

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

На правах рукописи



МУГАТАРОВ АРТУР ИЛЬДАРОВИЧ

**НЕУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ:
МОДЕЛИРОВАНИЕ С УЧЕТОМ СТАДИЙ РАЗУПРОЧНЕНИЯ
И СВОЙСТВ НАГРУЖАЮЩИХ СИСТЕМ**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор Вильдеман Валерий Эрвинович

Пермь 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ.....	15
1.1. Закономерности неупругого деформирования и разрушения элементов конструкций.....	15
1.2. Модели процессов структурного и макроскопического разрушения, деформационного разупрочнения	19
Выводы по главе 1	25
ГЛАВА 2. МАКРОФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ И СТРУКТУРНО-ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ	26
2.1. Макрофеноменологические модели неупругого деформирования	26
2.2. Структурно-феноменологические модели деформирования и разрушения неоднородных сред	29
2.3. Феноменологическая модель механики разрушения с учетом разупрочнения у вершины трещины.....	37
2.4. Граничные условия с учетом свойств нагружающих систем в контексте анализа устойчивости деформирования.....	39
Выводы по главе 2.....	47
ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ СО СЛУЧАЙНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПРОЧНОСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	48
3.1. Алгоритмы численного решения физически нелинейных задач методом конечных элементов.....	48
3.2. Закритическое деформирование пластины со случайно распределенными прочностными характеристиками упруго-хрупких структурных элементов.....	52

3.3. Влияние жесткости нагружающей системы на реализацию закритической стадии деформирования структурно неоднородного тела.....	57
3.4. Двухосное пропорциональное деформирование и разрушение пластины с центральным концентратором напряжений	63
Выводы по главе 3	76
ГЛАВА 4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ РАЗУПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА.....	77
4.1. Задача о растяжении системы параллельно соединенных элементов со случайными прочностными характеристиками	77
4.2. Задачи о кручении цилиндрических тел	87
4.2.1. Сплошной цилиндр при жестком нагружении	92
4.2.2. Полый цилиндр с учетом жесткости нагружающей системы	101
4.2.3. Обобщение задачи о кручении на случай многозвенной диаграммы деформирования материала	114
Выводы по главе 4.....	124
ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕЛ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ УЧЕТЕ РАЗУПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА.....	125
5.1. Эволюция зон закритического деформирования в телах с концентраторами напряжений	125
5.2. Влияние геометрии концентратора напряжений на процессы деформирования тел.....	132
5.3. Сопоставление результатов численного моделирования с данными натурных экспериментов	138
Выводы по главе 5.....	143
ГЛАВА 6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ КОГЕЗИОННОЙ ЗОНЫ.....	144

6.1. Моделирование процессов равновесного роста трещин с использованием модели когезионной зоны.....	144
6.2. Влияние поведения материала на стадии разупрочнения на процесс равновесного роста трещины.....	149
6.3. Влияние жесткости нагружающих систем на устойчивость процесса разрушения.....	155
Выводы по главе 6.....	161
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	162
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	165

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Решение проблемы обеспечения прочности, надежности и безопасности ответственных конструкций требует развития методов прочностного анализа, базирующихся на описании процессов неупругого деформирования и разрушения. Данные процессы являются сложными, многостадийными, стохастическими, зависящими от условий нагружения, происходящими на различных масштабных уровнях, а также могут быть равновесными либо неустойчивыми.

Одним из проявлений нелинейного поведения твердых тел является закритическое деформирование, заключающееся в реализации ниспадающих участков графиков зависимостей силовых факторов от кинематических. Данное явление объясняется, в частности, повреждением и разрушением элементов структуры, образованием областей материала с ослабленными связями, а также зарождением и развитием трещин.

Реализация стадии закритического деформирования экспериментально подтверждена для тел из различных материалов: металлов и сплавов (Р.А. Васин, В.Э. Вильдеман, А.А. Лебедев, М.П. Третьяков, Н.Г. Чаусов, Н.С. Но, S.K. Paul, P.D. Versaillot, L. Zhang и др.), горных пород (А.А. Барях, А.М. Линьков, И.М. Петухов, А.Г. Протосеня, А.Ф. Ревуженко, А.Н. Ставрогин, Z. He, P.Y. Hou, J. Liu и др.), строительных материалов (А.Д. Беглов, Ю.В. Зайцев, Z.P. Bazant, D.C. Jansen, X. Yang, R. Zhang, M. Zhao и др.), полимерных композиционных материалов (В.Э. Вильдеман, Д.С. Лобанов, С.Б. Сапожников, Е.М. Струнгарь, P.P. Camanho и др.).

В экспериментальных и теоретических работах Б.А. Вандышева, В.Э. Вильдемана, С.Д. Волкова, Б.А. Дроздовского, А.А. Лебедева, Е.И. Рыжака, Ф.С. Савицкого, Я.Б. Фридмана, Н.Г. Чаусова, Z.P. Bazant, P.Y. Hou, D.P. Miannay и других авторов было отмечено, что на устойчивость реализации процессов закритического деформирования оказывает влияние жесткость нагружающей

системы – системы тел, через которую изучаемому объекту передается внешнее воздействие.

Описание процессов закритического деформирования твердых тел проводится в рамках различных математических моделей. К первой группе относятся структурные модели неупругого деформирования и разрушения, в рамках которых закритическое деформирование является следствием неупругого деформирования и разрушения структурных элементов, обладающих различными свойствами. Подобные модели были рассмотрены в работах Е.А. Андреевой, В.Э. Вильдемана, А.В. Зайцева, А.В. Ильиных, Е.В. Небогиной, В.П. Радченко, С.Б. Сапожникова, Ю.В. Соколкина, А.А. Ташкинова и других авторов. Было подтверждено, что даже в рамках использования упруго-хрупких либо упругопластических моделей поведения материала структурных элементов для конструкции может быть получена закритическая стадия деформирования. Необходимо отметить, что влияние нагружающих систем на устойчивость процессов закритического деформирования в рамках данных моделей практически не рассматривалось.

Вторую группу составляют модели деформационного разупрочнения, в рамках которых в физических соотношениях учитывается закритическое деформирование (разупрочнение) материала – процесс снижения напряжений при растущих деформациях. В таком случае появление в твердых телах зон с ослабленными связями отождествляется с образованием областей материала, находящегося на стадии разупрочнения. Модели деформационного разупрочнения разрабатывались и использовались в работах В.Э. Вильдемана, С.Д. Волкова, В.А. Ибрагимова, В.Д. Ключникова, В.И. Миронова, Л.В. Никитина, Е.Ю. Просвирякова, В.П. Радченко, Е.И. Рыжака, В.В. Стружанова, Z.P. Bazant и др. В частности, был получен ряд аналитических и численных решений краевых задач, на примере которых была продемонстрирована целесообразность учета стадии разупрочнения материала и жесткости нагружающих систем в расчетах конструкций.

К третьей группе могут быть отнесены модели механики трещин, в рамках которых реализация закритической стадии деформирования объясняется равновесным ростом трещины, вызывающим уменьшение поперечного сечения тела и снижение несущей способности. Нелинейные модели механики тел с трещинами были рассмотрены в работах В.И. Астафьева, Г.И. Баренблатта, М.П. Внука, С.Д. Волкова, Р.В. Гольдштейна, М.Я. Леонова, А.М. Линькова, В.П. Матвеевко, Ю.Г. Матвиенко, Е.М. Морозова, Н.Ф. Морозова, В.В. Панасюка, Ю.В. Петрова, М.Н. Перельмутера, Ю.Н. Радаева, Л.В. Степановой, В.Н. Шлянникова, Z.P. Bazant, R. de Borst, A. Carpinteri, R. Dugdale, H.A. Elliott, A. Needleman, V. Tvergaard и других авторов. Несмотря на широкое распространение указанных моделей, внимание процессам закритического деформирования твердых тел с трещинами и влиянию жесткости нагружающих систем на устойчивость данных процессов уделяется редко.

Анализ разработанности темы исследования демонстрирует значительное развитие математических моделей описания процессов неупругого деформирования и разрушения твердых тел, однако число решений краевых задач, в которых исследуются процессы закритического деформирования конструкций, мало. Поскольку учет данной стадии может позволить повысить надежность и безопасность ответственных конструкций, сделан вывод об актуальности изучения процессов закритического деформирования твердых тел на основе получения новых решений краевых задач в рамках структурных моделей неупругого деформирования и разрушения, моделей деформационного разупрочнения, а также нелинейных моделей механики тел с трещинами.

Целью работы является получение новых данных о закономерностях неупругого деформирования и разрушения твердых тел на основе аналитических и численных решений краевых задач с использованием моделей неоднородных сред, структурного разрушения, деформационного разупрочнения и нелинейной механики трещин.

Основные задачи исследования.

1. Анализ макрофеноменологических и структурно-феноменологических моделей неупругого деформирования и разрушения, способов учета свойств нагружающих систем в граничных условиях.

2. Получение численных решений краевых задач для описания процессов деформирования и разрушения неоднородных тел со случайно распределенными прочностными характеристиками структурных элементов.

3. Получение аналитических решений краевых задач с учетом разупрочнения материала и жесткости нагружающих систем.

4. Численный анализ и получение новых данных о закономерностях процессов деформирования тел с концентраторами напряжений при учете стадии разупрочнения материала.

5. Проведение численного моделирования процессов равновесного роста трещин в твердых телах с использованием модели когезионной зоны для описания процессов закритического деформирования тел с трещинами.

Научная новизна работы заключается в следующем.

1. Получены новые результаты численного моделирования процессов разрушения неоднородных тел при одноосных и двухосных кинематических нагружениях с учетом статистического распределения прочностных характеристик упруго-хрупких структурных элементов и деформационной анизотропии, возникающей вследствие частичной потери их несущей способности, а также жесткостных свойств нагружающих систем.

2. Получено новое аналитическое решение задачи о растяжении системы параллельно соединенных элементов со случайно распределенными по равномерному закону прочностными характеристиками при использовании двухзвенной кусочно-линейной аппроксимации диаграммы деформирования материала с учетом жесткости нагружающей системы.

3. Получены новые аналитические решения задач о кручении сплошных и полых цилиндрических тел при использовании двух-, трех- и многозвенных

кусочно-линейных аппроксимаций диаграмм деформирования материала с учетом жесткости нагружающей системы.

4. Получены новые результаты численного моделирования процессов неупругого деформирования пластин с эллиптическими вырезами, включающие описание эволюции областей разупрочнения материала и качественно соответствующие данным натурных экспериментов.

5. Получены новые результаты численного моделирования процессов равновесного роста трещин с использованием модели когезионной зоны при различных значениях параметров разупрочнения материала и характеристик жесткости нагружающей системы.

Теоретическая значимость исследования состоит в получении новых решений физически нелинейных краевых задач и новых данных о закономерностях процессов неупругого деформирования и разрушения твердых тел на основе моделирования стадий закритического деформирования с учетом свойств нагружающих систем.

Практическая значимость исследования заключается в развитии методологии проведения уточненного прочностного анализа ответственных конструкций для повышения их безопасности на основе учета реализации стадии разупрочнения материала и свойств нагружающих систем.

Методология и методы исследования. Изучение процессов закритического деформирования неоднородных конструкций со случайно распределенными прочностными характеристиками упруго-хрупких структурных элементов проведено на основе использования структурно-феноменологической модели неупругого деформирования и разрушения неоднородных сред, предложенной Ю.В. Соколкиным и А.А. Ташкиновым, с применением метода конечных элементов и программного комплекса ANSYS Mechanical. Аналитические решения краевых задач с учетом разупрочнения материала и жесткости нагружающих систем получены в рамках основных положений теории закритического деформирования, разработанной В.Э. Вильдеманом. Численные решения краевых задач с учетом разупрочнения материала получены в рамках теории течения с

применением метода конечных элементов и программного комплекса SIMULIA Abaqus. Численное моделирование процессов равновесного роста трещин проведено с использованием модели когезионной зоны с применением метода конечных элементов и программного комплекса SIMULIA Abaqus.

