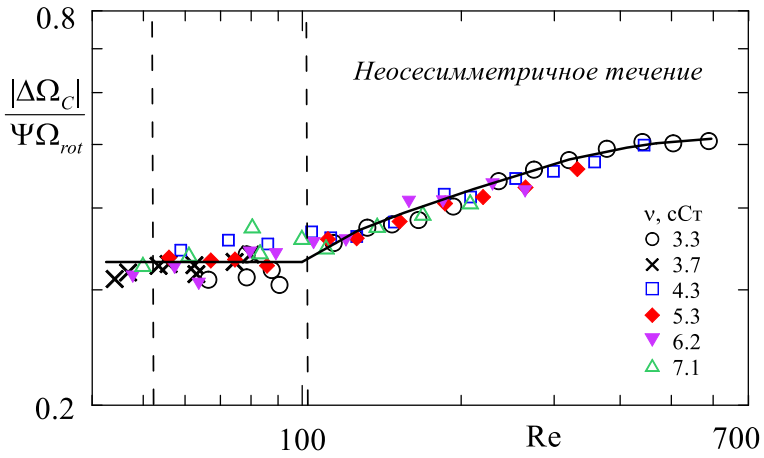


Рисунок 5.6 – Безразмерная скорость дифференциального вращения ядра в докритической и надкритической областях волновой устойчивости столба Тейлора

На рис. 5.6 результаты экспериментов, выполненных на жидкостях различной вязкости и широком интервале чисел Экмана, представлены на плоскости параметров $\mathrm{Re}, |\Delta\Omega_C|/(\Omega_{rot}\Psi)$. Как видно, все результаты удовлетворительно согласуются между собой. В докритической области ($\mathrm{Re} < 104$) безразмерная скорость дифференциального вращения не зависит от числа Рейнольдса. При $\mathrm{Re} = 104$ в результате неустойчивости на поверхности столба данная зависимость пороговым образом меняется. В надкритической области скорость вращения ядра увеличивается с числом Рейнольдса по закону $|\Delta\Omega_C|/(\Omega_{rot}\Psi) \sim \mathrm{Re}^{0.3}$. Обобщение всех результатов подтверждает идею, проиллюстрированную на рис. 5.4 и 5.5, о том, что пороговые значения определяются числом Re, вычисленным посредством дифференциального вращения ядра. В свою очередь, как следует из (4.12), $|\Delta\Omega_C|$ определяется амплитудой колебаний ядра (4.13) и может контролироваться амплиту-

дой внешнего гармонического воздействия в направлении, перпендикулярном оси вращения.

5.1.1.2. Пороги в отсутствие дифференциального вращения ядра

Если собственное дифференциальное вращение ядра отсутствует, с повышением амплитуды осцилляций b в слое возникает аналогичный набор неустойчивостей, реализуемый по одному и тому же сценарию. Первая мода связана с распадом внутреннего осесимметричного вихревого столба на систему вытянутых вдоль оси 2D вихрей. Вторая мода проявляется в развитии волны Россби на расстоянии $\sim 0.68R_2$. Примечательно, что волна Россби не оказывает существенного влияния на вихревую структуру, находящуюся вблизи оси вращения полости. Оба типа неустойчивости существуют одновременно. Наконец, при последующем повышении амплитуды колебаний ядра на расстоянии $\sim 0.79R_2$ возникает система валов, обгоняющих полость. Детальное описание результатов экспериментов приведено в работе [A16], а их качественное описание, ввиду схожести с Рис. 5.2, в контексте данной диссертационной работы является излишним. Тем не менее, сравнение порогов неустойчивости в двух различных постановках представляет интерес.

Для сравнения с экспериментами, когда ядро не совершает дифференциального вращения, введем аналогичное число Рейнольдса, рассчитанное через характерную скорость осреднённого движения жидкости, которая, в свою очередь, определяется амплитудой колебаний ядра. Принимая во внимание, что $\left|\Delta\Omega_C\right| / \Omega_{rot} \sim \Gamma^2 \left(1-\rho\right)^2 R_1 / \delta$, получим:

$$\mathrm{Re}_\Gamma \equiv \Gamma^2 \left(1-\rho\right)^2 \mathrm{E}^{-3/2} \sim \Delta\Omega R_1^2 / \nu . \qquad (5.1)$$

Связь между числами Рейнольдса Re и Re_Γ^{DR} (в терминах скорости дифференциального вращения и силы внешнего приливного воздействия, соответственно) до порога возникновения волны Россби можно получить, если учесть числовой коэффициент в формуле (4.12). После подстановки выражения (4.12) в (5.1) получаем следующее выражение:

$$\mathrm{Re}_\Gamma^{DR} = \mathrm{Re}\frac{\sqrt{2}}{0.33}. \qquad (5.2)$$

В надкритической области неустойчивость границы столба Тейлора сопровождается изменением зависимости скорости дифференциального вращения ядра от амплитуды колебаний (рис. 5.6, [А10]):

$$\frac{|\Delta\Omega_C|}{\Omega_{rot}} = 0.085\,\mathrm{Re}^{0.3}\,\Psi. \qquad (5.3)$$

Учитывая это, связь между числами Рейнольдса в нелинейном режиме принимает следующий вид:

$$\mathrm{Re}_\Gamma^{DR} = \mathrm{Re}^{0.7}\,\frac{\sqrt{2}}{0.085}. \qquad (5.4)$$

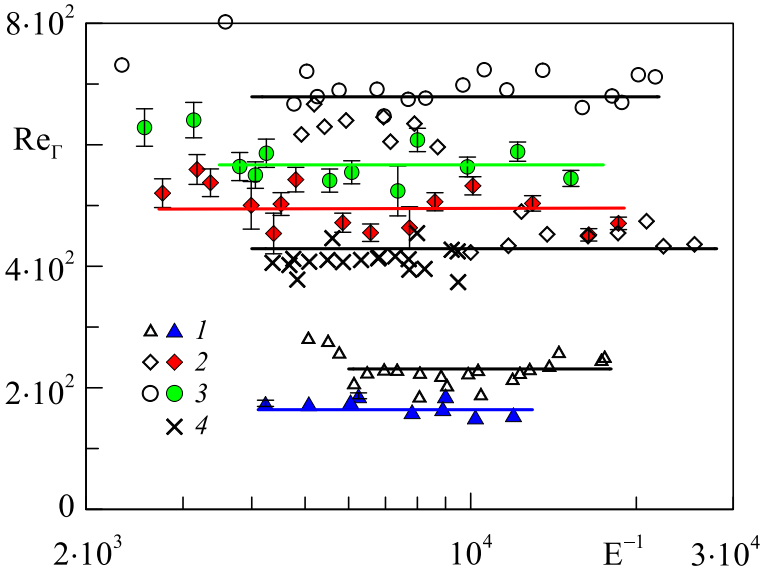


Рисунок 5.7 – Пороги неустойчивостей осреднённого течения, когда ядро не вращается (закрашенные символы) и вращается (светлые символы) относительно полости. Точки *1* соответствуют возникновению вихревой системы вблизи оси вращения, *2* – волне Россби, *3* – опережающе вращающейся системе валов и 4 – возникновению отпечатка внутренней вихревой системы на границе столба Тейлора

Эксперименты показывают, что в диапазоне чисел Экмана $\mathrm{E}^{-1} = 2\cdot10^3 - 3\cdot10^4$ пороги смены режимов осреднённого течения в обоих случаях, свободного и невращающегося ядра, полностью определяются Re_Γ (рис. 5.7). В отсутствие вращения ядра пороговое значение возникновения системы из двух

вихрей вблизи оси вращения составляет $\mathrm{Re}_\Gamma = 170 \pm 10$, в то время как пороги возникновения волны Россби и системы опережающе вращающихся валов равняются $\mathrm{Re}_\Gamma = 500 \pm 16$ и $\mathrm{Re}_\Gamma = 570 \pm 20$, соответственно.

Проведем сравнение порогов устойчивости со случаем, когда ядро свободно и совершает дифференциальное вращение (рис. 5.3). Пересчёт критических значений модифицированного числа Рейнольдса дает $\mathrm{Re}_\Gamma^{DR} = 231 \pm 13$, 428 ± 22 и 690 ± 19. Видно, что пороговые значения Re_Γ для неустойчивостей одного и того же типа не совпадают, хотя и близки. Очевидно, это связано с вкладом в результирующее течение стационарной экмановской подкачки, вызванной дифференциальным вращением ядра. Видно, что в области малых чисел Экмана ($\mathrm{E} < 10^{-4}$) отстающее дифференциальное вращение ядра оказывает дестабилизирующее действие на порог возникновения волны Россби, но в то же время повышает пороги возникновения двумерных вихревых жгутов вблизи оси вращения (точки *1*, рис. 5.7) и развития системы пристеночных вихрей в экваториальной области вращающейся сферы (точки *3*, рис. 5.7). В области $\mathrm{E} > 10^{-4}$ неустойчивость границы столба Тейлора сопровождается синхронизацией с вихревой системой внутри него (точки *4*). При этом волна Россби в сферическом слое возникает только при $\mathrm{Re}_\Gamma^{DR} = 634 \pm 15$.

5.1.2. Нелинейная динамика надкритических течений

5.1.2.1. Вихревая система вблизи оси вращения слоя

Как уже отмечалось, порог возникновения вихревой системы при наличии дифференциального вращения ядра оказывается выше, чем в его отсутствие, что объясняется различием в профилях скорости (рис. 4.34). Расстояние до центров вихрей от оси вращения составляет $\sim 0.18 R_2$, что качественно согласуется с радиусом цилиндрических поверхностей, проходящих через точки перегиба азимутальной скорости. При наличии дифференциального вращения ядра профиль скорости в области $r / R_2 = 0.1 - 0.3$ менее крутой, поэтому неустойчивость возникает при больших значениях Re_Γ.

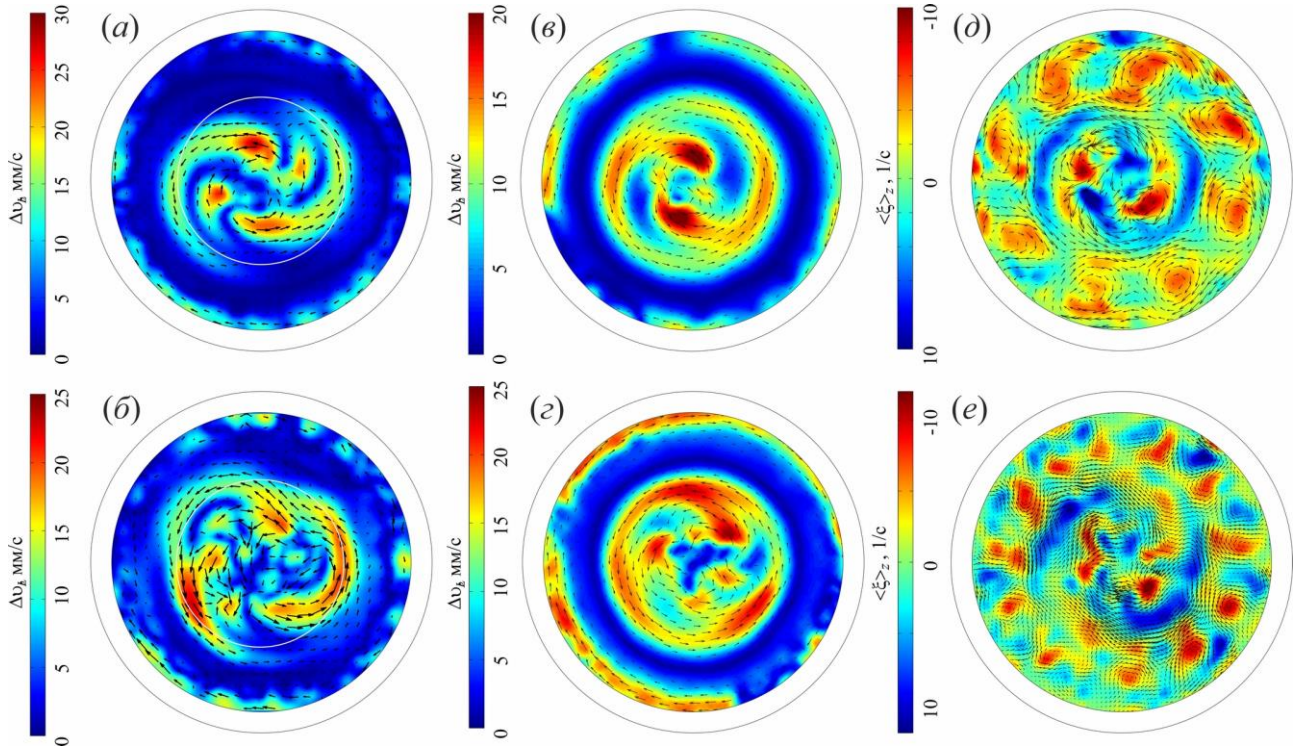


Рисунок 5.8 – PIV-визуализация осреднённого по периоду вращения полости надкритического течения в поперечном сечении $z / R_2 = 0.56$. (*а–г*) Внутренняя вихревая система при $\mathrm{Re}_\Gamma = 353$ и $\mathrm{E} = 1.2 \cdot 10^{-4}$ (*а*), $\mathrm{Re}_\Gamma = 501$ и $\mathrm{E} = 1.4 \cdot 10^{-4}$ (*б*), $\mathrm{Re}_\Gamma = 314$ и $\mathrm{E} = 7.6 \cdot 10^{-5}$ (*в*), $\mathrm{Re}_\Gamma = 417$ и $\mathrm{E} = 8.6 \cdot 10^{-5}$ (*г*); фрагменты *а* и *б* соответствуют $\Delta\Omega_C = 0$, *в* и *г* – $\Delta\Omega_C \neq 0$; на (*а–г*) цветом показана величина скорости жидкости, на *д* и *е* – завихренность; белой линией – граница ядра; внешняя черная линия – граница полости в экваториальной плоскости; направление вращения полости – по часовой стрелке. (*д*) Вихри Россби при $\mathrm{Re}_\Gamma = 570$, $\mathrm{E} = 6.6 \cdot 10^{-5}$ и $\Delta\Omega_C = 0$. (*е*) Внешняя вихревая система при $\mathrm{Re}_\Gamma = 910$, $\mathrm{E} = 5.1 \cdot 10^{-5}$ и $\Delta\Omega_C = 0$

На рис. 5.8*а–г* приведены типичные поля осреднённой скорости до порога возникновения волны Россби $(\mathrm{Re}_\Gamma < 500)$; верхний ряд соответствует двухвихревой структуре, нижний – трехвихревой. Вихри имеют серповидную форму и дрейфуют относительно полости в направлении, противоположном направлению ее вращения с угловой скоростью $\Delta\Omega_I < 0$. При этом вихри располагаются по обе стороны от полюсов ядра. В отсутствие вращения ядра вихри нарушают осевую симметрию течения на расстоянии $r > R_1$ (рис. 5.8*а, б*). В случае отстающего дифференциального вращения ядра, которое приводит к возникновению столба Тейлора, форма вихревых структур слегка модифицирована (рис. 5.8*в, г*). Вихри

локализуются внутри столба Тейлора, на расстоянии $r / R_2 < 0.5$, и при $\mathrm{Re}_\Gamma < 430$ не оказывают влияния на форму границы столба Тейлора, которая остается круговой. На это также указывает визуализация структуры течения при помощи светорассеивающих полиамидных частиц, которые аккумулируются на границе столба (светлое кольцо на рис. 5.2*а, б*). При этом внутри столба частицы визуализатора собираются внутри вихревых образований.

В отсутствие дифференциального вращения ядра скорость вращения вихревой системы слабо зависит от числа Рейнольдса Re_Γ (рис. 5.9). До порога возникновения волны Россби все экспериментальные точки, полученные при различных значениях вязкости жидкости, то есть в широком интервале значений числа Экмана, согласуются между собой. При этом скорость вращения вихревой системы практически не зависит от волнового числа k_I и принимает значение $\Delta\Omega_I / \Omega_{rot} \approx -3.5 \cdot 10^{-2}$. Влияние волнового числа k_I проявляется только при $\mathrm{Re}_\Gamma > 500$, т.е. в области существования волны Россби. Фазовая скорость отстающего вращения вихревой структуры с $k_I = 3$ оказывается меньше по модулю, чем в случае $k_I = 2$. В интервале $\mathrm{Re}_\Gamma = 500 - 800$ обе структуры ($k_I = 2$ и $k_I = 3$) устойчивы и могут сменяться в результате конечно-амплитудных переходов; при $\mathrm{Re}_\Gamma > 800$ двухвихревая структура теряет устойчивость. Все сказанное свидетельствует о взаимодействии вихревой структуры внутри столбика Тейлора с волной Россби, развивающейся за пределами границы столбика.

В случае свободного ядра, когда $\Delta\Omega_C \neq 0$, зависимость $\Delta\Omega_I / \Omega_{rot}\left(\mathrm{Re}_\Gamma\right)$ принимает более сложный вид (рис. 5.10*а*). При повышении Re_Γ скорость вращения вихревой системы уменьшается по абсолютной величине до тех пор, пока в сферическом слое пороговым образом не возникнет волна Россби ($\mathrm{Re}_\Gamma^{DR} = 428$). Дальнейшее повышение Re_Γ приводит к интенсификации отстающего вращения вихревой системы. При этом важным отличием надкритической динамики вихрей от случая $\Delta\Omega_C = 0$ является сильная зависимость величины $\Delta\Omega_I / \Omega_{rot}$ от вязкости жидкости, то есть от числа Экмана и скорости дифференциального вращения яд-

ра. Результаты экспериментов, полученные во всем исследуемом диапазоне чисел Экмана и различных волновых числах k_I, удовлетворительно согласуются между собой (рис. 5.10*б*), если учесть, что дифференциальное вращение свободного ядра генерирует внутри столба Тейлора дополнительное отстающее дифференциальное вращение жидкости величины $\Delta\Omega/2$ (Раздел 4.3), после чего перейти из системы отсчета полости в систему отсчета, связанную с самим столбом. При этом скорость вращения вихревой системы определяется следующим образом: $\Delta\Omega_I^C/\Omega^C = \left(\Delta\Omega_I - \Delta\Omega/2\right)/\left(\Omega_{rot} - \Delta\Omega/2\right)$. На рис. 5.10*б* треугольники соответствуют трехвихревой структуре, круги – двухвихревой. Из рисунка видно, что аналогично случаю невращающегося ядра (рис. 5.9) в области существования волны Россби существуют два устойчивых состояния с разными скоростями азимутального дрейфа вихрей. При этом переходы из одного состояния в другое происходят под действием возмущений конечной амплитуды.

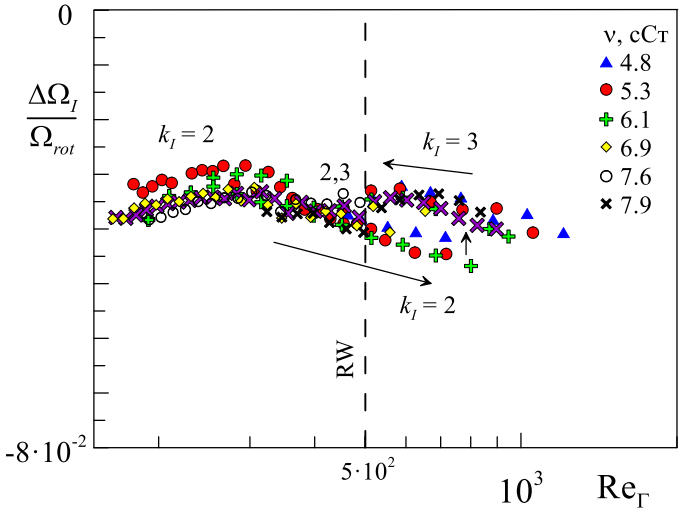


Рисунок 5.9 – Безразмерная скорость относительного вращения внутренней вихревой системы при различных значениях вязкости жидкостей в случае, когда ядро не совершает дифференциальное вращение ($\Delta\Omega_C = 0$). Вертикальной штриховой линией обозначен порог возникновения волны Россби

Сравнение результатов экспериментов в двух различных постановках (рис. 5.9, рис. 5.10*б*) показывает, что в надкритической области значения скорости $\Delta\Omega_I/\Omega_{rot}$ для $k_I = 2,3$ удовлетворительно согласуются между собой. Таким обра-

зом, можно сделать вывод, что динамика вихревой системы не зависит ни от числа Экмана, ни от скорости дифференциального вращения ядра $\Delta\Omega_C$. Отметим, что в диапазоне чисел Рейнольдса $430 < \mathrm{Re}_\Gamma < 690$ можно выделить несколько бистабильных состояний, которым соответствует разная скорость вращения вихревой системы. Эксперименты показывают, что сосуществование этих состояний определяется взаимодействием волновых мод внутри столба Тейлора и за его пределами. Так, конечно-амплитудные возмущения, связанные с изменением одного из волновых чисел, приводят к скачкообразному изменению скорости вращения вихревой системы.

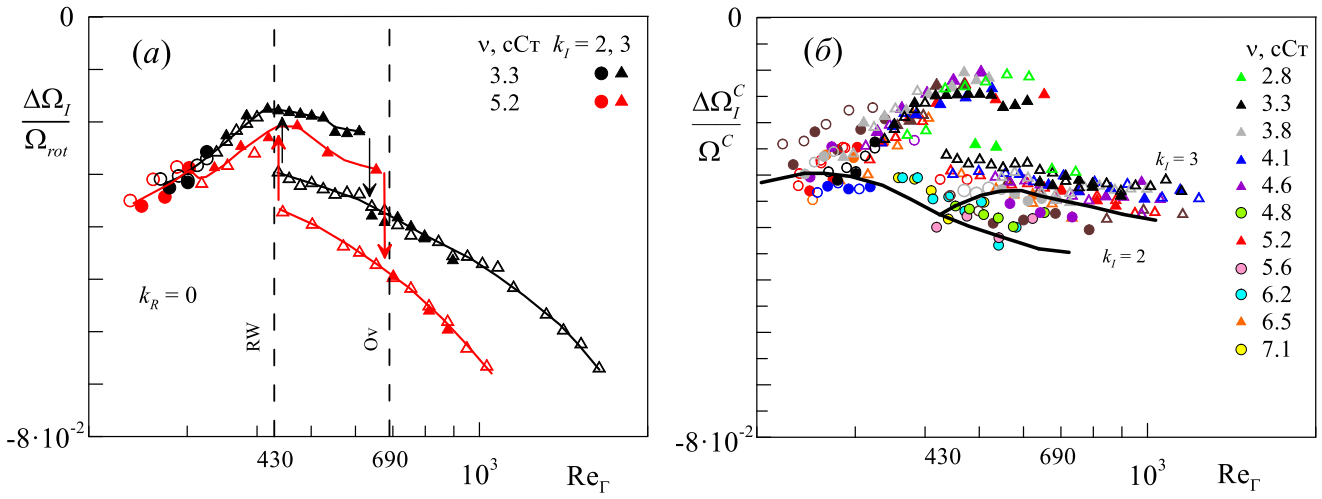


Рисунок 5.10 – Зависимость скорости отстающего вращения системы внутренних вихрей от Re_Γ при $\Delta\Omega_C \neq 0$

5.1.2.2. Волны Россби

В области умеренной надкритичности ($\mathrm{Re}_\Gamma = 500 - 570$) в сферическом слое одновременно проявляются две моды неустойчивости. PIV-исследования азимутального поля скорости показывают, что при $\mathrm{Re}_\Gamma > 500$ на расстоянии $r > R_1$ существует система двумерных валов (рис. 5.8*д*). Жидкость в валах совершает циклоническое вращение, в то время как система валов перемещается относительно полости в противоположном направлении со скоростью $\Delta\Omega_R < 0$. Поля скорости при $\Delta\Omega_C \neq 0$ являются аналогичными. При этом визуально неустойчивость к воз-

никновению системы валов проявляется в нарушении осевой симметрии границы столбика Тейлора (рис. 5.2*г–е*).

Независимо от наличия дифференциального вращения ядра скорость азимутального дрейфа системы валов $\Delta\Omega_R / \Omega_{rot}$ (фазовая скорость волны на границе столба Тейлора) полностью определяется волновым числом k_R (рис. 5.11). При этом в обоих случаях внутренняя вихревая система вблизи оси вращения полости и волна Россби существуют независимо друг от друга, что хорошо видно на рис. 5.8*д*. Все экспериментальные результаты укладываются на общую зависимость $\left(\Delta\Omega_R / \Omega_{rot}\right) k_R^2 = -1.5$, которая соответствует дисперсионному соотношению для волн Россби. Аналогичное дисперсионное соотношение ранее подробно обсуждалось в Разделе 3.6. На рис. 5.11*б* для сравнения приведены результаты исследований для случаев $\Delta\Omega_C \neq 0$ [A18] и $\Delta\Omega_C = 0$ [A16]. Несмотря на различие в постановке задач, данные хорошо согласуются в широком интервале значений волнового числа $k_R = 6 - 11$.

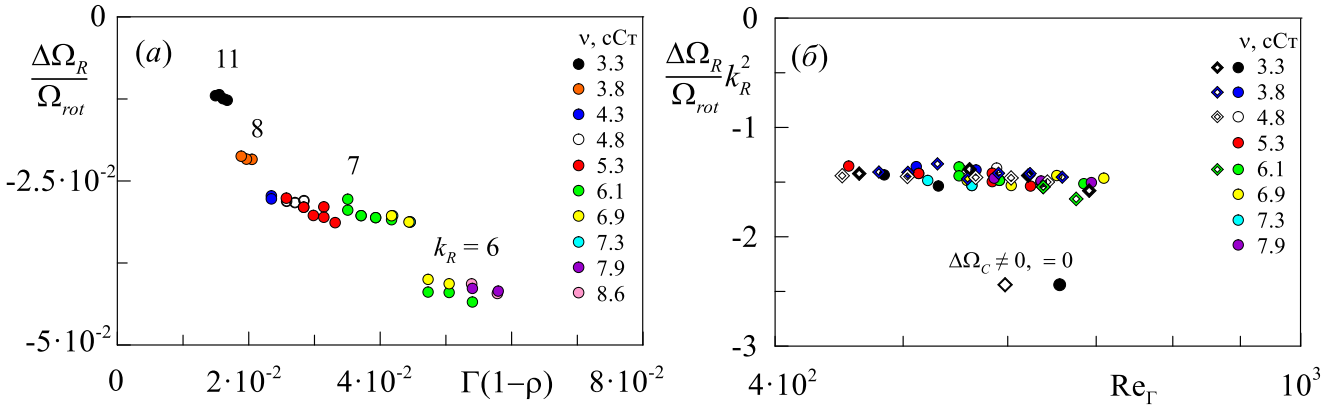


Рисунок 5.11 – Фазовая скорость волны Россби, показанной на рис. 5.8*д* (кружки, $\Delta\Omega_C = 0$), а также фазовая скорость волны на границе столбика Тейлора в случае дифференциально вращающегося ядра [A18] (рис. 5.2*г–е*, ромбики, $\Delta\Omega_C \neq 0$)

5.1.2.3. Внешняя вихревая система

Последний тип неустойчивости ($\mathrm{Re}_\Gamma > 570$), развивающийся на расстоянии $r / R_2 = 0.75 - 0.9$, качественно отличается направлением дрейфа системы валов.

При повышении Re_Γ на смену системе валов, совершающих отстающее вращение (волны Россби), пороговым образом приходит система валов, азимутальная скорость вращения которой $\Delta\Omega_O > 0$. Смена режима течения сопровождается повышением азимутального волнового числа на несколько единиц. Визуализация структуры течения при помощи PIV-метода (рис. 5.8*е*) и алюминиевой пудры (рис. 5.2*и, м*) показывает, что независимо от наличия дифференциального вращения ядра валы являются двумерными и вытянуты вдоль оси вращения полости. Качественное изменение структуры течения за пределами столбика Тейлора (смещение вихрей на большее расстояние от оси и смена направления их дрейфа) не оказывает влияния на вихри вблизи оси, в центральной части полости продолжает независимо существовать вихревая система, вращающаяся со скоростью $\Delta\Omega_I$.

В связи с тем, что скорость вращения системы валов сильно зависит от вязкости жидкости, удобно рассматривать зависимость $\Delta\Omega_O / \Omega_{rot}$ от параметра $\Gamma(1-\rho)$, определяющего амплитуду колебаний ядра относительно полости (рис. 5.12). Видно, что с повышением $\Gamma(1-\rho)$ наблюдается монотонное уменьшение скорости $\Delta\Omega_O / \Omega_{rot}$, при этом переходы к структурам с волновым числом на единицу меньше $k_O \to k_O - 1$ сопровождаются пороговым увеличением величины скорости. При обратном движении по параметру $\Gamma(1-\rho)$ переходы между структурами с различными волновыми числами происходят с гистерезисом. Результаты измерения скорости системы валов согласуются между собой для фиксированного значения вязкости жидкости, если положить $\Delta\Omega_O / \Omega_{rot} \sim k_O^{-2}$ (рис. 5.13*а, б*). Аналогичная зависимость наблюдается для фазовой скорости волн Россби от волнового числа (рис. 5.11). В то же время система валов, представленная на рис. 5.8*е,* дрейфует в противоположном направлении.

Скорость вращения системы валов существенно зависит от числа Экмана, о чем свидетельствует систематическое расслоение экспериментальных точек, полученных при различных значениях вязкости, на плоскости параметров

$\mathrm{Re}_\Gamma, \left(\Delta\Omega_O / \Omega_{rot}\right) k_O^2$ (рис. 5.13*а, б*). Видно, что независимо от наличия дифференциального вращения ядра $\Delta\Omega_C$ повышение ν приводит к монотонному уменьшению величины скорости $\left(\Delta\Omega_O / \Omega_{rot}\right) k_O^2$. Можно отметить, что фазовая скорость описанных ранее двух мод неустойчивостей, от вязкости не зависела. Все экспериментальные точки согласовывались между собой, если в качестве управляющего параметра использовалось число Рейнольдса Re_Γ (рис. 5.10*б*, рис. 5.11*б*).

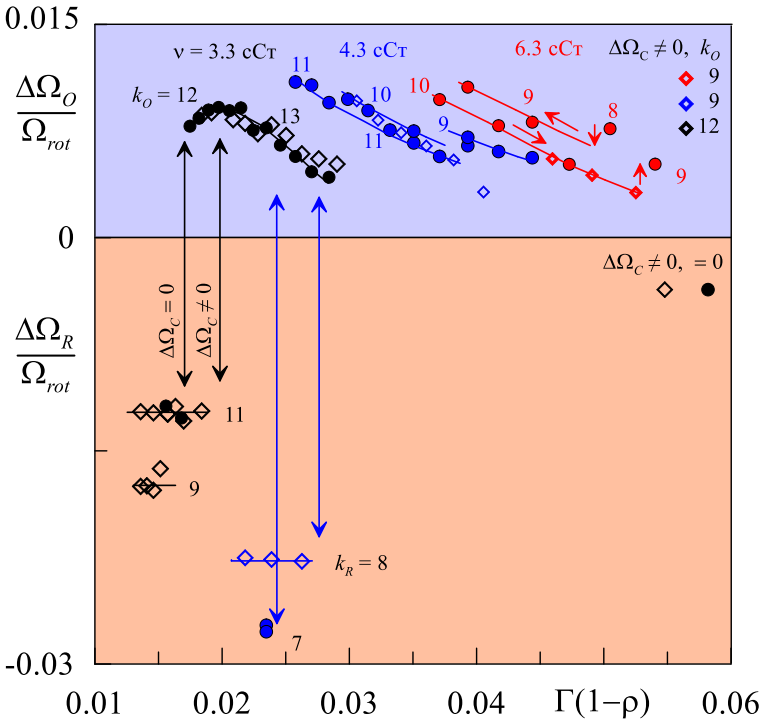


Рисунок 5.12 – Фазовая скорость распространения волны Россби $\Delta\Omega_R / \Omega_{rot}$ и скорость опережающего дрейфа системы валов $\Delta\Omega_O / \Omega_{rot}$ в зависимости от параметра $\Gamma\left(1-\rho\right)$. Ромбики соответствуют случаю $\Delta\Omega_C \neq 0$, кружки – $\Delta\Omega_C = 0$; вертикальными стрелками показаны конечно-амплитудные переходы между режимами течения

Анализ результатов показывает, что за надкритическую динамику системы опережающе вращающихся валов отвечает параметр $\mathrm{Re}_\Gamma^{\mathrm{E}} \equiv \mathrm{Re}_\Gamma \mathrm{E}^{1/2} = \Gamma^2 \left(1-\rho\right)^2 \mathrm{E}^{-1}$, который можно переписать как $\sim \Delta\Omega_L R_1 \delta_{\mathrm{E}} / \nu$ (рис. 5.13*в, г*). Как показывают детальные PIV-исследования профиля скорости на различных расстояниях от оси вращения, двумерность азимутального течения сохраняется только в объёме жидкости [А22]. В узкой пристеночной области возникает сильное опережающее

движение жидкости. На это также указывают наблюдения за поведением тяжелых частиц на внутренней стенке полости (рис. 4.21). Последние совершают азимутальное вращение со скоростью, равной скорости потока вблизи пограничных слоев Экмана. Таким образом, можно предположить, что нарушение геострофичности течения вблизи стенки играет существенную роль в развитии валов.

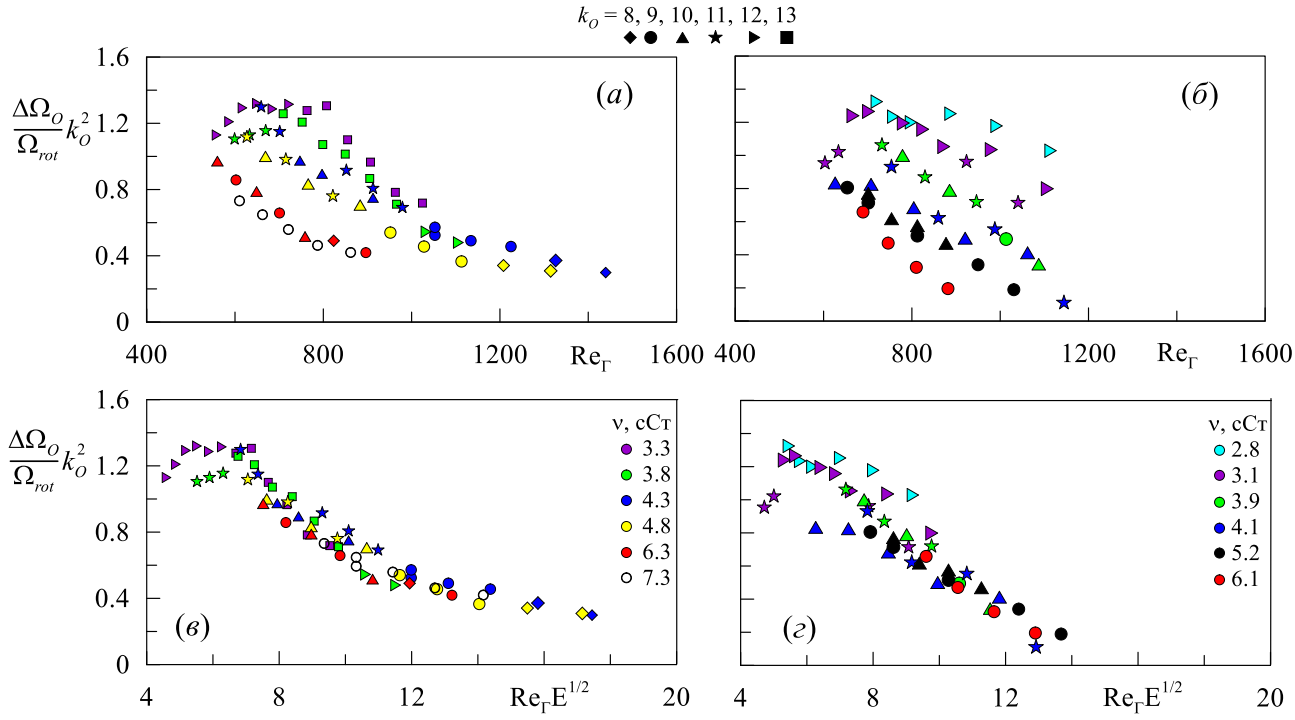


Рисунок 5.13 – Зависимость скорости опережающего вращения валов $\left(\Delta\Omega_O / \Omega_{rot}\right)k_O^2$ от числа Рейнольдса Re_Γ и параметра $\mathrm{Re}_\Gamma \mathrm{E}^{1/2}$ при $\Delta\Omega_C = 0$ (*а*, *в*) и $\Delta\Omega_C \neq 0$ (*б*, *г*). Тип символов определяется волновым числом k_O, в то время как цвет – вязкостью жидкости

Эксперименты показывают, что в случае отсутствия дифференциального вращения $\Delta\Omega_C = 0$ надкритическая динамика валов хорошо описывается следующим соотношением $\left(\Delta\Omega_O / \Omega_{rot}\right)k_O^2 \sim \left(\mathrm{Re}_\Gamma \mathrm{E}^{1/2}\right)^{-3/2}$ (рис. 5.13*в*). В случае свободного ядра скорость вращения системы уменьшается с числом Рейнольдса существенно быстрее (рис. 5.13*г*). Действительно, с повышением числа Экмана толщина сдвиговых слоев на границе столба Тейлора монотонно увеличивается, что

приводит к взаимодействию внешней вихревой системы с отстающим вращением жидкости, возбуждаемым дифференциальным вращением ядра.