Положения, выносимые на защиту.

1. Результаты численного моделирования процессов деформирования неоднородных пластин со случайно распределенными прочностными характеристиками упруго-хрупких структурных элементов подтверждают реализуемость закритической стадии деформирования тел на макроуровне вследствие структурного разрушения.

2. Полученные решения задач о кручении сплошных и полых цилиндров, а также деформировании пластин с эллиптическими вырезами свидетельствуют об осуществимости равновесного развития зон разупрочнения в твердых телах в условиях неоднородного напряженно-деформированного состояния.

3. Учет закритической стадии деформирования материала в локальных зонах позволяет выявить для деформируемых тел существенные прочностные (например, до 30% в задаче о кручении сплошного цилиндрического тела) и деформационные (например, до 70% в задаче о растяжении пластины с концентратором напряжений) резервы.

4. Совокупность полученных аналитических и численных решений краевых задач подтверждает, что характеристика жесткости нагружающей системы является одним из факторов, определяющих степень реализации процессов закритического деформирования твердых тел.

5. Нелинейная модель механики трещин, учитывающая реализацию зоны разупрочнения, применима для описания процессов равновесного роста трещин и определения условий перехода к динамическому разрушению.

Достоверность результатов подтверждается использованием известных математических постановок краевых задач механики неупругого деформирования и разрушения, применением для численного решения краевых задач научно обоснованного метода конечных элементов, корректным использованием

лицензионных программных комплексов ANSYS Mechanical и SIMULIA Abaqus, совпадением аналитических выражений для частных случаев полученных решений с опубликованными решениями других авторов, качественным соответствием полученных результатов имеющимся данным натурных экспериментов.

Апробация. Результаты исследований, представленные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на 13 всероссийских и 5 международных научных конференциях: Всероссийская школа-конференция «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2018, 2022, 2025), Всероссийская научно-техническая конференция «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации» (г. Пермь, 2022, 2023, 2024, 2025), XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред (г. Пермь, 2023), Всероссийская конференция «Механика в новых материалах, конструкциях, технологиях» (г. Пермь, 2026), XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (г. Санкт-Петербург, 2023), Всероссийская конференция молодых учёных-механиков (г. Сочи, 2024), Всероссийская научная конференция «Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2025» (г. Казань, 2025), 53-я Школа-конференция «Актуальные проблемы механики» (г. Санкт-Петербург, 2026), XVII Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (г. Екатеринбург, 2023), Международная научно-практическая конференция «Современные авиационные технологии» (г. Иркутск, 2023, 2025), XX Международная научно-практическая конференция «Новые полимерные композиционные материалы» (с. Эльбрус, 2024), 37-я Международная инновационная конференция молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения (г. Москва, 2025).

В полном объеме диссертация обсуждалась на объединенном семинаре кафедры «Экспериментальная механика и конструкционное материаловедение» и Центра экспериментальной механики ПНИПУ (руководитель семинара – д-р физ.-мат. наук, проф. В.Э. Вильдеман), семинаре кафедры «Математическое моделирование систем и процессов» ПНИПУ (руководитель семинара – д-р физ.-мат. наук, проф. П.В. Трусов), семинаре Института механики сплошных сред УрО РАН (руководитель семинара – д-р техн. наук, академик РАН В.П. Матвеев).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 31 работе, из них 13 опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК, и входящих в международные базы цитирования WoS/Scopus.

Реализация работы. Результаты диссертационной работы были получены при выполнении научно-исследовательских работ в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (№ FSNM-2020-0027, № FSNM-2024-0013), грантов Российского научного фонда (№ 16-19-00069-П, № 22-19-00765, № 22-19-00765-П).

Личный вклад автора. Выбор направления исследований, постановка задач и составление плана работ осуществлены совместно с научным руководителем. Личное участие автора заключалось в анализе структурно-феноменологических моделей неупругого деформирования и разрушения, моделей деформационного разупрочнения и моделей механики тел с трещинами, получении численных решений краевых задач для описания процессов деформирования и разрушения неоднородных тел со случайно распределенными прочностными характеристиками структурных элементов, получении аналитических решений задач о растяжении системы параллельно соединенных элементов со случайными прочностными характеристиками и о кручении цилиндрических тел при учете разупрочнения материала и жесткости нагружающих систем, численном анализе и получении новых данных о закономерностях процессов деформирования тел с концентраторами напряжений при учете стадии разупрочнения материала, численном моделировании процессов равновесного роста трещин в твердых телах с использованием модели когезионной зоны для описания процессов закритического деформирования тел с трещинами.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 77 рисунков. Общий объем диссертационной работы составляет 188 страниц, список литературы включает 200 источников.

Во введении обоснована актуальность выбранной темы исследования, изложены цель и задачи работы, полученные новые результаты, обоснована их

достоверность, перечислены положения, выносимые на защиту, теоретическая и практическая значимость работы, представлены сведения об апробации работы.

Первая глава посвящена вопросам моделирования процессов неупругого деформирования и разрушения твердых тел. На основе литературного обзора изучены основные закономерности неупругого деформирования и разрушения конструкций, а также их закритического деформирования. Проведен анализ структурных моделей неупругого деформирования и разрушения неоднородных тел, моделей деформационного разупрочнения и моделей механики тел с трещинами, применимых для описания процессов закритического деформирования.

Во второй главе рассмотрены макрофеноменологические и структурно-феноменологические модели неупругого деформирования и разрушения. Изучен способ учета свойств нагружающих систем в постановках краевых задач через нелокальные граничные условия контактного типа. Представлены полученные на основе метода суперэлементов матричные соотношения, позволяющие при численном решении краевых задач реализовать учет свойств нагружающих систем через нелокальные граничные условия.

Третья глава посвящена численному моделированию процессов деформирования и разрушения неоднородных тел. Рассмотрены алгоритмы численного моделирования процессов неупругого деформирования и разрушения методом конечных элементов. Представлены результаты численного моделирования процессов разрушения неоднородных тел при одноосных и двухосных кинематических нагружениях с учетом статистического распределения прочностных характеристик упруго-хрупких структурных элементов и деформационной анизотропии, возникающей вследствие частичной потери их несущей способности, а также жесткостных свойств нагружающих систем.

В четвертой главе представлены аналитические решения краевых задач о растяжении системы параллельно соединенных элементов со случайными прочностными характеристиками и о кручении цилиндрических тел при учете разупрочнения материала в физических соотношениях и жесткости нагружающих

систем. Проанализирована эволюция зон разупрочнения, определены связи между внешними силовыми и кинематическими факторами, продемонстрирована возможность выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов при учете закритического деформирования материала. С учетом свойств нагружающих систем определены условия реализации полных диаграмм нагружения.

В пятой главе представлены результаты численного моделирования процессов деформирования пластин с концентраторами напряжений различной геометрии при учете стадии разупрочнения материала. Проведен анализ эволюции зон разупрочнения, продемонстрирована возможность выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов при учете закритического деформирования материала. Представлены результаты сопоставления диаграмм нагружения и полей деформаций, полученных на основе численного моделирования и проведения натурных экспериментов.

Шестая глава посвящена численному моделированию процессов равновесного роста трещин с использованием модели когезионной зоны. Изучена эволюция зоны разупрочнения по мере равновесного роста трещины. Исследовано влияние параметров полной диаграммы деформирования материала промежуточного слоя на закритическое деформирование тела на макроуровне. Рассмотрено влияние нагружающих систем на устойчивость процесса равновесного роста трещины.

В заключении сформулированы и изложены основные результаты диссертационной работы.

Благодарность. Автор выражает благодарность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Вильдеману Валерию Эрвиновичу за ценные наставления, постоянную поддержку и внимание к данной работе. Автор выражает благодарность членам своей семьи, а также всем сотрудникам кафедры «Экспериментальная механика и конструкционное материаловедение» и Центра экспериментальной механики ПНИПУ за поддержку и помощь в научной деятельности.

ГЛАВА 1. ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В главе представлен обзор научных публикаций по теме диссертации. Проанализированы основные закономерности неупругого деформирования и разрушения твердых тел, а также закономерности закритического деформирования конструкций из различных материалов. Рассмотрены модели процессов структурного и макроскопического разрушения, деформационного разупрочнения, проанализирована их применимость для описания процессов закритического деформирования твердых тел.

1.1. Закономерности неупругого деформирования и разрушения элементов конструкций

Неупругое деформирование и разрушение конструкций – это сложные многостадийные процессы, зависящие от условий нагружения (квазистатическое, динамическое, циклическое), которые происходят на различных масштабных уровнях, являются стохастическими за счет неоднородности структуры материала, могут быть равновесными либо неустойчивыми [13, 34, 99, 154].

Одним из проявлений неупругого деформирования конструкций и разрушения их структурных элементов является реализация ниспадающих участков графиков зависимости силовых факторов от кинематических – закритической стадии деформирования [20]. Причины реализации данной стадии для материалов различных классов являются различными.

Закритическое деформирование образцов металлов и сплавов в условиях квазистатических воздействий (растяжения, кручения, при сложном нагружении), в том числе при повышенных температурах и наличии дополнительных вибрационных воздействий изучалось в работах Р.А. Васина [15], С.Д. Волкова с соавторами [143], В.Э. Вильдемана с соавторами [18, 29, 30, 50, 142],

А.А. Лебедева, Н.Г. Чаусова [59, 62, 63], Н.С. Но [182], S.K. Paul [169], P.D. Versaillot [196], L. Zhang [188] и других авторов. Чаще всего реализация закритической стадии деформирования металлических образцов обосновывается образованием полос локализации деформаций, ориентированных под углом к направлению приложения нагрузки, вследствие чего в телах образуется локальное сужение, называемое шейкой [49] (по этой причине в иностранной литературе стадия закритического деформирования металлов и сплавов часто называется «necking stage»). Помимо этого, процессы закритического деформирования металлических тел объясняются равновесными процессами развития трещин [59]. Поскольку в таких условиях в теле возникает сложное неоднородное напряженно-деформированное состояние, для идентификации параметров математических моделей используются расчетно-экспериментальные методы [32, 169, 173, 192]. Значительный вклад в данной области исследований был внесен В.Г. Баженовым с соавторами [2, 6, 7, 71, 141].

Процессы закритического деформирования образцов горных пород (в горной механике данная стадия деформирования, как правило, называется «запредельной») были исследованы в работах А.А. Баряха с соавторами [9], А.М. Линькова, И.М. Петухова [101], А.Н. Ставрогина, А.Г. Протосени [122], А.Ф. Ревуженко, Е.И. Шемякина [112], Z. He [167], P.Y. Hou [168, 184], J. Liu [174] и других авторов. В горных породах основной причиной реализации стадии закритического деформирования является повреждение структуры материала и равновесное развитие трещин, ориентированных под углом к направлению приложения нагрузки. Аналогичные причины вызывают закритическое деформирование бетонов, в том числе армированных, диаграммы деформирования с ниспадающей ветвью приведены в работах А.Д. Беглова [10], Ю.В. Зайцева [47], Z.P. Bazant [144], D.C. Jansen [172], X. Yang [199], R. Zhang [200], M. Zhao [149] и других авторов.

Закритическая стадия деформирования наблюдается также в испытаниях образцов полимерных композитов, особенно в случаях, когда внешняя нагрузка перераспределяется на матрицу [48, 170, 175, 177, 189]. В частности, закритическая

стадия деформирования проявляется при растяжении слоистых ортогонально-армированных полимерных композитов под углом к направлениям армирования с реализацией сдвига в плоскости. Реализация закритической стадии деформирования в полимерных композитах объясняется образованием множества трещин продольного сдвига в матрице, расслоениями между матрицей и волокнами, а также разворотом системы армирования с изменением угла между ними. При этом на стадии закритического деформирования образцов в некоторых случаях наблюдается реализация шейки. Влияние на вид данной стадии оказывает наличие дополнительных вибрационных воздействий, а также наличие предварительных циклических воздействий.

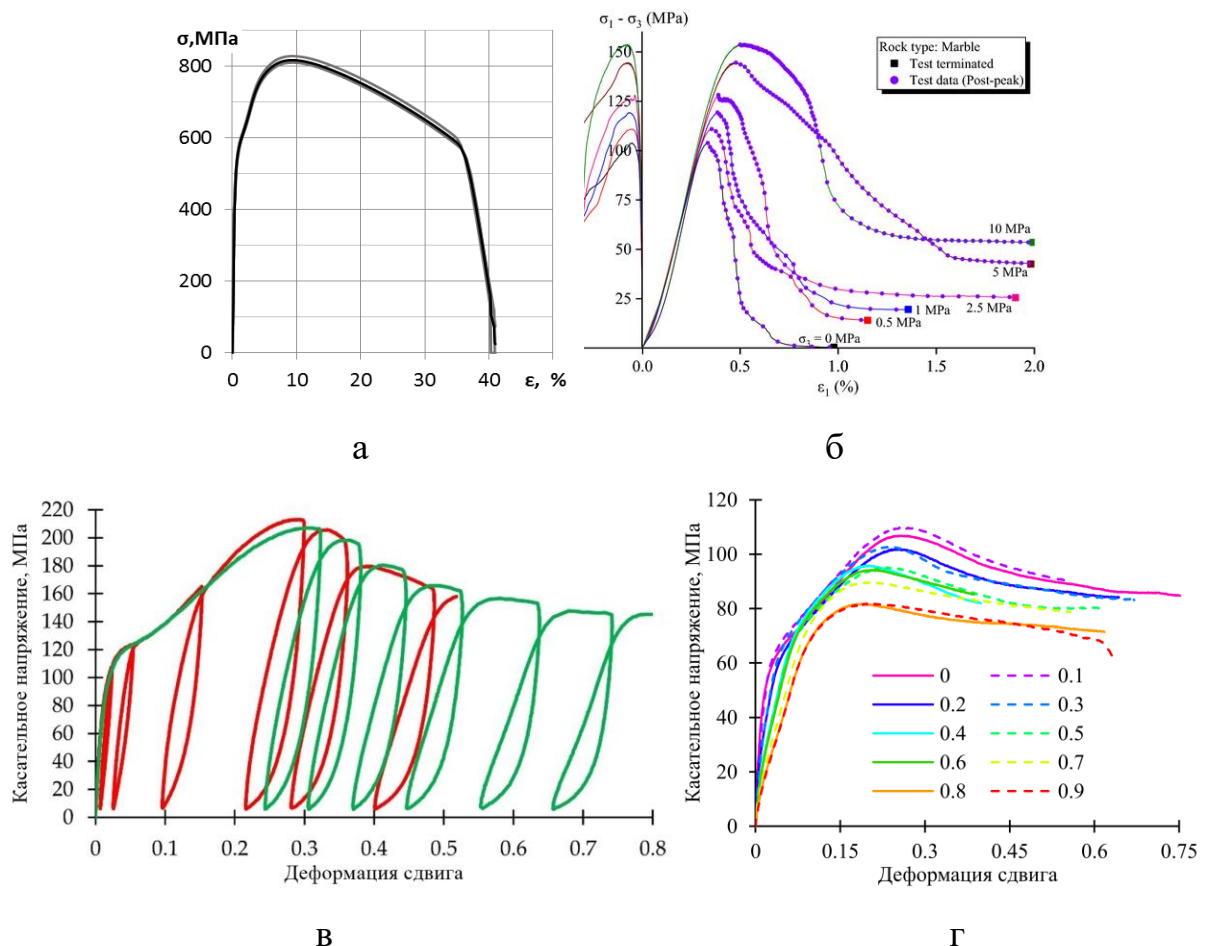


Рисунок 1.1 – Экспериментальные диаграммы деформирования со стадией разупрочнения: стали 40X [142] (а), мрамора [184] (б), слоисто-волокнутого углепластика при сдвиге в плоскости армирования с разгрузками [189] (в) и после циклических воздействий различной продолжительности [170] (г)

Типовые диаграммы деформирования, полученные на основе испытаний образцов различных материалов с реализацией закритической стадии, представлены на рисунке 1.1. Устойчивость поведения образцов на этапе снижения нагрузки экспериментально подтверждается возможностью разгрузки и повторного нагружения с дальнейшей реализацией закритического деформирования [142].

Результаты экспериментальных исследований демонстрируют, что на закритической стадии деформирования конструкций возможным является плавное снижение нагрузки при значительном росте приложенных перемещений, что подтверждает целесообразность учета данной стадии в условиях возникновения аварийных ситуаций для повышения техногенной безопасности.

Экспериментальные исследования вопросов устойчивости процессов закритического деформирования твердых тел были проведены Я.Б. Фридманом, Б.А. Дроздовским [45, 137, 138], Ф.С. Савицким, Б.А. Вандышевым [116], С.Д. Волковым с соавторами [143], А.А. Лебедевым, Н.Г. Чаусовым [62, 63, 135], В.В. Стружановым, В.И. Мироновым [124], В.Э. Вильдеманом с соавторами [18, 29, 30, 50, 142] и другими авторами. Результаты экспериментальных исследований демонстрируют, что закритическое деформирование образцов реализуется при использовании испытательных машин, обладающих высокой жесткостью. В работе [20] введено следующее понятие: «нагружающая система» – это совокупность твердых, жидких и/или газообразных тел, деформирующихся в результате передачи нагрузки рассматриваемой области. Условием устойчивой реализации процессов закритического деформирования является достаточная жесткость нагружающей системы [142].

Обзор экспериментальных работ, посвященных изучению закритической стадии деформирования, демонстрирует возможность ее устойчивой реализации для различных классов материалов при достаточной жесткости нагружающей системы. Соответственно, представляется целесообразным учет разупрочнения как проявления неупругого деформирования и свойств нагружающих систем при проведении анализа механического поведения конструкций.

1.2. Модели процессов структурного и макроскопического разрушения, деформационного разупрочнения

Для описания процессов неупругого деформирования и разрушения твердых тел предложено большое число математических моделей. В частности, это модели, учитывающие нелинейную связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций вследствие пластического деформирования (А.А. Ильюшин [56], Б.Е. Победря [103], Б.Д. Аннин [3], Ю.И. Димитриенко [44] и др.), ползучести (Ю.Н. Работнов [105], Л.М. Качанов [58], А.А. Ильюшин [54], В.П. Радченко [106], А.М. Локощенко [66] и др.), вязкоупругого и вязкопластического деформирования (Б.Е. Победря, Д.В. Георгиевский [40, 55], R.M. Christensen [61] и др.). На основе работ Ю.Н. Работнова [105] и Л.М. Качанова [58] развитие получили модели поврежденной сплошной среды (С. Мураками и Ю.Н. Радаев [92], И.А. Волков и Л.А. Игумнов [34], Е.В. Ломакин и Б.Е. Федулов [176, 155], А.Р. Арутюнян [117], Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов, В.Э. Вильдеман [20, 121] и др.). Кроме этого, на основе данного подхода получили развитие модели накопления повреждений, позволяющие прогнозировать поведение твердых тел и изменение механических характеристик материала при циклическом нагружении (С.В. Панин [145, 161], J.A. Collins [60], A. Fatemi [162], W. van Paeregem [157, 187] и др.),

Поскольку процессы неупругого деформирования и разрушения происходят на различных масштабных уровнях, распространение получили многоуровневые модели (В.Е. Панин, С.В. Панин с соавторами [98, 136, 151], П.В. Трусов, А.И. Швейкин [134], А.А. Роговой [113], Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов, А.А. Паньков [20, 100, 121] и др.). Преимуществом использования данных моделей в сравнении с феноменологическими является возможность учета физических проявлений неупругого деформирования и разрушения (изменения плотности дислокаций, двойникования, разрушения элементов структуры и т. д.), а также стохастичности данных процессов.

В рамках значительного числа моделей предполагается наличие некоторой области материала характерных размеров, в которой реализуются процессы

неупругого деформирования и разрушения, т.е. учитывается нелокальность данных процессов, и в критериях повреждения и разрушения используются усредненные в некоторой области напряжения и деформации (В.В. Новожилов [95, 96], Н. Neuber [181], Н.Ф. Морозов, Ю.В. Петров [73], В.В. Васильев, С.А. Лурье [14], В.Н. Шлянников [150], Н.Г. Бураго, И.С. Никитин [139], D. Taylor [193] и др.).

Для описания процессов разрушения широкое распространение получили нелинейные модели механики тел с трещинами, развитые в работах Г.И. Баренблатта [8], М.Я. Леонова [64], В.В. Панасюка [97], R. Dugdale [159], В.И. Астафьева, Ю.Н. Радаева, Л.В. Степановой [5, 57, 123], Р.В. Гольдштейна, М.Н. Перельмутера [41], А.М. Линькова [65], В.П. Матвеев [12], Ю.Г. Матвиенко [68], Е.М. Морозова [72], В.Н. Шлянникова [140], Z.P. Bazant [144], A. Carpinteri [146, 147] и других авторов. В ряде моделей учитывается наличие зоны предразрушения вблизи вершины трещины, материал в которых оказывает сопротивление дальнейшему распространению трещины.

Процессы закритического деформирования конструкций описываются в рамках различных математических моделей, среди которых могут быть выделены три наиболее часто используемые группы: моделей деформирования и разрушения неоднородных сред, деформационного разупрочнения и нелинейной механики трещин.

В рамках моделей неупругого деформирования и разрушения неоднородных сред закритическое деформирование конструкций является результатом изменения свойств значительного числа структурных элементов, обладающих различными свойствами. Так Ю.В. Соколкиным и А.А. Ташкиновым [121] разработана двухуровневая структурно-феноменологическая модель неупругого деформирования и разрушения неоднородных сред, предложена соответствующая постановка краевой задачи и алгоритм ее решения. В работах В.П. Радченко, Е.В. Небогиной, Е.А. Андреевой [108, 109, 110] разработана структурная модель, в рамках которой поликристаллический материал представляется в виде совокупности хаотически ориентированных однородных стержней, учитывалась возможность их упругого, пластического и вязкого деформирования. Было

продемонстрировано, что в случае кинематического нагружения тела в рамках данной модели может быть описана закритическая стадия деформирования тела. В работах В.Э. Вильдемана, А.В. Зайцева, А.В. Ильиных [16, 23, 25, 52, 53, 91, 166] рассмотрены модели деформирования зернистых композитов с различными генерируемыми структурами, при этом предполагался упруго-хрупкий характер деформирования материала структурных элементов. В рамках данной модели также была выявлена возможность реализации закритической стадии деформирования представительного объема композита по причине накопления повреждений в структуре материала и постепенного прорастания трещины, а также влияние геометрических параметров структуры на реализацию данной стадии. В работе С.Б. Сапожникова с соавторами [1] в рамках стохастической модели деформирования волокнистого композита при сжатии (материал структурных элементов также считался упруго-хрупким) также была подтверждена возможность осуществления закритического деформирования тела вследствие реализации равновесных процессов роста трещин.