5.2. Нелинейные режимы инерционных волн в условиях опережающих колебаний ядра

Перейдём к рассмотрению нелинейных режимов инерционных волн при опережающих колебаниях ядра. Эксперименты проводятся в постановке, изображённой на Рис. 4.2, в диапазоне безразмерных частот $n = 0.7 - 2.0$. Внимание уделяется только азимутальным полям скорости в различных поперечных сечениях $z / R_2 = 0.1 - 0.72$. В отличие от предыдущих экспериментов, в качестве управляющего параметра используется число Рейнольдса, рассчитанное через квадрат амплитуды колебаний ядра $\mathrm{Re}_b = b^2 / \left(R_1 \delta \mathrm{E}\right)$, а не Re_Γ. Это связано с сильной нелинейной зависимостью амплитуды b от частоты внешнего инерционного воздействия и неизвестными коэффициентами между его амплитудой b_{osc} и напряжением на усилителе (см. Рис. 4.2). Поэтому в конкретном эксперименте проще и надёжнее визуально определять b. Учитывая, что при стационарном вращении полости вокруг горизонтальной оси $\left|\Omega_{osc}\right| = \Omega_{rot}$, связь между двумя параметрами может быть легко найдена в следующем виде:

$$\mathrm{Re}_b = \frac{\mathrm{Re}_\Gamma}{0.33\sqrt{2}}. \qquad (5.5)$$

Первоначально рассмотрим динамику инерционных волн в нелинейных режимах, а после перейдем к их влиянию на зональное течение. В линейном режиме скорость пульсационного течения немонотонным образом меняется с безразмерной частотой n (рис. 4.13). Наиболее интенсивное движение наблюдается в окрестности частоты $n = 1.2$, где возбуждается глобальная инерционная мода (рис. 4.9*г*). Данную зависимость можно разбить на три участка, условно отделяющих область резонансного возбуждения глобальных вихрей. Далее на рис. 5.14 показан инерционный отклик жидкости в зависимости от числа Рейнольдса Re_b, т.е. при монотонном переходе к нелинейным режимам и появлении в спектрах

азимутальной скорости дополнительных субгармоник. В режиме *I* ($n<1.1$) повышение Re_b практически не влияет на величину средних пульсаций скорости. Здесь экспериментальные точки ложатся на одну кривую $<u_\varphi>/b\Omega \approx 0.75$. В резонансном режиме *II* ($1.1 \le n \le 1.3$) повышение числа Рейнольдса приводит к нелинейному уменьшению величины пульсационной скорости. При этом в области $\mathrm{Re}_b > 10^4$ экспериментальные точки приближаются к значениям режима *I*. Наконец, режим *III* ($n>1.3$) характеризуется выходом системы на постоянное значение $<u_\varphi>/b\Omega \approx 0.35$.

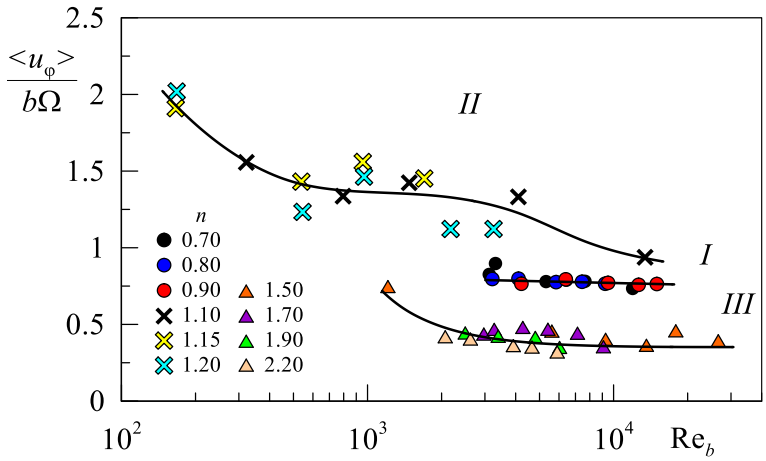


Рисунок 5.14 – Зависимость средней скорости пульсаций в поперечном сечении слоя $z / R_2 = 0.56$ от числа Рейнольдса; число Экмана составляет $\mathrm{E} = 1.58 \cdot 10^{-4}$

5.2.1. Спектральный состав возмущений в поле скорости

Визуальные наблюдения за структурой пульсационного течения показывают, что в нелинейных режимах отчётливо проявляются очаги новых вихревых образований. Для анализа данных используется методика, ранее успешно примененная в Разделах 2.3.4 и 3.4. Для примера на рис. 5.15 показаны спектрограммы мгновенной азимутальной скорости при частоте $n = 1.10$. Отметим, что начало отсчёта времени не соответствует моменту включения вибраций. Запись видео начинается после завершения переходного режима и достижения квазистационарного состояния (момент времени $t = 0$). Задержка по времени между началом периодического воздействия и началом записи видео одинакова во всех экспериментах, $\sim 100 T_o$). Перед описанием результатов прежде всего необходимо отде-

лить из спектра нефизические гармоники, появляющиеся вследствие перехода во вращающуюся систему отсчёта из лабораторной. Такой гармоникой является частота $\omega / \Omega_{rot} = 1$, возникающая вследствие несоосности оси вращения и оптической оси камеры. Дополнительная пара гармоник с частотами, не несущими информации о физических эффектах, рассматриваемых в задаче, является $\omega / \Omega_{rot} = n - 1$ и $2 - n$.

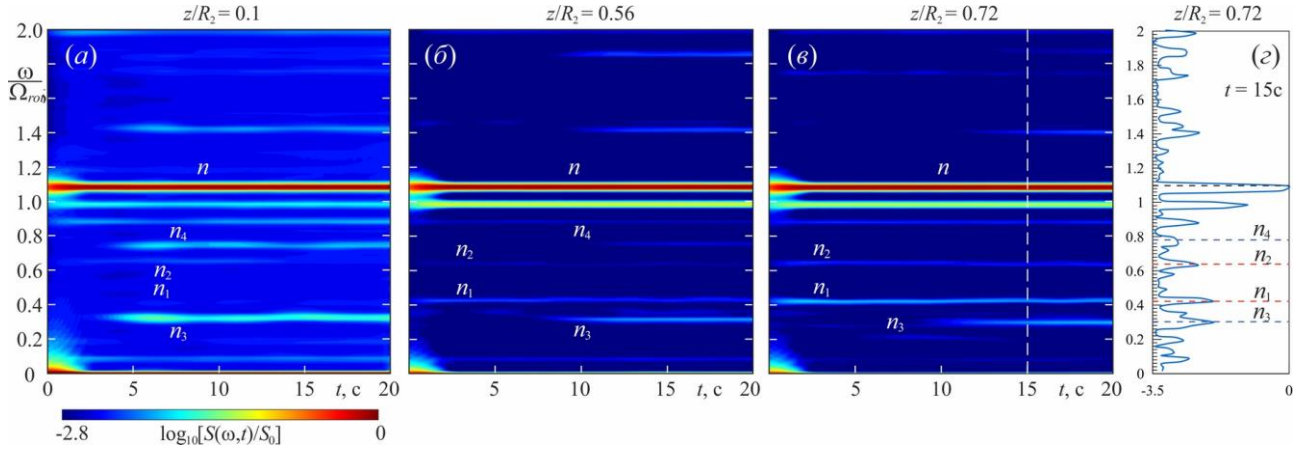


Рисунок 5.15 – Спектрограммы азимутальной скорости в сечениях $z / R_2 = 0.10$, 0.56 и 0.72 (*а–в*) при частоте $n = 1.10$, амплитуде $b = 0.95$ мм, $\mathrm{Re}_b = 1130$ и $\mathrm{E} = 1.58 \cdot 10^{-4}$. Цветом показана величина $\lg\left[S(\omega,t) / S_0 \right]$, где S_0 – средняя по времени величина спектрального пика на частоте Ω (2.27). На фрагменте (*г*) показан спектр возмущений в момент времени $t = 15$ с в сечении $z / R_2 = 0.72$ (белая вертикальная штриховая линия)

Наибольший интерес представляют парные субгармоники с частотами n_1, n_2 (внутренняя пара) и n_3, n_4 (внешняя пара), сумма которых удовлетворяет условию триадного резонанса с фундаментальной частотой n. Данные частоты проявляются во всех трёх сечениях z / R_2, при этом их интенсивность отличается. Первоначально в спектре возникает только внутренняя пара, наиболее ярко выраженная в $z / R_2 = 0.72$ (рис. 5.15*в*). Поскольку съёмка начинается только после включения вибраций и выхода системы на квазистационар, возмущения на частотах $n_1 \approx 0.42$ и $n_2 \approx 0.64$ успевают хорошо развиться к моменту времени $t = 0$. С течением времени значения частот субгармоник могут незначительно меняться, причем их

сумма всегда равна фундаментальной частоте $n_1 + n_2 \approx n$. Внешняя пара субгармоник с частотами $n_3 \approx 0.35$ и $n_4 \approx 0.75$ развивается только к моменту времени $t > 5$с. Причем ярче всего последняя проявляется вблизи экваториальной плоскости $z / R_2 = 0.10$ (рис. 5.15*а*).

На рис. 5.16 представлена динамика спектров в зависимости от амплитуды колебаний ядра при различных частотах n. Данные были импортированы из спектрограмм (рис. 5.15) для момента времени $t = 15$секунд, т.е. уже после полного развития нелинейных эффектов. В диапазоне частот $n = 0.7 - 1.1$ нелинейный режим сопровождается появлением пары новых субгармоник с частотами n_1 и n_2 (Т-режим). С увеличением амплитуды b их значения меняются незначительно. Повышение частоты приводит к развитию новых каскадных процессов в виде появления частот n_3 и n_4 (например, частота $n = 1.1$).

В диапазоне частот $1.1 < n < 1.6$ сценарий развития нелинейных режимов более интересен. Повышение амплитуды осцилляций ядра сначала приводит к появлению пары n_1 и n_2, после чего наиболее ярко проявляется частота, равная $n / 2$. Так, при $n = 1.2$ данная субгармоника появляется при $b > 0.8$мм и не изменяется вплоть до самых больших амплитуд в эксперименте. Появление субгармонической частоты в два раза меньшей основной указывает на возбуждение параметрических колебаний в системе (Р-режим). В этом случае можно говорить о рождении двух субгармоник n_5 и n_6, распространяющихся в противоположных азимутальных направлениях с одинаковыми п величине частотами. Важно отметить, что развитие параметрического триадного резонанса не подавляет субгармоники n_1 и n_2, значения которых с увеличением амплитуды монотонно приближаются к $n / 2$. Таким образом, в сферическом слое может одновременно существовать несколько пар волн, удовлетворяющих условию триадного резонанса. При дальнейшем увеличении b в спектре появляются две новые частоты n_7 и n_8. Нижняя субгармоника n_7 является низкочастотной, что указывает на генерацию медленного азимутально-неоднородного течения (L-режим). По всей видимости, такая богатая динамика в данном диапазоне n обусловлена возбуждением на фундамен-

тальной частоте глобальной инерционной моды, усиливающей амплитуду пульсационного течения в несколько раз [A5].

При повышении частоты до $n=1.5$ неустойчивость сразу проявляется в развитии параметрических колебаний жидкости, частоты $n_1,...,n_4$ отсутствуют в спектре. При этом увеличение амплитуды приводит к сплиту субгармоник n_5 и n_6, одна из которых смещается в низкочастотную область, а вторая – в высокочастотную. Сплит сопровождается генерацией низкочастотной составляющей n_7 и её высокочастотной пары n_8. Хорошо видно, что значения этих частот меняются с амплитудой, а их сумма подстраивается под величину n.

Наконец, при частотах $n>1.6$ параметрические колебания жидкости отсутствуют. Триадный резонанс индуцирует возникновение пары частот n_7 и n_8 (рис. 5.16, $n=1.7$). Данный диапазон частот расположен вдали от пространственных резонансов инерционных мод, поэтому, как будет показано далее, неустойчивость преимущественно локализована вблизи слоёв Стюартсона, образующих тангенциальный к диаметральному сечению ядра цилиндр, вытянутый вдоль оси вращения (L-режим). Отдельно стоит отметить частоту $n=2.0$, при которой инерционные волны в объеме сферического слоя должны отсутствовать. Тем не менее, в нелинейном режиме система демонстрирует возникновение парных возмущений, дающих в сумме частоту воздействия. Таким образом, динамика очень похожа на случай частот $n=1.7$ и выше, где роль материнской инерционной волны явно ослабевает. В то же время наблюдается заметное усложнение динамики, проявляющееся в двух аспектах. Во-первых, это появление дополнительных субгармоник с частотами n_{2i+1} и n_{2i+2}, где $i\geq 4,5,...$. Во-вторых, порогу возбуждения пары n_7,n_8 предшествуют слабо различимые частоты в нижней и верхней части спектра при $b>1.5$мм.

Таким образом, в диапазоне частот $n=0.7-2.0$ можно выделить три основных режима: (*i*) неустойчивость триадного резонанса, сопровождающаяся появлением пары субгармоник с различными по величине частотами и знаками (опережающее/отстающее) их азимутального движения (T-режим); (*ii*) параметрическая

неустойчивость, связанная с колебаниями жидкости на частоте $n/2$ и представленная двумя вторичными волнами с различного знака азимутального движения (P-режим); (*iii*) возбуждение медленного низкочастотного движения (L-режим).

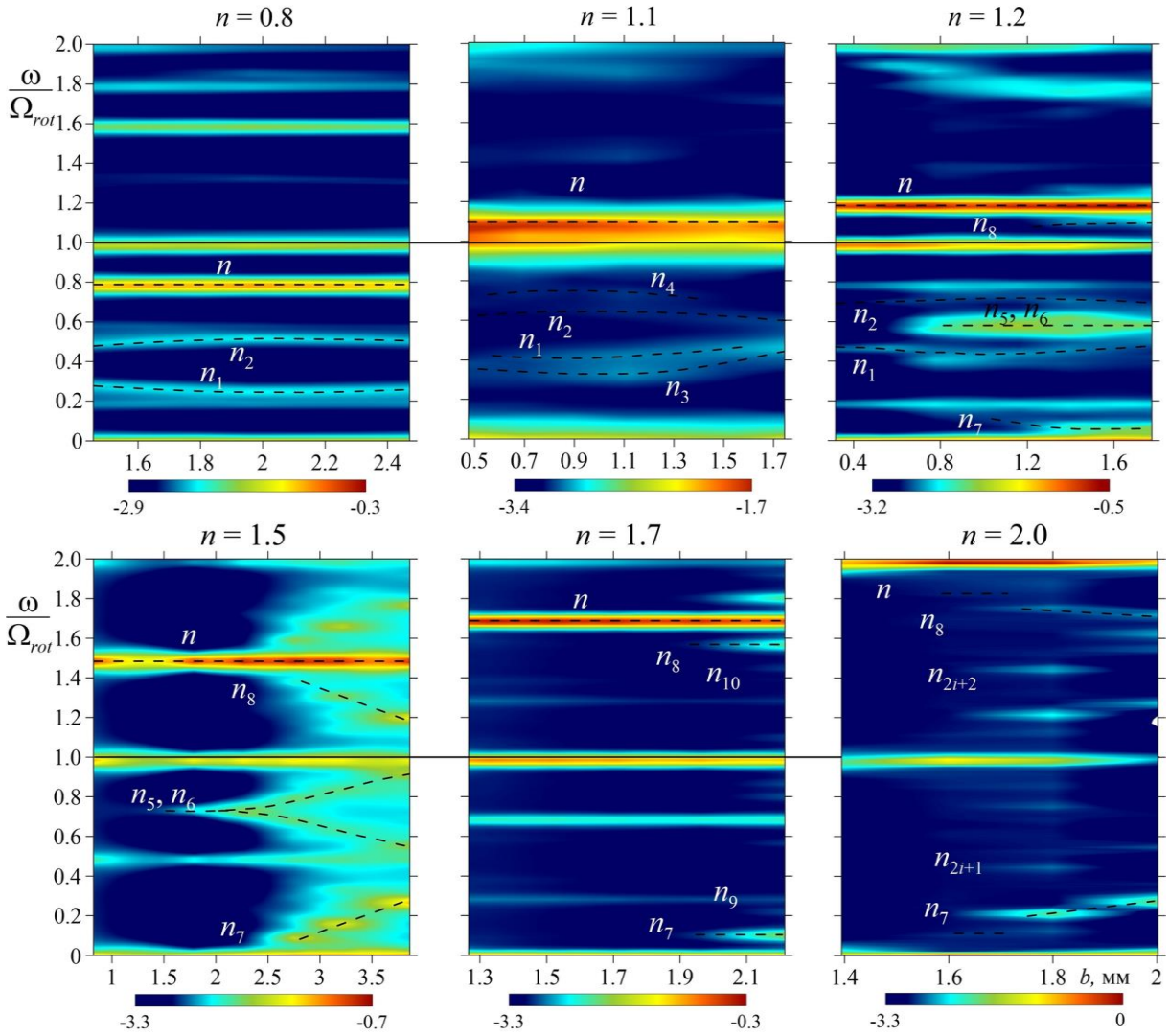


Рисунок 5.16 – Спектры в зависимости от амплитуды колебаний ядра b в момент времени $t = 15$ с для различных частот воздействия n и $\mathrm{E} = 1.58 \cdot 10^{-4}$

5.2.2. Декомпозиция волн

Диаграммы осевой завихренности ξ_z / Ω_{rot}, отфильтрованные во времени с использованием преобразования Гильберта [198], показаны на рис. 5.17 для частот $n = 1.1$, 1.2 и 1.7. На рис. 5.17*a*, *г*, *е* показаны основные волны с азимутальной модой $k = 1$ в центре и на периферии цилиндрического радиуса. Обе волны являются опережающими, что соответствует вращению спиралей по часовой стрелке.

Применяя фильтрацию Гильберта на частотах $\omega_1 / \Omega_{rot} = n_1$ и $\omega_2 / \Omega_{rot} = n_2$ (верхний ряд), $\omega_{5,6} / \Omega_{rot} = n_{5,6}$ (средний ряд), $\omega_7 / \Omega_{rot} = n_7$ и $\omega_8 / \Omega_{rot} = n_8$ (нижний ряд) можно выделить вторичные волны с разными волновыми числами на разных радиальных расстояниях от оси вращения полости (рис. 5.17*б*, *в*, *д*, *ж*, *з*). В параметрическом режиме частоты волн субгармоник внутри тангенциального цилиндра совпадают, в то время как их волновые числа сильно отличаются. Аналогичный эффект наблюдается и при других частотах (например, при $n = 0.8$ и $n = 1.0$ [A4]), но при более высоких значениях Re_b. Отметим, что направление азимутального вращения волн с нечётными частотами $n_1, n_3, \ldots$ совпадает с опережающим вращением основной волны, в то время как волны с чётными частотами $n_2, n_4, \ldots$ являются отстающими.

Далее данные из окружности разворачиваются на плоскость $(\varphi, r / R_2)$ с началом координат $(x, y) = (0, 0)$, после чего для чёткого выделения волновой картины, соответствующей данной частоте, дополнительно применяется преобразование Гильберта по пространству. Для параметрического режима на частоте $n = 1.2$ данная процедура проводится отдельно для областей $r / R_2 < 0.55$ и $r / R_2 > 0.55$. Данные области отделены друг от друга горизонтальными чёрными линиями. На рис. 5.18 представлены осевая завихренность и фазы при параметрах, соответствующих рис. 5.17. Фазовая диаграмма содержит информацию о знаке радиальной составляющей волнового вектора $\mathbf{k}_r$ и знаке азимутального волнового числа $k^{\pm}$ (положительное направление – от красного к синему). При пространственной фильтрации выявляется волна только в определенном направлении.

Т-режим представлен частотой $n = 1.10$. Основная волна с тем же азимутальным волновым числом $k^- = 1$ наблюдается вблизи внешней границы и внутри тангенциального цилиндра. Две субгармоники при $\omega_3 / \Omega_{rot} = 0.35$ и $\omega_4 / \Omega_{rot} = 0.75$ хорошо удовлетворяют временному условию триадного резонанса: их сумма равна фундаментальной частоте n. Пространственная фильтрация показывает, что их азимутальные волновые числа равны $k^- = 6$ и $k^+ = 5$ соответ-

ственно. Как будет показано далее, волновое число на частоте $\omega_3 / \Omega_{rot} = 0.35$ согласуется с осреднённым по периоду воздействия полем скорости (Раздел 5.3).

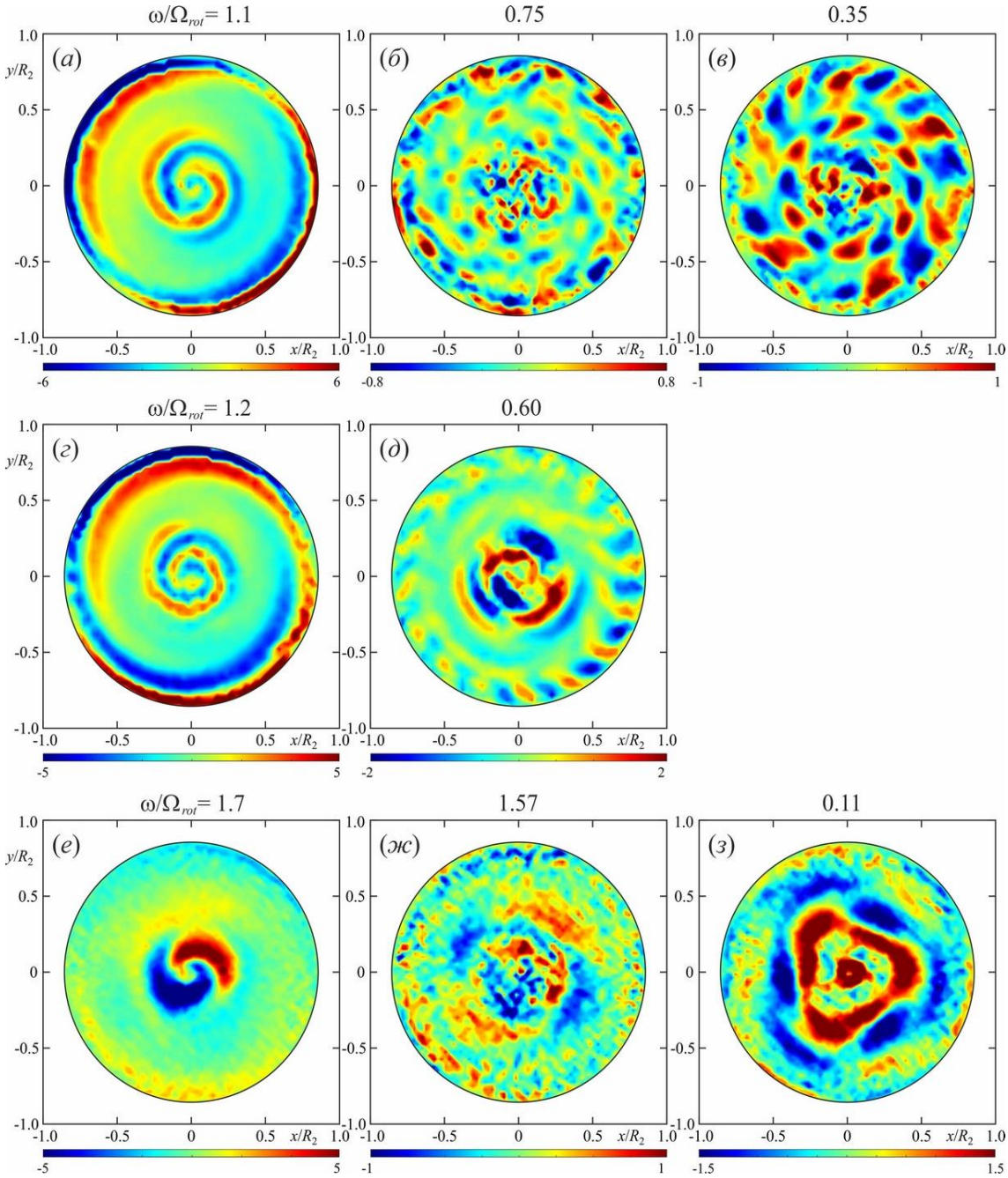


Рисунок 5.17 – Поля осевой завихренности ξ_z / Ω_{rot}, отфильтрованные по времени на частоте n (левая колонка: *а*, *г*, *е*) и двух субгармонических частотах (средняя и правая колонка) в сечении $z / R_2 = 0.56$ при $b = 0.95$ мм и $\mathrm{Re}_b = 1130$ (*а*–*в*), $b = 1.14$ мм и $\mathrm{Re}_b = 1706$ (*г*–*д*), $b = 2.21$ мм и $\mathrm{Re}_b = 7633$ (*е*–*з*); полость вращается по часовой стрелке; число Экмана составляет $\mathrm{E} = 1.58 \cdot 10^{-4}$

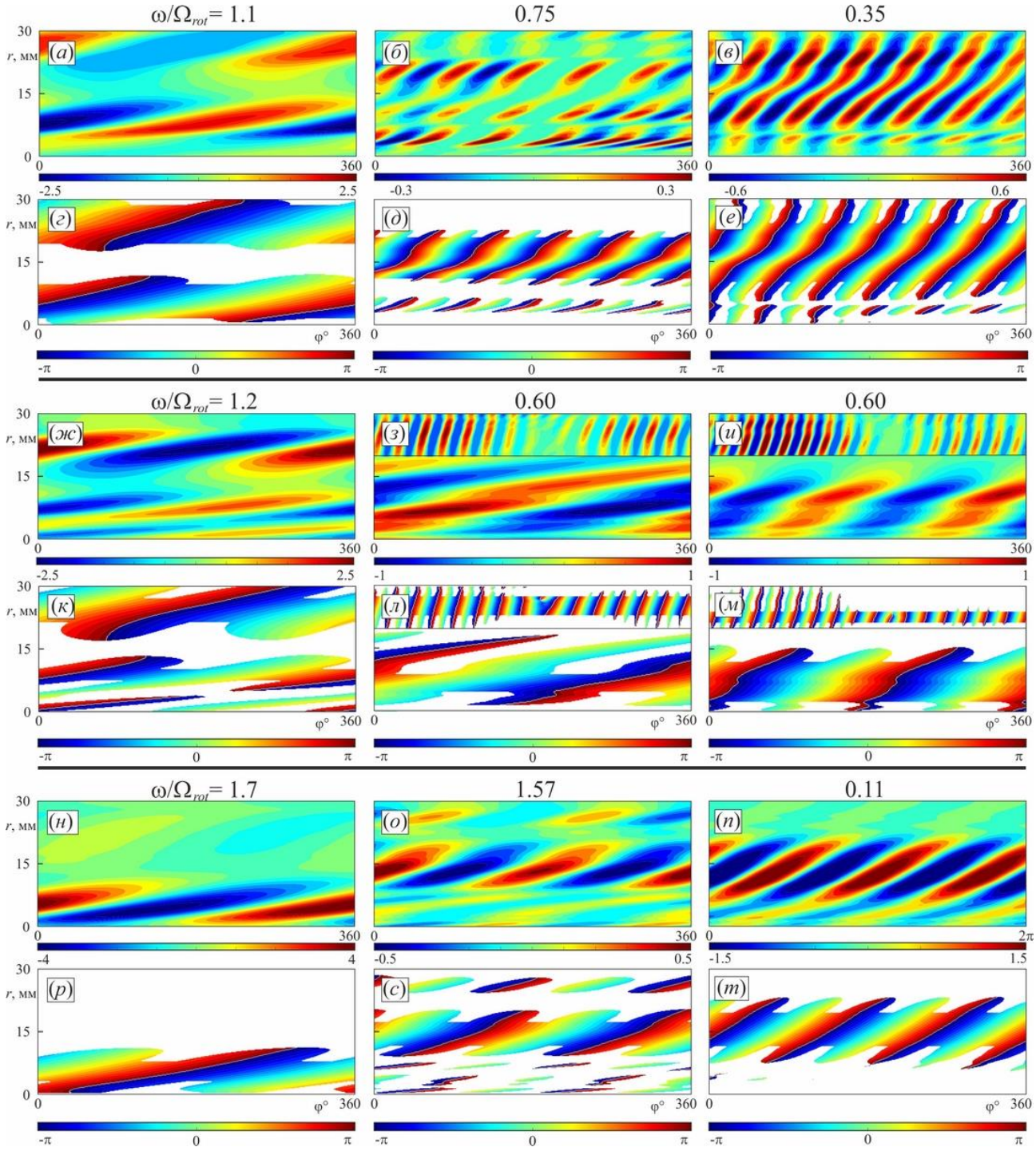


Рисунок 5.18 – Осевая завихренность (*а–в*, *ж–и*, *н–п*) и фаза (*г–е*, *к–м*, *р–т*) отфильтрованные по времени вблизи частот, указанных в верхней части каждого изображения, и по пространству для соответствующего волнового числа при помощи преобразования Гильберта в момент времени $t = 15$ с. Фазовые диаграммы показывают знак радиального и азимутального волновых чисел (положительный от красного до синего); направление увеличения азимутального угла φ – против часовой стрелки. На фрагментах (*з*, *и*, *л*, *м*) сферический слой разделен на две зоны линией $r / R_2 = 0.55$. Основные параметры взяты из рис. 5.17

На частоте $n=1.20$ наблюдается P-режим волновой неустойчивости с двумя субгармониками на частотах $\omega_{5,6}/\Omega_{rot}=0.60$ с различной пространственной структурой на различных радиальных расстояниях от оси вращения полости. Внутри тангенциального цилиндра волновые числа малы: $k^-=2$ и $k^+=1$ (правый и центральный столбцы на рис. 5.18). Снаружи тангенциального цилиндра азимутальные волновые числа равны $k^-=15$ и $k^+=14$. Эти данные также далее будут приведены в Разделе 5.3.

На частоте $n=1.70$ возникает волновая неустойчивость L-типа, провоцирующая сдвиговую неустойчивость осреднённого азимутального течения. В этом режиме основная волна наблюдается только внутри тангенциального цилиндра; амплитуда волны вблизи границы сферического слоя значительно меньше и не показана на фазовой диаграмме. В данном режиме наблюдаются две субгармоники: низкочастотная, вклад которой в осреднённое течение будет подробно обсуждаться в Разделе 5.3.1, а вторая очень близка к основной волне. Азимутальные волновые числа для этих субгармоник равны $k^-=3$ и $k^+=2$, соответственно. Можно заметить, что в режимах T и L-типа субгармонические волны возникают практически во всем диапазоне значений цилиндрического радиуса r/R_2, в то время как волны на фундаментальной частоте локализованы вблизи оси вращения и на периферии r/R_2.

5.2.3. Пороги волновой неустойчивости

На рис. 5.19 представлены пороги возникновения субгармоник для описанных режимов на плоскости параметров (n,Re_b). Общая форма кривых имеет сложный характер, но в целом согласуется с данными для скорости пульсационного течения: наименьшее пороговое значение Re_b соответствует области возбуждения инерционной моды (рис. 4.13). Режим параметрических колебаний возбуждается начиная с частоты $n=1.15$ при числе Рейнольдса $\mathrm{Re}_b=10^3$, которое монотонно растет с n. P-режим не наблюдается за пределами частоты $n>1.6$. L-режим также начинается с $n=1.15$ и характеризуется немонотонным изменением

Re_b. Сначала наблюдается повышение порога неустойчивости вплоть до значений $\mathrm{Re}_b \sim 10^4$. Последующее понижение порога сопровождается уменьшением вклада инерционных волн в зональное течение и прекращением режима параметрических колебаний. При $n > 1.6$ экспериментальные точки выходят на значение $\mathrm{Re}_b \approx 4 \cdot 10^3$. В этом диапазоне частот с увеличением n вклад инерционных волн в основное течение постепенно уменьшается.

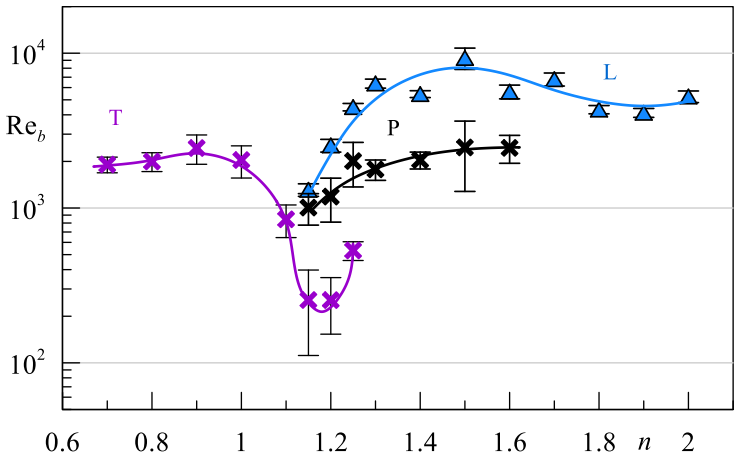


Рисунок 5.19 – Пороги появления субгармоник в спектрах азимутальной скорости при числе Экмана $\mathrm{E} = 1.58 \cdot 10^{-4}$

На рис. 5.20 показано, как изменяется пороговый спектральный состав возмущений в пороге волновой неустойчивости на рис. 5.19. Отметим, что на данных картах для удобства восприятия информации удалены артефактные гармоники на частоте вращения полости $\omega / \Omega_{rot} = 1$, $\omega / \Omega_{rot} = n - 1$ и $\omega / \Omega_{rot} = 2 - n$. Основной тренд на картах соответствует частоте воздействия $\omega / \Omega_{rot} = n$, которая является наиболее яркой гармоникой в спектре. Остальные интересующие субгармоники лежат ниже этой линии. В Т-режиме (рис. 5.20*а*) повышение n приводит к практически линейному росту частот n_1 и n_2. Внешняя пара второго каскада n_3 и n_4 наиболее ярко проявляется вблизи частоты $n = 1.1$. Как было отмечено ранее, возмущения на данных частотах развиваются только после рождения внутренней пары. Р-режим, соответствующий черным крестам на рис. 5.19, представлен на рис. 5.20*б*. В окрестности $n = 1.3$ наблюдается ярко выделенное усложнение спек-

тра. С одной стороны, наблюдается небольшое расщепление частот n_5 и n_6, а, с другой стороны, появление дополнительных субгармоник. Наконец, рассмотрим L-режим с низкочастотной компонентой (рис. 5.20*в*). Хорошо видно, что её значение практически не меняется и остается равным $n_7 \approx 0.07$. Когда инерционная волна с частотой воздействия $n > 1.8$ ослабевает, наблюдается повышение низкочастотной компоненты до $n_7 \approx 0.2$. Здесь также можно отметить, что, поскольку третий режим находится выше всех по значениям Re_b, в спектре одновременно очень ярко проявляются расщеплённые частоты n_5 и n_6.

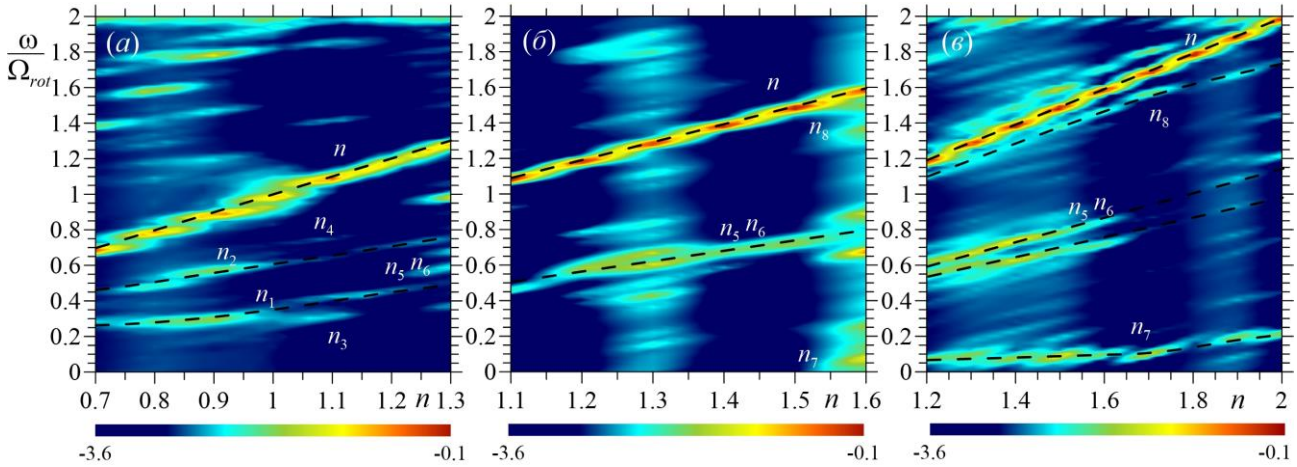


Рисунок 5.20 – Вид спектров в зависимости от частоты воздействия для (*а*) порога неустойчивости в Т-режиме, (*б*) параметрического резонанса (Р-режим), (*в*) низкочастотной компоненты спектра (L-режим) в сечении $z / R_2 = 0.56$. Штриховыми линиями выделены тенденции изменения значений частот для основных режимов

5.3. Влияние нелинейных волн на осреднённые течения

Для идентификации возмущений, генерируемых на частотах триадного резонанса удобно использовать метод осреднения поля скорости. Понятно, что осреднение по низкочастотным гармоникам не даст нужный результат и приведёт к полному затиранию всех возмущений, что эквивалентно осреднению по всем гармоникам в спектре. Наиболее разумно проводить осреднение по «быстрой» фундаментальной частоте с временем $T_o = 2\pi / \Omega$. Данный подход хорошо себя зарекомендовал при исследовании неустойчивости осреднённого течения во вра-

щающемся кольцевом слое с прецессирующей крышкой (Глава 3, [А3]) и либрирующем цилиндре с наклонными торцами (Глава 2, [А2]). В этом случае в осреднённом поле скорости хорошо проявляются течения, обусловленные развитием низкочастотных субгармоник.