Таким образом, стохастические модели, учитывающие процессы структурного разрушения в неоднородных средах, применимы для описания процессов закритического деформирования твердых тел. Необходимо отметить, что в рамках данных моделей устойчивость процессов закритического деформирования и влияние на нее нагружающих систем практически не рассматривалась.

Вторую группу составляют модели деформационного разупрочнения, в рамках которых в физических соотношениях учитывается закритическое деформирование (разупрочнение) материала – процесс снижения напряжений при растущих деформациях. Вопросы разработки данных моделей были рассмотрены С.Д. Волковым с соавторами [35, 36, 37, 38, 39], В.В. Стружановым [124], В.Э. Вильдеманом [20, 24] и другими авторами. Известны некоторые аналитические решения краевых задач при учете разупрочнения материала. В.А. Ибрагимовым и В.Д. Ключниковым были решены задачи о чистом изгибе балки, о деформировании сферической полости в пространстве, нагруженном

равномерно распределенным давлением, об определении напряженно-деформированного состояния в условиях антиплоской деформации [51]. Л.В. Никитиным и Е.И. Рыжаком была рассмотрена задача о всестороннем сжатии горных пород [94]. В работах В.В. Стружанова с соавторами были рассмотрены задачи о разрушении диска с ослабленной центральной зоной [127], о растяжении системы параллельно соединенных элементов [129, 191], о разрушении покрытия цилиндрических и сферических сосудов [190]. В.Э. Вильдеманом были решены задачи о трехточечном изгибе балки [20], о разрушении толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления [26], рассмотрены задачи механики закритического деформирования стержневых систем [31].

Результаты аналитических решений демонстрируют возможность выявления качественно иного механического поведения конструкций на макроуровне при учете разупрочнения материала, возможность устойчивого развития зон закритического деформирования, а также выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов конструкций.

В литературе также представлены результаты численного моделирования процессов деформирования твердых тел с учетом стадии разупрочнения. Так, в работах В.В. Стружанова, Е.Ю. Просвирякова численно рассматривались задачи растяжения и кручения [125, 126, 128, 130, 131, 132]. В работе В.П. Радченко и С.В. Горбунова рассмотрены задачи растяжения полос с концентраторами напряжений различной геометрии [107, 111]. В работах В.Э. Вильдемана были рассмотрены задачи деформирования тел с концентраторами напряжений под действием внутреннего давления [20] и ячейки периодичности волокнистого композита [19].

Полученные результаты численного моделирования демонстрируют возможность реализации равновесных зон разупрочнения материала, а также выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов при учете закритического деформирования материала.

При решении краевых задач с учетом реализации стадии разупрочнения необходимым является учет свойств нагружающих систем, определяющих

устойчивость процессов деформирования. Наиболее простым способом является явный учет путем добавления дополнительных упругих элементов – стержней либо областей материала. Данный способ был применен в работах В.В. Стружанова [132], Е.И. Рыжака [114, 115], В.Э. Вильдемана [31] и других авторов. Однако при рассмотрении процессов неупругого деформирования в отдельных областях тела целесообразным представляется учет свойств нагружающих систем через нелокальные граничные условия контактного типа с применением тензоров Грина либо Неймана, предложенный В.Э. Вильдеманом [20, 24] и численно реализованный в работе [46].

На основе представлений о разупрочнении материала и влиянии жесткости нагружающих систем В.Э. Вильдеманом разработана теория закритического деформирования [20, 24], доказаны существование и единственность решения краевой задачи механики закритического деформирования, рассмотрены экстремальные и вариационные принципы, сформулирован постулат устойчивости.

Анализ данной группы моделей демонстрирует возможность прогнозирования качественно иного поведения конструкций при учете разупрочнения материала в постановках краевых задач, выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов, а также необходимость учета свойств нагружающих систем для оценки устойчивости процессов деформирования. Однако число аналитических и численных решений, учитывающих стадию деформационного разупрочнения материала, является малым.

К третьей группе моделей, позволяющих описывать процессы закритического деформирования конструкций, относятся модели механики трещин, поскольку их развитие, вызывающее существенное изменение поперечного сечения образца, объясняет возможность равновесного снижения нагрузки, выдерживаемой телом. Среди значительного числа нелинейных моделей механики трещин следует выделить так называемые модели когезионной зоны (в иностранной литературе – «cohesive zone model»), в рамках которых перед

вершиной трещины в теле предполагается наличие зоны, в которой действуют силы сцепления, препятствующие ее развитию. При этом распределение напряжений в когезионном слое предполагает равенство их нулю в вершине трещины, что снимает противоречие о стремлении напряжений к бесконечности в вершине трещины, возникающее в рамках упругой постановки задачи. Показательно, что С.Д. Волковым в работе [38] подобная гипотеза (о качественном соответствии эпюр напряжений у вершины трещины полным диаграммам деформирования материала со стадией разупрочнения) была выдвинута именно на основе представлений о разупрочнении материалов. Модель когезионной зоны была разработана на основе модели Леонова-Панасюка-Дагдейла [64, 97, 159], а также работ Г.И. Баренблатта [8] и Н.А. Elliott [160]. Развитие и применение данной модели было осуществлено в работах А. Carpinteri [147], А. Needleman [180], V. Tvergaard [195], R. de Borst [156], J. Planas [183], М.П. Внука [33] и других авторов [194]. В частности, были рассмотрены различные функции распределения напряжений вблизи вершины трещины (связи напряжений с ее раскрытием), вопросы моделирования процессов развития трещин смешанного типа, а также численной реализации модели когезионной зоны.

Численные решения краевых задач, полученные в рамках модели когезионной зоны, демонстрируют наличие протяженной стадии закритического деформирования тел, реализуемой вследствие процессов равновесного роста трещин. Необходимо отметить, что вопросы влияния нагружающих систем в рамках моделей тел с трещинами практически не рассматривались [146, 179].

Таким образом, сделан вывод о возможности применения моделей деформирования и разрушения неоднородных сред, деформационного разупрочнения и нелинейной механики трещин (в частности, модели когезионной зоны) для описания процессов закритического деформирования твердых тел.

Выводы по главе 1

На основе проведенного анализа научных публикаций, связанных с вопросами моделирования процессов неупругого деформирования и разрушения конструкций, сделаны выводы об актуальности таких задач механики деформируемого твердого тела, как:

- создание многоуровневых моделей неупругого деформирования, в том числе учитывающих стохастичность и нелокальность процессов разрушения структурных элементов;
- изучение закритической стадии деформирования твердых тел на основе получения и анализа решений краевых задач с использованием структурно-феноменологических моделей неупругого деформирования и разрушения, моделей деформационного разупрочнения и нелинейных моделей механики трещин;
- определение условий реализации закритического деформирования твердых тел в связи со свойствами нагружающих систем.

ГЛАВА 2. МАКРОФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ И СТРУКТУРНО-ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ

Вторая глава посвящена рассмотрению макрофеноменологических и структурно-феноменологических моделей неупругого деформирования и разрушения. В частности, рассмотрены модели неупругого деформирования, в рамках которых тензор напряжений связывается с тензором деформаций через тензор поврежденности четвертого ранга, физические соотношения теории пластического течения, структурно-феноменологическая модель деформирования и разрушения неоднородных сред, а также модель когезионной зоны, являющаяся одной из феноменологических моделей механики разрушения. Изучены нелокальные и локальные граничные условия III рода, позволяющие учитывать свойства нагружающих систем в постановках краевых задач. На основе применения метода суперэлементов получены матричные соотношения, позволяющие при численном решении краевых задач реализовать учет свойств нагружающих систем через нелокальные граничные условия.

Соотношения, приведенные в данной главе, были рассмотрены в работах диссертанта [27, 84, 88, 158, 164].

2.1. Макрофеноменологические модели неупругого деформирования

Постановки краевых задач неупругого деформирования и разрушения, помимо граничных условий (которые подробно рассмотрены в параграфе 2.3 диссертации) включают в себя уравнения равновесия (учитывающие либо не учитывающие массовые силы), геометрические соотношения (чаще всего используются тензор малых деформаций Коши), и физические соотношения.

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j}(\bar{r}) + f_i(\bar{r}) &= 0, \\
\varepsilon_{ij}(\bar{r}) &= \frac{1}{2} (u_{i,j}(\bar{r}) + u_{j,i}(\bar{r})), \\
\sigma_{ij}(\bar{r}) &= \sigma_{ij}(\bar{r}, \varepsilon_{kl}),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор, u_i – вектор перемещений, ε_{ij} – тензор малых деформаций Коши, σ_{ij} – тензор напряжений, уравнения равновесия записаны с учетом массовых сил f_i .

При записи физических соотношений может быть использован подход, предложенный В.Э. Вильдеманом, Ю.В. Соколкиным, А.А. Ташкиновым, наиболее полно изложенный в работе [20]. В рамках данного подхода связь напряжений с деформациями описывается с помощью тензора поврежденности четвертого ранга:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(I_{klmn} - \Omega_{klmn})\varepsilon_{mn}, \tag{2.2}$$

где C_{ijkl} – тензор упругих констант неповрежденного материала, $I_{klmn} = \frac{1}{2}(\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{kn}\delta_{lm})$, δ_{km} – дельта-символ Кронекера, Ω_{klmn} – тензор поврежденности четвертого ранга. В данном случае поврежденность формально отражает изменение текущего модуля материала, однако компоненты тензора поврежденности могут быть использованы в том числе для определения пластических деформаций при упругой разгрузке.

Одним из преимуществ использования выражения (2.2) является возможность использования множества функций поврежденности и описания неупругого поведения в том числе анизотропных материалов (трансверсально-изотропных, ортотропных). Помимо этого, в рамках данных соотношений возможным является учет множества критериев разрушения и частичной потери несущей способности при выполнении критерия разрушения (в частности, со сменой типа анизотропии).

Для изотропного материала выражение (2.2) сводится к виду

$$\sigma_{ij} = [3K(1 - k)V_{ijmn} + 2G(1 - g)H_{ijmn}]\varepsilon_{mn}, \tag{2.3}$$

где K, G – модули объемного сжатия и сдвига; k, g – функции первого и второго инвариантов тензора деформаций соответственно, выражающие изменение деформационных свойств при гидростатическом давлении и чистом сдвиге; $V_{ijmn} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn}$, $H_{ijmn} = I_{ijmn} - V_{ijmn}$. В случае принятия гипотезы об отсутствии пластического деформирования при всестороннем растяжении либо сжатии ($k = 0$) данное выражение аналогично определяющим соотношениям деформационной теории пластичности с использованием функции пластичности Ильюшина [56].

Иным способом учета неупругого (в частности, пластического) деформирования изотропного материала является использование физических соотношений теории течения [67], в рамках которых устанавливается линейная связь между напряжениями и упругими составляющими деформаций, а также связь между приращениями компонент девиатора пластических деформаций по закону течения (приведен вариант для изотропного упрочнения):

$$\begin{aligned}\sigma_{kk}(\bar{r}) &= 3K\varepsilon_{kk}(\bar{r}); \\ s_{ij}(\bar{r}) &= 2Ge_{ij}^e(\bar{r}); \\ \sigma_{\text{и}} &= \Phi(e_{\text{эКВ}}^p); \\ de_{ij}^p(\bar{r}) &= de_{\text{и}}^p(\bar{r}) \frac{3s_{ij}(\bar{r})}{2\sigma_{\text{и}}(\bar{r})},\end{aligned}\tag{2.4}$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ – девиатор напряжений; $\sigma_{\text{и}} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$ – интенсивность напряжений; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$ – девиатор деформаций; e_{ij}^e – упругая часть девиатора деформаций; $de_{ij}^p = de_{ij} - de_{ij}^e$, приращение девиатора пластических деформаций; $de_{\text{и}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}de_{ij}^p de_{ij}^p}$ – интенсивность приращения пластических деформаций; $e_{\text{эКВ}}^p = \int de_{\text{и}}^p$ – эквивалентная пластическая деформация (параметр Удквиста); зависимость $\Phi(e_{\text{эКВ}}^p)$ является условием пластического течения и определяется по диаграмме деформирования материала.

Соотношения (2.2)–(2.4) могут быть успешно применены для описания процессов неупругого деформирования в условиях квазистатического нагружения в отсутствие иных внешних воздействий. Также преимуществом данных моделей

является возможность описания процессов деформационного разупрочнения материалов без внесения дополнительных изменений в уравнения [20].

2.2. Структурно-феноменологические модели деформирования и разрушения неоднородных сред

Недостатком использования макрофеноменологических моделей является ограниченность их применения для учета многоуровневости, нелокальности и стохастичности процессов неупругого деформирования и разрушения. Для устранения данного недостатка целесообразным является использование многоуровневого подхода. В частности, Ю.В. Соколкиным и А.А. Ташкиновым был разработан подход [121], заключающийся в рассмотрении двух уровней деформирования (макроуровня и структурного, или микроуровня) с использованием классических уравнений механики деформируемого твердого тела. На микроуровне неоднородная среда представляется в виде совокупности прочно соединенных по границе раздела структурных элементов, на макроуровне определяются эффективные характеристики среды в различных точках и решается краевая задача для всего тела.

Структурно неоднородное твердое тело можно представить как совокупность H подобластей, материал внутри каждой из которых является однородным. Неоднородность распределения механических характеристик по структурным элементам представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}\chi^{(z)}(\bar{r}) &= \begin{cases} 1, & \bar{r} \in V^{(z)}; \\ 0, & \bar{r} \notin V^{(z)}; \end{cases} \quad z = \overline{1, H}, \\ C_{ijkl}(\bar{r}, t) &= \sum_{z=1}^H \chi^{(z)}(\bar{r}) C_{ijkl}^{(z)}(t), \quad z = \overline{1, H}, \\ f_{(\beta)}(\bar{r}, t) &= \sum_{z=1}^H \chi^{(z)}(\bar{r}) f_{(\beta)}^{(z)}(t), \quad z = \overline{1, H}, \quad \beta = \overline{1, s}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\chi^{(z)}$ – индикаторные функции, характеризующие попадание точки в структурный элемент объемом $V^{(z)}$ (для учета характерного размера области

разрушения величина $V^{(z)}$ должна ему соответствовать, таким образом могут быть учтены нелокальность разрушения и масштабный фактор); C_{ijkl} – тензор упругих констант, определяемый через индикаторные функции и известные упругие константы структурных элементов $C_{ijkl}^{(z)}$; $f_{(\beta)}$ – прочностные константы (их общее число равно s), определяемые через индикаторные функции и известные прочностные константы структурных элементов $f_{(\beta)}^{(z)}$ (которые могут быть случайно распределены по некоторому выбранному закону). Для учета истории процессов неупругого деформирования и разрушения необходимым является введение параметра процесса t , который по сути является условным аналогом времени (может быть, например, выражен через число циклов при усталостном накоплении повреждений).

Физические соотношения на микроуровне описываются выражением:

$$\sigma_{ij}(\bar{r}, t) = C_{ijpq}(\bar{r}, t, \varepsilon_{pq}) \varepsilon_{pq}(\bar{r}, t), \quad (2.6)$$

нелинейность процесса деформирования может быть учтена путем введения зависимости упругих констант от деформаций, например, через тензор поврежденности четвертого ранга (по аналогии с выражением (2.4)). Для учета различных видов разрушения целесообразным является использование совокупности критериев в форме

$$C_{(\delta)}(f_{(\beta)}(\bar{r}, t), \sigma_{ij}(\bar{r}, t), \varepsilon_{pq}(\bar{r}, t)) \geq 1, \quad \beta = \overline{1, s}, \quad \delta = \overline{1, a}, \quad (2.7)$$

где выполнение критерия $C_{(\delta)}$ в точке $\bar{r}$ в состоянии t соответствует одному из a механизмов разрушения типа δ и приводит к скачкообразному изменению некоторых (соответствующих данному механизму разрушения) упругих констант при $\bar{r} \in V^{(z)}$.

Предложена следующая схема изменения прочностных констант упруго-хрупкого материала при учете анизотропии, возникающей вследствие частичной потери несущей способности:

$$\begin{aligned}
K(\bar{r}, t) &= \frac{\sigma_1(\bar{r}, t)}{\sigma_B(\bar{r})}, \\
C_{ijkl}^{(z)}(t) &= \begin{cases} C_{ijkl}^{init}, \nexists \tau \leq t : \max_{V^{(z)}}(K(\bar{r}, \tau)) \geq 1; \\ \alpha_{im}^{(z)} \alpha_{jn}^{(z)} \alpha_{kp}^{(z)} \alpha_{lq}^{(z)} C_{ijkl}^{dam}, \exists \tau \leq t : \max_{V^{(z)}}(K(\bar{r}, \tau)) \geq 1 \wedge \forall \tau' < \tau : C_{ijkl}^{(z)}(\tau') = C_{ijkl}^{init}; \\ C_{ijkl}^{fract}, \exists \tau \leq t : \max_{V^{(z)}}(K(\bar{r}, \tau)) \geq 1 \wedge \exists \tau' < \tau : C_{ijkl}^{(z)}(\tau') = C_{ijkl}^{dam}; \end{cases} \\
C_{ijkl}^{init} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \\
C_{mnpq}^{dam} &= C_{mnpq}^{init}, \text{ кроме } C_{1111}^{dam} = C_{1122}^{dam} = C_{1133}^{dam} = C_{1313}^{dam} = C_{1212}^{dam} = 0; \\
\alpha_{im}^{(z)} &= \begin{pmatrix} \cos(x_1, x_1^{(z)}) & \cos(x_1, x_2^{(z)}) & \cos(x_1, x_3^{(z)}) \\ \cos(x_2, x_1^{(z)}) & \cos(x_2, x_2^{(z)}) & \cos(x_2, x_3^{(z)}) \\ \cos(x_3, x_1^{(z)}) & \cos(x_3, x_2^{(z)}) & \cos(x_3, x_3^{(z)}) \end{pmatrix}; \\
C_{ijkl}^{fract} &\equiv 0,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где K – коэффициент перегрузки, определяющий отношение первого главного напряжения в точке σ_1 к пределу прочности на растяжение σ_B ; C_{ijkl}^{init} – тензор упругих констант неповрежденного изотропного материала, задаваемый через параметры Ламе λ и G ; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала; C_{ijkl}^{dam} – тензор упругих констант частично потерявшего несущую способность (вследствие выполнения критерия разрушения) ортотропного материала, упругие константы задаются в системе координат $x^{(z)}$, связанной с направлениями главных напряжений перед выполнением критерия разрушения; $\alpha_{im}^{(z)}$ – матрица поворота из системы координат $x^{(z)}$ в глобальную систему координат; C_{ijkl}^{fract} – тензор упругих констант материала, полностью потерявшего несущую способность; τ, τ' – значения параметра t . Схема повреждения и разрушения материала по рассмотренному механизму представлена на рисунке 2.1.

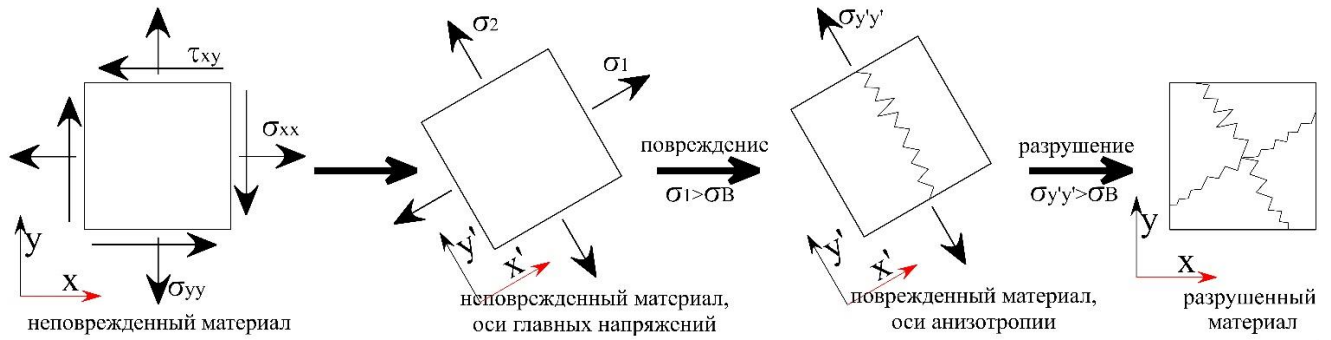


Рисунок 2.1 – Схема изменения свойств материала при выполнении критериев разрушения (для плоского напряженного состояния): x, y – глобальные оси координат; x', y' – оси анизотропии поврежденного материала, соответствующие ориентации главных напряжений перед разрушением

Помимо процессов разрушения, на структурном уровне могут быть учтены изменения механических характеристик, вызванные влиянием различных внешних воздействий (динамических, циклических и др.). Зависимость какой-либо механической характеристики материала (далее уравнения написаны для прочностных характеристик) от условий воздействия может быть представлена в виде зависимости от условного параметра времени и k параметров нагружения $\varphi_{(\alpha)}$, которые являются функциями тензоров напряжений и деформаций:

$$f_{(\beta)} = f_{(\beta)}\left(t, \varphi_{(\alpha)}\left(\sigma_{ij}(t), \varepsilon_{ij}(t)\right)\right), \quad \alpha = \overline{1, k}, \quad \beta = \overline{1, s}, \quad (2.9)$$

где $f_{(\beta)}$ – текущее значение прочностной характеристики материала; $f_{(\beta)}(t=0) = f_{0(\beta)}$ – значение механической характеристики материала (до приложения внешнего воздействия). Выражение вида (2.9) представимо в виде зависимости относительной величины механической характеристики от числа циклов воздействия, что позволяет ввести функции поврежденности $D_{(\beta)}$, отражающие изменение свойств материала в условиях накопления повреждений:

$$D_{(\beta)} = 1 - \frac{f_{(\beta)}}{f_{0(\beta)}} = y_{(\beta)}\left(t, \varphi_{(\alpha)}\left(\sigma_{ij}(t), \varepsilon_{ij}(t)\right)\right), \quad \alpha = \overline{1, k}, \quad \beta = \overline{1, s}. \quad (2.10)$$

В выражении (2.10) $y_{(\beta)}$ – некоторые функции.

Необходимо отметить, что в условиях накопления повреждений разрушение структурного элемента может рассматриваться как следствие уменьшения поверхности прочности до пересечения с траекторией нагружения.

Поскольку определение функций $y_{(\beta)}$ является чрезвычайно сложной задачей, целесообразным является подбор некоторых функций, качественно отражающих общие закономерности изменения механических характеристик вследствие накопления повреждений, и дальнейшее определение параметров данных функций от условий воздействия.

В качестве иллюстрации рассмотрены типовые точки диаграммы зависимости относительного значения остаточного предела прочности полимерного композита K_B , подвергнутого предварительному циклическому воздействию, от относительного числа циклов воздействия n (рисунок 2.2). Проведено следующее преобразование: те же точки представлены в виде зависимости предварительного числа циклов воздействия от величины функции поврежденности. Можно отметить некоторые особенности данной зависимости. Во-первых, она является ограниченной снизу нулем и сверху единицей. Во-вторых, если предполагать отсутствие «залечивания» материала, данная зависимость является монотонно возрастающей. В-третьих, в середине видно наличие характерного участка медленного накопления повреждений. Такие особенности являются типовыми для некоторых интегральных функций распределения. Соответственно, для описания изменения прочностных характеристик полимерных композитов в процессе циклического воздействия могут быть использованы функции, используемые в законах распределения.