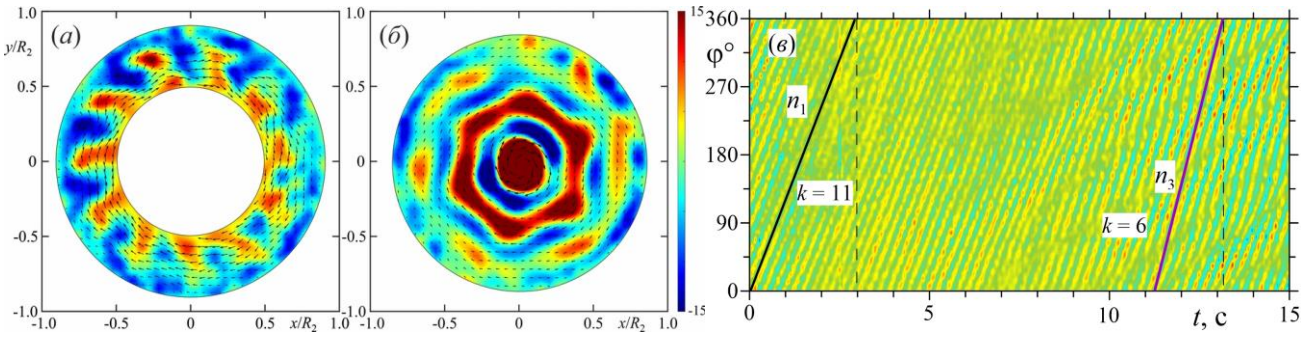


Рисунок 5.21 – Осреднённые по периоду колебаний $T_o = 2\pi / \Omega$ поля скорости в сечениях $z / R_2 = 0.10$ и 0.56 (*а*, *б*) при частоте $n = 1.1$ в моменты времени $t = 3$ и $t = 13$ секунд, соответствующие спектрограммам на рис. 5.15; направление вращения полости по часовой стрелке. Справа (*в*) показана временная диаграмма распределения осреднённой завихренности вдоль окружности радиуса $r / R_2 = 0.75$ в сечении на фрагменте (*б*); начало отсчёта времени согласовано с рис. 5.15; угол φ согласован с направлением глобального вращения

Первоначально рассмотрим динамику жидкости в Т-режиме. На рис. 5.21*а*, *б* показаны осреднённые поля скорости для частоты $n = 1.1$ в моменты времени $t = 3$ и $t = 13$с. Видно, что колебания ядра приводят к возникновению глобальной опережающей циркуляции жидкости, при этом в поле скорости ярко проявляются квазидвумерные азимутально-периодические структуры. Так, в момент времени $t = 3$с проявляется структура с азимутальным волновым числом $k_T = 11$. Эксперименты показывают, что количество валов не меняется с расстоянием вдоль оси вращения z / R_2. Подобная структура осреднённого течения характерна вплоть до порога возникновения внешней пары субгармоник n_3, n_4. Развитие второго каскада принципиально меняет осреднённую динамику системы: коротковолновые возмущения сменяются длинноволновыми с азимутальным волновым числом $k_T = 6$. На расстоянии $r / R_2 \sim 0.5$ формируется гексагональная

структура, дрейфующая в направлении колебаний ядра. Во внутренней части жидкого столба ($r / R_2 < 0.2$) жидкость совершает наиболее быстрое циклоническое дифференциальное вращение.

На рис. 5.21*в* показана временная зависимость осреднённой осевой завихренности $<\xi_z>$ в сечении $z / R_2 = 0.56$, которая представляет собой скользящее среднее. Здесь и далее время между парой последовательных окон составляет $0.125T_o$, чего достаточно для хорошего разрешения обсуждаемых эффектов. Диаграмма представляет собой систему наклонных линий, вдоль которых $<\xi_z>$ является постоянной. Хорошо видно, что с течением времени наклон линий постепенно меняется, как и волновое число от $k_T = 11$ до $k_T = 6$. Несмотря на это, при $t > 10$ с в диапазоне $\varphi = 0 - 90°$ можно различить одновременное существование обоих режимов. Из графика можно оценить фазовую скорость дрейфа структуры как

$$\upsilon_\varphi = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_{rot}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t\Omega_{rot}}. \tag{5.6}$$

Далее рассчитаем частоту волн как

$$\frac{\omega}{\Omega_{rot}} = \upsilon_\varphi k. \tag{5.7}$$

Анализ показывает, что значения частот ω_1 / Ω_{rot} и ω_3 / Ω_{rot} полностью согласуются с низкочастотными субгармониками триадного резонанса n_1 и n_3. По всей видимости, вклад верхних гармоник n_2 и n_4 (которые образуют пары с n_1 и n_3) существенно слабее и не проявляет себя при осреднении. Таким образом, развитие неустойчивости триадного резонанса приводит к генерации системы осреднённых вихрей, частота которых соответствует самой нижней субгармонике в спектре.

Теперь уделим внимание рассмотрению осреднённой надкритической динамики жидкости в режиме параметрических и низкочастотных колебаний жидкости (P- и L-режимы, соответственно). На рис. 5.22*а*, *б* показано осреднённое поле скорости в экстремуме P-режима при частоте $n = 1.20$ и числе Рейнольдса

$\mathrm{Re}_b = 1700$, т.е. над порогом развития первой триады Т-режима (см. рис. 5.19). Вставка на фрагменте *а* даёт информацию о распределении безразмерной угловой скорости жидкости $\Delta\Omega R_1\delta / \Omega_{rot} b^2$ до порога неустойчивости. Видно, что наиболее быстрое дифференциальное вращение жидкости возбуждается в центральной части вблизи оси вращения. В то же время неустойчивость в виде системы азимутально-периодических вихрей развивается на расстоянии $r / R_2 \sim 0.75$, т.е. в области практически нулевого дифференциального вращения. Это указывает на тот факт, что неустойчивость не связана со сдвиговыми течениями, а является нелинейным откликом на развитие каскадных процессов в сферическом слое. На рис. 5.22*б* показано скользящее среднее осевой завихренности $<\xi_z>$ в проекции на ось вращения на расстоянии $r / R_2 = 0.75$. Последнее представляет совокупность двух движений: коротковолновое с азимутальным волновым числом $k_P = 15$ и длинноволновое с $k_L = 2$. Визуально рисунок напоминает паттерн на змеиной коже в виде чередующихся ячеек разного оттенка. Анализ коротковолновой структуры показывает, что с течением времени завихренности разного знака периодически чередуются, практически не испытывая азимутального дрейфа. Из рисунка следует, что частота чередования составляет $\omega / \Omega_{rot} \approx 0.6$, что согласуется с частотой параметрических колебаний жидкости с частотой n_5, n_6 в спектре (рис. 5.16). Поскольку при данном Re_b система уже находится вблизи порога возникновения низкочастотной составляющей (L-режим), медленное азимутальное движение эллипса с частотой $\omega / \Omega_{rot} \approx 0.16$ соответствует n_7.

Далее сфокусируемся на случае высоких частот, когда вклад инерционных волн в осреднённое течение меньше ($n > 1.6$, L-режим в чистом виде). В этом случае докритический профиль скорости напоминает классический столбик Тейлора: внутри тангенциального цилиндра жидкость совершает практически твердотельное опережающее вращение, в то время как за его пределами дифференциальное вращение отсутствует. Исключение составляет относительно слабый локальный минимум дифференциального вращения при $r / R_2 \sim 0.25$, наличие которого свя-

зано с инерционными волнами. Повышение амплитуды колебаний ядра сразу приводит к пороговому возникновению медленной длинноволновой структуры, размер которой определяется положением сдвиговой зоны (рис. 5.22*в*). При увеличении частоты воздействия азимутально волновое число k_L в пороге неустойчивости растёт дискретным образом. Таким образом, неустойчивость по сценарию триадных взаимодействий индуцирует сильный нелинейный отклик, который выражается в генерации относительно медленных циклонических вихрей. Осреднённые по основной частоте структуры являются своеобразным отпечатком триадного резонанса.

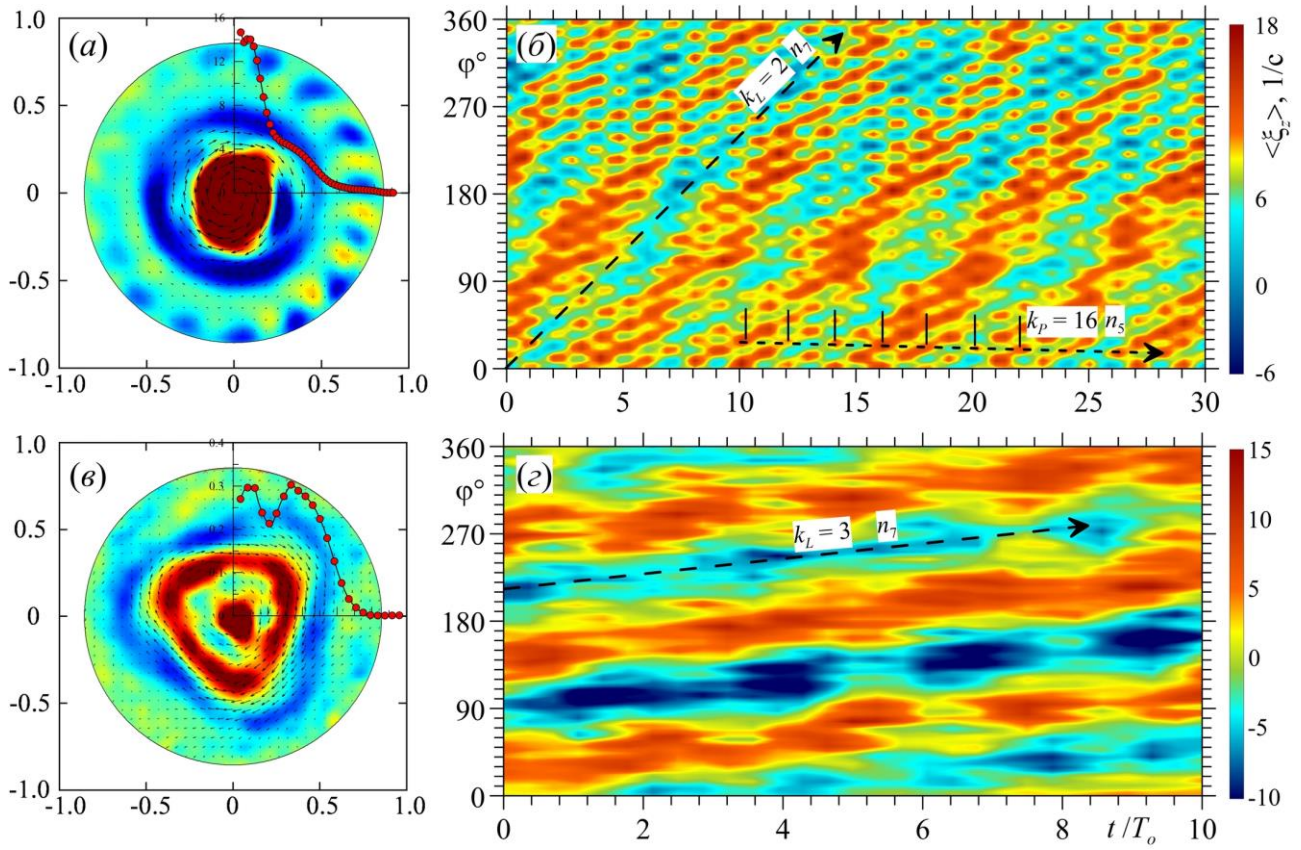


Рисунок 5.22 – Осреднённые по периоду T_o поля скорости (левый столбец) и соответствующее скользящее среднее осевой завихренности (правый столбец) при $n = 1.20$ и $\mathrm{Re}_b = 1700$ (*а*, *б*); $n = 1.70$ и $\mathrm{Re}_b = 7630$ (*в*, *г*). В левом столбце также показан профиль скорости $\Delta\Omega R_1\delta / \Omega_{rot} b^2$ докритического осреднённого течения в линейном режиме (Раздел 4.1.4)

Наконец, на рис. 5.23 показано влияние числа Рейнольдса Re_b на динамику осреднённых структур при фиксированной частоте $n=1.50$. Видно, что в пороге неустойчивости возникает параметрический режим с азимутальным волновым числом $k_P=2$ в виде эллипса (рис. 5.23*а*). Вихри с циклонической (красный цвет) и антициклонической (синий цвет) закруткой периодически сменяют друг друга без заметного азимутального смещения. Это эквивалентно возбуждению стоячей волны с частотой $\omega/\Omega_{rot}=n/2$. Данное значение легко получить из рисунка, подсчитав, например, число синих пятен за время $\Delta t=50T_o$. Визуально колебания воспринимаются как периодические изменения ориентации эллипса на $\Delta\varphi=90°$.

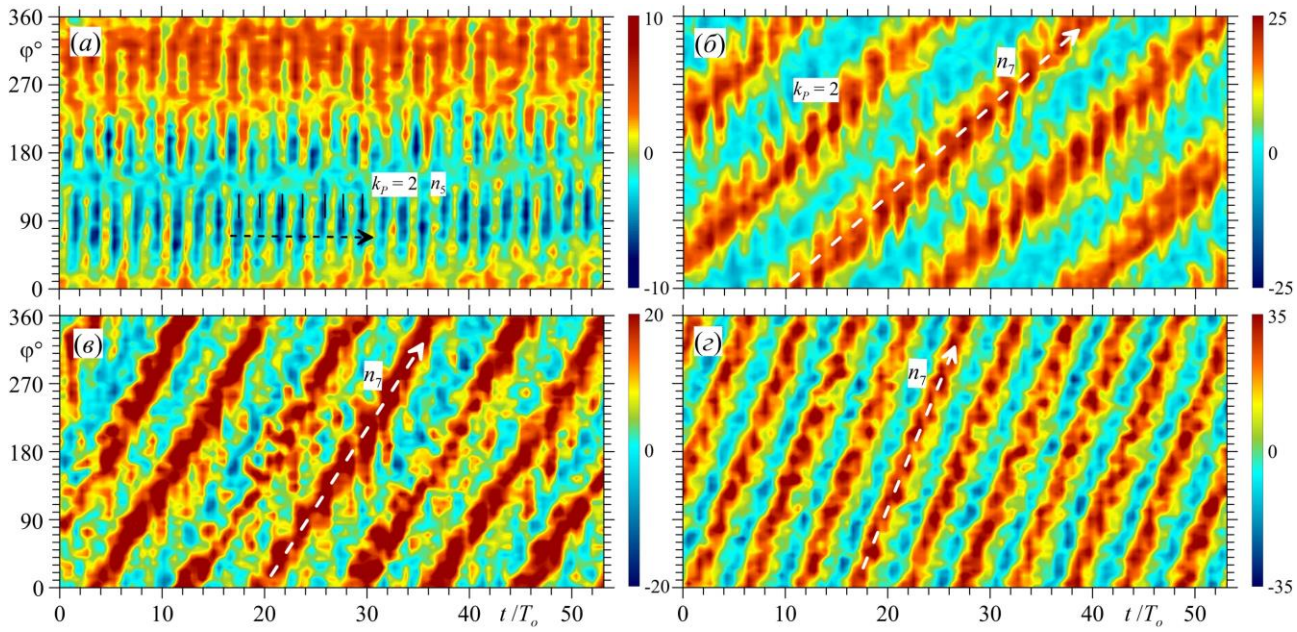


Рисунок 5.23 – Скользящее среднее (по периоду T_o) осевой завихренности $<\xi_z>$ (c^{-1}) при частоте $n=1.50$ и следующих параметрах: (*а*) число Рейнольдса $\mathrm{Re}_b=1700$, вдоль окружности $r/R_2=0.5$; (*б*) $\mathrm{Re}_b=4200$, $r/R_2=0.7$; (*в*) $\mathrm{Re}_b=5500$, $r/R_2=0.7$; (*г*) $\mathrm{Re}_b=8300$, $r/R_2=0.8$. Число Экмана фиксировано и составляет $\mathrm{E}=1.58\cdot10^{-4}$

С увеличением числа Рейнольдса на фоне параметрических колебаний возникает осреднённый азимутальный дрейф (рис. 5.23*б*). Эллипс вытягивается в радиальном направлении и совершает медленное циклоническое вращение с частотой $\omega/\Omega_{rot}\approx0.09$, что хорошо согласуется с частотой n_7 в спектре на рис. 5.16.

Если большая полуось основного эллипса имеет размер $r / R_2 \sim 0.9$, то параметрические колебания сосредоточены внутри него. Дальнейшее увеличение Re_b приводит только к росту скорости азимутального дрейфа без изменения волнового числа. Оценки показывают, что для рис. 5.23*в* частота волны составляет $\omega / \Omega_{rot} \approx 0.18$, а для Рис. 5.23*г* уже $\omega / \Omega_{rot} \approx 0.3$. Эти значения также соответствуют тенденции роста частоты n_7 на рис. 5.16. Полученный результат указывает на то, что волны, рождаемые на азимутальном потоке, начинают дрейфовать вместе с ним. Стоит отметить, из-за наличия ярко выраженной низкочастотной субгармоники возмущения на более высоких частотах полностью затираются после проведения процедуры осреднения.

5.3.1. Неустойчивость слоя Стюартсона

Перейдём к детальному изучению надкритических структур, рождаемых в L-режиме. Первоначально рассмотрим ситуацию, когда частота колебаний ядра велика ($n \geq 2$). При плавном повышении числа Рейнольдса Re_b увеличивается скорость дифференциального вращения жидкости, в результате чего осесимметричная граница столба Тейлора пороговым образом принимает форму правильного многоугольника (рис. 5.24). Визуальные наблюдения за структурой течения сбоку показывают, что в целом столбик сохраняет двумерность. Многоугольник вращается относительно полости со скоростью $\Delta\Omega_L$, причем значение скорости не совпадает с интенсивностью дифференциального вращения жидкости на границе геострофического цилиндра $r / R_2 \sim 0.5$. При последующем увеличении Re_b длина волны на границе столба увеличивается (волновое число k_L уменьшается). На рис. 5.24 представлены результаты визуализации структуры осреднённого течения: изображение с камеры (верхний ряд) и PIV-обработка (нижний ряд). Интересно отметить, что частицы визуализатора со временем практически равномерно распределяются внутри столбика Тейлора и на его сдвиговой границе, при этом во внешней части концентрация частиц существенно меньше. Подобным образом аккумулировались частицы визуализатора при исследовании устойчивости тече-

ния, возбуждаемого при опережающем дифференциальном вращении ядра во вращающейся цилиндрической полости [186]. Четко выраженная граница формируется спустя несколько минут после начала эксперимента ($\sim 3000T_o$). Это указывает на то, что, несмотря на развитие неустойчивости, движение во внешней области достаточно слабое. Это подтверждается соответствующими PIV-вычислениями осреднённого по периоду колебаний поля скорости (рис. 5.24, нижний ряд).

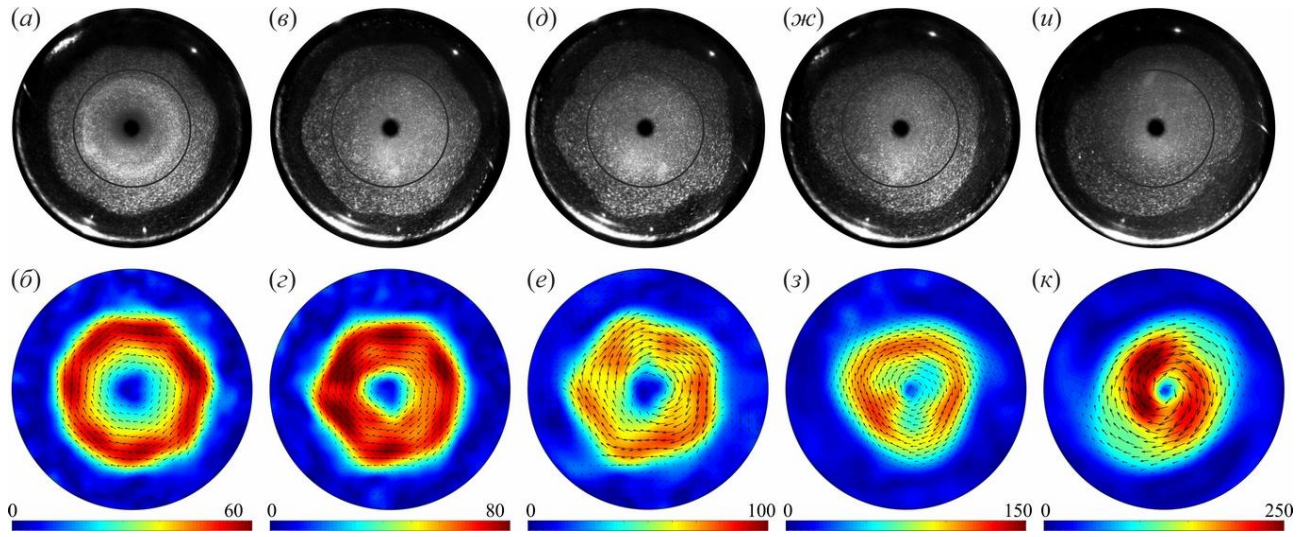


Рисунок 5.24 – Фотографии структуры надкритического азимутального течения (верхний ряд) при $\mathrm{E}=1.06\cdot10^{-4}$ и различных числах Рейнольдса: $\mathrm{Re}_b=3.12\cdot10^3$ (*а*); $3.91\cdot10^3$ (*в*); $5.56\cdot10^3$, $n=2$ (*д*); $6.49\cdot10^3$, $n=1.6$ (*ж*); $8.91\cdot10^3$, $n=1.55$ (*и*). Нижний ряд изображений демонстрирует осреднённые по периоду колебаний поля скорости при: $\mathrm{Re}_b=3.27\cdot10^3$, $n=2.1$ (*б*); $\mathrm{Re}_b=4.70\cdot10^3$, $n=2.0$, $E=1.06\cdot10^{-4}$ (*г*); $\mathrm{Re}_b=3.29\cdot10^3$, $n=2.0$ (*е*); $\mathrm{Re}_b=3.16\cdot10^3$, $n=1.7$ (*з*); $\mathrm{Re}_b=6.04\cdot10^3$, $n=1.5$, $E=2.20\cdot10^{-4}$ (*к*). Цветом показана величина скорости (мм/с).

При понижении числа Рейнольдса Re_b пороговые переходы происходят в обратном порядке, количество граней столбика Тейлора увеличивается до тех пор, пока течение снова не станет осесимметричным. Переходы между режимами с различными волновыми числами происходят с гистерезисом, что указывает на сильное нелинейное воздействие конечно-амплитудных переходов на структуру течений. Переход от волнового числа k_L к k_L+1 при понижении числа Рейнольд-

са происходит при меньшем значении Re_b, по сравнению с переходом от k_L+1 к k_L при повышении Re_b. Исключение составляет порог перехода к осесимметричному состоянию, значение которого хорошо согласуется с тем, что было получено при повышении Re_b.

На рис. 5.25*а* черными точками представлены пороги возникновения волновой неустойчивости границы столба Тейлора в зависимости от безразмерной частоты. Описанный сценарий развития неустойчивости при $\mathrm{E}=1.06\cdot10^{-4}$ проявляется в диапазоне $n=1.8-2.2$, где инерционные волны, непосредственно вносимые колебаниями ядра, отсутствуют, либо их вклад незначителен. В этом случае критическое значение числа Рейнольдса не зависит от n и принимает значение $\mathrm{Re}_b=\left(3.05\pm0.22\right)\cdot10^3$. При $n<1.8$ порог потери устойчивости осесимметричного течения сильно повышается, при этом неустойчивости столба Тейлора предшествует развитие системы азимутально-периодических вихревых структур во внешней области (красные точки). Как будет показано далее, это обусловлено влиянием принципиально другого механизма неустойчивости, связанного с распространением инерционных волн в T- и P-режимах.

На рис. 5.25*б* на плоскости параметров (n,Re_b) представлена карта режимов неосесимметричного течения при повышении числа Рейнольдса. Можно отметить, что для серии переходов $k_{St}=0\to7$ (кресты), $7\to6$ (ромбики) и $6\to5$ (звездочки) в диапазоне частот $n>1.8$ наблюдается общая тенденция: пороги практически не зависят от безразмерной частоты. При понижении n границы существования различных режимов симметрично смещаются в область более высоких Re_b. При этом интересная ситуация складывается вблизи порога устойчивости осесимметричного течения при $n<1.8$. Как уже было отмечено ранее, доселе волновой неустойчивости границы столба Тейлора во внешней части развивается система вихревых структур с очень короткой длиной волны (красные круги на рис. 5.25*б*; аналогичная визуализация на рис. 5.22*а*). При дальнейшем незначительном повышении Re_b вместо режима с волновым числом $k_L=6$ в локации столба Тейлора возникают длинноволновые структуры с $k_L=3$ (рис. 5.24*ж, з*). В

связи с этим на карте режимов течения (рис. 5.25*б*) экспериментальные точки для $k_L = 3$ и 6 соответствуют границе одного порогового перехода. Можно предположить, что такая трансформация структуры течения связана с бифуркацией удвоения периода. Стоит отметить, что длинноволновые структуры сильно подавляют коротковолновые, которые визуально во внешней области никак не проявляются. Исключением является частота $n = 1.5$, при которой уже в пороге устойчивости отчетливо различаются оба типа структур. Можно предположить, что подобная связь на карте режимов течения существует и между волновыми числами $k_L = 4$ и 2 (рис. 5.24*и, к*). Однако в представленной работе экспериментальные точки в диапазоне частот $n = 1.6 - 1.8$ при больших числах Рейнольдса ($\mathrm{Re}_b > 7 \cdot 10^3$) не были получены.

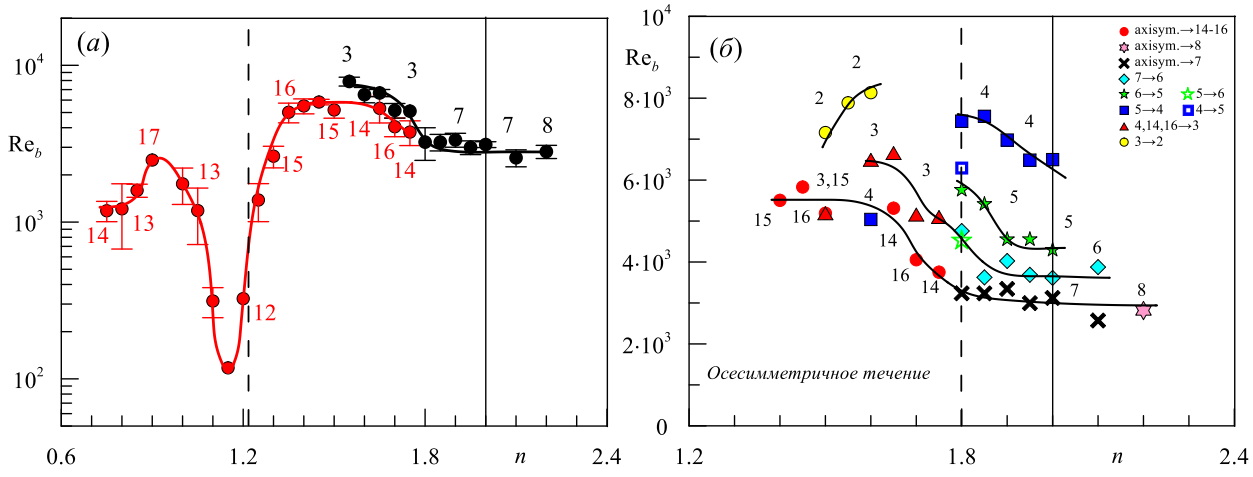


Рисунок 5.25 – (*а*) Критические значения числа Рейнольдса Re_b для потери устойчивости осесимметричного осреднённого течения при $\mathrm{E} = 1.06 \cdot 10^{-4}$. Черными точками обозначены пороги, связанные с неустойчивостью столба Тейлора (рис. 5.24), красными точками – неустойчивость, связанная с появлением коротковолновых структур на периферии цилиндрического радиуса (рис. 5.28). Числами указаны волновые числа в пороге. (*б*) Пороговые переходы между различными режимами неосесимметричного течения при повышении числа Рейнольдса Re_b в зависимости от безразмерной частоты

5.3.1.1. Фазовая скорость

Эксперименты показывают, что направление распространения волны циклоническое, причем фазовая скорость $\Delta\Omega_L$ оказывается существенно меньше скорости жидкости на границе тангенциального цилиндра при $r / R_2 \sim 0.5$. Таким образом, поведение волны сильно напоминает сдвиговую неустойчивость слоёв Стюартсона, которая развивается в отсутствие колебаний ядра, но при наличии его дифференциального вращения [73, 186, 188, 217, 218]. Повышение амплитуды b приводит к монотонному увеличению фазовой скорости $\Delta\Omega_L / \Omega_{rot}$ до тех пор, пока не произойдет переход к структуре с другим волновым числом k_L (рис. 5.26*а*). Переход от одного волнового числа к другому сопровождается скачкообразным изменением значения $\Delta\Omega_L / \Omega_{rot}$, причем переход к меньшему волновому числу сопровождается понижением $\Delta\Omega_L / \Omega_{rot}$. Наоборот, при понижении амплитуды колебаний и соответствующем переходе к большему волновому числу фазовая скорость волны повышается. В пороговых переходах при повышении и понижении амплитуды b наблюдается гистерезис, тем не менее, значения $\Delta\Omega_L / \Omega_{rot}$ при фиксированном k_L (закрашенные и пустые символы на рис. 5.26*а*) согласуются.

Результаты измерений, выполненных при различных числах Экмана E и волновых числах k_{St}, хорошо согласуются между собой, если в качестве единицы измерения фазовой скорости волны выбрать величину $\Omega_{rot} k_L$. Обезразмеренная таким способом скорость возрастает практически линейно с параметром $\sim \left(b^2 / R_1^2\right)^{0.98\pm0.08}$ (рис. 5.26*б*). Тот факт, что практически все экспериментальные результаты, полученные в экспериментах с жидкостями разной вязкости, согласуются между собой, свидетельствует, что безразмерная фазовая скорость волны практически не зависит ни от числа Экмана, ни от волнового числа и полностью определяется скоростью дифференциального вращения жидкости ($\Delta\Omega \sim b^2$). Принимая во внимание визуальную аналогию надкритических структур с классической неустойчивостью сдвиговых слоев во вращающейся жидкости [186, 188,

217], можно качественно сравнить фазовые скорости в двух различных формулировках, используя классическое число Россби $\mathrm{Ro} = \Delta\Omega_C / \Omega_{rot}$ (безразмерная скорость дифференциального вращения ядра) вместо амплитуды колебаний b^2 / R_1^2. Из [186] следует, что все результаты экспериментов с жидкостями различной вязкости и волновых чисел хорошо согласуются с законом $\Delta\Omega_L / \left(\Omega_{rot} k_L\right) \sim \mathrm{Ro}^{1.2}$ (рис. 5.26*б*, черная сплошная линия). Таким образом, фазовая скорость волны определяется скоростью дифференциального вращения, что согласуется с результатами настоящих экспериментов.

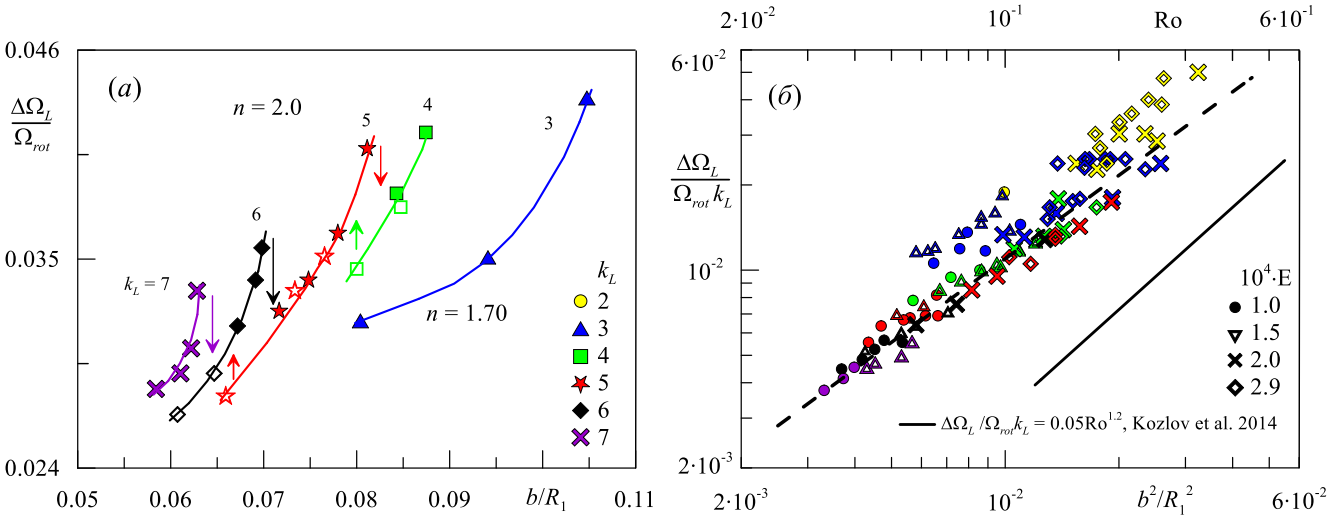


Рисунок 5.26 – (*а*) Зависимость фазовой скорости осреднённых структур от амплитуды колебаний ядра при $\mathrm{E} = 1.06 \cdot 10^{-4}$; закрашенные и пустые символы соответствуют экспериментальным точкам, полученным при повышении и понижении b; вертикальными стрелками схематично показаны конечно-амплитудные переходы между волновыми числами при повышении b. (*б*) Безразмерная фазовая скорость осреднённых структур в зависимости от параметра b^2 / R_1^2 при различных значениях числа Экмана и частотах колебаний ($n = 1.6 - 2.1$); цвета символов соответствуют волновым числам на фрагменте (*а*); штриховой линией обозначена линейная зависимость

В некоторых экспериментах наблюдается отклонение от общего тренда для волновых чисел $k_L = 2, 3$, что объясняется сильным нелинейным взаимодействием среднего течения с волновой модой. Так, например, в Разделе 5.1.1.1 [A10, A16] было показано, что развитие неустойчивости приводит к нарушению линейной зависимости осреднённой скорости потока от квадрата амплитуды возмущений,

вносимых ядром. Визуальные наблюдения за структурой течения показывают, что в этом случае фазовая скорость волны может быть нестабильной, кроме того, возможны ситуации нерегулярных переходов между волновыми числами $k_L = 2$ и 3.

5.3.1.2. Пороги неустойчивости

Эксперименты показывают, что критические значения чисел Рейнольдса, при которых наблюдается смена волновых картин, зависят от числа Экмана. Так, на рис. 5.27*а* представлена карта режимов течений при частоте колебаний $n = 2$. Порог устойчивости осесимметричного течения (черные крестики) хорошо описывается зависимостью $\mathrm{Re}_b^* \sim \mathrm{E}^{-1/2}$. Принимая во внимание, что $\mathrm{Re}_b = b^2 / R_1\delta\mathrm{E} \sim \Delta\Omega / \Omega_{rot}\mathrm{E}$, для удобства можно ввести вибрационный аналог числа Россби:

$$\mathrm{Ro}_b = \frac{b^2}{R_1\delta} \sim \frac{\Delta\Omega}{\Omega_{rot}}. \qquad (5.8)$$

Тогда порог неустойчивости может быть описан следующим законом: $\mathrm{Ro}_b^* \sim \mathrm{E}^{1/2}$ (рис. 5.27*б*, черные крестики). Этот результат позволяет сравнить настоящие эксперименты со случаем, когда внутреннее ядро не колеблется, но совершает дифференциальное вращение со скоростью $\mathrm{Ro} = \Delta\Omega_C / \Omega_{rot}$. В последнем случае основное течение представляет собой классический столб Тейлора, граница которого образована сдвиговыми слоями Стюартсона [75, 77]. В пионерской работе Буссе [216] было теоретически показано, что в пределе малых чисел Россби порог устойчивости осесимметричного сдвигового течения может быть описан следующим выражением $\mathrm{Ro}^* \sim \mathrm{E}^{3/4}$. Этот результат очень хорошо согласуется с экспериментами [76], где изучалась устойчивость слоев Стюартсона, заключенных между двумя вращающимися дисками одного размера, расположенными у торцов цилиндрической полости, $\left|\mathrm{Ro}^*\right| \sim \mathrm{E}^{0.72}$. Можно отметить, что неустойчивость возникала как при опережающем ($\mathrm{Ro} > 0$), так и отстающем ($\mathrm{Ro} < 0$) дифференциальном вращении дисков. В экспериментах [73] диск располагался в центральной части цилиндрической полости, при этом отличие в знаке числа Россби не влияло на

порог возникновения неосесимметричного течения (в обоих случаях $\left|\mathrm{Ro}^{*}\right| \sim \mathrm{E}^{0.6}$), но сильно сказывалось на волновых числах $k_L = 2, 3$. Позднее в [188] была представлена квазигеострофическая модель неустойчивости сдвиговых слоев, а также экспериментальные результаты по исследованию устойчивости течения во вращающемся сфероиде. В кювете неравномерной глубины (сферический слой с аспектным соотношением $\eta = 1/3$) неустойчивость столбчатого течения возможна в виде волны Россби. При $\mathrm{Ro} > 0$ критическое число Россби изменяется с числом Экмана по закону $\mathrm{Ro}^{*} \sim \mathrm{E}^{0.6}$ (рис. 5.27*б*, черные точки). Интересно, этот результат количественно совпадает с [73]. В [217] экспериментально и численно исследовалась устойчивость слоев Стюартсона в относительно узком сферическом слое с аспектным соотношением $\eta = 0.67$ при $\mathrm{Ro} > 0$. В диапазоне чисел Экмана $\mathrm{E} = \left(2 \div 8\right) \cdot 10^{-4}$ порог устойчивости определялся как $\mathrm{Ro}^{*} \sim \mathrm{E}^{0.7}$ (рис. 5.27*б*, синие плюсы), что хорошо согласуется с результатами исследования устойчивости течения при дифференциальном вращении сферы в цилиндрической полости ($\mathrm{E} = 3.3 \cdot 10^{-5} \div 5 \cdot 10^{-4}$, $R_1 / R_2 = 0.68$, рис. 5.27*б*, черные ромбики) [186].