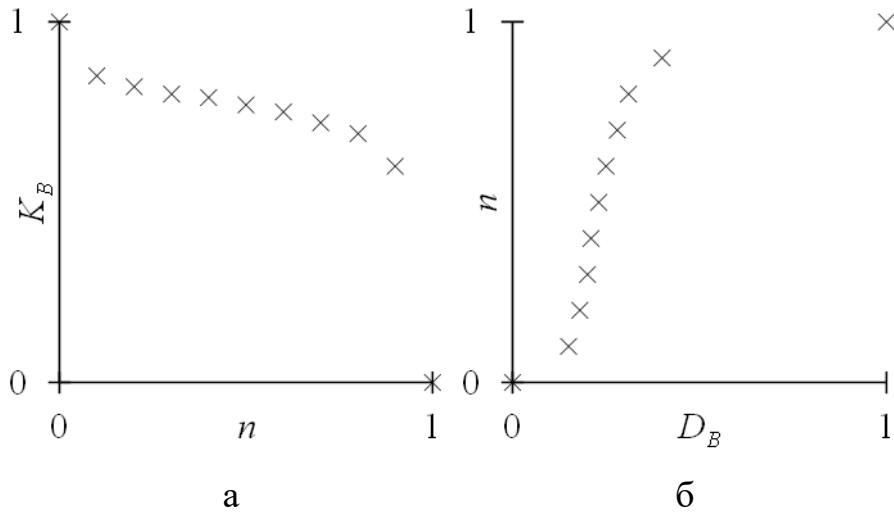


Рисунок 2.2 – Зависимость остаточных свойств от предварительного циклического воздействия в координатах « K_B – n » (а) и « n – D_B » (б)

Так, при использовании двухпараметрического закона распределения Вейбулла функция поврежденности примет вид:

$$D_B(n) = \lambda \left(-\ln(1-n) \right)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad (2.11)$$

где $\lambda > 0$ – коэффициент масштаба; $\kappa > 0$ – коэффициент формы. Обе эти величины являются параметрами материала, характеризующими его способность сохранять прочность при некоторой наработке числа циклов. Данные параметры являются функциями параметров циклического воздействия.

При использовании бета-распределения зависимость $K_B(n)$ описывается выражением

$$D(n) = \frac{B_n(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)}; \quad B_n(\alpha, \beta) = \int_0^n t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt; \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt. \quad (2.12)$$

Здесь $B_n(\alpha, \beta)$ – неполная бета-функция; $B(\alpha, \beta)$ – бета-функция, параметры α и β должны быть положительными.

Результаты применения данных моделей накопления повреждений для описания изменения предела прочности стеклотекстолита, подвергнутого одноосным циклическим воздействиям в условиях малоциклового усталости, приведены на рисунке 2.3.

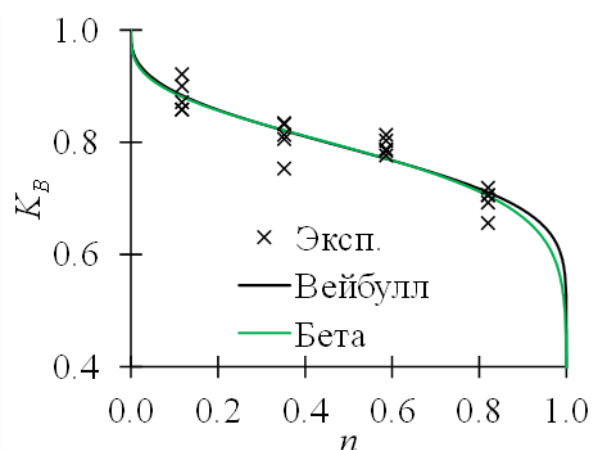


Рисунок 2.3 – Экспериментальные зависимости относительной остаточной прочности стеклотекстолита от относительного числа циклов воздействия, аппроксимированные с применением выражений (2.11) и (2.12)

Результаты демонстрируют хорошую описательную способность предложенных выражений. Феноменологические модели (2.11) и (2.12) были успешно применены для описания процессов изменения жесткостных и прочностных характеристик полимерных композитов различной структуры в работах [163, 171, 177, 186].

Таким образом, в рамках структурно-феноменологических моделей в физических соотношениях могут быть учтены неоднородность распределения механических характеристик, реализация различных критериев и механизмов разрушения, нелокальность процессов разрушения (изменение свойств в структурных элементах с характерными объемами $V^{(z)}$ и изменение механических характеристик, вызванное процессами накопления повреждений).

Помимо выражений (2.5)–(2.7), для завершения постановки на структурном уровне требуются уравнения равновесия (массовые силы не учитываются):

$$\sigma_{ij,j}(\bar{r}, t) = 0, \quad (2.13)$$

динамические эффекты не учитываются (принимается, что для любого состояния t тело находится в равновесии). Используются геометрические соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij}(\bar{r}, t) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\bar{r}, t) + u_{j,i}(\bar{r}, t)), \quad (2.14)$$

где u_i – вектор перемещений.

В теле выделяется ряд макрообъемов V^* , размеры которых существенно меньше габаритов тела, но существенно больше характерных размеров структурных элементов $V^{(z)}$. Граничные условия для структурного уровня могут быть записаны через связь с макродеформациями ε_{ij}^* (граничные условия I рода):

$$u_i(\bar{r}, t) \Big|_{\Gamma_u^*} = u_i^*(\bar{r}, t) = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} \varepsilon_{ij}^*(\bar{r}, t) dV r_j, \quad (2.15)$$

либо через связь с макронапряжениями σ_{ij}^* (граничные условия II рода):

$$[\sigma_{ij}(\bar{r}, t) n_j(\bar{r})] \Big|_{\Gamma_s^*} = S_i^*(\bar{r}, t) = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} \sigma_{ij}^*(\bar{r}, t) dV n_j(\bar{r}), \quad (2.16)$$

где n_j – вектор нормали к поверхности макрообъема V^* ; Γ_s^* , Γ_u^* – части поверхности макрообъема с заданными векторами сил S_i^* и перемещений u_i^* , соответственно.

Макроскопические уравнения равновесия, геометрические соотношения и физические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^*(\bar{r}, t) &= 0, \\ \varepsilon_{ij}^*(\bar{r}, t) &= \frac{1}{2} (u_{i,j}^*(\bar{r}, t) + u_{j,i}^*(\bar{r}, t)), \\ \sigma_{ij}^*(\bar{r}, t) &= C_{ijpq}^*(\bar{r}, t, \varepsilon_{pq}^*) \varepsilon_{pq}^*(\bar{r}, t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где u_i^* – перемещения на макроуровне; C_{ijpq}^* – тензор эффективных упругих свойств макрообъемов, определяемых известными методами и подходами механики композитов [121].

Уравнения (2.5)–(2.7) и (2.13)–(2.17), дополненные граничными условиями (которые будут рассмотрены в параграфе 2.4), представляют собой постановку краевой задачи деформирования и разрушения структурно неоднородного тела.

2.3. Феноменологическая модель механики разрушения с учетом разупрочнения у вершины трещины

Широкое распространение для описания процессов развития трещин в твердых телах получила одна из феноменологических моделей механики разрушения – модель когезионной зоны, в рамках которой вносится предположение о существовании перед фронтом трещины области (которая названа когезионной зоной), в которой действуют напряжения, препятствующие дальнейшему развитию трещины (рисунок 2.4). При этом, как правило, в рамках данной модели предполагается, что с приближением к вершине трещины напряжения снижаются до нуля, что решает вопросы с наличием точки сингулярности в вершине трещины. Данное предположение соответствует гипотезе С.Д. Волкова, представленной в работе [38].

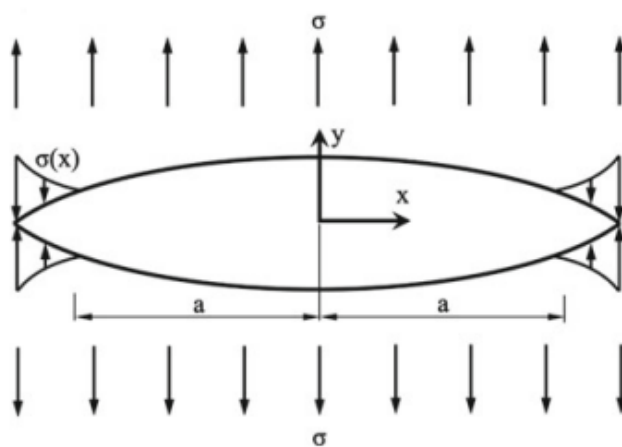


Рисунок 2.4 – Распределение напряжений перед вершиной трещины
в модели когезионной зоны [148]

В рамках модели когезионной зоны перед вершиной трещины предполагается наличие тонкого слоя толщины δ_0 , по которому происходит ее развитие. Физические соотношения в рамках данной модели представляются в виде связи вектора усилий $\bar{T}$ с вектором смещений $\bar{\Delta}$ (данный вектор определяется как

разность перемещений двух точек слоя, расположенных на противоположных его сторонах):

$$\bar{T} = \bar{T}(\bar{\Delta}). \quad (2.18)$$

В декартовой системе координат, связанной с направлением развития фронта трещины (обозначена как ось x) и направлением нормали к слою (ось y) компоненты вектора $\bar{T}$ соответствуют напряжениям σ_{yy} , τ_{xy} , τ_{yz} , а отношения компонент вектора смещений $\bar{\Delta}$, отнесенные к начальной толщине слоя δ_0 – деформациям ε_{yy} , γ_{xy} , γ_{yz} . Соответственно, может быть совершен переход от связи векторов усилий и перемещений к связи тензоров напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}), \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{zz} = \tau_{xz} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Напряжения σ_{yy} , τ_{xy} , τ_{yz} в таком случае определяют сопротивление материала развитию трещины нормального отрыва, продольного сдвига и поперечного сдвига соответственно.

Известны различные варианты связи напряжений и деформаций в рамках модели когезионной зоны. Одним из наиболее простых является независимое рассмотрение связи компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= E_{yy} \left(1 - \omega_{E_I}(\varepsilon_{yy}) \right) \varepsilon_{yy}, \\ \tau_{xy} &= G_{xy} \left(1 - \omega_{G_{II}}(\gamma_{xy}) \right) \gamma_{xy}, \\ \tau_{yz} &= G_{yz} \left(1 - \omega_{G_{III}}(\gamma_{yz}) \right) \gamma_{yz}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где E_{yy} – модуль Юнга материала, G_{xy} , G_{yz} – модули сдвига материала в обозначенной системе координат, ω_{E_I} , $\omega_{G_{II}}$, $\omega_{G_{III}}$ – скалярные функции поврежденности, каждая из которых зависит только от одной компоненты тензора деформаций. Вариант (2.20) соответствует рассмотрению трещины смешанного типа как совокупности трещин каждого из трех типов, при этом он соответствует одному из возможных частных случаев физических соотношений (2.2).

В рамках модели когезионной зоны предполагается выполнение уравнений равновесия и геометрических соотношений Коши, при этом изменением компонент

тензоров напряжений и деформаций по толщине когезионного слоя пренебрегают в силу ее малости. Также в рамках данных задач принимается идеальное сцепление между когезионным слоем и сопряженными с ним частями тела.