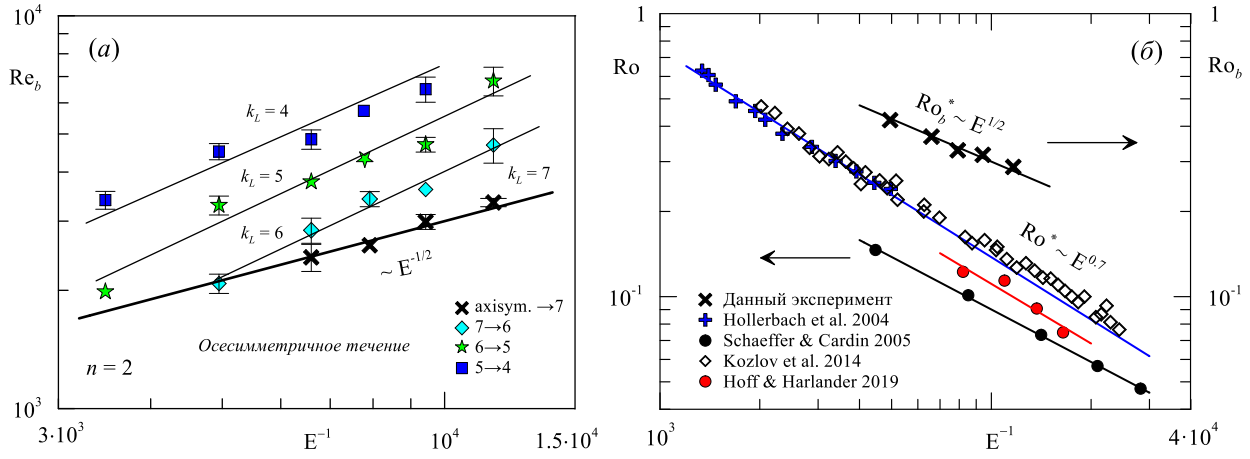


Рисунок 5.27 – Пороговые переходы между различными режимами неосесимметричного течения при повышении числа Рейнольдса Re_b в зависимости от числа Экмана при $n = 2$

Отдельно следует отметить работу [218], в которой основной акцент сделан на выяснение различия между положительными и отрицательными числами Рос-

сби во вращающемся сферическом слое с аспектным соотношением $R_1 / R_2 = 1/3$. Эксперименты показали, что при опережающем движении слой Стюартсона становится неустойчивым при меньших значениях $|\mathrm{Ro}|$, чем при отстающем. При $\mathrm{Ro} < 0$ неустойчивость захватывается вблизи тангенциального цилиндра, при этом $|\mathrm{Ro}^*| \sim \mathrm{E}^{0.55}$. В случае $\mathrm{Ro} > 0$ неустойчивость ассоциируется со спиральными волнами, заполняющими весь слой. Спиральные волны распространяются в направлении движения жидкости в сдвиговом слое, причём $\mathrm{Ro}^* \sim \mathrm{E}^{0.7}$ (рис. 5.27*б*, красные точки). В [79] показано, что знак числа Россби играет важную роль, когда толщина сдвиговых слоев резко изменяется в радиальном направлении (случай диска на оси вращения или сферического слоя). Если бета-эффект отсутствует, то критическое число Россби изменяется с числом Экмана по закону $\mathrm{Ro}^* \sim \mathrm{E}^{3/4}$ и неустойчивость понимается как сдвиговая, что полностью согласуется с теорией Буссе [216]. В сферическом слое $|\mathrm{Ro}^*| \sim \mathrm{E}^{0.45}$ при $\mathrm{Ro} < 0$ и $\mathrm{Ro}^* \sim \mathrm{E}^{0.6}$ при $\mathrm{Ro} > 0$.

В представленном исследовании рассматривается случай только $\mathrm{Ro} > 0$ при наличии бета-эффекта. В то же время механизм генерации дифференциального вращения жидкости качественно отличается. Ядро не вращается относительно полости и осциллирует, поэтому источником азимутального течения являются осреднённые вязкие напряжения на поверхности ядра. В свою очередь, сила Кориолиса обеспечивает двумерность этого течения. На первый взгляд структура течения практически эквивалентна классическому случаю, тем не менее, полученная зависимость Ro_b^* от числа Экмана позволяет сделать вывод о том, что кривизна поверхности (бета-эффект) играет существенную роль в процессе диссипации неустойчивости [188]. В большинстве упомянутых выше работа [79, 217, 218] при положительных числах Россби, $\mathrm{Ro}^* \sim \mathrm{E}^{0.7}$, в то время как в настоящей работе $\mathrm{Ro}_b^* \sim \mathrm{E}^{1/2}$. Принимая во внимание схожесть профилей скорости (рис. 4.15*в*) и динамику надкритических структур, можно сделать вывод, что мы имеем дело всё же со сдвиговой неустойчивостью. В то же время нужно понимать, что при вибрационном воздействии механизм обмена моментом импульса внутри столбика

Тейлора отличается. Сравнение неустойчивостей сдвигового течения в постановках, когда ядро только совершает дифференциальное вращение, либо осциллирует с частотой $n=-1$ ($\mathrm{Ro}<0$) и одновременно совершает дифференциальное вращение, дано в Разделе 5.1.1 [186, A10]. Качественное отличие вибрационного случая заключается в снижении критических значений Ro^* более чем на порядок, что указывает на существенное отличие в процессе обмена моментом импульса в сдвиговых слоях. Поскольку ядро не совершает дифференциальное вращение, прямое сравнение значений Ro^* невозможно.

Стоит отметить, что переходы между волновыми числами $k_L \to k_L - 1$ происходят по закону $\mathrm{Re}_b \sim \mathrm{E}^{-1}$ (рис. 5.27*а*). Это означает, что волновая картина при фиксированной частоте колебаний не зависит от числа Экмана и определяются только числом Россби $\mathrm{Ro}_b^* = const$, что хорошо согласуется с результатами, полученными в отсутствие колебаний [186, 217].

5.3.2. Осреднённые структуры в P- и T-режимах

Теперь рассмотрим динамику осреднённых надкритических структур в P- и T-режимах. В обоих случаях структуры представляют собой систему вытянутых вдоль оси вращения валов, локализованных на расстоянии $0.6 < r / R_2 < 0.8$ (рис. 5.28*а*, *б*). При $r / R_2 < 0.6$, где скорость дифференциального вращения жидкости существенно выше, чем на периферии, осреднённое течение может сохранять осесимметричную форму, всё зависит от безразмерной частоты n и числа Рейнольдса Re_b. При визуальном наблюдении за движением взвешенных в жидкости светорассеивающих частиц структура течения сильно напоминает вращающееся относительно полости зубчатое колесо (рис. 5.28*а*). Отличие параметрического режима состоит в том, что завихренность в осреднённых структурах меняется на противоположную с частотой $n/2$, при этом сама структура практически не совершает азимутального дрейфа. Отдельно следует выделить диапазон частот $n > 1.2$, где структуры в виде зубчатого колеса во внешней области предшествуют сдвиговой неустойчивости границы тангенциального цилиндра в виде эллипса

или треугольника, а иногда могут сосуществовать одновременно. При повышении числа Экмана коротковолновая неустойчивость подавляется вязкостью, и уже при $\mathrm{E} > 3\cdot10^{-4}$ в экспериментах не наблюдается.

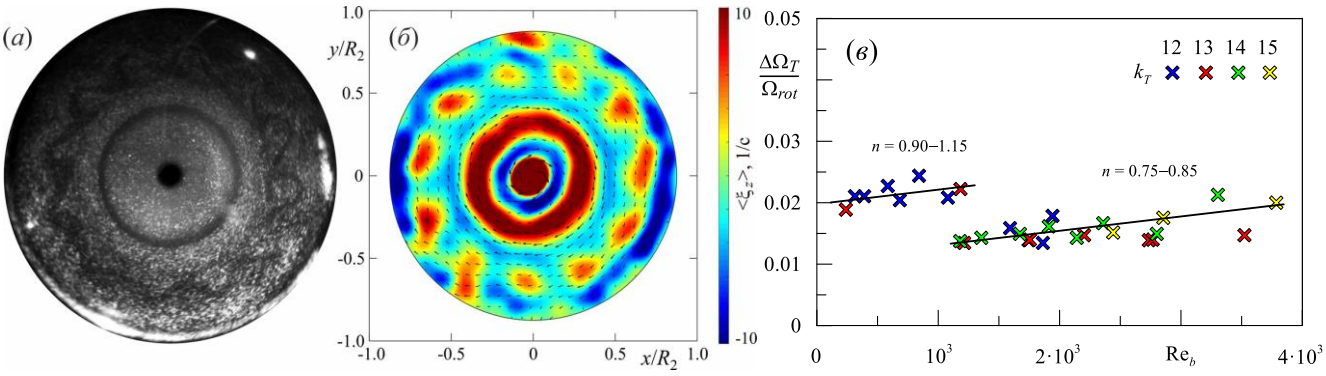


Рисунок 5.28 – Структура осреднённого надкритического течения при частоте $n=1.1$: (*а*) фотография при $E=1.06\cdot10^{-4}$ и $\mathrm{Re}_b=3.8\cdot10^2$; (*б*) осреднённое по периоду колебаний поле скорости при $E=1.87\cdot10^{-4}$ и $\mathrm{Re}_b=5.85\cdot10^2$; (*в*) зависимость фазовой скорости осреднённых структур от амплитуды колебаний ядра при различных значениях безразмерной частоты колебаний и числах Экмана $E=\left(1.06-1.52\right)\cdot10^{-4}$.

Пороги возникновения структур отмечены на рис. 5.25*а* красными точками. Видно, что критические значения Re_b^* немонотонно меняются с безразмерной частотой, при этом диапазон данных характеризуется очень широким разбросом от 10^2 до $5\cdot10^3$. Наименьшее значение числа Рейнольдса достигается при $n=1.15$, где кинетическая энергия пульсационного течения принимает максимальное значение (рис. 4.8). Именно здесь возникают наиболее благоприятные условия для возникновения неустойчивости, в результате чего пороговое значение Re_b^* сильно понижается.

Фазовая скорость системы валов в Т-режиме монотонно увеличивается с амплитудой вибраций (рис. 5.28*в*). Важно отметить, что валы распространяются относительно полости существенно медленнее, чем волна на границе тангенциального цилиндра. В то же время экспериментальные точки, полученные при различных частотах *n*, расслаиваются на две части. Наиболее быстрыми оказываются

структуры в диапазоне частот $n = 0.90 - 1.15$, а более медленными при $n = 0.75 - 0.85$. Интересно, что одни и те же волновые числа $k_T = 12$ и 13 присутствуют как на нижней, так и на верхней кривой. По всей видимости, скачок обусловлен влиянием дифференциального вращения жидкости, скорость которого определяется числом Рейнольдса.

Именно неустойчивость триадного резонанса во внешней области ответственна за возникновение структур, показанных на рис. 5.28*a*. На это указывает как подобие пороговых кривых (рис. 5.19 и рис. 5.25*a*), так и сравнение с волновыми числами субгармоник. Значение k_T по порядку величины соответствует волновому числу субгармоник триадного резонанса (рис. 5.18). Аналогичная ситуация наблюдалась как в цилиндрической полости (Глава 2), так и в кольцевом слое жидкости (Глава 3). Таким образом, неустойчивость по сценарию триадных взаимодействий индуцирует сильный нелинейный отклик, который выражается в генерации крупномасштабных циклонических вихрей. Можно сказать, что осреднённые структуры являются своеобразным отпечатком триадного резонанса.

Неустойчивость по сценарию триадных взаимодействий достаточно часто наблюдается в виде субгармонической неустойчивости волновых аттракторов в стратифицированной или вращающейся жидкости [25, 26, 28, 117, 200]. В контексте обсуждения результатов можно выделить работы, связанные со строго параметрическим откликом системы (P-режим). Зачастую частоты вторичных волн не совсем равны половине частоты вынуждающего воздействия из-за диссипации энергии при наличии вязкости и расщепления частот вторичных волн по обе стороны от $n/2$. Параметрическая субгармоническая неустойчивость была подробно изучена для внутренних гравитационных волн в [249–251]. Встряхивание стратифицированной по плотности жидкости приводило к параметрическому резонансу внутренних волн и переходу к турбулентности. Ввиду сходства постановки данной задачи с прецессионными течениями во вращающихся сферических полостях, отметим серию работ [34, 35, 209]. Так, численные результаты в ретроградно прецессирующей сфере [209] показали, что конические инерционные волны, рожденные вблизи критических широт, сами по себе могут выступать в роли сильного

дестабилизирующего фактора. Свободные сдвиговые слои могут связывать между собой две свободные инерционные моды сферической полости параметрическим образом, рождая две бегущие в противоположных направлениях неосесимметричные моды. В настоящих экспериментах механизм формирования осреднённых азимутально-периодических структур является подобным. Также стоит отметить работу [215], в которой рассматривался случай эллиптической неустойчивости во вращающейся жидкости. Вынуждающее воздействие вводилось посредством либраций полости с частотой $n > 2$, т.е. инерционные волны непосредственно не возбуждались. Тем не менее, наблюдалась последовательность субгармонических триадных резонансов между инерционными модами на половине частоты вынуждающего воздействия и основной частоты потока, за которой следовали дополнительные энергетические каскады между доминирующими модами и другими инерционными модами эллипсоида.

Важно провести сравнение результатов, полученных в нелинейном режиме при частоте $n = -1$ (Раздел 5.1). Напомним, что за развитие неустойчивости ответственна форма осреднённого профиля скорости, а именно наличие точек перегиба (рис. 4.20). Так, в сферическом слое одновременно развивались три вихревые системы, расположенные на различных расстояниях от оси вращения: ≈ 0.18, 0.68 и $0.79R_2$ (диапазон чисел Экмана $\mathrm{E} = 3\cdot10^{-5} - 3\cdot10^{-4}$). Несмотря на то, что колебания ядра генерировали преимущественно отстающее дифференциальное вращение жидкости, направления распространения вихревых систем отличались. Внутренняя и промежуточная вихревые системы являются отстающими, в то время как внешняя вихревая система – опережающая [A15]. Именно последний тип неустойчивости (рис. 5.2*ж–и*) представляет интерес для сравнения, поскольку визуально напоминает структуры по типу зубчатого колеса при положительном воздействии. В обоих случаях совпадает направление глобальной циркуляции и локализация за пределами тангенциального цилиндра. Тем не менее, при противоположных по знаку безразмерных частотах пороги возникновения структур, а также их надкритическая динамика сильно отличаются. Так, при $n = -1$ и $\mathrm{E} = 1.01\cdot10^{-4}$ неустойчивость с волновым числом $k_O = 11$ возникала при

$\mathrm{Re}_b = 1.21 \cdot 10^3$. Скорость вращения валов зависела не только от волнового числа, но и от числа Экмана. Из анализа экспериментальных данных было получено эмпирическое выражение для фазовой скорости $\Delta\Omega_O / \Omega_{rot} \sim \left(\mathrm{Re}_b \, \mathrm{E}^{1/2}\right)^{-3/2} / k_O^2$. При частоте колебаний $n = 1$ и $\mathrm{E} = 1.06 \cdot 10^{-4}$ порог неустойчивости находится выше $\mathrm{Re}_b = 1.75 \cdot 10^3$ (рис. 5.25*а*). При этом эксперименты не позволяют сделать явный вывод о зависимости угловой скорости вращения системы валов от волнового числа (рис. 5.28*в*). Как было отмечено ранее, одни и те же волновые числа могут присутствовать на одной кривой. Таким образом, можно заключить, что направление воздействия играет важную роль в надкритической динамике жидкости и также влияет на пороги неустойчивости.

5.3.3. Дисперсионные соотношения

На рис. 5.29 показаны дисперсионные соотношения, полученные для осреднённого по времени T_o азимутального течения. В пороге неустойчивости экспериментальные точки для разных частот воздействия *n* расслаиваются строго в соответствии с режимом пульсационного течения (рис. 5.19). Так, низкочастотная субгармоника в L-режиме (синие треугольники) может быть описана линейным законом $\omega / \Omega_{rot} \sim k_L$. Это означает, что при фиксированном числе Экмана E фазовая скорость волнового движения в пороге неустойчивости не зависит от волнового числа, $\upsilon_\varphi = \omega / \left(\Omega_{rot} k_L\right) = const$. Данный режим в некоторой степени напоминает медленный режим Россби, ранее наблюдавшийся в численных результатах [219] и экспериментах [47], где внутреннее ядро либо вращалось дифференциально. В отличие от волн Россби, где частота волны масштабируется как $\omega / \Omega_{rot} \sim 1/k$ [7, 188], в пороге неустойчивости частота волны возрастает с увеличением азимутального волнового числа.

P-режим (черные крестики) расслаивается на длинноволновую и коротковолновую части. В длинноволновой наблюдаются только структуры с $k_P = 2$. Эти волны всегда локализованы вблизи и внутри тангенциального цилиндра на рас-

стоянии $r / R_2 < 0.5$ и наблюдаются при частотах воздействия $n = 1.40$ и $n = 1.50$. Понижение частоты до $n = 1.30$ приводит к тому, что в пороге неустойчивости возбуждаются коротковолновые параметрические колебания во внешней области $r / R_2 > 0.5$ с $k_P = 14 - 16$. Волны, соответствующие нижней частоте триадного резонанса в Т-режиме (фиолетовые крестики), также расслаиваются вдоль оси абсцисс в зависимости от частоты n по принципу радиального расположения вдоль цилиндрического радиуса. Как правило, короткие волны находятся во внешней области слоя, а длинные – во внутренней.

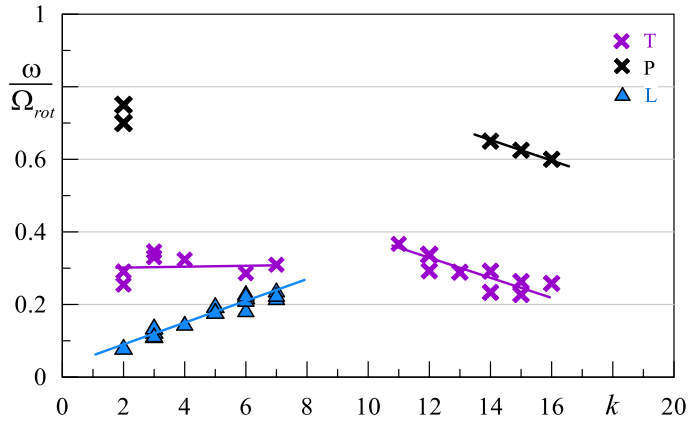


Рисунок 5.29 – Зависимость частоты волн в осреднённом течении от волнового числа в пороге неустойчивости. Тип символов соответствует карте на рис. 5.19

Далее для исследования влияния среднего зонального течения на азимутальный дрейф надкритических структур приводится зависимость частоты пульсаций в осреднённом поле скорости ω / Ω_{rot} от числа Рейнольдса Re_b (рис. 5.30*a*). Хорошо видно, что данные для неустойчивости слоя Стюартсона систематически расслаиваются по волновым числам k_L. Повышение Re_b приводит к монотонному увеличению частоты ω / Ω_{rot} до тех пор, пока не произойдет переход к структуре с другим волновым числом k_L. Переход от одного волнового числа к другому сопровождается скачкообразным изменением значения ω / Ω_{rot}, причем переход к меньшему волновому числу сопровождается понижением ω / Ω_{rot}. Наоборот, при понижении Re_b и соответствующем переходе к большему волновому числу, ча-

стота волны повышается. В пороговых переходах при повышении и понижении Re_b наблюдается гистерезис. Описанная динамика хорошо проиллюстрирована для низкочастотной компоненты с волновыми числами $k_L = 2-6$ (синие треугольники на рис. 5.30*а*). Частота внутренней эллиптической структуры, которая локализована на $r / R_2 < 0.5$ (пустые фиолетовые крестики на рис. 5.30*а*) также повышается с увеличением числа Рейнольдса, но по другому закону. Эти данные получены в диапазоне частот $n = 1.15-1.40$ как раз там, где существует интенсивный жидкий циклон вблизи оси вращения полости (см. профиль скорости на рис. 5.22*а*).

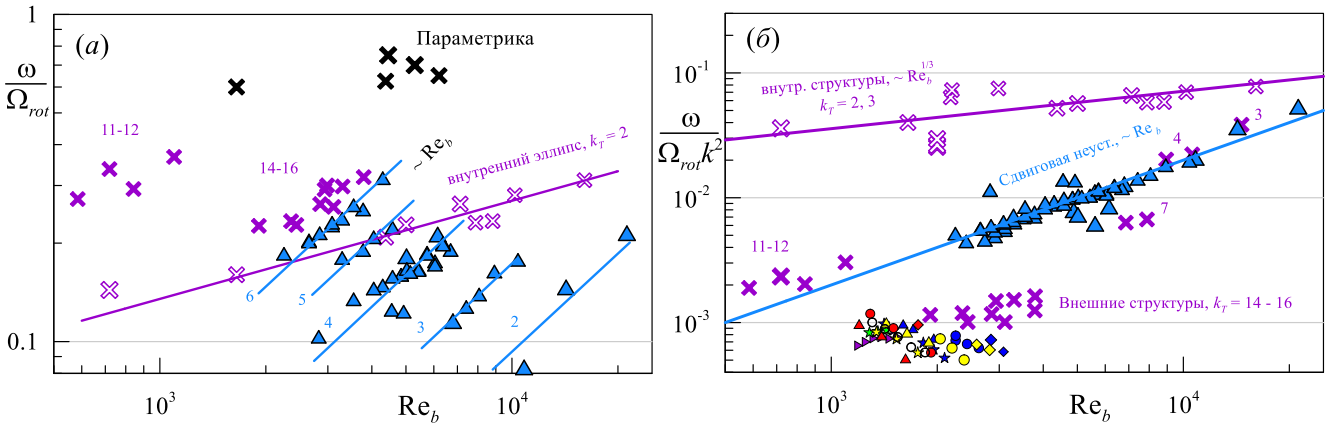


Рисунок 5.30 – Зависимость частоты волн от числа Рейнольдса. На фрагменте (*б*) сплошная синяя линия соответствует закону $\omega / \left(\Omega_{rot} k^2\right) \sim \mathrm{Re}_b$, фиолетовая – $\omega / \left(\Omega_{rot} k^2\right) \sim \mathrm{Re}_b^{1/3}$. Внутренние и внешние структуры условно разделены по отношению к цилиндрическому радиусу, $r / R_2 < 0.5$ и $r / R_2 > 0.5$. Группа разноцветных точек в нижнем левом углу фрагмента (*б*) полностью соответствует данным из рис. 5.13 для воздействия с частотой $n = -1$: тип символов определяется волновым числом k_O, в то время как цвет – вязкостью жидкости

Данные для неустойчивости на периферии $r / R_2 > 0.5$ (закрашенные фиолетовые крестики на рис. 5.30*а*) расходятся как по волновым числам, так и по частотам воздействия. В левой части графика ($\mathrm{Re}_b < 10^3$) находятся точки для частот $n = 1.05-1.15$, соответствующие волновым числам $k_T = 11-12$. Волновые числа $k_T = 14-16$ при частотах $n = 0.8-0.9$ лежат существенно правее, $\mathrm{Re}_b > 2 \cdot 10^3$. Это

связано с изменением пространственной конфигурации инерционно-волновой картины из-за уменьшения n и, как следствие, изменения структуры зонального течения. На это указывалось ещё в Разделе 4.1.4, где исследовалось влияние нелинейных инерционных волн на структурообразование в сферическом слое.

Результаты экспериментов, выполненных при различных частотах и волновых числах, хорошо согласуются между собой при нормировке частот волн на величину k^2 (рис. 5.30*б*). На выбранной плоскости параметров все синие точки, соответствующие сдвиговой неустойчивости Стюартсона, описываются линейным законом $\omega/\left(\Omega_{rot}k^2\right) \sim \mathrm{Re}_b$. Тот факт, что число Рейнольдса определяется через квадрат амплитуды колебаний ядра, свидетельствует, что частота волны полностью определяется скоростью дифференциального вращения жидкости ($\Delta\Omega \sim b^2$). Таким образом, развившиеся вторичные волны сносятся вдоль зонального потока, вследствие чего и меняется частота ω/Ω_{rot}. На эту же зависимость укладываются и волновые числа $k_T = 11-12$ для первой пары триадного резонанса, что может указывать на аналогичный механизм неустойчивости и причину такого сильного различия с точками для $k_T = 14-16$.

Экспериментальные точки, полученные для неустойчивости на периферии цилиндрического радиуса при частоте $n=-1$ (см. рис. 5.2*ж, и, м* и разноцветные символы на рис. 5.30*б*), в целом располагаются в той же области на плоскости параметров $\mathrm{Re}_b, \omega/\left(\Omega_{rot}k^2\right)$, что и $k_T = 14-16$ при $n>0$. При этом с увеличением Re_b надкритические структуры демонстрируют различную динамику, которая определяется направлением зонального течения. При отрицательном воздействии частота волн уменьшается, в то время как при положительном – незначительно увеличивается. Таким образом, можно предположить, что механизм генерации опережающей системы валов при $n=-1$ также связан с неустойчивостью триадного резонанса, несмотря на то что спектральный состав возмущений в нелинейном режиме не был исследован.

Внутренние длинноволновые структуры с $k_T = 2{,}3$ (пустые фиолетовые крестики на рис. 5.30*б*) лучше всего описываются законом $\omega / \left(\Omega_{rot} k^2 \right) \sim \mathrm{Re}_b^{1/3}$. С одной стороны, повышение частоты с числом Рейнольдса также указывает на взаимодействие волн с зональным течением. С другой стороны, отклонение от линейной зависимости указывает на существование нескольких механизмов дрейфа волновой структуры. Видно, что структуры наблюдаются в основном для относительно больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re}_b > 10^3$ и широком диапазоне частот $n = 0.70 - 1.40$ и часто сосуществуют с неустойчивостью на периферии. Можно предположить, что в данном случае происходит нелинейное взаимодействие двух мод различной природы. Более того, развитие неустойчивости приводит к нарушению линейной зависимости скорости зонального потока от квадрата амплитуды возмущений, вносимых ядром [A4, A16]. При наличии сцепленных мод может не только изменяться частота относительного дрейфа, но и волновое число.

5.4. Основные выводы по главе

Проведено экспериментальное исследование устойчивости осреднённого зонального течения во вращающемся сферическом слое в условиях круговых колебаний внутреннего ядра. Рассмотрены случаи отстающих и опережающих колебаний ядра в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Несмотря на то, что вопросам влияния гармонического воздействия на устойчивость движения жидкости во вращающихся сферических слоях уделялось много внимания [37, 40, 43, 48, 49, 79, 209, 217, A15], систематических знаний о механизмах генерации осреднённых вихревых структур нет. В частности, настоящая глава проливает свет на следующие аспекты: *i*) роль направления колебаний ядра; *ii*) роль нелинейных режимов инерционных волн в устойчивости осреднённых течений; *iii*) классификация нелинейных режимов инерционных волн; *iv*) взаимодействие надкритических структур с зональным течением.

Независимо от направления колебаний неустойчивость проявляется в пороговом развитии системы квазидвумерных валов различной природы. Так, при

$n=-1$ с повышением амплитуды колебаний ядра первоначально вблизи оси вращения полости возникает ретроградно вращающаяся вихревая система. При дальнейшем повышении скорости осреднённого течения за пределами ядра возникает волна Россби. При этом обе структуры существуют независимо друг от друга, вращаясь в различными фазовыми скоростями. Наконец, при дальнейшем повышении интенсивности осреднённых потоков проявляется еще один вид неустойчивости: на смену волне Россби приходит система валов, совершающая опережающее вращение. Сделано заключение, что исследованные моды неустойчивости не связаны с дифференциальным вращением самого ядра. Они определяются наличием в профиле скорости точек перегиба, за которые отвечают только осцилляции ядра относительно полости.

Независимо от наличия дифференциального вращения ядра пороги устойчивости осесимметричного движения и смены режимов характеризуются модифицированным числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_\Gamma \equiv \Gamma^2 (1-\rho)^2 \mathrm{E}^{-3/2}$, рассчитанным через квадрат амплитуды колебаний ядра и число Экмана. При этом фазовая скорость волны Россби во всех случаях полностью определяется квадратом волнового числа $(\Delta\Omega_R / \Omega_{rot}) k_R^2 = -1.5$. Любопытно, что аналогичная зависимость от волнового числа характерна для внешней опережающе вращающейся системы валов, которая не является волной Россби, $(\Delta\Omega_O / \Omega_{rot}) \sim k_O^{-2}$. В данном случае надкритическая динамика определяется числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_\Gamma^{\mathrm{E}} \equiv \Gamma^2 (1-\rho)^2 \mathrm{E}^{-1}$.

Для случая положительного воздействия устойчивость и надкритическая динамика жидкости детально исследована в зависимости от частоты n. Последняя оказывает существенное влияние на докритический осесимметричный профиль угловой скорости и определяет сценарий развития неустойчивости. Так, в области частот, где инерционные волны отсутствуют ($n>2$), осреднённое течение напоминает классический столбик Тейлора с практически равномерным распределением угловой скорости внутри тангенциального цилиндра. При повышении амплитуды колебаний на границе столба пороговым образом возникает азимутальная волна. Анализ результатов показывает, что фазовая скорость волны не зависит

от числа Экмана и полностью определяется квадратом амплитуды колебаний. Этот вывод позволяет сравнить результаты настоящих экспериментов со случаем, когда внутреннее ядро не колеблется, но совершает дифференциальное вращение [188, 217, 218]. Поскольку амплитуда колебаний и дифференциальное вращение жидкости взаимосвязаны, можно ввести эквивалент числа Россби $\mathrm{Ro}_b = b^2 / R_1\delta \sim \Delta\Omega / \Omega_{rot}$. Критическое число Россби, при котором возникает неосесимметричная неустойчивость, зависит от числа Экмана по закону $\mathrm{Ro}_b^* \sim \mathrm{E}^{1/2}$. Для сравнения в [218] во вращающемся сферическом слое с аспектным соотношением $\eta = 1/3$ для случая положительных чисел Россби (опережающее дифференциальное вращение ядра) была получено следующее $\mathrm{Ro}^* \sim \mathrm{E}^{0.7}$. Учитывая подобие профиля осреднённой угловой скорости в двух различных постановках, а также надкритическую динамику неосесимметричных структур, можно сделать вывод, что мы имеем дело со сдвиговой неустойчивостью слоев Стюартсона.

При частотах колебаний $n < 2$ в сферическом слое распространяются инерционные волны, вносящие сильную корректировку в дифференциальное вращение жидкости. В последнем появляется серия экстремумов, присутствие которых эквивалентно системе вложенных геострофических цилиндров, вращающихся с различными угловыми скоростями. С увеличением Re_b на периферии цилиндрического радиуса пороговым образом развивается коротковолновая система осреднённых вихревых структур, напоминающая зубчатое колесо (рис. 5.28*а*). Вихревая система принципиально отличается от неустойчивости слоев Стюартсона длиной волны и фазовой скоростью. Порог возникновения структур немонотонно меняется с безразмерной частотой, при этом наименьшее значение наблюдается при $n = 1.15$. Именно вблизи этой частоты энергия пульсационного течения максимальна, что связано с резонансным возбуждением глобальной инерционной моды.

Детальный анализ пульсационных полей скорости проливает свет на природу возникновения неустойчивостей, которые оказываются связанными с каскад-

ными инерционно-волновыми процессами по сценарию триадных взаимодействий. Интересно, что триадный резонанс одновременно проявляется на периферии цилиндрического радиуса и вблизи оси вращения с одинаковыми частотами, но сильно отличающимися волновыми числами. Данная специфика развития нелинейных волновых режимов обнаружена впервые. Введена следующая классификация режимов:

1. *T-режим*. Классический триадный резонанс инерционной волны с азимутальным волновым числом $k=1$ и двумя субгармониками на разных частотах. Данный режим проявляется в диапазоне частот воздействия $n=0.70-1.25$, в том числе в области существования глобальной инерционной моды, и характеризуется широким набором волновых чисел $k_T=2-16$. Длинные волны возникают внутри тангенциального цилиндра ($r/R_2<0.5$), а короткие за его пределами ($r/R_2>0.5$). Вторичные волны с одинаковыми частотами, но разными k_T могут сосуществовать одновременно и дрейфовать в азимутальном направлении с разными фазовыми скоростями.

2. *P-режим*. Параметрический триадный резонанс основной моды с двумя субгармониками на одинаковой частоте $n/2$, распространяющихся в противоположных направлениях. Данный режим существует в диапазоне частот $n=1.15-1.60$ и возникает при более высоких Re_b, нежели T-режим. Параметрические субгармоники представлены двумя наборами волновых чисел $k_P=2$ и $k_P=14-16$, которые также могут сосуществовать одновременно. Пространственное расположение волн в целом аналогично T-режиму. При этом коротковолновые структуры на периферии ограничены сверху частотами $n\le 1.3$. При более высоких частотах доминируют длинноволновые параметрические колебания с $k_P=2$, которые деформируют границу тангенциального цилиндра.

3. *L-режим*. В данном случае неустойчивость триадного резонанса ограничена снизу частотами $n\ge 1.15$ и содержит медленную низкочастотную компоненту $\omega/\Omega_{rot}\sim 0.1$, которая характеризуется самыми высокими числами Рейнольдса ($\mathrm{Re}_b>10^3$) с волновыми числами $k_L=2-8$. Чем выше частота воздействия, тем

меньше и пространственный размер волновых структур. Данный режим является триггером для развития сдвиговой неустойчивости слоёв Стюартсона, поэтому локализуется в окрестности тангенциального цилиндра $r / R_2 \in (0.2; 0.6)$. Важно отметить, что не так давно в численных моделях были описаны подобные варианты соотношения субгармоник в спектре внутренних гравитационных волн, включая низкочастотный режим [252].

Именно развитие нелинейных волновых режимов является тем самым спусковым фактором для неустойчивости осреднённого зонального течения. Для удобства представления классификации надкритических режимов течения ниже приведена следующая карта режимов, где в скобках (T, P или L) указан тип субгармонического резонанса, ответственный за тот или иной тип осреднённых структур.

Неустойчивость осреднённого зонального течения

$n < 0$ ⟵ направление форсинга ⟶ $n > 0$

$n = -1$

- *Внутренняя вихревая система*
- *Волны Россби*
- *Внешняя вихревая система (T)*

Триадный резонанс

- *Внешняя вихревая система (T)* — $n < 1.3$
- *Параметрическая неустойчивость (P)* — $1.15 < n < 1.6$
- *Сдвиговая неустойчивость (L)* — $n > 1.15$

Можно отметить, что в параметрическом режиме осреднённые валы с циклонической и антициклонической закруткой сменяют друг друга без выраженного азимутального дрейфа с частотой $n/2$. Это выглядит как стоячая волна, которая располагается либо внутри тангенциального цилиндра, либо снаружи него. Выход из параметрического режима сопровождается возникновением азимутального дрейфа (T- и L-режимы). Визуально P-режим идентифицируется как T-режим (рис. 5.28*а*, *б*). Важно заметить, что процедура осреднения по периоду воздействия позволяет идентифицировать квазидвумерную систему, вклад в которую дают субгармоники. Развитие же триадного резонанса – это трёхмерный про-

странственный эффект, где каждая субгармоника характеризуется своим набором волновых векторов. Поэтому дальнейшее исследование полной трёхмерной структуры пульсационного течения и декомпозиция волновых триад в разных поперечных сечениях слоя является важнейшей задачей. Кроме того, в рамках диссертационного исследования анализ пульсационного поля скорости был проведен только для положительных частот воздействия n, определение спектрального состава нелинейных волновых режимов при $n<0$ также является одним из приоритетных направлений дальнейшей работы.

Наконец, при $n>0$ исследован доплеровский сдвиг частот осреднённых валов в зависимости от скорости зонального течения. Вклад последнего характеризуется числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_b \sim \Delta\Omega$. Так, в L-режиме данные полностью описываются соотношением $\omega/\left(\Omega_{rot}k^2\right) \sim \mathrm{Re}_b$. Этой же зависимости соответствуют структуры с $k_T = 11,12$ в T-режиме. Таким образом, вторичные волны сносятся вдоль зонального потока, вследствие чего и меняется их частота ω/Ω_{rot}. В целом длинноволновые надкритические структур с $k_T = 2,3$ хорошо описываются зависимостью $\omega/\left(\Omega_{rot}k^2\right) \sim \mathrm{Re}_b^{1/3}$. По всей видимости, отклонение от линейной зависимости связано с взаимодействием структур, расположенных на разных цилиндрических радиусах.