2.4. Граничные условия с учетом свойств нагружающих систем в контексте анализа устойчивости деформирования

Наиболее часто в постановках краевых задач механики деформируемого твердого тела используются кинематические (I рода) и силовые (II рода) граничные условия:

$$\begin{aligned} u_i|_{\Gamma_u} &= u_i^0, \\ \sigma_{ij}n_j|_{\Gamma_s} &= S_i^0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где Γ_u – часть поверхности тела с заданными векторами перемещений u_i^0 , Γ_s – часть поверхности с заданными на площадках с нормалью n_j векторами напряжений S_i^0 . Однако использование граничных условий (2.21) не позволяет учесть свойства нагружающих систем, которые определяют устойчивость процессов при реализации закритической стадии деформирования конструкций.

В связи с этим использован подход к учету свойств нагружающих систем, изложенный в работе [20]. Рассматривается сплошное деформируемое тело Ω_0 с поверхностью Σ_0 . На Σ_0 заданы кинематические и силовые граничные условия, препятствующие движению тела как единого целого. В каждой точке $\mathbf{r}$ тела Ω_0 выполняются уравнения равновесия, геометрические соотношения Коши и физические соотношения, соответствующие выбранной модели деформирования материала.

Тело Ω_0 мысленно разделяется на две части: сплошное тело Ω с поверхностью Σ – область, процесс деформирования которой необходимо исследовать, и тело Ω' с поверхностью Σ' – нагружающую систему по отношению к телу Ω ($\Omega \cup \Omega' = \Omega_0$). Поверхности, по которым происходило смыкание исследуемой области Ω с

нагружающей системой Ω' , обозначены как Γ и Γ' (в недеформированном состоянии $\Gamma = \Gamma' = \Omega \cap \Omega'$); также введены $\Theta = \Sigma \setminus \Gamma$ и $\Theta' = \Sigma' \setminus \Gamma'$ – поверхности исследуемой области и нагружающей системы, к которым приложены граничные условия ($\Theta \cup \Theta' = \Sigma_0$, $\Theta \cap \Theta' = \emptyset$). В результате проведенного разделения возможными являются два случая (рисунок 2.5):

1. Нагружающая система примыкает к исследуемой области, т.е. $\Theta \neq \emptyset$.
2. Исследуемая область расположена внутри нагружающей системы, т.е. $\Theta = \emptyset$, $\Sigma = \Gamma$.

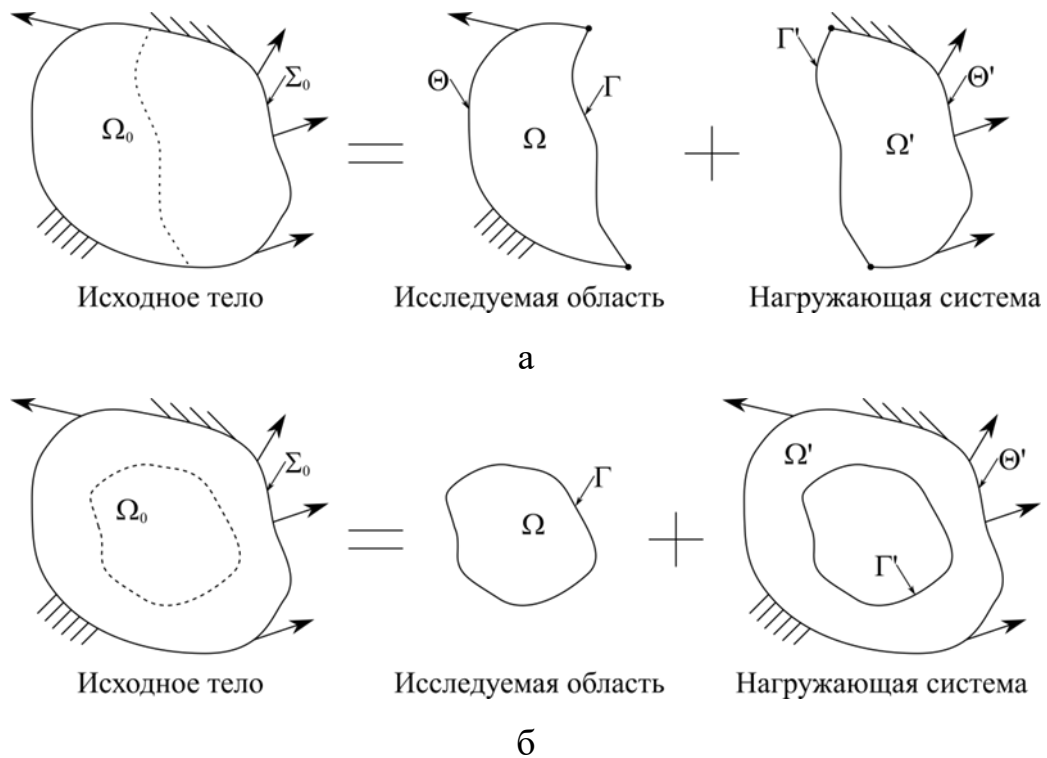


Рисунок 2.5 – Разделение тела Ω_0 на две части: исследуемая область примыкает к нагружающей системе (а) либо расположена внутри нее (б)

При независимом рассмотрении тел Ω и Ω' в результате внешних воздействий произойдут искажения поверхностей Γ и Γ' . Принимается, что совокупность граничных условий на поверхности Θ' нагружающей системы Ω' запрещает ее движение как единое целое.

К границе Γ' нагружающей системы Ω' прикладываются такие дополнительные перемещения $-u_i^0$, которые обеспечат совпадение конфигураций поверхностей Γ и Γ' . При этом возникнут силы реакции $-S_i^0$, связанные с $-u_i^0$ выражениями

$$\begin{aligned} S_i^0(\bar{r}) &= \iint_{\Gamma'} N_{ij}(\bar{r}, \bar{r}') u_j^0(\bar{r}') d\Gamma', \\ u_i^0(\bar{r}) &= \iint_{\Gamma'} G_{ij}(\bar{r}, \bar{r}') S_j^0(\bar{r}') d\Gamma', \end{aligned} \quad (2.22)$$

где N_{ij} – тензор Неймана, G_{ij} – тензор Грина. Данные тензоры, устанавливающие связь между перемещениями точек границы Γ' и возникающими при этом силами реакции при отсутствии тела Ω , определяются механическими характеристиками материала нагружающей системы, ее геометрией и граничными условиями на поверхности Θ' .

После проведенных операций осуществляется скрепление тел Ω и Ω' – данное действие не приведет к появлению дополнительных деформаций в системе, поскольку обеспечено совпадение поверхностей Γ и Γ' . Последующее снятие перемещений $-u_i^0$ приведет к исчезновению соответствующих сил реакции $-S_i^0$. В результате совместного деформирования двух тел точки поверхности Γ претерпят перемещения

$$u_i(\bar{r}) = u_i^0(\bar{r}) - \iint_{\Gamma'} G_{ij}(\bar{r}, \bar{r}') S_j(\bar{r}') d\Gamma', \quad (2.23)$$

где S_i – усилия, возникающие между исследуемой областью и нагружающей системой:

$$S_i(\bar{r}) = S_i^0(\bar{r}) - \iint_{\Gamma'} N_{ij}(\bar{r}, \bar{r}') u_j(\bar{r}') d\Gamma'. \quad (2.24)$$

Полученные усилия S_i , связанные с напряжениями σ_{ij} на площадке поверхности Γ с вектором нормали n_j соотношениями Коши, и перемещения u_i соответствуют напряжениям и перемещениям, которые будут получены при решении краевой задачи для тела Ω_0 с поверхностью Σ_0 . Следовательно, краевая задача для тела Ω_0 может быть заменена на краевую задачу для исследуемой

области Ω путем введения нелокальных граничных условий контактного типа, определяемых выражениями:

$$\begin{aligned} \left[\sigma_{ij}(\bar{r}) n_j(\bar{r}) + \iint_{\Gamma'} N_{ij}(\bar{r}, \bar{r}') u_j(\bar{r}') d\Gamma' \right]_{\Gamma} &= S_i^0(\bar{r}), \\ \left[u_i(\bar{r}) + \iint_{\Gamma'} G_{ij}(\bar{r}, \bar{r}') S_j(\bar{r}') d\Gamma' \right]_{\Gamma} &= u_i^0(\bar{r}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Поскольку определение тензора Неймана либо тензора Грина является сложной отдельной задачей, в некоторых случаях (в частности, при упругом деформировании нагружающей системы) допустима замена нелокальных граничных условий на локальные (III рода) [20]:

$$\begin{aligned} \left[\sigma_{ij}(\bar{r}) n_j(\bar{r}) + R_{ij}(\bar{r}) u_j(\bar{r}) \right]_{\Gamma} &= S_i^0(\bar{r}), \\ \left[u_i(\bar{r}) + Q_{ij}(\bar{r}) \sigma_{jk}(\bar{r}) n_k(\bar{r}) \right]_{\Gamma} &= u_i^0(\bar{r}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где R_{ij} , Q_{ij} – коэффициенты пропорциональности между нагрузками S_i^0 и перемещениями u_i^0 , отражающие жесткость и податливость нагружающей системы в различных точках поверхности Γ .

Необходимо отметить, что использование граничных условий в виде (2.25) либо (2.26) позволяет оценить устойчивость процессов закритического деформирования в случае их реализации в некоторой области тела. Критерий устойчивости процесса деформирования тела Ω с поверхностью Γ со свойствами нагружающей системы, учтенными через R_{ij} (2.26), имеет вид [20]:

$$\int_{\Omega} \delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma} R_{ij} \delta u_i \delta u_j d\Gamma > 0, \quad (2.27)$$

где $\delta \sigma_{ij}$, $\delta \varepsilon_{ij}$, δu_i – малые изменения напряжений, деформаций и перемещений точек границы тела, вызванные малым самопроизвольным приращением деформаций в зоне разупрочнения. Таким образом, учет свойств нагружающих систем в постановках краевых задач представляется рациональным и может быть произведен путем использования нелокальных либо локальных граничных условий контактного типа. При этом возникают вопросы определения компонент тензоров Грина и Неймана.

В рамках метода конечных элементов их определение может быть произведено для конечного числа узлов в рамках использования метода суперэлементов (также известного как метод подконструкций), предложенного в работе J.S. Przemieniecki [185] и усовершенствованного в работе C.J. Meissner [178]. Основная идея метода заключается в разбиении исходной конструкции на отдельные части, называемые подструктурами, которые также разбиваются на части до тех пор, пока не образуются настолько геометрически простые и малые по размерам подструктуры, что их можно принять в качестве базисных элементов (конечных элементов). При этом подструктура (подконструкция) заменяется на суперэлемент, содержащий только узлы на поверхности, что значительно сокращает число узловых неизвестных. Необходимо отметить, что аналогичный подход был реализован в методе блоков, предложенном А.А. Ильюшиным [104].

Решение краевых задач осуществляется в несколько этапов: декомпозиция – разбиение конструкции на составные части; конденсация – построение суперэлементов для подконструкций; сборка – объединение суперэлементов в модель исходной конструкции; расчет – решение глобальной системы уравнений; вычисление узловых неизвестных внутренних узлов подконструкций по известным перемещениям поверхностных узлов суперэлемента. Метод суперэлементов был развит в работах R.R. Craig [152, 153], В.А. Постнова [70], и применялся А.М. Белостоцким [11], А.С. Городецким [42] и другими авторами [93, 133] для анализа механического поведения различных конструкций.

Принимается, что исследуемая область и нагружающая система (как две части тела Ω_0) разделены на конечные элементы, и для каждой из них построены глобальная матрица жесткости и глобальный вектор сил. При этом система линейных алгебраических уравнений для нагружающей системы имеет решение, поскольку, как ранее было принято, граничные условия на ее поверхности обеспечивают отсутствие движения как единого целого.