ГЛАВА 6. ВЛИЯНИЕ ЛИБРАЦИЙ НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВРАЩЕНИЕ СВОБОДНОГО ЯДРА И ОСРЕДНЁННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Экспериментально исследуется динамика свободного ядра и жидкости во вращающейся вокруг горизонтальной оси сферической полости. Скорость вращения полости содержит постоянную и осциллирующую (либрационную) составляющие. Ядро, плотность которого меньше плотности жидкости, под действием центробежной силы располагается вблизи центра полости. Поле силы тяжести вызывает малое радиальное смещение ядра из центра, которое возбуждает осреднённое отстающее дифференциальное вращение ядра и жидкости. Обнаружено, что либрации приводят к генерации осреднённого течения и отстающего дифференциального вращения ядра, которые складываются с вызванными полем силы тяжести осреднёнными явлениями. Интенсивность дифференциального вращения ядра и зонального течения, вызванных либрациями, пропорциональна квадрату амплитуды либраций. Аддитивность осреднённых эффектов, связанных с либрациями и с полем силы тяжести, наблюдается в широком интервале частот либраций, за исключением очень низких частот и резонансных частот (близких к частоте вращения или к одной из собственных трансляционных мод ядра). Когда частота либраций мала, скорость вращения ядра периодически изменяется со временем с частотой либраций, что сопровождается изменением его положения в полости. При этом на определенной части периода возбуждаются релаксационные колебания ядра с собственной частотой. Либрации с частотой вращения полости оказывают наиболее сильное, резонансного типа, воздействие на ядро, возбуждают его колебания большой амплитуды и существенно изменяют структуру осреднённых течений. В данном случае и при совпадении частоты либраций с собственной частотой колебаний ядра, зависимость между дифференциальной скоростью и амплитудой либраций отличается от квадратичной. Эффект объясняется радиальным смещением ядра с оси вращения полости под действием гравитационного поля. Результаты опубликованы в работе [A7].

6.1. Особенности постановки эксперимента

Для экспериментов используется установка, схематично приведенная на рис. 6.1*а*. Легкое сферическое тело (ядро) радиуса $R_1 = 1.27$ см и средней плотности $\rho_C = 0.82$ г/см^3 находится в заполненной жидкостью сферической полости радиуса $R_2 = 3.60$ см. Плотность жидкости превышает плотность ядра, $\rho_L > \rho_C$. Кювета быстро вращается вокруг горизонтальной оси, причём под действием центробежной силы легкое ядро находится вблизи оси вращения на одинаковом расстоянии от полюсов полости (рис. 6.1*б*). В качестве рабочей жидкости используются маловязкие водные растворы глицерина.

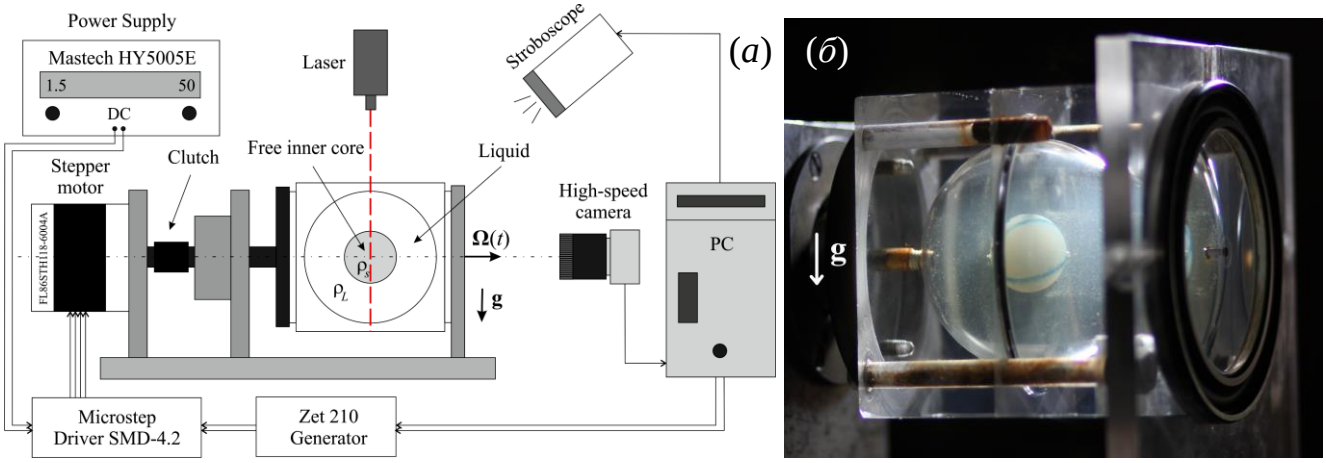


Рисунок 6.1 – Схема экспериментальной установки (*а*) и фотография вращающейся полости (*б*)

Вращение полости задается шаговым двигателем FL86STH80-4208A, управляемым драйвером SMD-4.2 и питающимся от источника постоянного тока Mastech HY5005E. Регулировка скорости вращения вала двигателя осуществляется с помощью генератора модуля Zet 210, управляемого компьютером. Для соединения вала двигателя с полостью используется муфта SJCA-30C, обеспечивающая точную передачу вращения. В целом конструкция кюветы и установки аналогична использованной в случае вращения полости с постоянной скоростью (Главы 4, 5).

Скорость вращения полости в инерциальной системе отсчета периодически изменяется со временем:

$$\Omega(t) = \Omega_{rot}\left[1 + \varepsilon \sin\left(\Omega_{lib} t\right)\right], \tag{6.1}$$

где $\varepsilon = \Delta\varphi\Omega_{lib} / \Omega_{rot} = \Delta\varphi\sigma$, а $\Delta\varphi$ – угловая амплитуда вращательных колебаний полости. Параметры, при которых проводятся эксперименты, приведены в Табл. 6.1. Методика проведения экспериментов следующая. Первоначально кювета приводится в быстрое равномерное вращение вокруг горизонтальной оси со скоростью Ω_{rot}. После установления стационарного режима вращения ядра методом скоростной видеосъемки исследуется его динамика в зависимости от параметров σ и ε. Видеорегистрация осуществляется на неподвижную в лабораторной системе отсчета скоростную камеру CamRecord CL600x2. Разрешение кадров составляет 800×800 пикселей, частота – до 1064 кадров в секунду. Запись осуществляется на видеорегистратор DVR express core. С помощью программы ImageJ определяется угол поворота ядра относительно полости, а также положение ядра. Спектр частот колебаний ядра находится с помощью программы MATLAB.

Таблица 6.1. Основные обозначения и значения параметров в экспериментах

Параметр	Определение	Значение
R_1	Радиус ядра	12.7 мм
R_2	Радиус сферической полости	36.0 мм
$\eta = R_1 / R_2$	Аспектное соотношение	0.35
ρ_C	Средняя плотность ядра	0.82 г/см^3
Ω_{rot}	Угловая скорость вращения	38 ÷ 100 рад/с
Ω_{lib}	Частота либраций	0 ÷ 157 рад/с
$\sigma = \Omega_{lib} / \Omega_{rot}$	Безразмерная частота либраций	0 ÷ 2.5
$\varepsilon = \Delta\varphi\sigma$	Безразмерная амплитуда либраций	0 ÷ 0.5
ν	Кинематическая вязкость жидкости	6 ÷ 12 сСт
ρ_L	Плотность жидкости	1.12 ÷ 1.17 г/см^3
$\rho = \rho_C / \rho_L$	Относительная средняя плотность ядра	0.70 ÷ 0.73
$\mathrm{E} = \nu / \left(\Omega_{rot} R_1^2\right)$	Число Экмана	$3.7\cdot10^{-4} \div 2.0\cdot10^{-3}$

Скорость дифференциального вращения ядра $\Delta\Omega_C = \Omega_C - \Omega_{rot}$ определяется после измерения Ω_C и Ω_{rot} методом синхронизации с частотой мерцаний стробоскопической лампы. Точность измерения скорости вращения составляет 0.006 рад/с. Здесь Ω_C – скорость вращения ядра в лабораторной системе отсчета. Отметим, что измерения на каждом шаге изменения параметров либраций выполняются после выхода системы на установившийся режим вращения. В экспериментах по исследованию профиля скорости критическое значение числа Рейнольдса, при котором возникает центробежная неустойчивость на сферической стенке полости, не достигается, $\mathrm{Re} = \varepsilon E^{-1/2} < 20$ [68].

6.2. Инерционный отклик ядра

6.2.1. Вращательные колебания ядра

В отсутствие либраций полости центр ядра, плотность которого меньше плотности жидкости, в лабораторной системе отсчета занимает стационарное положение на некотором расстоянии b от оси вращения. Это смещение вызвано полем силы тяжести. При этом в системе отсчета полости ядро совершает круговые колебания, в результате которых приходит в равномерное отстающее дифференциальное вращение со скоростью $\Delta\Omega_C = \left(\Omega_C - \Omega_{rot}\right) < 0$ (Раздел 4.2). Механизм дифференциального вращения связан с появлением осреднённого момента сил в результате круговых колебаний ядра относительно полости.

Либрации полости означают, что ее угловая координата в лабораторной системе отсчета изменяется со временем по закону:

$$\varphi = \Omega_{rot} t + \delta\varphi = \Omega_{rot} t + \Delta\varphi \sin\left(\Omega_{lib} t\right), \tag{6.2}$$

где $\Omega_{rot} t$ – угол, на который поворачивается полость в результате равномерного вращения со скоростью Ω_{rot}, а $\delta\varphi = \Delta\varphi \sin\left(\Omega_{lib} t\right)$ – периодическое изменение угловой координаты с частотой Ω_{lib} и амплитудой $\Delta\varphi$. Результаты прямых измерений $\delta\varphi$, выполненных методом скоростной видеорегистрации, представлены на рис. 6.2 пустыми кружками. Видно, что в равномерно вращающейся системе отсчета полость совершает угловые колебания по гармоническому закону, при этом

измеренное значение угловой амплитуды $\Delta\varphi$ отличается от задаваемого ε/σ на величину, не превышающую 0.4%. Это характеризует точность и качество либраций полости.

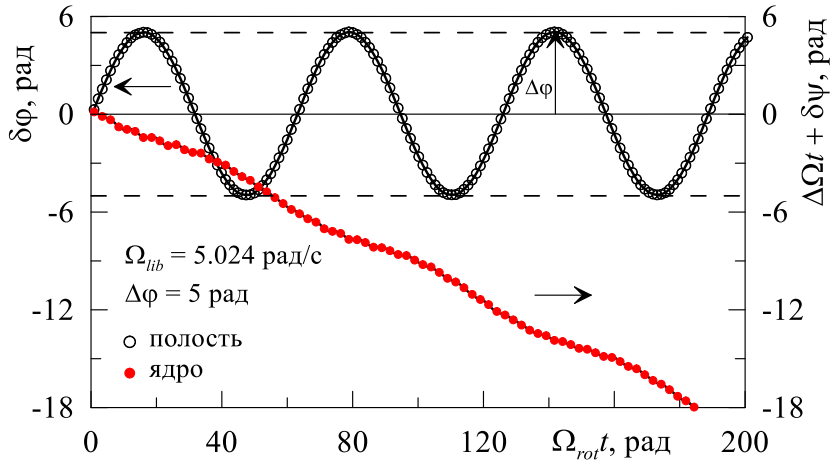


Рисунок 6.2 – Либрационная компонента угла поворота полости (круги) и угловая координата ядра (красные точки) в равномерно вращающейся системе отсчёта: $\Omega_{rot} = 50.24$ рад/с, $\nu = 6.2$ сСт

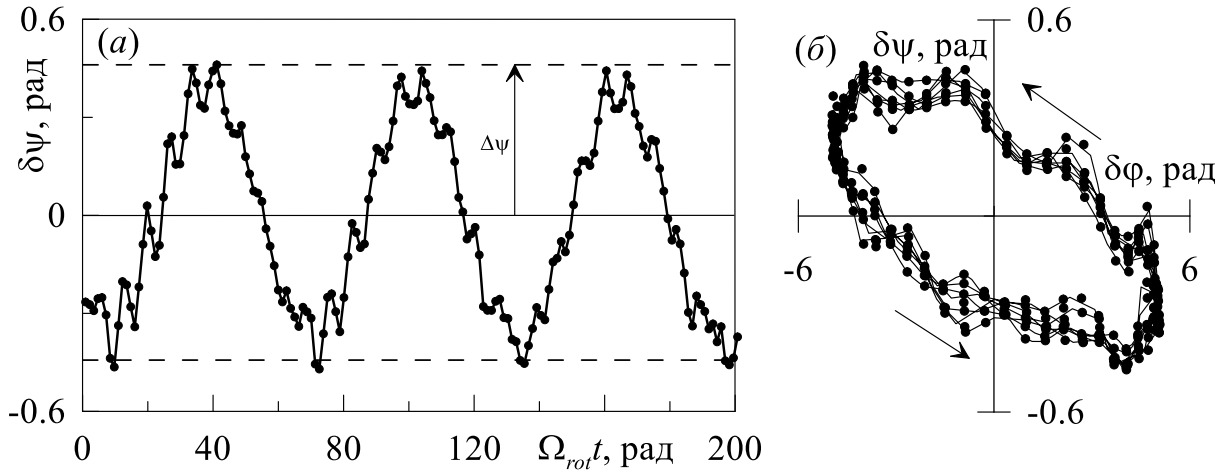


Рисунок 6.3 – Либрационная компонента угла поворота ядра в равномерно вращающейся системе отсчёта (*а*); либрации ядра в зависимости от либраций полости (*б*). Параметры либраций соответствуют рис. 6.2

Угловые колебания полости приводят к тому, что скорость дифференциального вращения ядра становится непостоянной и периодически изменяется

(рис. 6.2, сплошные красные символы). Ядро откликается на либрации полости вращательными колебаниями с той же частотой Ω_{lib}, но существенно меньшей амплитудой $\Delta\psi$. Угловая координата ядра ψ в лабораторной системе отсчета может быть описана следующим образом:

$$\psi = \Omega_{rot}t + \Delta\Omega_C t + \delta\psi = \Omega_{rot}t + \Delta\Omega_C t + \Delta\psi\sin\left(\Omega_{lib}t + \alpha\right), \qquad (6.3)$$

здесь $\Delta\Omega_C t$ – угловая координата ядра, связанная с равномерным дифференциальным вращением в системе отсчета, вращающейся со скоростью Ω_{rot}, а $\delta\psi = \Delta\psi\sin\left(\Omega_{lib}t + \alpha\right)$ – осциллирующая составляющая координаты (с частотой либраций), где α – разность фаз либраций ядра и полости. Таким образом, можно говорить о том, что либрации полости вызывают либрации свободного ядра. Уменьшение ψ со временем (см. рис. 6.2) означает, что в среднем ядро вращается в направлении, противоположном направлению вращению полости, т.е. совершает отстающее дифференциальное вращение.

Либрационная составляющая координаты ядра в увеличенном масштабе в зависимости от $\Omega_{rot}t$ представлена на рис. 6.3*а*. Основная частота, равная частоте либраций, модулируется высокочастотными колебаниями, природа которых в диссертации не обсуждается. Вращательные колебания ядра $\delta\psi$ в зависимости от либрационных колебаний полости $\delta\varphi$ показаны на рис. 6.3*б*. Видно, что по фазе либраций ядро отстает от полости.

С увеличением $\Delta\varphi$ амплитуда либраций ядра $\Delta\psi$ возрастает по линейному закону (рис. 6.4*а*). Увеличение безразмерной частоты либраций полости σ при фиксированном значении $\Delta\varphi$ приводит к уменьшению амплитуды либраций ядра $\Delta\psi$. Из рис. 6.4*б* можно видеть, что амплитуда либраций ядра уменьшается обратно пропорционально квадрату частоты $\Delta\psi \sim \Omega_{lib}^{-2}$. Увеличение скорости вращения полости Ω_{rot} (рис. 6.4*б*) так же, как и увеличение вязкости жидкости (рис. 6.5), качественно не изменяет оказываемого либрациями эффекта, приводя к росту величины $\Delta\psi$.

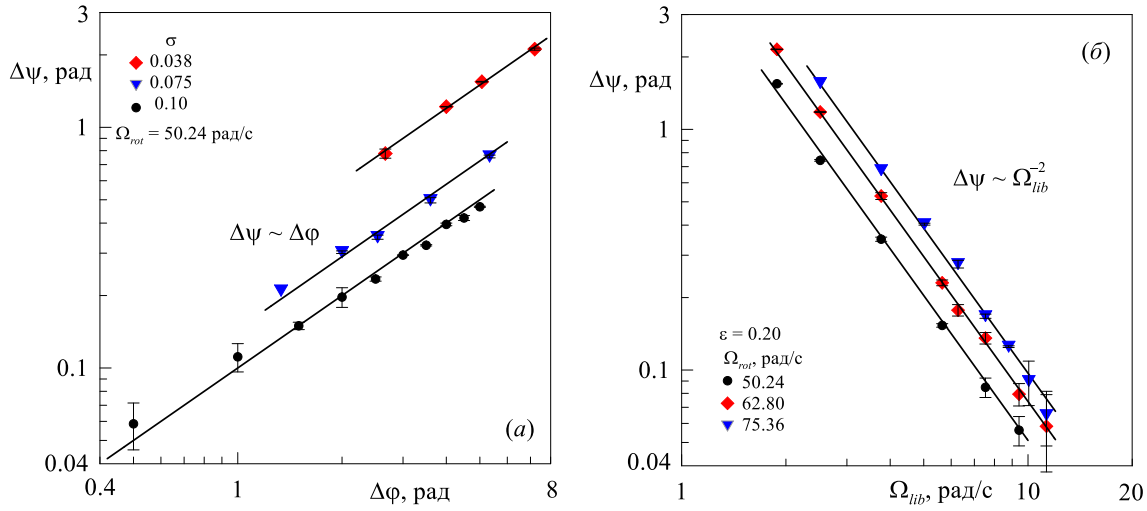


Рисунок 6.4 – Амплитуда либраций ядра в равномерно вращающейся системе отсчета (Ω_{rot}) в зависимости от амплитуды (*а*) и частоты (*б*) либраций полости: $\nu = 6.2$ сСт

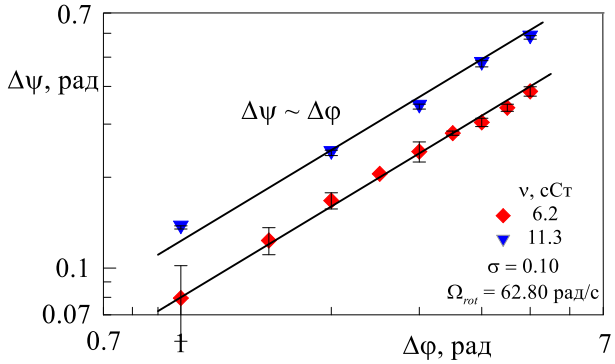


Рисунок 6.5 – Влияние вязкости жидкости на амплитуду либраций ядра

Результаты экспериментов показывают, что относительная амплитуда либраций ядра $\Delta\psi / \Delta\varphi$ не зависит от амплитуды модуляции скорости вращения ε (рис. 6.6*а*) и уменьшается с относительной частотой либраций по закону $\Delta\psi / \Delta\varphi \sim \sigma^{-1}$ (рис. 6.6*б*). При этом эффект оказывается значительным только в области низких частот либраций полости, когда $\sigma << 1$, а обратное время спинапа сравнимо по величине с частотой либраций $\sqrt{\mathrm{E}} \sim \sigma \sim 10^{-2}$. Это означает, что вязкие пограничные слои, связанные с равномерным вращением, малы по сравнению с размером ядра, но сравнимы с осциллирующими пограничными слоями, обусловленными либрациями. Таким образом, эффекты спинапа в области $\sigma << 1$ оказываются существенными, в результате чего ядро успевает откликнуться на

изменение скорости вращения полости. Изменение амплитуды $\Delta\psi/\Delta\varphi$ с вязкостью и скоростью вращения связано с изменением времени спинапа $\tau \sim 1/\sqrt{\mathrm{E}}$.

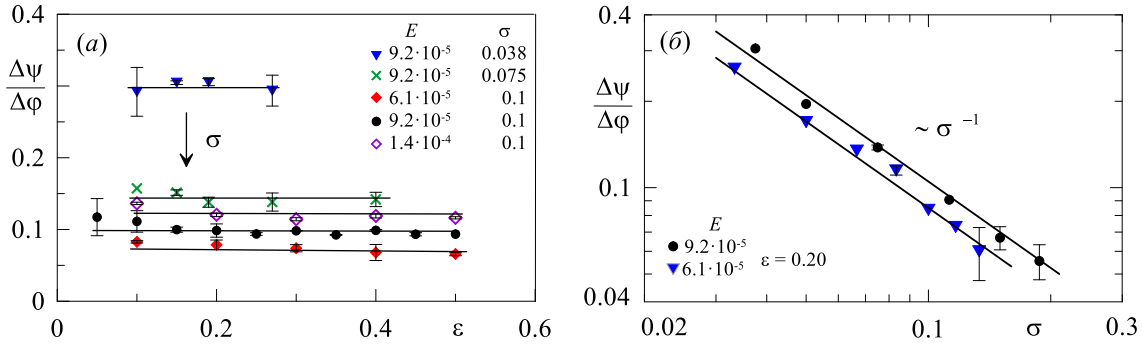


Рисунок 6.6 – Относительная амплитуда либраций ядра в зависимости от амплитуды ε ($а$) и частоты либраций полости σ ($б$)

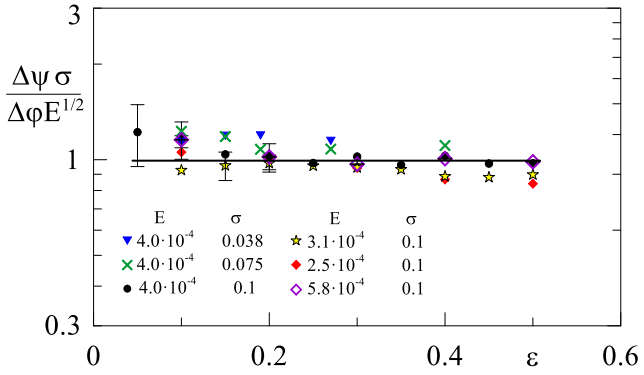


Рисунок 6.7 – Зависимость безразмерной амплитуды либраций ядра $\Delta\psi\sigma/\left(\Delta\varphi\sqrt{\mathrm{E}}\right)$ от амплитуды либраций полости ε

Таким образом, амплитуда либраций ядра зависит от $\sqrt{\mathrm{E}}$ и σ:

$$\Delta\psi/\Delta\varphi \sim \sqrt{\mathrm{E}}/\sigma. \qquad (6.4)$$

Результаты, полученные в опытах с жидкостями разной вязкости и при разной скорости вращения полости, согласуются между собой на плоскости параметров $\left(\varepsilon,\ \Delta\psi\sigma/\Delta\varphi\sqrt{\mathrm{E}}\right)$ (рис. 6.7). Это означает, что при малых σ, независимо от величин σ и ε безразмерная амплитуда вращательных колебаний ядра $\Delta\psi\sigma/\left(\Delta\varphi\sqrt{\mathrm{E}}\right)$ имеет постоянное значение, близкое к 1. Отметим, что при малых значениях ε

наблюдается незначительное отклонение от указанной зависимости, что может быть связано с увеличением погрешности в измерениях амплитуды $\Delta\psi$.

6.2.2. Трансляционные колебания ядра

Изменения скорости дифференциального вращения ядра сопровождаются изменением его радиального смещения b в поперечном оси вращения направлении. На рис. 6.8 представлены трансляционные колебания центра ядра в лабораторной системе отсчета *XY* с началом координат в центре полости. Видно, что ядро совершает значительной амплитуды трансляционные колебания с частотой либраций. При этом амплитуда смещения тела вдоль горизонтальной оси значительно превосходит смещение вдоль вертикального направления. Можно предположить, что это связано с асимметрией распределения давления в результате действия поля силы тяжести и вязким взаимодействием ядра с движением жидкости в сферическом слое. Колебания ядра в *Z*-направлении не наблюдаются. На части периода, когда ядро приближается к оси вращения, возбуждаются релаксационные колебания ядра с более высокой частотой, чем σ. Ядро совершает круговые колебания, перемещаясь как вдоль горизонтальной, так и вдоль вертикальной оси с одинаковой амплитудой и со сдвигом фаз $\pi/2$.

Фурье-анализ трансляционных колебаний ядра показывает, что в спектре колебаний присутствует три основные частоты (рис. 6.9*а*). Наиболее сильная мода колебаний с частотой $\omega_1/\Omega_{rot} = 0.10$ соответствует частоте либраций σ, две существенно меньшие по интенсивности моды имеют частоты $\omega_2/\Omega_{rot} = 0.90$ и $\omega_3/\Omega_{rot} = 1.37$. На рис. 6.9*б* представлено изменение спектра колебаний ядра с частотой либраций полости σ. Видно, что с увеличением σ максимальное значение спектральной плотности ω_1/Ω_{rot} (показано крестиками) смещается в область больших частот ω/Ω_{rot}. При этом ω_1/Ω_{rot} совпадает с частотой либраций σ, а значение частот ω_2/Ω_{rot} и ω_3/Ω_{rot} остается постоянным в исследуемом диапазоне σ. Это указывает на то, что частоты ω_2/Ω_{rot} и ω_3/Ω_{rot} не зависят от частоты внешнего воздействия и определяются только инерционными свойствами ядра.

Как будет показано далее, ω_2 / Ω_{rot} и ω_3 / Ω_{rot} соответствуют двум собственным частотам трансляционных колебаний ядра во вращающейся полости.

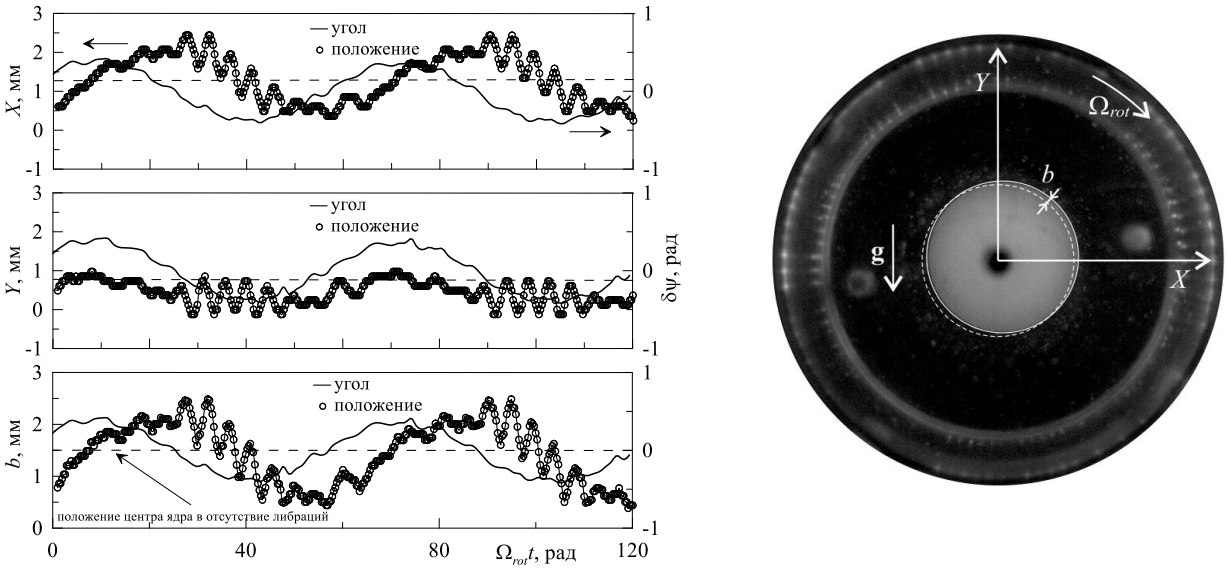


Рисунок 6.8 – Смещение ядра с оси вращения полости (кружки) в зависимости от $\Omega_{rot} t$. Штриховая линия – положение ядра в отсутствие либраций, сплошной линией показаны вращательные колебания ядра $\delta\psi$. Условия эксперимента соответствуют Рис. 6.2: $\Omega_{rot} = 50.24$ рад/с, $\nu = 6.2$ сСт ($E = 3.8 \cdot 10^{-4}$, $\sigma = 0.1$, $\varepsilon = 0.50$)

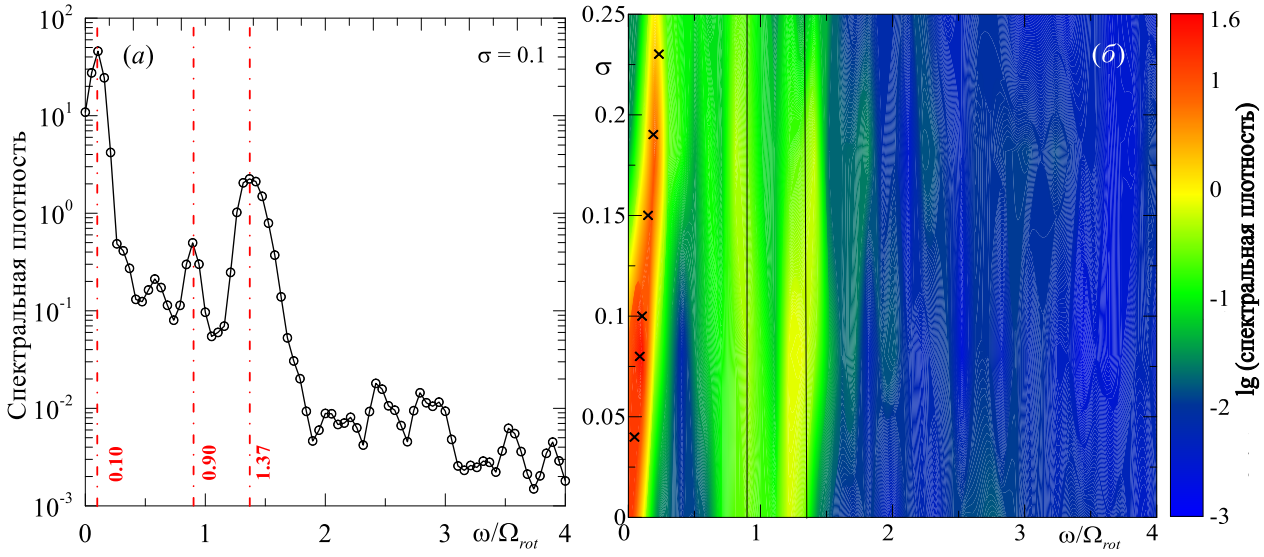


Рисунок 6.9 – Спектр колебаний ядра при параметрах на Рис. 6.8 (*а*) и изменение спектра частот с σ (*б*). Крестики соответствуют значениям частоты либраций, при которых получены спектральные характеристики колебаний ядра

6.3. Влияние либраций на дифференциальное вращение ядра

Известно, что для любых вращающихся гетерогенных систем [189, A9], в частности для внутреннего ядра Земли [55, 56], характерно наличие нескольких собственных частот трансляционных колебаний, связанных с плавучестью. Одна из мод характеризует колебания вдоль оси вращения, а две другие – колебания круговой поляризации в экваториальной плоскости. Каждая из этих мод может возбуждаться резонансным образом под действием внешнего переменного силового поля. Так, в экспериментах со свободным сферическим ядром во вращающейся сферической [A9] и цилиндрической полости [185] возбуждение круговых колебаний с собственной частотой происходило при ее совпадении с частотой внешнего периодического воздействия. При этом колебания сопровождались возникновением интенсивного дифференциального вращения ядра. Если частота внешнего воздействия Ω_{osc} больше скорости вращения полости Ω_{rot}, дифференциальное вращение опережающее, если $\Omega_{osc} < \Omega_{rot}$ – отстающее [см. подробнее Раздел 4.4].

На первом этапе были изучены вклад силы тяжести и роль собственных трансляционных колебаний ядра в его дифференциальное вращение. Для определения собственных частот трансляционных колебаний ядра была использована методика, описанная в работе [A9]. Для этого экспериментальная установка закрепляется на платформе электродинамического вибростенда типа Veb GRW Teltow 3.19.39, задающего поступательные вертикальные вибрации. Для получения вибраций на вибростенд с генератора модуля Zet 210 подается гармонический сигнал. Предварительно сигнал усиливается с помощью усилителя DP3202. В ходе эксперимента варьировалась скорость вращения полости Ω_{rot} и измерялась скорость дифференциального вращения ядра относительно полости $\Delta\Omega_C$ в отсутствие вибраций и при вибрационном воздействии заданной частоты $\Omega_{osc} = 94.2$ рад/с.

В отсутствие вибраций ядро совершает равномерное отстающее дифференциальное вращение. При этом с увеличением скорости вращения полости ско-

рость дифференциального вращения монотонно уменьшается (штриховая линия на рис. 6.10). Вибрации полости оказывают влияние на динамику ядра в двух резонансных областях. Одна область находится при $\Omega_{osc}/\Omega_{rot}>1$, а другая – при $\Omega_{osc}/\Omega_{rot}<1$. В резонансных областях ядро совершает интенсивные колебания круговой поляризации в экваториальной плоскости с частотой вибраций $\Omega=\Omega_{osc}-\Omega_{rot}$. При $\Omega_{osc}/\Omega_{rot}>1$ возбуждается интенсивное опережающее дифференциальное вращение, при $\Omega_{osc}/\Omega_{rot}<1$ происходит интенсификация отстающего вращения ядра. Резонансное возбуждение дифференциального вращения объясняется совпадением частоты вибраций (в системе отсчета полости) с одной из собственных частот круговых колебаний ядра, одна из которых больше, а другая меньше частоты вращения полости. Максимумы в резонансных областях соответствуют собственным модам трансляционных колебаний ядра (см. Раздел 4.4). Вне резонансных областей экспериментальные точки, полученные при вибрациях, согласуются с результатами в отсутствие вибраций. Как видно из сравнения рис. 6.9 и 6.10, значения собственных частот, полученных при вибрациях полости, совпадает с частотами, обнаруженными в спектре колебаний ядра при либрациях. Таким образом, либрации низкой частоты $\sigma<<1$ возбуждают трансляционные колебания ядра с собственной частотой.

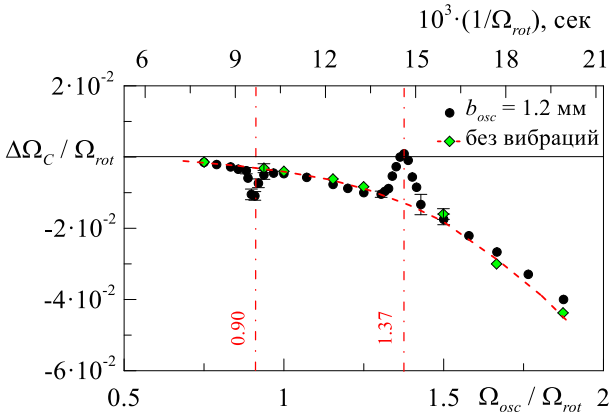


Рисунок 6.10 – Безразмерная скорость дифференциального вращения ядра в зависимости от скорости вращения полости и от безразмерной частоты вибраций при $\nu=6.2$ сСт и $\Omega_{osc}=94.2$ рад/с. Штриховая линия соответствует случаю отсутствия вибраций

Как было отмечено ранее, либрации полости приводят к тому, что скорость вращения ядра становится непостоянной и периодически изменяется. При этом, как показывают эксперименты, с увеличением амплитуды либраций полости ε средняя скорость отстающего дифференциального вращения ядра $\Delta\Omega_C$ возрастает (рис. 6.11). При повышении и понижении ε экспериментальные точки согласуются между собой. Результирующее вращение ядра $\Delta\Omega_C$ складывается из дифференциального вращения, обусловленного действием поля силы тяжести $\Delta\Omega_C^g$ и либрациями полости $\Delta\Omega_C^{lib}$. Поскольку $\Delta\Omega_C^g$ определяется скоростью вращения полости, далее будем говорить только о либрационной составляющей движения $\Delta\Omega_C^{lib} = \Delta\Omega_C - \Delta\Omega_C^g$.

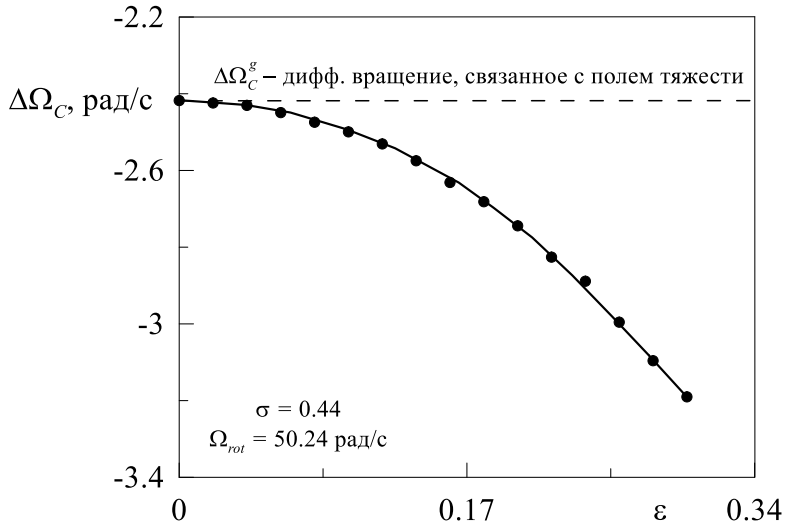


Рисунок 6.11 – Скорость дифференциального вращения ядра в зависимости от амплитуды либраций ε при заданном σ

Влияние частоты либраций Ω_{lib} на динамику ядра при заданных значениях амплитуды ε и скорости вращения полости Ω_{rot} показано на рис. 6.12*а*. При низкой частоте либраций скорость дифференциального вращения $\Delta\Omega_C^{lib}$ практически не зависит от Ω_{lib}. В области умеренных Ω_{lib} увеличение частоты приводит к плавному уменьшению $\Delta\Omega_C^{lib}$ по абсолютной величине, которое принимает минимальное значение при совпадении частоты либраций и скорости вращения поло-

сти, $\Omega_{lib} = \Omega_{rot}$. При дальнейшем увеличении частоты либраций скорость дифференциального вращения возрастает. В области $\Omega_{lib} > \Omega_{rot}$ скорость вращения ядра по абсолютному значению несколько больше по величине, чем в области $\Omega_{lib} < \Omega_{rot}$. С увеличением скорости вращения полости кривые зависимости $\Delta\Omega_C^{lib}\left(\Omega_{lib}\right)$ смещаются вправо, при этом скорость отстающего дифференциального вращения монотонно возрастает по абсолютной величине. Все кривые при различных Ω_{rot} и определенном ε удовлетворительно согласуются между собой на плоскости безразмерных параметров $\left(\sigma, \Delta\Omega_C^{lib} / \Omega_{rot}\right)$ (рис. 6.12*б*). Максимум наблюдается при частоте $\sigma = 1$. Следует отметить, что с повышением скорости вращения $\Delta\Omega_C^{lib} / \Omega_{rot}$ в экстремуме (при $\sigma = 1$) монотонно опускается. Как будет показано ниже, резонансного типа влияние либраций на скорость дифференциального вращения в окрестности $\sigma = 1$ объясняется воздействием либраций непосредственно на гравитационный механизм дифференциального вращения ядра, который ослабевает с повышением Ω_{rot}. При этом принцип линейной суперпозиции эффектов, связанных с колебаниями разного типа (вращательные и трансляционные), не выполняется.

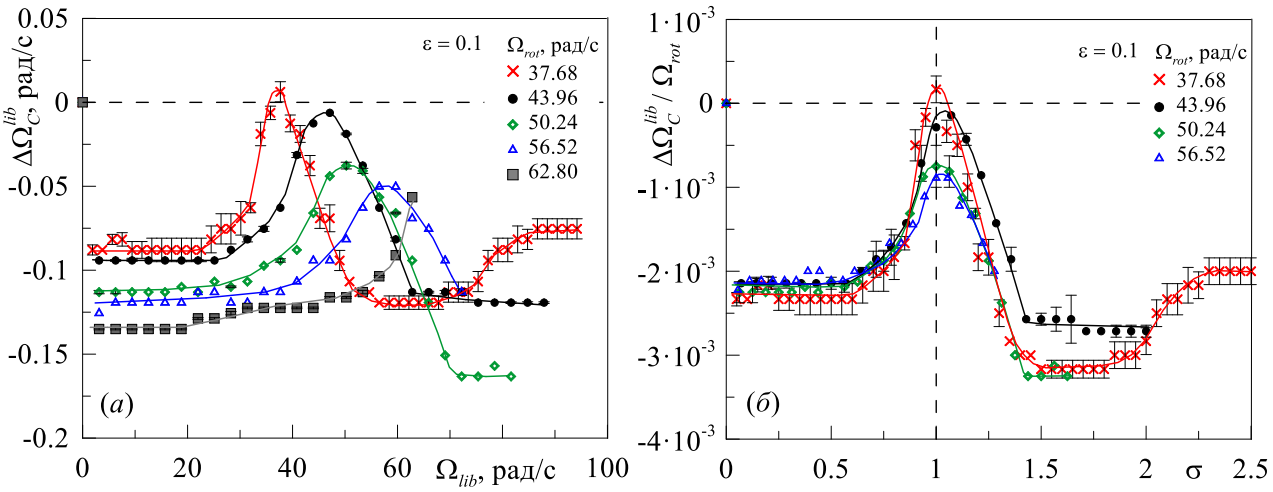


Рисунок 6.12 – Либрационная компонента скорости дифференциального вращения ядра в зависимости от частоты либраций при $\nu = 6.2$ сСт

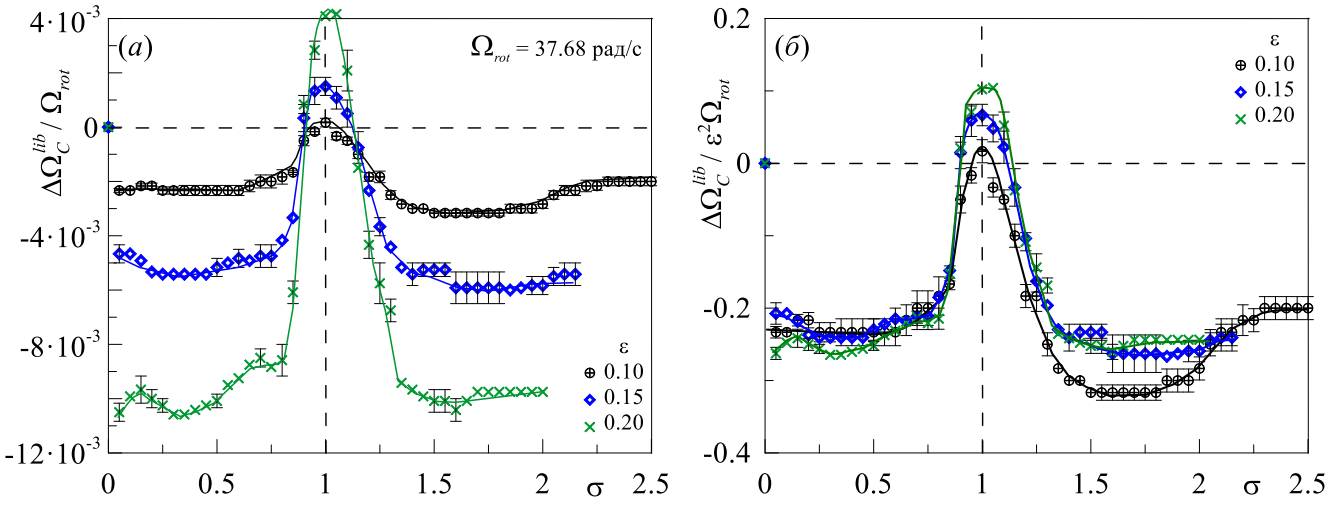


Рисунок 6.13 – Влияние амплитуды либраций ε на либрационную компоненту скорости дифференциального вращения ядра

С увеличением ε возбуждаемое либрациями отстающее дифференциальное вращение ядра возрастает (рис. 6.13*а*). Из [38] следует, что либрации полости генерируют осреднённое отстающее движение жидкости, интенсивность которого пропорциональна квадрату амплитуды модуляции, ε^2. Результаты экспериментов, полученные при различных значениях ε удовлетворительно согласуются между собой на плоскости $\left(\sigma, \Delta\Omega_C^{lib} / \varepsilon^2\Omega_{rot}\right)$ (рис. 6.13*б*). Это свидетельствует, что скорость дифференциального вращения свободного ядра $\left|\Delta\Omega_C^{lib}\right| / \Omega_{rot}$ пропорциональна скорости осреднённого движения жидкости $\left|\Delta\Omega^{lib}\right| / \Omega_{rot}$, а скорость дифференциального вращения ядра является мерой интенсивности зонального течения жидкости в полости. Аналогичная связь между вращением свободного ядра и зональными потоками была установлена в случае трансляционных колебаний ядра в сферической полости, вращающейся с неизменной скоростью [А19, Раздел 4.2.2].

Детальное исследование зависимости скорости дифференциального вращения ядра, обусловленного либрациями $\left|\Delta\Omega_C^{lib}\right| / \Omega_{rot}$, от амплитуды ε, при различных значениях σ представлено на рис. 6.14. Эксперименты выполнены при сравнительно быстром вращении полости, $\Omega_{rot} = 50.24$ рад/с, когда вклад гравитационного механизма дифференциального вращения ядра составляет

$\Delta\Omega_C^g / \Omega_{rot} = -0.048$ (рис. 6.11). Как отмечалось выше (рис. 6.12), скорость вращения Ω_C^{lib} в этом случае имеет отрицательное значение и не меняет знака во всем исследованном диапазоне σ и ε. Изменение $\left|\Delta\Omega_C^{lib}\right| / \Omega_{rot}$ с ε можно аппроксимировать степенной зависимостью $\left|\Delta\Omega_C^{lib}\right| / \Omega_{rot} \sim \varepsilon^{\gamma}$. Как видно из рис. 6.14, в условиях проведенного эксперимента практически во всем диапазоне частот σ выполняется квадратичная зависимость, Изменение показателя степени γ с частотой либраций представлено на рис. 6.15. Отличие от квадратичного закона наблюдается в окрестности $\sigma = 1$ и в областях, соответствующих собственным частотам колебаний ядра. Далее будет показано, что нарушение квадратичной зависимости $\left|\Delta\Omega_C^{lib}\right| / \Omega_{rot}(\varepsilon)$ в этих областях связано с трансляционными колебаниями ядра относительно полости.

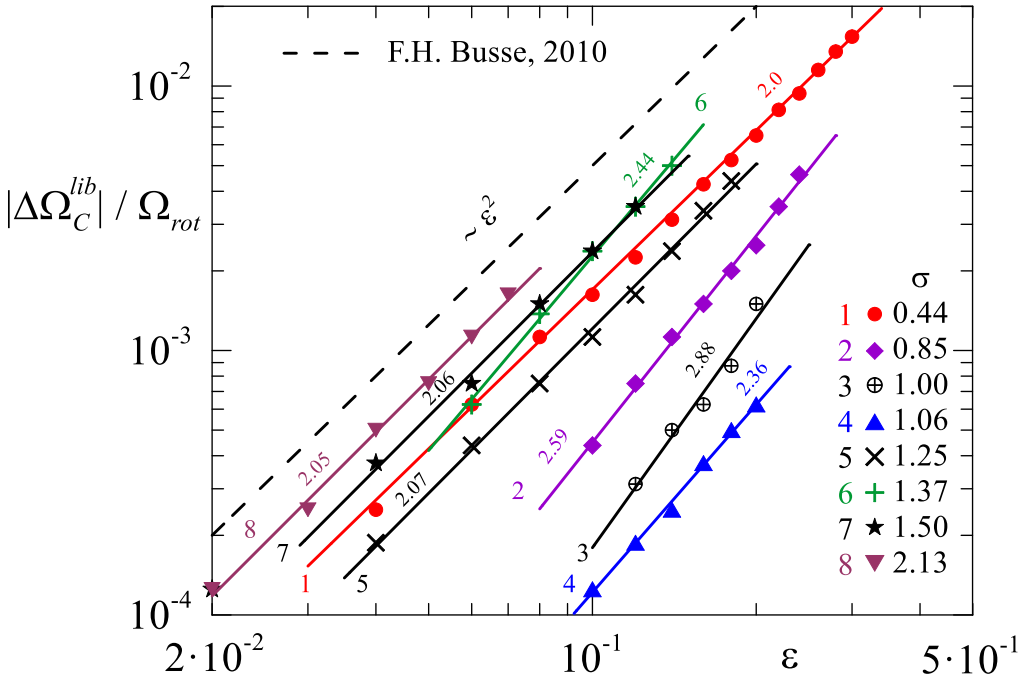


Рисунок 6.14 – Зависимость либрационной составляющей безразмерной скорости дифференциального вращения ядра от амплитуды либраций ε при $\Omega_{rot} = 50.24$ рад/с

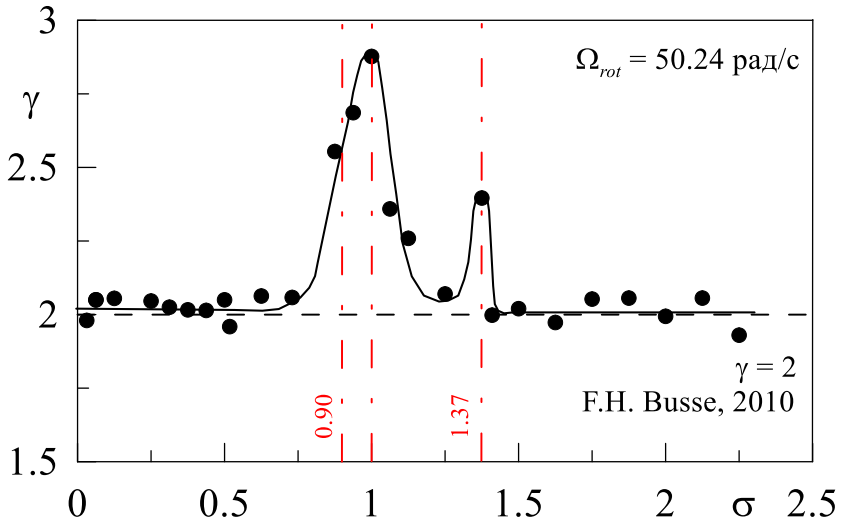


Рисунок 6.15 – Показатель степени зависимости $\left|\Delta\Omega_C^{lib}\right| / \Omega_{rot} \sim \varepsilon^{\gamma}$ от безразмерной частоты либраций σ

Выявленная зависимость $\left|\Delta\Omega_C^{lib}\right| / \Omega_{rot} \sim \varepsilon^2$ согласуется с асимптотическим законом, полученным Буссе [38] для осреднённого течения в либрирующей сферической полости. Как уже отмечалось ранее, этот результат является универсальным для разного типа гармонического воздействия [40].

6.4. Совпадение частоты либраций с частотой внешнего инерционного поля

В случае $\sigma = 1$ скорость ядра от амплитуды либраций $\Delta\Omega_C^{lib} / \Omega_{rot}\left(\varepsilon\right)$ зависит от величины возмущающего действия силы тяжести на центрифугированное ядро, т.е. от скорости вращения полости. При быстром вращении, когда вызванное силой тяжести смещение ядра из центра мало, либрации генерируют отстающее вращение ядра, величина которого монотонно возрастает с ε (рис. 6.16). Такое поведение качественно согласуется с результатами, описанными ранее при $\sigma > 1.5$, когда либрации вносят независимый вклад в дифференциальное вращение ядра. При понижении Ω_{rot}, а, следовательно, возрастании величины гравитационного смещения ядра с оси вращения, зависимость $\Delta\Omega_C^{lib} / \Omega_{rot}\left(\varepsilon\right)$ становится немонотонной, и в некотором интервале ε генерируется интенсивное опережающее вращение ядра (рис. 6.16).

Эксперименты показывают, что немонотонный характер изменения скорости связан с изменением величины радиального смещения ядра с оси вращения полости. На рис. 6.17*а* и *б* показаны зависимости положения ядра в горизонтальном (X) и вертикальном (Y) направлениях от либрационной компоненты угла поворота полости. В лабораторной системе отсчета траектория движения ядра имеет овальную форму. С увеличением ε центр колебаний смещается к оси вращения (рис. 6.17*в*). Это означает, что во вращающейся со скоростью Ω_{rot} системе отсчета ядро совершает колебания с частотой $\Omega = -\Omega_{rot}$, амплитуда которых изменяется в течение периода (рис. 6.18). Следовательно, специфическое поведение ядра вблизи $\sigma = 1$ связано с его комбинированными колебаниями разного типа. С одной стороны, ядро совершает круговые колебания во вращающейся системе отсчета с частотой Ω_{rot}, а с другой стороны ядро совершает радиальные колебания с частотой либраций Ω_{lib}. Таким образом, колебания ядра становятся негармоническими, что приводит к качественному изменению осреднённого воздействия поля силы тяжести.

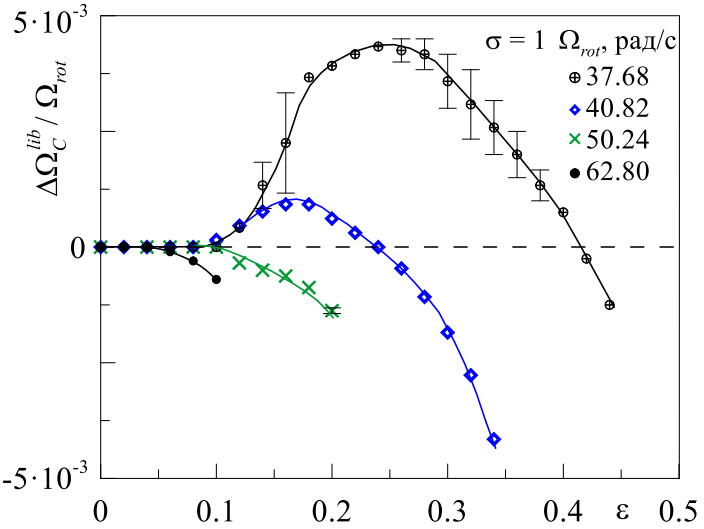


Рисунок 6.16 – Зависимость либрационной компоненты скорости ядра $\Delta\Omega_C^{lib} / \Omega_{rot}$ от амплитуды либраций при $\sigma = 1$ и различных значениях Ω_{rot}. Вязкость жидкости составляет $\nu = 6.2$ сСт. Экспериментальные точки для $\Omega_{rot} = 50.24$ рад/с (зеленые кресты) соответствуют точкам с номером 3 на рис. 6.14

Сложный характер зависимости $\Delta\Omega_C^{lib} / \Omega_{rot}(\varepsilon)$ связан с изменением вклада поля силы тяжести в дифференциальное вращение ядра. Либрационная компонента скорости дифференциального вращения рассчитывается как разность между результирующим вращением и вращением под действием поля силы тяжести: $\Delta\Omega_C^{lib} = \Delta\Omega_C - \Delta\Omega_C^g$. Так как амплитуда колебаний ядра за период меняется сложным образом (рис. 6.18), при различных значениях ε слагаемое $\Delta\Omega_C^g$ оказывается различным.

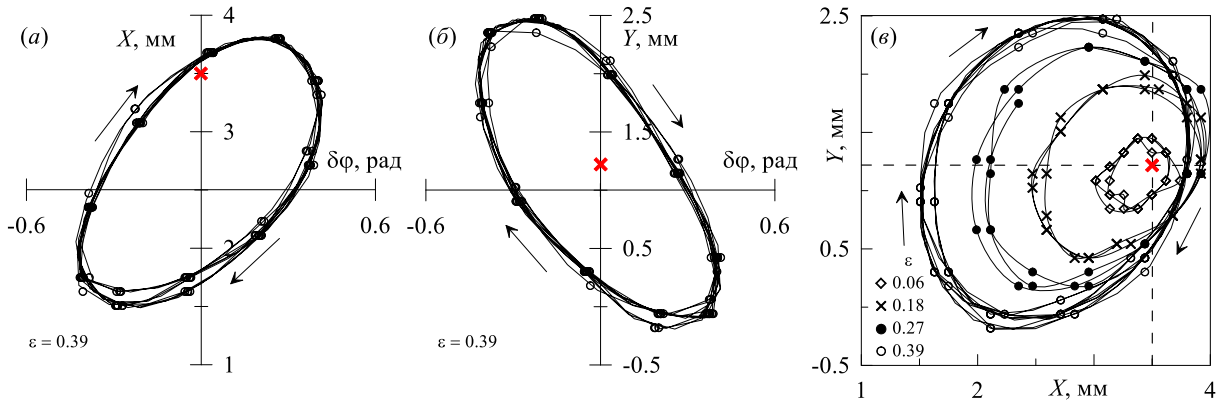


Рисунок 6.17 – Положение ядра вдоль горизонтальной ($а$) и вертикальной оси ($б$) в зависимости от либрационной компоненты угла поворота полости при $\Omega_{rot} = \Omega_{lib} = 37.68$ рад/с. На фрагменте ($в$) представлена траектория движения ядра в лабораторной системе отсчета при различных значениях ε. Красными крестами обозначены координаты центра ядра в отсутствие либраций

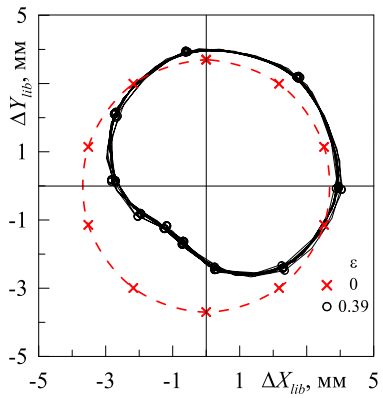


Рисунок 6.18 – Траектория движения ядра в системе отсчета, равномерно вращающейся со скоростью Ω_{rot}. Красной штриховой линией обозначена траектория движения центра ядра в отсутствие либраций, сплошной линией – при либрациях ($\Omega_{rot} = \Omega_{lib} = 37.68$ рад/с)

Таким образом, особенности влияния либраций с частотой $\sigma = 1$ на дифференциальное вращение ядра определяются воздействием резонансного типа на гравитационный механизм генерации осреднённого вращения. При этом частота либраций и связанных с ними радиальных колебаний ядра во вращающейся системе отсчета совпадает с частотой круговых трансляционных колебаний ядра, связанных с возмущающим действием внешнего статического силового поля. Колебания тела во вращающейся системе становятся негармоническими (рис. 6.18), то есть либрации изменяют непосредственно механизм генерации осреднённого движения ядра. Отметим, что в этом заключается качественное отличие от случая $\sigma = 1.37$, когда в результате либраций возбуждаются круговые колебания ядра с собственной частотой. В этом случае наблюдается резонансное увеличение амплитуды колебаний ядра аналогично тому, как это происходит при вибрациях полости. Как показано в [A9], результирующее дифференциальное вращение ядра определяется линейной суперпозицией осреднённых эффектов, связанных с колебаниями ядра с различными частотами. Одна частота соответствует $\omega / \Omega_{rot} = -1$ (под действием поля силы тяжести в системе отсчета полости), вторая частота совпадает с частотой либраций $\omega / \Omega_{rot} = 1.37$. Каждая из частот оказывает независимое осреднённое влияние. В результате суперпозиционного осреднённого воздействия скорость роста дифференциального вращения оказывается больше, чем вне резонансной области.

6.5. Влияние либраций на зональное течение. Принцип суперпозиции

В отсутствие либраций, колеблющееся в системе отсчета полости под действием силы тяжести ядро (осесимметричное положение показано на рис. 6.19*а* штриховой линией) генерирует осреднённое течение. Осреднённое течение характеризуется немонотонным изменением угловой скорости с удалением от оси вращения и имеет вид вложенных жидких цилиндров, вращающихся с различными угловыми скоростями [Раздел 4.2.2, A19].

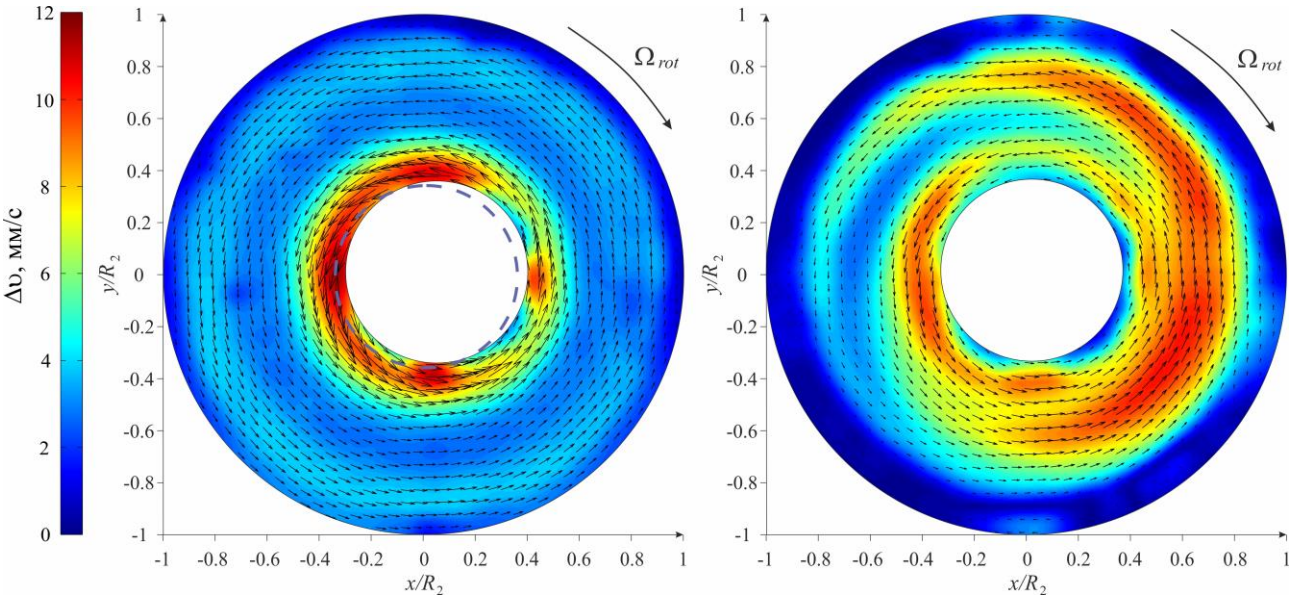


Рисунок 6.19 – Поле азимутальной скорости жидкости в экваториальной плоскости при частоте $\sigma = 1.75$ и амплитуде $\varepsilon = 0.08$ (*а*) и при $\sigma = 1$ и $\varepsilon = 0.10$ (*б*) ($\Omega_{rot} = 50.24$ рад/с, $\nu = 6.0$ сСт; $\mathrm{E} = 7.4 \cdot 10^{-4}$). Направление вращения полости по часовой стрелке. Штриховой линией показано осесимметричное положение ядра

При либрационном воздействии поле скорости изменяется, однако в условиях проведенного эксперимента структура течения не испытывает качественного изменения, течение сохраняет двумерную структуру в виде столбов, вращающихся с разной скоростью. Профили осреднённого осесимметричного течения при либрационном воздействии показаны на рис. 6.20*а*. При $r / R_2 < 0.75$ либрации полости приводят к увеличению ретроградного вращения жидкости гравитационной природы. В то же время в области $r / R_2 > 0.75$ либрации уменьшают отстающее дифференциальное вращение. С повышением ε интенсивность осреднённого течения, связанного с либрациями, увеличивается.

В случае, когда действует несколько различных механизмов генерации осреднённых потоков, не влияющих друг на друга, дифференциальное вращение жидкости определяется линейной суперпозицией вызванных этими механизмами осреднённых течений. К примеру, это наблюдалось в случае трансляционных колебаний ядра с несколькими различными частотами [Раздел 4.4, А8]. Из рис. 6.15 можно сделать вывод, что за исключением ограниченной области частот в

окрестности $\sigma = 1$ и частот, совпадающих с собственными трансляционными модами колебаний ядра, либрации действуют на систему независимо от поля силы тяжести. В предположении аддитивности осреднённых эффектов, вызываемых независимо полем силы тяжести и либрациями, остановимся на случае $\sigma = 1.75$ и разложим результирующее вращение жидкости $\Delta\Omega$ на две составляющие: $\Delta\Omega = \Delta\Omega^g + \Delta\Omega^{lib}$. Здесь $\Delta\Omega^g$ – дифференциальное вращение жидкости, связанное с действием поля силы тяжести (см. рис. 6.20*а*, $\varepsilon = 0$); $\Delta\Omega^{lib}$ – скорость дифференциального вращения, вызванного либрациями.

Либрационная компонента скорости, полученная методом исключения гравитационной составляющей при различных значениях ε, представлена на рис. 6.20*б*. Видно, что либрации генерируют отстающее дифференциальное вращение в центральной части полости. При этом свободное ядро выступает своеобразным индикатором интенсивности течения, откликаясь на изменение скорости движения жидкости (рис. 6.14). На периферии, при $r / R_2 > 0.75$, наоборот, генерируется опережающее течение. Ранее подобного вида структура с таким же аспектным отношением η наблюдалась в численных экспериментах [100], когда внутреннее ядро было зафиксировано на оси вращения полости и вращалось равномерно, а полость либрировала. Было обнаружено, что при $\sigma < 2$ либрации полости генерируют отстающее осреднённое течение, интенсивность которого возрастает по мере удаления от оси вращения. Однако в приэкваториальной области возбуждается опережающее течение, максимум которого приходится на $r / R_2 \approx 0.95$, что согласуется с данными результатами. Экспериментальные исследования структуры течения в либрирующей сферической [149] и цилиндрической [Раздел 2.2.4, 148] полостях в отсутствие внутреннего ядра также качественно согласуются с результатами настоящих экспериментов. Кроме того, интенсивное приэкваториальное опережающее течение наблюдалось и в случае прецессии оси вращения полости [34, 134, 133]. Как и в вышеупомянутых работах, интенсивность осреднённого течения пропорциональна квадрату амплитуды колебаний жидкости в пограничном слое Экмана, $\Delta\Omega^{lib} / \Omega_{rot} \sim \varepsilon^2$. Об этом свидетельствует

удовлетворительное согласие между собой распределений скорости при различных значениях ε после нормировки, $\Delta\Omega^{lib} / \Omega_{rot}\varepsilon^2$ (рис. 6.21).

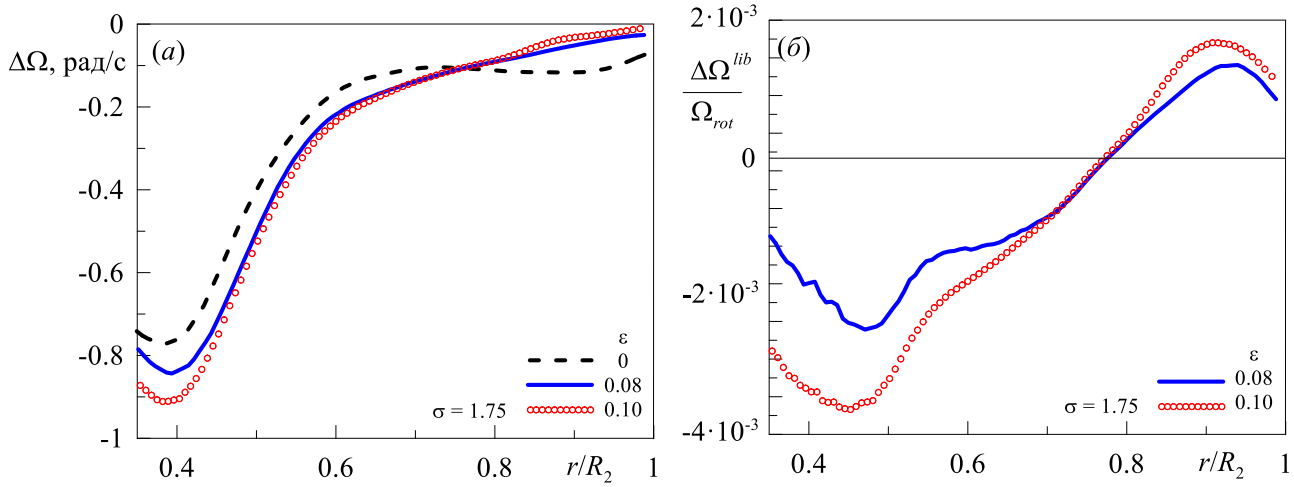


Рисунок 6.20 – Профили результирующей угловой скорости жидкости $\Delta\Omega = \Delta\Omega^{g} + \Delta\Omega^{lib}$ (*а*) и только либрационной составляющей скорости $\Delta\Omega^{lib}$ (*б*) в экваториальной плоскости при различных значениях ε и $\mathrm{E} = 2.6 \cdot 10^{-4}$

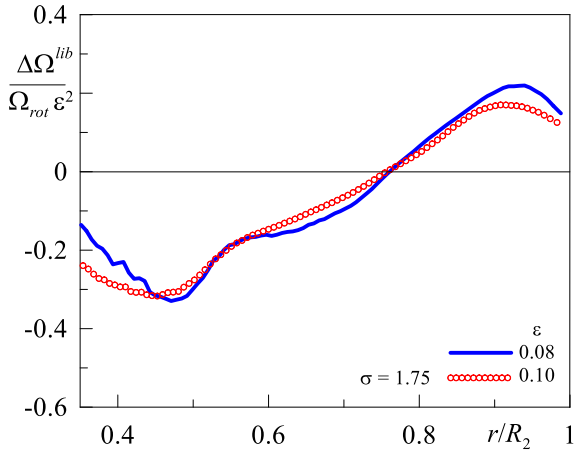


Рисунок 6.21 – Профили либрационной составляющей азимутальной скорости жидкости в экваториальной плоскости, нормированной на ε^2

При либрационном воздействии с частотой $\sigma = 1$ поле осреднённой азимутальной скорости становится асимметричным (рис. 6.19*б*). Такое поле скорости сохраняется неизменным в системе отсчета, вращающейся со скоростью Ω_{rot} (средняя скорость вращения полости). Если частота либраций незначительно отличается от $\sigma = 1$, структура потоков остается практически неизменной, но мед-

ленно поворачивается относительно полости. При $\sigma > 1$ структура совершает опережающее вращение, а при $\sigma < 1$ – отстающее (рис. 6.22). Эксперименты показывают, что скорость дифференциального вращения структуры $\Delta\Omega_{sp} / \Omega_{rot}$ не зависит от амплитуды либраций и описывается законом $\Delta\Omega_{sp} / \Omega_{rot} = \left(\Omega_{lib} - \Omega_{rot}\right) / \Omega_{rot}$. Это свидетельствует о том, что эффект нарушения осевой симметрии течения связан исключительно с нелинейным взаимодействием вызванных либрациями колебаний тела с круговыми поступательными колебаниями ядра в системе отсчета полости, связанными с силой тяжести и происходящими с частотой Ω_{rot} (см. рис. 6.18). В результате либраций с частотой вращения вызываемые полем силы тяжести колебания ядра относительно полости становятся негармоническими. Таким образом, при $\sigma = 1$ либрации влияют непосредственно на механизм генерации течений статическим внешним силовым полем, при этом принцип суперпозиции течений, возбуждаемых различными механизмами, не выполняется.

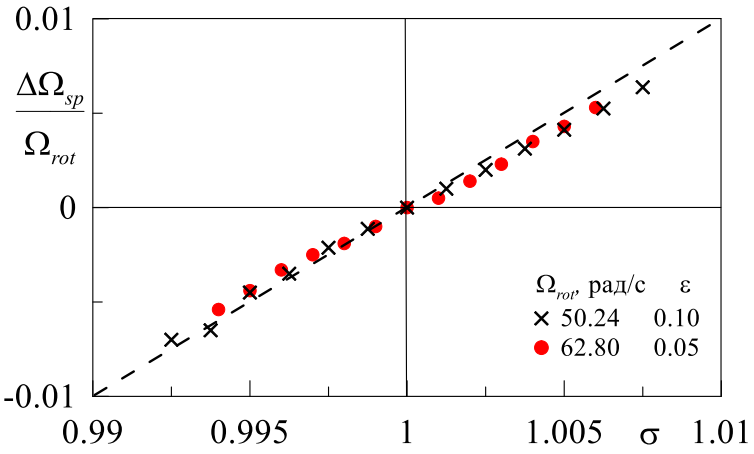


Рисунок 6.22 – Скорость вращения асимметричной структуры течения относительно полости в зависимости от безразмерной частоты либраций в окрестности $\sigma = 1$

Следует отметить, что подобное изменение в структуре течения наблюдалось ранее при вибрационном воздействии на вращающуюся в поле силы тяжести сферу со свободным ядром [Раздел 4.4, А8]. В случае, когда частота осцилляций внешнего силового поля совпадала со скоростью вращения полости ($n = 1$), течение теряло осевую симметрию и становилось эллиптическим в поперечном сече-

нии. Обнаруженное явление также объяснялось изменением характера колебаний ядра относительно полости в результате сложения осцилляций тела, вызванных силовыми полями различной природы.

6.6. Основные выводы по главе

Экспериментально исследованы динамика свободного легкого ядра и движение жидкости в сферической полости, вращающейся вокруг горизонтальной оси. Под действием силы тяжести в системе отсчета полости ядро смещено с оси вращения и совершает отстающее дифференциальное вращение. Обнаружено, что периодическое изменение скорости вращения (либрации) генерирует осреднённое движение жидкости в результате нелинейных эффектов в пограничных слоях Экмана. В результате свободное ядро и жидкость во вращающейся полости приходят в дополнительное дифференциальное вращение. Если частота либраций мала по сравнению с частотой вращения полости, дифференциальное вращение ядра периодически меняется с частотой либраций. При этом амплитуда вращательных колебаний (либраций) ядра определяется отношением обратного времени спинапа $\sqrt{\mathrm{E}}$ к частоте либраций σ. В свою очередь, скорость осреднённого дифференциального вращения ядра, характеризующая скорость зонального движения жидкости, возрастает пропорционально квадрату амплитуды либраций ε^2 и не зависит от частоты либраций. Этот результат хорошо согласуется с теорией Буссе осреднённых потоков, возбуждаемых во вращающейся сферической полости низкочастотными либрациями малой амплитуды [38], построенной в приближении малых чисел Экмана, без учета инерционных волн. Сделан вывод, что свободное ядро в этом случае не играет активной роли, а лишь выступает в качестве индикатора интенсивности и направления осреднённых зональных потоков жидкости. Следует отметить, что влияние либраций исследуется на возмущенную гравитационным полем систему (ядро смещено относительно оси вращения), что усложняет динамику. Так, в низкочастотном диапазоне либраций изменение дифференциального вращения ядра сопровождается периодическим изменением смещения ядра относительно оси вращения. На доле периода, когда ядро приближается к оси вращения,

возбуждаются его трансляционные колебания с собственной частотой. Возможно, в случае осесимметричного положения ядра этот эффект будет отсутствовать.

Качественное изменение в поведении ядра и структуре осреднённых потоков обнаружено при совпадении частоты либраций со скоростью вращения полости $\left(\Omega_{lib} = \Omega_{rot}\right)$. В этом случае трансляционные колебания ядра во вращающейся системе отсчета определяются синхронным действием либраций и силы тяжести. Вследствие этого вызванные полем силы тяжести колебания ядра во вращающейся системе становятся негармоническими. Таким образом, либрации оказывают влияние непосредственно на гравитационный механизм генерации осреднённых потоков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования. Экспериментально исследованы линейные и нелинейные режимы инерционных волн, а также их влияние на осреднённые течения во вращающихся полостях различной геометрии (цилиндр, кольцевой слой, сферический слой) при различных способах гармонического воздействия (либрации, прецессия, колебания внутреннего ядра). Основные выводы состоят в следующем:

1. Разработан комплекс оригинальных экспериментальных методик, позволяющих выполнять PIV-визуализацию мгновенных полей скорости во вращающихся полостях, основываясь на анализе данных в лабораторной системе отсчёта.

2. Гармоническое воздействие на вращающиеся жидкости поддерживает глобальные инерционные моды, возбуждение которых сопровождается резонансным увеличением скорости осцилляционного течения.

- В либрирующих цилиндрических полостях с прямыми торцевыми стенками обнаружены осесимметричные моды, напоминающие стоячие волны с чётными осевыми волновыми числами. Наклон торцевых стенок относительно плоскости поперечного сечения обеспечивает существование неосесимметричных мод с азимутальными волновыми числами $k = 1$.
- Во вращающемся сферическом слое пространственная структура мод зависит от направления круговых колебаний ядра относительно полости: опережающее движение возбуждает экваториально-симметричные моды сферы, отстающее – моды с ярко выраженной приполярной меридиональной циркуляцией.

3. Наличие наклонных стенок (непараллельных и неперпендикулярных оси вращения) приводит к фокусировке волн на замкнутые траектории – волновые аттракторы.

- В цилиндрических полостях с неосесимметричными торцами наблюдается «захват» волнового аттрактора вдоль выделенного азимутального

направления, что является первым экспериментальным подтверждением существования так называемого супер-аттрактора.

- При неосесимметричном воздействии (прецессия диска в цилиндрическом слое и круговые колебания ядра) эффекты фокусировки наблюдаются только при отстающих колебаниях относительно глобального вращения, что согласуется с результатами прямого численного моделирования других авторов.
- Обнаружены эффекты формирования замкнутых волновых траекторий в цилиндрических полостях, не связанных с фокусировкой волн в аттракторы (режимы симметричного распространения волновых лучей), для которых исследованы законы масштабирования ширины сдвиговой зоны в инерционной волне и скорости жидкости от числа Экмана.

4. Впервые обнаружена и исследована осреднённая меридиональная циркуляция, генерируемая инерционными колебаниями жидкости в пограничных слоях Стокса вблизи боковой цилиндрической стенки. Показано, что пространственная структура течения (количество тороидальных вихрей и их распределение вдоль оси вращения) связана с осевым волновым числом инерционной моды.

5. Исследованы закономерности формирования осреднённых зональных течений. Обнаружено, что независимо от геометрии полости и способа гармонического воздействия скорость осреднённого движения квадратичным образом зависит от амплитуды колебаний жидкости.

- В осесимметричных полостях структура течения представляет собой совокупность жидких геострофических цилиндров, вращающихся с различными угловыми скоростями; двумерный характер течения нарушается вблизи пограничных слоёв на твёрдых границах, где возникает осреднённая меридиональная циркуляция. В цилиндрах с наклонными торцами возникает неосесимметричное течение в виде системы стационарных валов, ориентированных вдоль оси вращения полости.
- Показано, что корректировки в дифференциальное вращение жидкости вносят два фактора. Первый связан с отражением волновых лучей от

наклонных границ полостей и наиболее ярко проявляется в условиях фокусировки. Механизм генерации течения объясняется нелинейными эффектами в пограничных слоях на стенках полости вследствие азимутальной неоднородности осцилляционного движения. Второй проявляется только в сферическом слое и связан с наличием критических широт на границе ядра – точек излучения волн.

6. Сформулированы принципы аддитивности осреднённых течений во вращающемся сферическом слое: результирующее движение жидкости является суперпозицией течений, возбуждаемых колебаниями ядра с различными частотами. В частности, это позволяет объяснить нарушение осевой симметрии зонального течения при совпадении частоты воздействия с одной из собственных частот колебаний ядра. При дифференциальном вращении ядра экмановский механизм генерации течений вносит аддитивный вклад в результирующее течение, а свободное ядро выступает в качестве индикатора интенсивности зонального потока.

7. Экспериментально исследованы нелинейные режимы инерционных волн, переход к которым осуществляется по сценарию триадных взаимодействий.

- Во вращающемся цилиндре источник неустойчивости зависит от режима осцилляционного течения. В условиях аттрактора неустойчивость зарождается в пограничных слоях Стокса на боковой стенке полости. В случае глобальной моды неустойчивость зарождается в объёме полости и связана с триадным резонансом одной вынужденной и двух свободных мод цилиндра.
- Дана классификация нелинейных режимов во вращающемся сферическом слое: триадный резонанс (T-режим), параметрический резонанс (P-режим), низкочастотный режим (L-режим). Последний связан с развитием медленных длинноволновых возмущений и характерен для всех рассмотренных в рамках диссертации задач в области больших амплитуд воздействия.

- Продемонстрировано, что волновой распад может одновременно происходить как на периферии сферического слоя, так и вблизи оси вращения с одинаковыми частотами, но разными волновыми числами.

8. Триадный резонанс инерционных волн индуцирует развитие неустойчивости осреднённого (по периоду воздействия) зонального течения.

- В цилиндрической полости сценарий нелинейного отклика жидкости зависит от структуры вынужденного осцилляционного течения. В слабонелинейном режиме инерционной моды пороговым образом возникает азимутально-периодическая система вытянутых вдоль оси вращения валов. В сильно нелинейном режиме наблюдается пороговый переход к системе циклонов, локализованных вблизи боковой стенки и вращающихся в отстающем направлении. В условиях аттрактора неустойчивость сопровождается возникновением и разрушением осреднённых вихревых пар, совершающих антициклонический дрейф по сложным траекториям.
- Во вращающемся кольцевом слое с коническим торцом обнаружено развитие топографических волн Россби, возникающих в результате инверсии зонального течения вблизи внутренней границы слоя. Показано, что с увеличением амплитуды накачки азимутальное волновое число растёт.
- Во вращающемся сферическом слое обнаружена серия неустойчивостей, проявляющихся в развитии нескольких систем валов на разных расстояниях от оси вращения. Различные волновые моды могут существовать независимо с разными частотами и азимутальными волновыми числами. Показано, что природа неустойчивостей может быть связана как с наличием точек перегиба в осреднённом зональном течении, так и со сдвиговыми потоками в осциллирующих слоях, возникающих в инерционной волне большой амплитуды.
- Впервые показано, что пороги неустойчивостей осреднённого течения, возбуждаемого колебаниями ядра, на порядок ниже, чем в случае классической сдвиговой неустойчивости в дифференциально вращающемся сферическом слое.

9. Впервые исследована динамика свободного ядра и жидкости в либрирующей вокруг горизонтальной оси сферической полости. Обнаружено, что низкочастотные либрации посредством вязкого взаимодействия возбуждают вращательные колебания ядра, амплитуда которых определяется отношением обратного времени спинапа к безразмерной частоте либраций полости. На долю периода возбуждаются собственные круговые моды ядра.

Полученные результаты проливают свет на вибрационную динамику жидкости и твердых включений во вращающихся системах и, в частности, могут быть важны при понимании роли осциллирующих силовых полей в динамике жидких планетарных оболочек.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы. Экспериментально обнаруженные эффекты фокусировки инерционных волн требуют дальнейшего детального исследования. В частности, большой интерес представляет азимутальный захват волн в зависимости от частоты воздействия и геометрии кюветы. Также необходима разработка теоретических подходов для полного физического описания механизма генерации осреднённой меридиональной и азимутальной циркуляции жидкости, возбуждаемой инерционными волнами при их взаимодействии с твёрдыми границами. Здесь же стоит отметить запланированную работу по исследованию устойчивости течения в осциллирующих пограничных слоях и их влияния на развитие нелинейных волновых режимов.

Для выявления особенностей генерации двумерных азимутально-периодических структур требуется дальнейшее исследование трёхмерной структуры нелинейных инерционно-волновых режимов. Также требуется объяснение физического механизма возникновения низкочастотных субгармоник в сильно нелинейных режимах и особенностей перераспределения энергии колебаний жидкости в крупномасштабные структуры. Как показывают эксперименты, такой сценарий является универсальным для любого типа воздействия независимо от формы полости. В частности, необходимо теоретическое объяснение квазидвумерных структур с дисперсией, подобной волнам Россби, в цилиндрической полости в отсутствие явного бета-эффекта.

Что касается вращающегося кольцевого слоя жидкости с коническим торцом, перспективным направлением является чёткая классификация линейных волновых режимов в зависимости от знака прецессии по отношению к глобальному вращению, а также объяснение отсутствия фокусировки волн в аттрактор при опережающем неосесимметричном воздействии.

Для выявления универсальных закономерностей поведения жидкости в асимптотических пределах необходимо расширение диапазона величин управляющих параметров. Предварительные эксперименты по исследованию течений во вращающемся сферическом слое демонстрируют усложнение волновой динамики и расширение спектра наблюдаемых нелинейных режимов с уменьшением числа Экмана. Здесь же стоит отметить, что основной объем данных получен для аспектного соотношения ½, хотя с геофизической точки зрения наиболее интересным является ⅓. С увеличением относительного объёма слоя ожидается не только возбуждение дополнительных экваториально-симметричных мод, но и тороидальных мод сферы. В случае с осевыми колебаниями ядра ожидается доминирование экваториально-несимметричных мод, изучение которых также представляет большой интерес.

В диссертации получена классификация нелинейных режимов инерционных волн при опережающих круговых колебаниях ядра. Для случая отстающих колебаний такая классификация по-прежнему отсутствует. В частности, на первом этапе необходимо провести спектральный анализ мгновенных азимутальных полей скорости для безразмерной частоты $n = -1$.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

A1. *Subbotin S.*, *Shiryaeva M.*, *Shmakova N.*, *Ermanyuk E.* Nonlinear dynamics of inertial waves in a rotating spherical shell // Phys. Fluids. – 2026. – Vol. 38 (5). – P. 054110. DOI: 10.1063/5.0320473. (Q1).

A2. *Subbotin S.*, *Shiryaeva M.*, *Shmakova N.*, *Ermanyuk E.* Zonal flow instability induced by nonlinear inertial waves in a librating cylinder with sloping ends // Phys. Fluids. – 2024. – Vol. 36 (12). – P. 124121. DOI: 10.1063/5.0239827. (Q1).

A3. *Subbotin S.*, *Shmakova N.*, *Kozlov V.*, *Ermanyuk E.* Nonlinear regimes of inertial wave attractors generated by a precessing lid: zonal flows and Rossby waves // Phys. Fluids. – 2023. – Vol. 35 (7). – P. 074110. DOI: 10.1063/5.0151736. (Q1).

A4. *Subbotin S.*, *Shmakova N.*, *Ermanyuk E.*, *Kozlov V.* Stewartson layer instability and triadic resonances in rotating sphere with oscillating inner core // Phys. Fluids. – 2022. – Vol. 34 (6). – P. 064103. DOI: 10.1063/5.0090492. (Q1).

A5. *Subbotin S.*, *Shiryaeva M.* On the linear and non-linear fluid response to the circular forcing in a rotating spherical shell // Phys. Fluids. – 2021. – Vol. 33 (6). – P. 066603. DOI: 10.1063/5.0050403. (Q1).

A6. *Subbotin S.* Steady circulation induced by inertial modes in a librating cylinder // Phys. Rev. Fluids. – 2020. – Vol. 5 (1). – P. 014804. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.5.014804. (Q1).

A7. *Kozlov V. G.*, *Subbotin S. V.* Librations induced zonal flow and differential rotation of free inner core in rotating spherical cavity // Phys. Fluids. – 2017. – Vol. 29 (9). – P. 096601. DOI: 10.1063/1.5000864. (Q1).

A8. *Kozlov V. G.*, *Kozlov N. V.*, *Subbotin S. V.* Steady flows in rotating spherical cavity excited by multi-frequency oscillations of free inner core // Acta Astronaut. – 2017. – Vol. 130. – P. 43–51. DOI: 10.1016/j.actaastro.2016.10.018. (Q1).

A9. *Kozlov V. G.*, *Kozlov N. V.*, *Subbotin S. V.* The effect of oscillating force field on the dynamics of free inner core in a rotating fluid-filled spherical cavity // Phys. Fluids. – 2015. – Vol. 27 (12). – P. 124101. DOI: 10.1063/1.4936399. (Q1).

A10. *Kozlov V. G.*, *Kozlov N. V.*, Subbotin S. V. Influence of an external force field on the dynamics of a free core and fluid in a rotating spherical cavity // Phys. Fluids. – 2015. – Vol. 27 (7). – P. 074106. DOI: 10.1063/1.4926804. (Q1).

A11. Subbotin S., *Shiryaeva M.* Inertial wave attractors in librating cylinders: axisymmetric versus nonaxisymmetric ends // Microgravity Sci. Technol. – 2025. – Vol. 37. – P. 14. DOI: 10.1007/s12217-025-10164-w.

A12. *Shiryaeva M.*, *Subbotina M.*, Subbotin S. Linear and non-linear dynamics of inertial waves in a rotating cylinder with antiparallel inclined ends // Fluid Dyn. Mater. Process. – 2024. – Vol. 20 (4). – P. 787–802. DOI: 10.32604/fdmp.2024.048165.

A13. Subbotin S., *Shiryaeva M.* Inertial wave beam path in a non-uniformly rotating cylinder with sloping ends // Microgravity Sci. Technol. – 2023. – Vol. 35 (3). – P. 32. DOI: 10.1007/s12217-023-10054-z.

A14. Subbotin S., *Shiryaeva M.* Steady vortex flow induced by inertial wave attractor in a rotating cylinder with liquid // Microgravity Sci. Technol. – 2022. – Vol. 34 (5). – P. 89. DOI: 10.1007/s12217-022-10008-x.

A15. Subbotin S. V., *Kozlov V. G.* Effect of differential rotation of oscillating inner core on steady flow instability in a rotating sphere // Microgravity Sci. Technol. – 2020. – Vol. 32 (5). – P. 825–836. DOI: 10.1007/s12217-020-09806-y.

A16. *Kozlov V. G.*, Subbotin S. V., *Shiryaeva M. A.* Instabilities of steady flow in a rotating spherical cavity excited by inner core oscillation // Microgravity Sci. Technol. – 2019. – Vol. 31 (6). – P. 775–782. DOI: 10.1007/s12217-019-09706-w.

A17. Subbotin S. V., *Dyakova V. V.* Inertial waves and steady flows in a liquid filled librating cylinder // Microgravity Sci. Technol. – 2018. – Vol. 30 (4). – P. 383–392. DOI: 10.1007/s12217-018-9621-x.

A18. *Kozlov V. G.*, *Kozlov N. V.*, Subbotin S. V. Instabilities and pattern formation in rotating spherical cavity with oscillating inner core // Eur. J. Mech. B/Fluids. – 2017. – Vol. 63 (3). – P. 39–46. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2017.01.006.

A19. *Kozlov V. G.*, *Kozlov N. V.*, Subbotin S. V. Steady flows excited by circular oscillations of free inner core in rotating spherical cavity // Eur. J. Mech. B/Fluids. – 2016. – Vol. 58 (4). – P. 85–94. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2016.03.008.

A20. *Ширяева М. А.*, *Субботин С. В.* О влиянии неосесимметричных инерционных волн на осреднённую циркуляцию жидкости во вращающемся цилиндре // Вестник томского государственного университета. Математика и механика. – 2024. – Т. 91. № 5. – С. 153–167. DOI: 10.17223/19988621/91/13.

A21. *Субботин С. В.*, *Ширяева М. А.* Экспериментальное исследование линейного и нелинейного режимов аттракторов инерционных волн во вращающемся цилиндре с неосесимметричными торцами // Прикладная механика и техническая физика. – 2023. – Т. 64. № 2. – С. 85–94. DOI: 10.15372/PMTF2022 15180 (*Subbotin S. V.*, *Shiryaeva M. A.* Experimental Study of the Linear and Nonlinear Regimes of Inertial Wave Attractors in a Rotating Cylinder with Non-Axisymmetric Ends // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2023. – Vol. 64 (2). – P. 248–257. DOI: 10.1134/S0021894423020098).

A22. *Козлов В. Г.*, *Субботин С. В.* Осредненное течение, генерируемое ядром, колеблющимся во вращающейся сферической полости // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59. № 1. – С. 28–38. DOI: 10.15372/PMTF 20180104 (*Kozlov V. G.*, *Subbotin S. V.* Steady flows generated by a core oscillating in a rotating spherical cavity // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2018. – Vol. 59 (1). – P. 22–31. DOI: 10.1134/S0021894418010042).

A23. *Козлов В. Г.*, *Козлов Н. В.*, *Субботин С. В.* Движение жидкости и твердого ядра в сферической полости, вращающейся во внешнем силовом поле // Докл. РАН. – 2014. – Т. 454. № 2. – С. 173–177. DOI: 10.7868/S08695652140 2011X (*Kozlov V. G.*, *Kozlov N. V.*, *Subbotin S. V.* Motion of fluid and a solid core in a spherical cavity rotating in an external force field // Doklady Phys. – 2014. – Vol. 59 (1). – P. 40–44. DOI: 10.1134/S1028335814010078).

A24. *Subbotin S.* On the origin of geostrophic liquid cylinders in rotating sphere with oscillating inner core // J. Phys.: Conf. Ser. – 2021. – Vol. 1945. – P. 012058. DOI: 10.1088/1742-6596/1945/1/012058.

A25. *Subbotin S.* Non-axisymmetric flow excited by fluid oscillations in a rotating cylinder with sloping ends // J. Phys.: Conf. Ser. – 2021. – Vol. 1809. – P. 012015. DOI: 10.1088/1742-6596/1809/1/012015.

A26. *Subbotin S., Shiryaeva M., Kozlov V.* Inertial waves generated by circular oscillations of inner core in a rotating spherical cavity // J. Phys.: Conf. Ser. – 2020. – Vol. 1666. – P. 012051. DOI: 10.1088/1742-6596/1666/1/012051.

A27. *Субботин С. В., Кропачева А. С.* Осреднённые течения, возбуждаемые инерционными модами в либрирующем цилиндре // Вестник Пермского университета. Физика. – 2018. – №4 (42). – С. 67–73. DOI: 10.17072/1994-3598-2018-4-67-73.

Патенты и зарегистрированные результаты интеллектуальной деятельности

Б1. Патент на полезную модель № 208677 U1 РФ, МПК B01F 9/00, B01F 3/08. Перемешиватель жидкостей: № 2020139226: заявл. 27.11.2020: опубл. 29.12.2021 / *В. Г. Козлов, С. В. Субботин*; заявитель ФГБОУ ВО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет».

Б2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022611161 РФ. Лучевая модель визуализации инерционных волн в неравномерно вращающемся цилиндре: № 2021681972: заявл. 24.12.2021: опубл. 20.01.2022 / *М. А. Ширяева, С. В. Субботин*; заявитель ФГБОУ ВО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет».

Б3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2021666143 РФ. Модель трассировки инерционных волн во вращающемся сферическом слое: № 2021665419: заявл. 04.10.2021: опубл. 08.10.2021 / *М. А. Ширяева, С. В. Субботин*; заявитель ФГБОУ ВО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гринспен Х.* Теория вращающихся жидкостей. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 304 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. – 5-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2006. – 736 с. – (Теоретическая физика, Т. VI).
3. *Zhang K., Liao X.* Theory and modeling of rotating fluids: convection, inertial waves and precession. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. – 526 p.
4. *Triana S. A., Rekier J., Trinh A., Dehant V.* The coupling between inertial and rotational eigenmodes in planets with liquid cores // Geophys. J. Int. – 2019. – Vol. 218, No. 2. – P. 1071–1086.
5. *Dewberry J. W.* Tidally driven inertial waves enhance eccentricity damping and spin evolution in planets and stars // Astrophys. J. – 2026. – Vol. 997, No. 1. – P. 27.
6. *Joubaud S., Boury S., Odier P.* Internal gravity waves versus inertial waves in the laboratory // Comptes Rendus. Physique. – 2024. – Vol. 25, Special Issue S3. – P. 509–535.
7. *Pedlosky J.* Geophysical Fluid Dynamics. New York: Springer, 1987. – 710 p.
8. *Maas L. R. M., Benielli D., Sommeria J., Lam F. P. A.* Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // Nature. – 1997. – Vol. 388. – P. 557–561.
9. *Ogilvie G. I.* Tidal dissipation in rotating fluid bodies: a simplified model // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 2009. – Vol. 396, No. 2. – P. 794–806.
10. *Ogilvie G. I.* Tidal Dissipation in Stars and Giant Planets // Annu. Rev. Astron. Astrophys. – 2014. – Vol. 52. – P. 171–210.
11. *Rekier J., Trinh A., Triana S. A., Dehant V.* Internal energy dissipation in Enceladus's subsurface ocean from tides and libration and the role of inertial waves // J. Geophys. Res. Planets. – 2019. – Vol. 124, No. 8. – P. 2198–2212.
12. *Rieutord M., Valdettaro L.* Inertial waves in a rotating spherical shell // J. Fluid Mech. – 1997. – Vol. 341. – P. 77–99.

13. *Rieutord M., Valdettaro L.* Axisymmetric inertial modes in a spherical shell at low Ekman numbers // J. Fluid Mech. – 2018. – Vol. 844. – P. 597–634.
14. *Maas L. R. M., Lam F. P. A.* Geometric focusing of internal waves // J. Fluid Mech. – 1995. – Vol. 300. – P. 1–41.
15. *Manders A. M. M., Maas L. R. M.* Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary // J. Fluid Mech. – 2003. – Vol. 493. – P. 59–88.
16. *Maas L. R. M., Harlander U.* Equatorial wave attractors and inertial oscillations // J. Fluid Mech. – 2007. – Vol. 570. – P. 47–67.
17. *Rieutord M., Georgeot B., Valdettaro L.* Wave attractors in rotating fluids: a paradigm for ill-posed Cauchy problems // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85, No. 20. – P. 4277–4280.
18. *Rieutord M.* A note on inertial modes in the core of the Earth // Phys. Earth Planet. Inter. – 2000. – Vol. 117, No. 1. – P. 63–70.
19. *Rieutord M., Georgeot B., Valdettaro L.* Inertial waves in a rotating spherical shell: attractors and asymptotic spectrum // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 435. – P. 103–144.
20. *Ferrari R., Wunsch C.* Ocean circulation kinetic energy: reservoirs, sources, and sinks // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2009. – Vol. 41. – P. 253–282.
21. *Hummels R., Dengler M., Rath W., Foltz G. R., Schütte F., Fischer T., Brandt P.* Surface cooling caused by rare but intense near-inertial wave induced mixing in the tropical Atlantic // Nat. Commun. – 2020. – Vol. 11. – P. 3829.
22. *Dematteis G., Le Boyer A., Pollmann F., Polzin K. L., Alford M. H., Whalen C. B., Lvov Y. V.* Interacting internal waves explain global patterns of interior ocean mixing // Nat. Commun. – 2024. – Vol. 15. – P. 7468.
23. *Davidson P. A.* The dynamics and scaling laws of planetary dynamos driven by inertial waves // Geophys. J. Int. – 2014. – Vol. 198, No. 3. – P. 1832–1847.
24. *Astoul A., Barker A. J.* The effects of non-linearities on tidal flows in the convective envelopes of rotating stars and planets in exoplanetary systems // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 2022. – Vol. 516, No. 2. – P. 2913–2935.

25. *Scolan H., Ermanyuk E. V., Dauxois T.* Nonlinear fate of internal wave attractors // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 110. – P. 234501.
26. *Brouzet C., Sibgatullin I. N., Scolan H., Ermanyuk E. V., Dauxois T.* Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3D numerical simulations // J. Fluid Mech. – 2016. – Vol. 793. – P. 109–131.
27. *Brouzet C., Ermanyuk E. V., Joubaud S., Sibgatullin I., Dauxois T.* Energy cascade in internal-wave attractors // Europhys. Lett. – 2016. – Vol. 113. – P. 44001.
28. *Brouzet C., Ermanyuk E. V., Joubaud S., Pillet G., Dauxois T.* Internal wave attractors: different scenarios of instability // J. Fluid Mech. – 2017. – Vol. 811. – P. 544–568.
29. *Сибгатуллин И. Н., Ерманюк Е. В.* Аттракторы внутренних и инерционных волн (обзор) // Прикладная механика и техническая физика. – 2019. – Т. 60, № 2. – С. 113–136.
30. *Boisson J., Lamriben C., Maas L. R. M., Cortet P.-P., Moisy F.* Inertial waves and modes excited by the libration of a rotating cube // Phys. Fluids. – 2012. – Vol. 24, No. 7. – P. 076602.
31. *Borcia I. D., Ghasemi V. A., Harlander U.* Inertial wave mode excitation in a rotating annulus with partially librating boundaries // Fluid Dyn. Res. – 2014. – Vol. 46, No. 4. – P. 041423.
32. *Aldridge K. D., Lumb L. I.* Inertial waves identified in the Earth's fluid outer core // Nature. – 1987. – Vol. 325, No. 6103. – P. 421–423.
33. *Triana S. A., Dumberry M., Cébron D., Vidal J., Trinh A., Gerick F., Rekier J.* Core eigenmodes and their impact on the Earth's rotation // Surv. Geophys. – 2022. – Vol. 43, No. 1. – P. 107–148.
34. *Noir J., Jault D., Cardin P.* Numerical study of the motions within a slowly precessing sphere at low Ekman number // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 437. – P. 283–299.
35. *Cébron D., Laguerre R., Noir J., Schaeffer N.* Precessing spherical shells: flows, dissipation, dynamo and the lunar core // Geophys. J. Int. – 2019. – Vol. 219. – P. S34–S57.

36. *Morize C., Le Bars M., Le Gal P., Tilgner A.* Experimental determination of zonal winds driven by tides // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 104, No. 21. – P. 214501.
37. *Sauret A., Le Bars M., Le Gal P.* Tide-driven shear instability in planetary liquid cores // Geophys. Res. Lett. – 2014. – Vol. 41. – P. 6078–6083.
38. *Busse F. H.* Mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity // J. Fluid Mech. – 2010. – Vol. 650. – P. 505–512.
39. *Sauret A., Le Dizès S.* Libration-induced mean flow in a spherical shell // J. Fluid Mech. – 2013. – Vol. 718. – P. 181–209.
40. *Le Bars M., Cébron D., Le Gal P*. Flows driven by libration, precession, and tides // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2015. – Vol. 47. – P. 163–193.
41. *Koch S., Harlander U., Egbers C., Hollerbach R.* Inertial waves in a spherical shell induced by librations of the inner sphere: experimental and numerical results // Fluid Dyn. Res. – 2013. – Vol. 45. – P. 035504.
42. *Klein M., Seelig T., Kurgansky M. V., Ghasemi V. A., Borcia I. D., Will A., Schaller E., Egbers C., Harlander U.* Inertial wave excitation and focusing in a liquid bounded by a frustum and a cylinder // J. Fluid Mech. – 2014. – Vol. 751. – P. 255–297.
43. *Hoff M., Harlander U., Egbers C.* Experimental survey of linear and non-linear inertial waves and wave instabilities in a spherical shell // J. Fluid Mech. – 2016. – Vol. 789. – P. 589–616.
44. *Xu W., Harlander U*. Inertial mode interactions in a rotating tilted cylindrical annulus with free surface // Phys. Rev. Fluids. – 2020. – Vol. 5. – P. 094801.
45. *Ghasemi V. A., Klein M., Harlander U., Kurgansky M. V., Schaller E., Will A.* Mean flow generation by Görtler vortices in a rotating annulus with librating side walls // Phys. Fluids. – 2016. – Vol. 28, No. 5. – P. 056603.
46. *Kurgansky M. V., Seelig T., Klein M., Will A., Harlander U.* Mean flow generation due to longitudinal librations of sidewalls of a rotating annulus // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. – 2020. – Vol. 114, No. 6. – P. 742–762.

47. *Hoff M., Harlander U., Triana S. A.* Study of turbulence and interacting inertial modes in a differentially rotating spherical shell experiment // Phys. Rev. Fluids. – 2016. – Vol. 1, No. 4. – P. 043701.
48. *Barik A., Triana S. A., Hoff M., Wicht J.* Triadic resonances in the wide-gap spherical Couette system // J. Fluid Mech. – 2018. – Vol. 843. – P. 211–243.
49. *Barik A., Triana S. A., Hoff M., Wicht J.* Transition to turbulence in the wide-gap spherical Couette system // J. Fluid Mech. – 2024. – Vol. 1001. – P. A1.
50. *Le Bars M., Barik A., Burmann F., Lathrop D. P., Noir J., Schaeffer N., Triana S. A.* Fluid dynamics experiments for planetary interiors // Surv. Geophys. – 2022. – Vol. 43. – P. 229–261.
51. *Le Bars M., Lemasquerier D.* Laboratory experiments in geophysical and astrophysical fluid dynamics // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2026. – Vol. 58. – P. 301–329.
52. *Lemasquerier D., Grannan A. M., Vidal J., Cébron D., Favier B., Le Bars M., Aurnou J. M.* Libration-driven flows in ellipsoidal shells // J. Geophys. Res. Planets. – 2017. – Vol. 122, No. 9. – P. 1926–1950.
53. *Song X., Richards P. G.* Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core // Nature. – 1996. – Vol. 382, No. 6588. – P. 221–224.
54. *Glatzmaier G. A., Roberts P. H.* Rotation and magnetism of Earth's inner core // Science. – 1996. – Vol. 274, No. 5294. – P. 1887–1891.
55. *Slichter L. B.* The fundamental free mode of the Earth's inner core // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. – 1961. – Vol. 47, No. 2. – P. 186–190.
56. *Busse F. H.* On the free oscillation of the Earth's inner core // J. Geophys. Res. – 1974. – Vol. 79, No. 5. – P. 753–757.
57. *Smylie D. E.* The inner core translational triplet and the density near Earth's center // Science. – 1992. – Vol. 255, No. 5052. – P. 1678–1682.
58. *Courtier N., Ducarme B., Goodkind J., Hinderer J., Imanishi Y., Seama N., Sun H., Merriam J., Bengert B., Smylie D. E.* Global superconducting gravimeter observations and the search for the translational modes of the inner core // Phys. Earth Planet. Inter. – 2000. – Vol. 117, No. 1. – P. 3–20.

59. *Смайли Д. Е.*, *Бражкин В. В.*, *Палмер А.* Прямые наблюдения вязкости внешнего ядра Земли и экстраполяция измерений вязкости жидкого железа // Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179, № 1. – С. 91–105.
60. *Милюков В. К.*, *Виноградов М. П.*, *Миронов А. П.*, *Мясников А. В.* Обнаружение и оценка моды Шлихтера по наблюдениям землетрясения в Чили 27.02.2010 г. на лазерном интерферометре-деформографе // Физика Земли. – 2020. – № 6. – С. 11–23.
61. *Козлов В. Г.*, *Козлов Н. В.* Вибрационный гидродинамический волчок // Докл. РАН. – 2007. – Т. 415, № 6. – С. 759–762.
62. *Козлов В. Г.*, *Козлов Н. В.* Вибрационная динамика легкого тела в заполненном жидкостью вращающемся цилиндре // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2008. – № 1. – С. 12–23.
63. *Pillet G.*, *Maas L. R. M.*, *Dauxois T.* Internal wave attractors in 3D geometries: A dynamical systems approach // Eur. J. Mech. B-Fluid. – 2019. – Vol. 77. – P. 1–16.
64. *Favier B.*, *Le Dizès S.* Inertial wave super-attractor in a truncated elliptic cone // J. Fluid Mech. – 2024. – Vol. 980. – P. A6.
65. *Thielicke W.*, *Stamhuis E. J.* Towards user-friendly, affordable and accurate digital particle image velocimetry in MATLAB // J. Open Res. Software. – 2014. – Vol. 2, No. 1. – P. e30.
66. *Thielicke W.*, *Sonntag R.* Particle image velocimetry for MATLAB: Accuracy and enhanced algorithms in PIVlab // J. Open Res. Software. – 2021. – Vol. 9, No. 1. – P. 12.
67. *Schaeffer N.*, *Jault D.*, *Nataf H.-C.*, *Fournier A.* Turbulent geodynamo simulations: a leap towards Earth's core // Geophys. J. Int. – 2017. – Vol. 211, No. 1. – P. 1–29.
68. *Noir J.*, *Hemmerlin F.*, *Wicht J.*, *Baca S. M.*, *Aurnou J. M.* An experimental and numerical study of librationally driven flow in planetary cores and subsurface oceans // Phys. Earth Planet. Inter. – 2009. – Vol. 173. – P. 141–152.
69. *Vidal J.*, *Noir J.*, *Cébron D.*, *Burmann F.*, *Monville R.*, *Giraud V.*, *Charles Y.* Geophysical flows over topography, a playground for laboratory experiments // Comptes Rendus. Physique. – 2025. – Vol. 25, No. S3. – P. 1–52.

70. *Proudman J.* On the motion of solids in liquids possessing vorticity // Proc. R. Soc. A. – 1916. – Vol. 92. – P. 408–424.
71. *Taylor G. I.* Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids // Proc. Roy. Soc. A. – 1923. – Vol. 104. – P. 213–218.
72. *Maxworthy T.* The observed motion of a sphere through a short, rotating cylinder of fluid // J. Fluid Mech. – 1968. – Vol. 31, No. 4. – P. 643–655.
73. *Hide R., Titman C. W.* Detached shear layers in a rotating fluid // J. Fluid Mech. – 1967. – Vol. 29. Pt. 1. – P. 39–60.
74. *Proudman J.* The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres // J. Fluid Mech. – 1956. – Vol. 1. – P. 505–516.
75. *Stewartson K.* On almost rigid rotations // J. Fluid Mech. – 1957. – Vol. 3. – P. 17–26.
76. *Früh W. G., Read P. L.* Experiments on a barotropic rotating shear layer. Part 1. Instability and steady vortices // J. Fluid Mech. – 1999. – Vol. 383. – P. 143–173.
77. *Stewartson K.* On almost rigid rotations. Part 2 // J. Fluid Mech. – 1966. – Vol. 26. – P. 131–144.
78. *Hollerbach R.* Magnetohydrodynamic Ekman and Stewartson layers in a rotating spherical shell // Proc. R. Soc. A. – 1994. – Vol. 444, No. 1921. – P. 333–346.
79. *Hollerbach R.* Instabilities of the Stewartson layer. Part 1. The dependence on the sign of Ro // J. Fluid Mech. – 2003. – Vol. 492. – P. 289–302.
80. *Dormy E., Cardin P., Jault D.* MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field // Earth Planet. Sci. Lett. – 1998. – Vol. 160, No. 1–2. – P. 15–30.
81. *Thomson W.* (*Lord Kelvin*). XXIV. Vibrations of a columnar vortex // Philos. Mag. Ser. 5. – 1880. – Vol. 10, No. 61. – P. 155–168.
82. *Phillips O. M.* Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves // Phys. Fluids. – 1963. – Vol 6. – P. 513–520.
83. *Messio L., Morize C., Rabaud M., Moisy F.* Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid // Exp. Fluids. – 2008. – Vol. 44. – P. 519–528.

84. *McEwan A. D.* Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder // J. Fluid Mech. – 1970. – Vol. 40. – P. 603–640.

85. *Cortet P.-P., Lamriben C., Moisy F.* Viscous spreading of an inertial wave beam in a rotating fluid // Phys. Fluids. – 2010. – Vol. 22, No. 8. – P. 086603.

86. *Thomas N. H., Stevenson T. N.* A similarity solution for viscous internal waves // J. Fluid Mech. – 1972. – Vol. 54, No. 3. – P. 495–506.

87. *Bordes G., Moisy F., Dauxois T., Cortet P.-P.* Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid // Phys. Fluids. – 2012. – Vol. 24, No. 1. – P. 014105.

88. *Godeferd F. S., Lollini L.* Direct numerical simulations of turbulence with confinement and rotation // J. Fluid Mech. – 1999. – Vol. 393. – P. 257–308.

89. *Hopfinger E. J., Browand F. K., Gagne Y.* Turbulence and waves in a rotating tank // J. Fluid Mech. – 1982. – Vol. 125. – P. 505–534.

90. *Sauret A., Cébron D., Le Bars M., Le Dizès S.* Fluid flows in a librating cylinder // Phys. Fluids. – 2012. – Vol. 24, No. 2. – P. 026603.

91. *Borcia I. D., Harlander U.* Inertial waves in a rotating annulus with inclined inner cylinder: comparing the spectrum of wave attractor frequency bands and the eigenspectrum in the limit of zero inclination // Theor. Comput. Fluid Dyn. – 2013. – Vol. 27, No. 3–4. – P. 397–413.

92. *Bondi H., Lyttleton R. A.* On the dynamical theory of the rotation of the earth. II. The effect of precession on the motion of the liquid core // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1953. – Vol. 49, No. 3. – P. 498–515.

93. *Roberts P. H., Stewartson K.* On the stability of a Maclaurin spheroid of small viscosity // Astrophys. J. – 1963. – Vol. 137. – P. 777–790.

94. *Kerswell R. R.* On the internal shear layers spawned by the critical regions in oscillatory Ekman boundary layers // J. Fluid Mech. – 1995. – Vol. 298. – P. 311–325.

95. *Kida S.* Steady flow in a rapidly rotating sphere with weak precession // J. Fluid Mech. – 2011. – Vol. 680. – P. 150–193.

96. *Hollerbach R., Kerswell R. R.* Oscillatory internal shear layers in rotating and precessing flows // J. Fluid Mech. – 1995. – Vol. 298. – P. 327–339.

97. *Lin Y., Noir J.* Libration-driven inertial waves and mean zonal flows in spherical shells // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. – 2021. – Vol. 115. – P. 258–279.
98. *Noir J., Brito D., Aldridge K., Cardin P.* Experimental evidence of inertial waves in a precessing spheroidal cavity // Geophys. Res. Lett. – 2001. – Vol. 28. – P. 3785–3788.
99. *Triana S. A., Zimmerman D. S., Lathrop D. P.* Precessional states in a laboratory model of the Earth's core // J. Geophys. Res. – 2012. – Vol. 117. – P. B04103.
100. *Calkins M. A., Noir J., Eldredge J. D., Aurnou J. M.* Axisymmetric simulations of libration-driven fluid dynamics in a spherical shell geometry // Phys. Fluids. – 2010. – Vol. 22. – P. 086602.
101. *Le Dizès S., Le Bars M.* Internal shear layers from librating objects // J. Fluid Mech. – 2017. – Vol. 826. – P. 653–675.
102. *Lin Y., Noir J., Jackson A.* Experimental study of fluid flows in a precessing cylindrical annulus // Phys. Fluids. – 2014. – Vol. 26. – P. 046604.
103. *Lopez J.M., Marques F.* Rapidly rotating cylinder flow with an oscillating sidewall // Phys. Rev. E. – 2014. – Vol. 89. – P. 013013.
104. *Wu K., Welfert B. D., Lopez J. M.* Librational forcing of a rapidly rotating fluid-filled cube // J. Fluid Mech. – 2018. – Vol. 842. – P. 469–494.
105. *Maas L. R. M.* On the amphidromic structure of inertial waves in rectangular parallelepiped // Fluid Dyn. Res. – 2003. – Vol. 33. – P. 373–401.
106. *Bryan G. H.* The waves on a rotating liquid spheroid of finite ellipticity // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. – 1889. – Vol. 180. – P. 187–219.
107. *Zhang K., Earnshaw P., Liao X., Busse F. H.* On inertial waves in a rotating fluid sphere // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 437. – P. 103–119.
108. *Aldridge K. D., Toomre A.* Axisymmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical container // J. Fluid Mech. – 1969. – Vol. 37. – P. 307–323.
109. *Vantieghem S.* Inertial modes in a rotating triaxial ellipsoid // Proc. R. Soc. A. – 2014. – Vol. 470. – P. 20140093.

110. *Rieutord M., Triana S. A., Zimmerman D. S., Lathrop D. P.* Excitation of inertial modes in an experimental spherical Couette flow // Phys. Rev. E. – 2012. – Vol. 86, No. 2. – P. 026304.
111. *Kelley D. H., Triana S. A., Zimmerman D. S., Tilgner A., Lathrop D. P.* Inertial waves driven by differential rotation in a planetary geometry // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. – 2007. – Vol. 101, No. 5–6. – P. 469–487.
112. *Vidal J., Schaeffer N.* Quasi-geostrophic modes in the Earth's fluid core with an outer stably stratified layer // Geophys. J. Int. – 2015. – Vol. 202, No. 3. – P. 2182–2193.
113. *Barker A. J.* Tidal dissipation due to inertial waves can explain the circularization periods of solar-type binaries // Astrophys. J. – 2022. – Vol. 927. – P. L36.
114. *Maas L. R. M.* Wave attractors: linear yet nonlinear // Int. J. Bifurcation Chaos. – 2005. – Vol. 15, No. 9. – P. 2757–2782.
115. *He J., Favier B., Rieutord M., Le Dizès S.* Internal shear layers in librating spherical shells: the case of periodic characteristic paths // J. Fluid Mech. – 2022. – Vol. 939. – P. A3.
116. *Maas L. R. M.* Wave focusing and ensuing mean flow due to symmetry breaking in rotating fluids // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 437. – P. 13–28.
117. *Boury S., Sibgatullin I., Ermanyuk E., Shmakova N., Odier P., Joubaud S., Maas L. R. M., Dauxois T.* Vortex cluster arising from an axisymmetric inertial wave attractor // J. Fluid Mech. – 2021. – Vol. 926. – P. A12.
118. *Sibgatullin I., Ermanyuk E., Xu X., Maas L. R. M., Dauxois T.* Direct numerical simulation of three-dimensional inertial wave attractors // 2017 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS). Moscow, Russia. – 2017. – P. 137–143.
119. *Pacary C., Dauxois T., Ermanyuk E., Metz P., Moulin M., Joubaud S.* Observation of inertia-gravity wave attractors in an axisymmetric enclosed basin // Phys. Rev. Fluids. – 2023. – Vol. 8. – P. 104802.
120. *Rabitti A., Maas L. R. M.* Meridional trapping and zonal propagation of inertial waves in a rotating fluid shell // J. Fluid Mech. – 2013. – Vol. 729. – P. 445–470.

121. *Rabitti A., Maas L. R. M.* Inertial wave rays in rotating spherical fluid domains // J. Fluid Mech. – 2014. – Vol. 758. – P. 621–654.

122. *Manders A. M. M., Maas L. R. M.* On the three-dimensional structure of the inertial wave field in a rectangular basin with one sloping boundary // Fluid Dyn. Res. – 2004. – Vol. 35. – P. 1–21.

123. *Pillet G., Ermanyuk E. V., Maas L. R. M., Sibgatullin I. N., Dauxois T.* Internal wave attractors in three-dimensional geometries: trapping by oblique reflection // J. Fluid Mech. – 2018. – Vol. 845. – P. 203–225.

124. *Wu K., Welfert B. D., Lopez J. M.* Reflections and focusing of inertial waves in a librating cube with the rotation axis oblique to its faces // J. Fluid Mech. – 2020. – Vol. 896. – P. A5.

125. *Wu K., Welfert B. D., Lopez J. M.* Reflections and focusing of inertial waves in a tilted librating cube // J. Fluid Mech. – 2022. – Vol. 947. – A10.

126. *Bratspiess N., Maas L. R. M., Heifetz E.* On internal wave whispering gallery modes in channels and critical-slope wave attractors // J. Fluid Mech. – 2026. – Vol. 1032. – P. A.14.

127. *Van Hoolst T.* The rotation of the terrestrial planets // Treatise on Geophysics / ed. G. Schubert. Amsterdam: Elsevier, 2007. – Vol. 10. Chap. 4. – P. 123–164.

128. *Poincaré H.* Sur la précession des corps déformables // Bull. Astro. – 1910. – Vol. 27. – P. 321–356.

129. *Busse F. H.* Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell // J. Fluid Mech. – 1968. – Vol. 33. Pt. 4. – P. 739–751.

130. *Vanyo J., Wilde P., Cardin P., Olson P.* Experiments on precessing flows in the Earth’s liquid core // Geophys. J. Int. – 1995. – Vol. 121. – P. 136–142.

131. *Noir J., Cardin P., Jault D., Masson J.-P.* Experimental evidence of non-linear resonance effects between retrograde precession and the tilt-over mode within a spheroid // Geophys. J. Int. – 2003. – Vol. 154. – P. 407–416.

132. *Lorenzani S., Tilgner A.* Fluid instabilities in precessing spheroidal cavities // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 447. – P. 111–128.

133. *Malkus W. V. R.* Precession of the Earth as the cause of geomagnetism // Science. – 1968. – Vol. 160. – P. 259–264.

134. *Noir J.* Écoulements d'un fluide dans une cavité en précession: approches numérique et expérimentale. – Grenoble: Université Joseph-Fourier, 2000. – 163 p. (Thèse de doctorat).

135. *Cébron D., Vidal J., Schaeffer N., Borderies A., Sauret A.* Mean zonal flows induced by weak mechanical forcings in rotating spheroids // J. Fluid Mech. – 2021. – Vol. 916. – P. A39.

136. *Tilgner A., Busse F. H.* Fluid flows in precessing spherical shells // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 426. – P. 387–396.

137. *Tilgner A.* Rotational dynamics of the core // Treatise on Geophysics / ed. G. Schubert. Amsterdam: Elsevier, 2007. – Vol. 8. – P. 207–243.

138. *Suess S. T.* Viscous flow in a deformable rotating container // J. Fluid Mech. – 1971. – Vol. 45. – P. 189–201.

139. *Tilgner A.* Zonal wind driven by inertial modes // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99, No. 19. – P. 194501.

140. *Greenspan H. P.* On the non-linear interaction of inertial modes // J. Fluid Mech. – 1969. – Vol. 39. – P. 257–264.

141. *Favier B., Barker A. J., Baruteau C., Ogilvie G. I.* Non-linear evolution of tidally forced inertial waves in rotating fluid bodies // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 2014. – Vol. 439, No. 1. – P. 845–860.

142. *Margot J. L., Peale S. J., Jurgens R. F., Slade M. A., Holin I. V.* Large longitude libration of Mercury reveals a molten core // Science. – 2007. – Vol. 316. – P. 710–714.

143. *Lorenz R. D., Stiles B. W., Kirk R. L., Allison M. D., Del Marmo P. P., Iess L., Lunine J. I., Ostro S. J., Hensley S.* Titan’s rotation reveals an internal ocean and changing zonal winds // Science. – 2008. – Vol. 319. – P. 1649–1651.

144. *Van Hoolst T., Rambaux N., Karatekin Ö., Dehant V., Rivoldini A.* The librations, shape and icy shell of Europa // Icarus. – 2008. – Vol. 195. – P. 386–399.

145. *Rambaux N., Van Hoolst T., Karatekin Ö.* Librational response of Europa, Ganymede, and Callisto with an ocean for non-Keplerian orbit // Astron. Astrophys. – 2011. – Vol. 527. – P. A118.

146. *Wang C. Y.* Cylindrical tank of fluid oscillating about a state of steady rotation // J. Fluid Mech. – 1970. – Vol. 41, No. 3. – P. 581–592.

147. *Busse F. H.* Zonal flow induced by longitudinal librations of a rotating cylindrical cavity // Physica D. – 2011. – Vol. 240. – P. 208–211.

148. *Noir J., Calkins M. A., Lasbleis M., Cantwell J., Aurnou J. M.* Experimental study of libration-driven zonal flows in a straight cylinder // Phys. Earth Planet. Inter. – 2010. – Vol. 182, No. 1. – P. 98–106.

149. *Sauret A., Cébron D., Morize C., Le Bars M.* Experimental and numerical study of mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity // J. Fluid Mech. – 2010. – Vol. 662. – P. 260–268.

150. *Chan K. H., Liao X., Zhang K.* Simulations of fluid motion in ellipsoidal planetary cores driven by longitudinal libration // Phys. Earth Planet. Inter. – 2011. – Vol. 187. – P. 391–403.

151. *Chan K. H., Liao X., Zhang K.* Simulations of fluid motion in spheroidal planetary cores driven by latitudinal libration // Phys. Earth Planet. Inter. – 2011. – Vol. 187. – P. 404–415.

152. *Noir J., Cébron D., Le Bars M., Sauret A., Aurnou J. M.* Experimental study of libration-driven zonal flows in non-axisymmetric containers // Phys. Earth Planet. Inter. – 2012. – Vol. 204–205. – P. 1–10.

153. *Zhang K., Chan K. H., Liao X.* On fluid motion in librating ellipsoids with moderate equatorial eccentricity // J. Fluid Mech. – 2011. – Vol. 673. – P. 468–479.

154. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А.* Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. – М.: Физматлит, 2003. – 216 с.

155. *Kozlov V., Karpunin I., Kozlov N.* Finger instability of oscillating liquid–liquid interface in radial Hele-Shaw cell // Phys. Fluids. – 2020. – Vol. 32, No. 10. – P. 102102.

156. *Subbotin S., Vjatkin A., Kozlov V.* Experimental study of parametric oscillations of interface between two immiscible liquids in a conical thin layer // Interfacial Phenom. Heat Transf. 2025. – Vol. 13, No. 1. – P. 55–66.

157. *Блехман И. И.* Вибрационная механика. – М.: Наука, 1994. – 400 с.

158. *Луговцов Б. А., Сенницкий В.Л.* О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 289, № 2. – С. 314–317.

159. *Kozlov V. G.* Solid-body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration // Europhys. Lett. – 1996. – Vol. 36, No. 9. – P. 651–656.

160. *Иванова А. А., Козлов В. Г., Кузаев А. Ф.* Вибрационная подъемная сила, действующая на тело в жидкости вблизи твердой поверхности // Докл. РАН. – 2005. – Т. 402, № 4. – С. 488–491.

161. *Gershuni G. Z., Lyubimov D. V.* Thermal Vibrational Convection. – New York: Wiley, 1998. – 358 p.

162. *Shevtsova V., Ryzhkov I., Melnikov D., Gaponenko Y., Mialdun A.* Experimental and theoretical study of vibration-induced thermal convection in low gravity // J. Fluid Mech. – 2010. – Vol. 648. – P. 53–82.

163. *Иванова А. А., Козлов В. Г.* Термовибрационная конвекция в полости при непоступательных колебаниях // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2003. – № 3. – С. 26–43.

164. *Бабушкин И. А., Демин В. А.* Вибрационная конвекция в ячейке Хеле-Шоу. Теория и эксперимент // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 40–48.

165. *Kolchanova E. A.* The effect of vibration-axis angle on the convective stability of a superposed fluid-porous layer in zero gravity // Interf. Phenom. Heat Trans. – 2020. – Vol. 8, No. 1. – P. 33–48.

166. *Козлов В. Г.* Вибрационная тепловая конвекция во вращающихся полостях // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2004. – № 1. – С. 5–14.

167. *Vjatkin A. A., Kozlov V. G., Sabirov R. R.* Convection of a heat-generating fluid in a rotating cylindrical cavity subject to transverse vibrations // Int. J. Therm. Sci. – 2019. – Vol. 137. – P. 560–570.

168. *Вяткин А. А.*, *Иванова А. А.*, *Козлов В. Г.* Конвективная устойчивость неизотермической жидкости во вращающемся горизонтальном коаксиальном зазоре // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2010. – № 1. – С. 12–21.

169. *Kozlov V. G.*, *Ivanova A. A.*, *Vjatkin A. A.*, *Sabirov R. R.* Vibrational convection of heat-generating fluid in a rotating horizontal cylinder. The role of relative cavity length // Acta Astronaut. – 2015. – Vol. 112. – P. 48–55.

170. *Вяткин А. А.*, *Иванова А. А.*, *Козлов В. Г.*, *Рысин К. Ю.* Влияние тангенциальной компоненты силового поля на конвекцию во вращающемся плоском слое // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 2017. – Т. 53, № 2. – С. 215–222.

171. *Rysin K.*, *Vjatkin A.*, *Kozlov V.* Inertial-wave regime of averaged thermal convection in a rotating vertical flat layer // Fluid Dyn. Mater. Process. – 2025. – Vol. 21, No. 3. – P. 605–621.

172. *Phillips O. M.* Centrifugal waves // J. Fluid Mech. – 1960. – Vol. 7. – P. 340–352.

173. *Иванова А. А.*, *Козлов В. Г.*, *Чиграков А. В.* Динамика жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндре // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2004. – № 4. – С. 98–111.

174. *Kozlov N. V.*, *Kozlova A. N.*, *Shuvalova D. A.* Dynamics of immiscible liquids in a rotating horizontal cylinder // Phys. Fluids. – 2016. – Vol. 28, No. 11. – P. 112102.

175. *Иванова А. А.*, *Козлов В. Г.*, *Полежаев Д. А.* Вибрационная динамика центрифугированного слоя жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2005. – № 2. – С. 147–156.

176. *Kozlov N. V.*, *Shuvalova D. A.* Effect of vibration on two-liquid system in rotating cylinder // Acta Astronaut. – 2016. – Vol. 127. – P. 561–571.

177. *Salnikova A.*, *Kozlov N.*, *Ivanova A.*, *Stambouli M.* Dynamics of rotating two-phase system under transversal vibration // Microgravity Sci. Technol. – 2009. – Vol. 21. – P. 83–87.

178. *Karpunin I.*, *Kozlov N.* Dynamics of two-liquid system at rotation and vibration with equal frequencies // Microgravity Sci. Technol. – 2020. – Vol. 32. – P. 973–982.

179. *Kozlov V. G.*, *Polezhaev D. A.* Flow patterns in a rotating horizontal cylinder partially filled with liquid // Phys. Rev. E. – 2015. – Vol. 92, No. 1. – P. 013016.

180. *Stegner A.*, *Wesfreid J. E.* Dynamical evolution of sand ripples under water // Phys. Rev. E. – 1999. – Vol. 60, No. 4. – R3487–R3490.

181. *Иванова А. А.*, *Козлов В. Г.* Граница раздела «песок–жидкость» при вибрационном воздействии // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2002. – № 2. – С. 120–138.

182. *Dyakova V.*, *Kozlov V.*, *Polezhaev D.* Oscillation-induced sand dunes in a liquid-filled rotating cylinder // Phys. Rev. E. – 2016. – Vol. 94, No. 6. – P. 063109.

183. *Dyakova V.*, *Polezhaev D.* Pattern formation on the surface of the granular medium in a horizontal rotating cylinder filled with fluid // Phys. Rev. Fluids. – 2022. – Vol. 7, No. 4. – P. 044302.

184. *Kozlov N.* Theory of the vibrational hydrodynamic top // Acta Astronaut. – 2015. – Vol. 114. – P. 123–129.

185. *Иванова А. А.*, *Козлов Н. В.*, *Субботин С. В.* Вибрационная динамика легкого сферического тела во вращающемся цилиндре с жидкостью // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2012. – № 6. – С. 3–14.

186. *Kozlov V. G.*, *Kozlov N. V.*, *Subbotin S. V.* Taylor column instability in the problem of a vibrational hydrodynamic top // Phys. Rev. E. – 2014. – Vol. 90. – P. 013029.

187. *Субботин С. В.* Экспериментальное исследование вибрационной динамики сферического тела во вращающейся полости с жидкостью: Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Пермь, 2013. 150 с.

188. *Schaeffer N.*, *Cardin P.* Quasi-geostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer in flat and depth varying containers // Phys. Fluids. – 2005. – Vol. 17, No. 10. – P. 104111.

189. *Ivanova A. A.*, *Kozlov V. G.* Dramatic effect of vibrations on dynamics of rotating hydrodynamic systems // Microgravity Sci. Technol. – 2009. – V. 21. – P. 339–348.

190. *Joubaud S., Munroe J., Odier P., Dauxois T.* Experimental parametric subharmonic instability in stratified fluids // Phys. Fluids. – 2012. – Vol. 24, No. 4. – P. 041703.

191. *Bourget B., Dauxois T., Joubaud S., Odier P.* Experimental study of parametric subharmonic instability for internal plane waves // J. Fluid Mech. – 2013. – Vol. 723. – P. 1–20.

192. *Staquet C., Sommeria J.* Internal gravity waves: From instabilities to turbulence // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2002. – Vol. 34. – P. 559–593.

193. *Dauxois T., Joubaud S., Odier P., Venaille A.* Instabilities of Internal Gravity Wave Beams // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2018. – Vol. 50. – P. 131–156.

194. *Smith L. M., Chasnov J. R., Waleffe F.* Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 82, No. 19. – P. 3907–3910.

195. *Kolokolov I. V., Ogorodnikov L. L., Vergeles S. S.* Structure of coherent columnar vortices in three-dimensional rotating turbulent flow // Phys. Rev. Fluids. – 2020. – Vol. 5, No. 3. – P. 034604.

196. *Abhiram D. S., Mathur M.* Short-wavelength instabilities in a finite-amplitude plane inertial wave // J. Fluid Mech. – 2024. – Vol. 982. – P. A22.

197. *Sauret A., Cébron D., Le Bars M.* Spontaneous generation of inertial waves from boundary turbulence in a librating sphere // J. Fluid Mech. – 2013. – Vol. 728. – P. R5.

198. *Mercier M. J., Garnier N. B., Dauxois, T.* Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform // Phys. Fluids – 2008. – Vol. 20, No. 8. – P. 086601.

199. *Mora D. O., Monsalve E., Brunet M., Dauxois T., Cortet P.-P.* Three-dimensionality of the triadic resonance instability of a plane inertial wave // Phys. Rev. Fluids. – 2021. – Vol. 6, No. 7. – P. 074801.

200. *Brunet M., Dauxois T., Cortet P.-P.* Linear and nonlinear regimes of an inertial wave attractor // Phys. Rev. Fluids. – 2019. Vol. 4. – P. 034801.

201. *Manasseh R.* Breakdown regimes of inertia waves in a precessing cylinder // J. Fluid Mech. – 1992. – Vol. 243. – P. 261–296.

202. *Kerswell R. R.* Secondary instabilities in rapidly rotating fluids: inertial wave breakdown // J. Fluid Mech. – 1999. – Vol. 382. – P. 283–306.

203. *Lagrange R., Eloy C., Nadal F., Meunier P.* Instability of a fluid inside a precessing cylinder // Phys. Fluids. – 2008. – Vol. 20, No. 8. – P. 081701.

204. *Lagrange R., Meunier P., Nadal F., Eloy C.* Precessional instability of a fluid cylinder // J. Fluid Mech. – 2011. – Vol. 666. – P. 104–145.

205. *Albrecht T., Blackburn H. M., Lopez J. M., Manasseh R., Meunier P.* Triadic resonances in precessing rapidly rotating cylinder flows // J. Fluid Mech. – 2015. – Vol. 778. – P. R1.

206. *Lopez J. M., Marques F.* Nonlinear and detuning effects of the nutation angle in precessionally forced rotating cylinder flow // Phys. Rev. Fluids. – 2016. – Vol. 1, No. 2. – P. 023602.

207. *Marques F., Lopez J. M.* Precession of a rapidly rotating cylinder flow: traverse through resonance // J. Fluid Mech. – 2015. – Vol. 782. – P. 63–98.

208. *Lopez J. M., Marques F.* Rapidly rotating precessing cylinder flows: forced triadic resonances // J. Fluid Mech. – 2018. – Vol. 839. – P. 239–270.

209. *Lin Y., Marti P., Noir J.* Shear-driven parametric instability in a precessing sphere // Phys. Fluids. – 2015. – Vol. 27, No. 4. – P. 046601.

210. *Kerswell R. R.* The instability of precessing flow // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. – 1993. – Vol. 72. – P. 107–144.

211. *Goto S., Ishii N., Kida S., Nishioka M.* Turbulence generator using a precessing sphere // Phys. Fluids. – 2007. – Vol. 19, No. 6. – P. 061705.

212. *Goto S., Matsunaga A., Fujiwara M., Nishioka M., Kida S., Yamato M., Tsuda S.* Turbulence driven by precession in spherical and slightly elongated spheroidal cavities // Phys. Fluids. – 2014. – Vol. 26, No. 5. – P. 055107.

213. *Cébron D., Le Bars M., Moutou C., Le Gal P.* Elliptical instability in terrestrial planets and moons //Astron. Astrophys. – 2012. – Vol. 539. – P. A78.

214. *Grannan A. M., Le Bars M., Cébron D., Aurnou J. M.* Experimental study of global-scale turbulence in a librating ellipsoid // Phys. Fluids. – 2014. – Vol. 26, No. 12. – P. 126601.

215. *Favier B., Grannan A. M., Le Bars M., Aurnou J. M.* Generation and maintenance of bulk turbulence by libration-driven elliptical instability // Phys. Fluids. – 2015. – Vol. 27, No. 6. – P. 066601.

216. *Busse F. H.* Shear flow instabilities in rotating systems // J. Fluid Mech. – 1968. – Vol. 33. – P. 577–589.

217. *Hollerbach R., Futterer B., More T., Egbers C.* Instabilities of the Stewartson layer. Part 2. Supercritical mode transitions // Theor. Comput. Fluid Dyn. – 2004. – Vol. 18. – P. 197–204.

218. *Hoff M., Harlander U.* Stewartson-layer instability in a wide-gap spherical Couette experiment: Rossby number dependence // J. Fluid Mech. – 2019. – Vol. 878. – P. 522–543.

219. *Wicht J.* Flow instabilities in the wide-gap spherical Couette system // J. Fluid Mech. – 2014. – Vol. 738. – P. 184–221.

220. *Ghasemi V. A., Klein M., Will A., Harlander U.* Mean flow generation by an intermittently unstable boundary layer over a sloping wall // J. Fluid Mech. – 2018. – Vol. 853. – P. 111–149.

221. *Chang X., He J., Favier B., Le Dizès S.* Zonal flows driven by libration in rotating spherical shells: the case of periodic characteristic paths // J. Fluid Mech. – 2026. – Vol. 1026. – P. A15.

222. *Субботин С. В., Кропачева А. С.* Влияние инерционных колебаний жидкости на азимутальное течение в неравномерно вращающемся цилиндре // Конвективные течения … – 2019. – Вып. 9. – С. 65–81.

223. *Kozlov V. G., Subbotin S. V., Sabirov R. R.* Steady flows in deformed elastic sphere subject to rotational oscillations // Phys. Fluids. – 2018. – Vol. 30. – P. 093606.

224. *Repetto R., Siggers J. H., Stocchino A.* Steady streaming within a periodically rotating sphere // J. Fluid Mech. – 2008. – Vol. 608. – P. 71–80.

225. *Tilgner A.* Driven inertial oscillations in spherical shells // Phys. Rev. E. – 1999. – Vol. 59, No. 2. – P. 1789–1794.

226. *Sibgatullin I., Petrov A., Xu X., Maas L. R. M.* On (n,1) Wave Attractors: Coordinates and Saturation Time // Symmetry. – 2022. – Vol. 14, No. 2. – P. 319.

227. *Wu K., Welfert B. D., Lopez J. M.* Comparison of libration- and precession-driven flows: from linear responses to broadband dynamics // Fluids. – 2024. – Vol. 9, No. 7. – P. 151.

228. *Рязанов Д. А., Провидухина М. И., Сибгатуллин И. Н., Ерманюк Е. В.* Бигармонические аттракторы внутренних гравитационных волн // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2021. – № 3. – С. 90–99.

229. *Wang J., Wang S., Chen X., Wang W., Xu Y.* Three-dimensional evolution of internal waves reflected from a submarine seamount // Phys. Fluids. – 2017. – Vol. 29. – P. 106601.

230. *Franks P. J. S., Garwood J. C., Ouimet M., Cortes J., Musgrave R. C., Lucas A. J.* Stokes drift of plankton in linear internal waves: Cross-shore transport of neutrally buoyant and depth-keeping organisms // Limnol. Oceanogr. – 2020. – Vol. 65. – P. 1286–1296.

231. *Слепышев А. А., Лактионова Н. В.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в сдвиговом потоке // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 2019. – Т. 55, № 6. – С. 194–200.

232. *Weber J. E. H., Christensen K. H., Broström G.* Stokes Drift in Internal Equatorial Kelvin Waves: Continuous Stratification versus Two-Layer Models // J. Phys. Oceanogr. – 2014. – Vol. 44. – P. 591–599.

233. *Carmi S., Tustaniwskyj J. I.* Stability of modulated finite-gap cylindrical Couette flow: linear theory // J. Fluid Mech. – 1981. – Vol. 108. – P. 19–42.

234. *Aouidef A., Normand C., Stegner A., Wesfreid J. E.* Centrifugal instability of pulsed flow // Phys. Fluids. – 1994. – Vol. 6. – P. 3665–3676.

235. *Flandrin P.* Time-frequency/time-scale analysis, time-frequency toolbox for MATLAB. – San Diego, CA: Academic Press, 1999. 386 p.

236. *Monsalve E., Brunet M., Gallet B., Cortet P.-P.* Quantitative experimental observation of weak inertial-wave turbulence // Phys. Rev. Lett. – 2020. – Vol. 125. – P. 254502.

237. *Solomon T., Holloway W., Swinney H. L.* Shear flow instabilities and Rossby waves in barotropic flow in a rotating annulus // Phys. Fluids. – 1993. – Vol. 5. – P. 1971–1982.

238. *Holton J. R.* An experimental study of forced barotropic Rossby waves // Geophysical Fluid Dynamics. – 1971. – Vol. 2. – P. 323–341.

239. *Winters K. B.* Tidally-forced flow in a rotating, stratified, shoaling basin // Ocean Modelling. – 2015. – Vol. 90. – P. 72–81.

240. *Davis G., Jamin T., Deleuze J., Joubaud S., Dauxois T.* Succession of resonances to achieve internal wave turbulence // Phys. Rev. Lett. – 2020. – Vol. 124. – P. 204502.

241. *Незлин М. В.* Солитоны Россби (Экспериментальные исследования и лабораторная модель природных вихрей типа Большого Красного Пятна Юпитера) // Успехи физических наук. – 1986. – Т. 150, № 1. – С. 3–60.

242. *Gizon L., Cameron R. H., Bekki Y., Birch A. C., Bogart R. S., Brun A. S., Damiani C., Fournier D., Hyest L., Jain K., Lekshmi B., Liang Z.-C., Proxauf B.* Solar inertial modes: Observations, identification, and diagnostic promise // Astron. Astrophys. – 2021. – Vol. 652. – P. L6.

243. *Bekki Y., Cameron R. H., Gizon L.* Theory of solar oscillations in the inertial frequency range: Linear modes of the convection zone // Astron. Astrophys. – 2022. – Vol. 662. – P. A16.

244. *Rieutord M., Valdettaro L.* Viscous dissipation by tidally forced inertial modes in a rotating spherical shell // J. Fluid Mech. – 2010. – Vol. 643. – P. 363–394.

245. *Baruteau C., Rieutord M.* Inertial waves in a differentially rotating spherical shell // J. Fluid Mech. – 2013. – Vol. 719. – P. 47–81.

246. *Baker D. J.* A technique for the precise measurement of small fluid velocities // J. Fluid Mech. – 1966. – Vol. 26, Pt. 3. – P. 573–575.

247. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя / Пер. с нем. Г.А. Вольперта; под ред. Л.Г. Лойцянского. – М.: Наука, 1974. – 712 с.

248. *Riley N.* Steady streaming // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 33. – P. 43 – 65.

249. *McEwan A. D.*, *Robinson R. M.* Parametric instability of internal gravity waves // J. Fluid Mech. – 1975. – Vol. 67, No. 4. – P. 667–687.

250. *Benielli D.*, *Sommeria J.* Excitation and breaking of internal gravity waves by parametric instability // J. Fluid Mech. – 1998. – Vol. 374. – P. 117–144.

251. *Le Reun T.*, *Favier B.*, *Le Bars M.* Parametric instability and wave turbulence driven by tidal excitation of internal waves // J. Fluid Mech. – 2018. – Vol. 840. – P. 498–529.

252. *Wu Y.*, *Pan Y.* Energy cascade in the Garrett–Munk spectrum of internal gravity waves // J. Fluid Mech. – 2023. – Vol. 975. – P. A11.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А – Акт внедрения методики измерения мгновенных полей скорости во вращающихся полостях

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ
им. М. А. Лаврентьева
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ИГиЛ СО РАН)
Академика Лаврентьева проспект, 15, Новосибирск, 630090
Тел./факс: (383) 333-16-12. E-mail: igil@hydro.nsc.ru
ОКПО 03533978; ОГРН 1025403648600;
ИНН/КПП 5408100064/540801001

16 НОЯ 2026 № 15320–56-09-1662

На № _____

УТВЕРЖДАЮ
И.о. директора ИГиЛ СО РАН
д.ф.-м.н.
_____ Е. М. Рудой
«16» ноября 2026 г.

АКТ
о внедрении результатов диссертационного исследования на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
Субботина Станислава Валерьевича

Комиссия в составе:
председатель — старший научный сотрудник, д.ф.-м.н. Никулин В.В.,
члены комиссии — старший научный сотрудник, к.ф.-м.н. Бесов С.С.,
старший научный сотрдник, к.т.н. Чеботников А.В.,

составила настоящий акт в том, что результаты докторского диссертационного исследования Субботина С.В. на тему: «Инерционные волны и осредненные течения во вращающихся полостях», представленной по специальности 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы, внедрены в научно-исследовательскую практику.

В результате предложений С. В. Субботина внедрена в научно-исследовательскую практику методика измерения мгновенных полей скорости во вращающихся жидкостях при наличии источника колебаний, основанная на использовании неподвижного в лабораторной системе отсчёта видеорегистрирующего оборудования, что позволяет проводить количественную PIV-диагностику течений. Предложенная методика используется при выполнении экспериментальных научно-исследовательских работ, подготовке аспирантов и магистрантов, а также при проектировании и модернизации лабораторных установок, где требуется исследование движения жидкости в быстро вращающихся полостях, но при этом отсутствует физическая возможность переноса измерительного оборудования непосредственно во вращающуюся систему отсчёта. Применение методики в ряде случаев позволяет существенно сократить трудовые затраты при проведении экспериментов.

Использование разработанной С. В. Субботиным методики позволило преодолеть принципиальные технические ограничения традиционных систем PIV-диагностики, исключив необходимость размещения прецизионного оборудования на вращающихся платформах. Это обеспечило существенное снижение трудоемкости и стоимости подготовки экспериментальных стендов, а также минимизировало риски повреждения измерительной аппаратуры. Внедрение методики позволило повысить точность и достоверность бесконтактной регистрации мгновенных полей скорости в быстрорастущих пограничных слоях и волновых структурах, что открыло новые возможности для верификации аналитических моделей и численных расчетов в области гидродинамики вращающихся сред. Сотрудничество Субботина С.В. со специалистами ИГиЛ СО РАН привело к публикации ряда совместных статей в высокорейтинговых журналах, повышению научного, технического и метрологического уровня исследований Института в области гидродинамики вращающейся жидкости.

Настоящий акт составлен для представления в диссертационный совет.

Председатель комиссии:

Старший научный сотрудник лаборатории
экспериментальной прикладной гидродинамики,
д.ф.-м.н. _____ / Никулин В.В.

Члены комиссии:

Старший научный сотрудник, к.ф.-м.н. _____ / Бесов С.С.

Старший научный сотрудник, к.т.н. _____ / Чеботников А.В.

Приложение Б – Патент на полезную модель

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

ПАТЕНТ

НА ПОЛЕЗНУЮ МОДЕЛЬ

№ 208677

ПЕРЕМЕШИВАТЕЛЬ ЖИДКОСТЕЙ

Патентообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ" (RU)***

Авторы: ***Козлов Виктор Геннадьевич (RU), Субботин Станислав Валерьевич (RU)***

Заявка № **2020139226**
Приоритет полезной модели **27 ноября 2020 г.**
Дата государственной регистрации
в Государственном реестре полезных
моделей Российской Федерации **29 декабря 2021 г.**
Срок действия исключительного права
на полезную модель истекает **27 ноября 2030 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 0x75699C000BAEB78543BD83DFB19A6CD1
Владелец **Ивлиев Григорий Петрович**
Действителен с 24.12.2021 по 24.12.2022

Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

(19) **RU** (11) **208 677**(13) **U1**

(51) МПК
B01F 9/00 (2006.01)
B01F 3/08 (2006.01)

(12) ФОРМУЛА ПОЛЕЗНОЙ МОДЕЛИ К ПАТЕНТУ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

(52) СПК
B01F 9/00 (2021.08); B01F 3/08 (2021.08); B01J 2219/00189 (2021.08); B01J 14/00 (2021.08); B01J 19/28 (2021.08)

(21)(22) Заявка: **2020139226, 27.11.2020**

(24) Дата начала отсчета срока действия патента:
27.11.2020

Дата регистрации:
29.12.2021

Приоритет(ы):
(22) Дата подачи заявки: **27.11.2020**

(45) Опубликовано: **29.12.2021** Бюл. № 1

Адрес для переписки:
614990, г. Пермь, ул. Сибирская, 24, ПГГПУ, Лаборатория вибрационной гидромеханики, Козлова Анастасия Николаевна

(72) Автор(ы):
Козлов Виктор Геннадьевич (RU),
Субботин Станислав Валерьевич (RU)

(73) Патентообладатель(и):
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ" (RU)

(56) Список документов, цитированных в отчете о поиске: **RU 2471547 C2, 10.01.2013. SU 1046106 A1, 07.10.1983. SU 803958 A1, 15.02.1981. RU 2598454 C1, 27.09.2016. RU 2488433 C2, 27.07.2013. GB 1220215 A, 20.01.1971. EP 0005924 A1, 12.12.1979.**

RU 208677 U1

(54) ПЕРЕМЕШИВАТЕЛЬ ЖИДКОСТЕЙ

(57) Формула полезной модели

Перемешиватель жидкостей, включающий вращающийся контейнер цилиндрической формы и двигатель, выполненный с возможностью вращения контейнера, контейнер выполнен с возможностью модулирования угловой скорости его вращения со временем по гармоническому закону, отличающийся тем, что угловая частота модуляции скорости ω, $с^{-1}$, удовлетворяет условию: $\omega < 2\Omega$, где Ω - средняя угловая скорость вращения, $с^{-1}$.

RU 208677 U1