В случае примыкания нагружающей системы к исследуемой области тела (рисунок 2.5а) система линейных алгебраических уравнений после учета граничных условий может быть приведена к форме:

$$\begin{bmatrix} [K_{\Gamma'\Gamma'}] & [K_{\Gamma'\Omega'}] & [K_{\Gamma'\Theta'}] \\ [K_{\Omega'\Gamma'}] & [K_{\Omega'\Omega'}] & [K_{\Omega'\Theta'}] \\ [K_{\Theta'\Gamma'}] & [K_{\Theta'\Omega'}] & [K_{\Theta'\Theta'}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_{\Gamma'}\} \\ \{\delta_{\Omega'}\} \\ \{\delta_{\Theta'}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{\Gamma'}\} \\ \{F_{\Omega'}\} \\ \{F_{\Theta'}\} \end{Bmatrix}, \quad (2.28)$$

где $\{\delta_{\Gamma'}\}$, $\{\delta_{\Omega'}\}$, $\{\delta_{\Theta'}\}$ – узловые неизвестные для узлов, принадлежащих границе нагружающей системы Γ' , ее внутреннему объему Ω' и границе Θ' , соответственно; $[K_{\Gamma'\Gamma'}]$, $[K_{\Omega'\Omega'}]$, $[K_{\Theta'\Theta'}]$, $[K_{\Gamma'\Omega'}] = [K_{\Omega'\Gamma'}]^T$, $[K_{\Gamma'\Theta'}] = [K_{\Theta'\Gamma'}]^T$, $[K_{\Omega'\Theta'}] = [K_{\Theta'\Omega'}]^T$ – соответствующие части глобальной матрицы жесткости; $\{F_{\Gamma'}\}$, $\{F_{\Omega'}\}$, $\{F_{\Theta'}\}$ – соответствующие части глобального вектора сил. Система уравнений (2.28) может быть решена относительно вектора узловых неизвестных $\{\delta_{\Gamma'}\}$:

$$\begin{aligned} [\hat{K}]\{\delta_{\Gamma'}\} &= \{\hat{F}\}, \\ [\hat{K}] &= [K_{\Gamma'\Gamma'}] - [K_{\Gamma'\Theta'}][K_{\Theta'\Theta'}]^{-1}[K_{\Gamma'\Theta'}]^T - [\widehat{K_{\Gamma'\Omega'}}][\widehat{K_{\Omega'\Omega'}}]^{-1}[\widehat{K_{\Gamma'\Omega'}}]^T, \\ \{\hat{F}\} &= \{F_{\Gamma'}\} - [\widehat{K_{\Gamma'\Omega'}}][\widehat{K_{\Omega'\Omega'}}]^{-1}\{F_{\Omega'}\} \\ &\quad - \left([K_{\Gamma'\Theta'}] - [\widehat{K_{\Gamma'\Omega'}}][\widehat{K_{\Omega'\Omega'}}]^{-1}[K_{\Omega'\Theta'}]\right)[K_{\Theta'\Theta'}]^{-1}\{F_{\Theta'}\}, \\ [\widehat{K_{\Omega'\Omega'}}] &= [K_{\Omega'\Omega'}] - [K_{\Omega'\Theta'}][K_{\Theta'\Theta'}]^{-1}[K_{\Omega'\Theta'}]^T, \\ [\widehat{K_{\Gamma'\Omega'}}]^T &= [K_{\Gamma'\Omega'}]^T - [K_{\Omega'\Theta'}][K_{\Theta'\Theta'}]^{-1}[K_{\Gamma'\Theta'}]^T. \end{aligned} \quad (2.29)$$

При записи выражений (2.29) предполагается, что учет граничных условий, препятствующих движению нагружающей системы как единого целого, является достаточным для обеспечения неравенства нулю определителей матриц $[\hat{K}]$, $[K_{\Theta'\Theta'}]$, $[\widehat{K_{\Omega'\Omega'}}]$. Использование матрицы $[\hat{K}]$ и вектора $\{\hat{F}\}$ позволит избежать необходимости определения узловых неизвестных для узлов нагружающей системы, не сопряженных с исследуемой областью, что может значительно снизить требуемые для решения краевой задачи для тела Ω_0 вычислительные ресурсы.

Система линейных алгебраических уравнений для исследуемой области с примыкающей нагружающей системой, учтенной через суперэлемент:

$$\begin{bmatrix} [K_{\Gamma\Gamma}] + [\hat{K}] & [K_{\Gamma\Omega}] & [K_{\Gamma\Theta}] \\ [K_{\Omega\Gamma}] & [K_{\Omega\Omega}] & [K_{\Omega\Theta}] \\ [K_{\Theta\Gamma}] & [K_{\Theta\Omega}] & [K_{\Theta\Theta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_{\Gamma}\} \\ \{\delta_{\Omega}\} \\ \{\delta_{\Theta}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{\Gamma}\} + \{\hat{F}\} \\ \{F_{\Omega}\} \\ \{F_{\Theta}\} \end{Bmatrix}, \quad (2.30)$$

где $\{\delta_{\Gamma}\}$, $\{\delta_{\Omega}\}$, $\{\delta_{\Theta}\}$ – узловые неизвестные для узлов, принадлежащих границе исследуемой области Γ , ее внутреннему объему Ω и границе Θ , соответственно;

$[K_{\Gamma\Gamma}]$, $[K_{\Omega\Omega}]$, $[K_{\Theta\Theta}]$, $[K_{\Gamma\Omega}] = [K_{\Omega\Gamma}]^T$, $[K_{\Gamma\Theta}] = [K_{\Theta\Gamma}]^T$, $[K_{\Omega\Theta}] = [K_{\Theta\Omega}]^T$ – соответствующие части глобальной матрицы жесткости; $\{F_{\Gamma}\}$, $\{F_{\Omega}\}$, $\{F_{\Theta}\}$ – соответствующие части глобального вектора сил.

В системе уравнений (2.30) матрица $[\hat{K}]$ соответствует тензору Неймана N_{ij} , обратная ей матрица $[\hat{K}]^{-1}$ – тензору Грина G_{ij} , вектор $\{\hat{F}\}$ – номинально задаваемым усилиям S_i^0 , вектор $[\hat{K}]^{-1}\{\hat{F}\}$ – номинально задаваемым перемещениям u_i^0 на части поверхности исследуемой области Γ .

При расположении исследуемой области внутри нагружающей системы (рисунок 2.5б) система линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов аналогична (2.28) с учетом $[K_{\Gamma'\Theta'}] = [K_{\Theta'\Gamma'}]^T \equiv 0$ при отсутствии конечных элементов, имеющих узлы на обеих границах Γ' и Θ' (что представляется целесообразным). Система уравнений относительно вектора узловых неизвестных $\{\delta_{\Gamma'}\}$ примет вид:

$$\begin{aligned} [\hat{K}]\{\delta_{\Gamma'}\} &= \{\hat{F}\}, \\ [\hat{K}] &= [K_{\Gamma'\Gamma'}] - [K_{\Gamma'\Omega'}][\widehat{K_{\Omega'\Omega'}}]^{-1}[K_{\Gamma'\Omega'}]^T, \\ \{\hat{F}\} &= \{F_{\Gamma'}\} - [K_{\Gamma'\Omega'}][\widehat{K_{\Omega'\Omega'}}]^{-1}\{F_{\Omega'}\} \\ &\quad + [K_{\Gamma'\Omega'}][\widehat{K_{\Omega'\Omega'}}]^{-1}[K_{\Omega'\Theta'}][K_{\Theta'\Theta'}]^{-1}\{F_{\Theta'}\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Для исследуемой области, окруженной нагружающей системой, учтенной через суперэлемент:

$$\begin{bmatrix} [K_{\Gamma\Gamma}] + [\hat{K}] & [K_{\Gamma\Omega}] \\ [K_{\Omega\Gamma}] & [K_{\Omega\Omega}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_{\Gamma}\} \\ \{\delta_{\Omega}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{\Gamma}\} + \{\hat{F}\} \\ \{F_{\Omega}\} \end{Bmatrix}. \quad (2.32)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что при численном решении краевых задач в рамках применения метода суперэлементов могут быть использованы матричные соотношения, эквивалентные нелокальным граничным условиям контактного типа, в которых используется тензор Грина либо тензор Неймана.

Построение матрицы $[\hat{K}]$ и вектора $\{\hat{F}\}$ требует значительных вычислительных ресурсов и не является целесообразным, например, при решении краевых задач теории упругости. Однако в случаях моделирования многоэтапных

процессов разрушения использование метода суперэлементов может позволить сэкономить вычислительные ресурсы, поскольку пересчет матрицы $[\hat{K}]$ и вектора $\{\hat{F}\}$ требуется только при переходе на следующий шаг нагружения, во время реализации итерационной процедуры они являются неизменными.

При рассмотрении одного конечного элемента (рисунок 2.6) выражение (2.32) примет вид:

$$([K_e] + [\hat{K}])\{\delta_e\} = (\{F_e\} + \{\hat{F}\}), \quad (2.33)$$

где $\{\delta_e\}$ – вектор узловых неизвестных конечного элемента; $[K_e]$, $\{F_e\}$ – матрица жесткости и вектор сил конечного элемента.

Нагружающая система

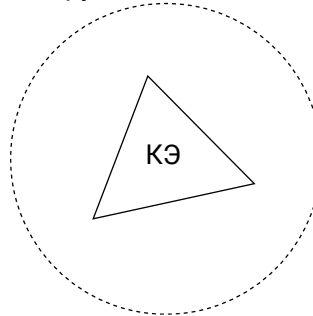


Рисунок 2.6 – Конечный элемент, окруженный нагружающей системой

При реализации закритического деформирования материала в конечном элементе с использованием алгоритма Ньютона-Рафсона [20] на главной диагонали матрицы $[K_e]$ появляются отрицательные значения, соответственно, необходимой является оценка устойчивости процессов деформирования. Условием устойчивого закритического деформирования в конечном элементе является положительная определенность матрицы $([K_e] + [\hat{K}])$ [20], что может быть достигнуто при достаточной жесткости нагружающей системы. Соответственно, можно сделать вывод о возможности применения метода суперэлементов для оценки устойчивости процессов закритического деформирования в локальных областях твердых тел.

Выводы по главе 2

1. Процессы неупругого деформирования и разрушения твердых тел могут быть описаны с использованием макрофеноменологических моделей механического поведения материала, структурно-феноменологического подхода, подразумевающего рассмотрение как минимум двух масштабных уровней, и модели когезионной зоны, как одной из моделей механики трещин.

2. Предложенная аппроксимация описания зависимостей прочностных и деформационных характеристик полимерных композитов от числа циклов воздействия на основе интегральных функций распределения может быть применена для описания экспериментальных данных о малоцикловой усталости слоисто-волокнуистых стеклопластиков.

3. Нагружающие системы могут быть учтены в постановках краевых задач путем использования локальных либо нелокальных граничных условий контактного типа (III рода). С их использованием может быть проведена оценка устойчивости процессов закритического деформирования твердых тел. При использовании нелокальных условий возникают вопросы определения тензоров Грина и Неймана.

4. В рамках применения метода суперэлементов могут быть получены матричные соотношения, позволяющие при численном решении краевых задач учитывать свойства нагружающих систем через нелокальные граничные условия контактного типа, в которых используется тензор Грина либо тензор Неймана.

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ СО СЛУЧАЙНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПРОЧНОСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Данная глава посвящена изучению процессов деформирования и разрушения неоднородных тел при учете стохастичности распределения прочностных характеристик упруго-хрупких структурных элементов.

Рассмотрены алгоритмы численного решения физически нелинейных задач методом конечных элементов. Отмечены особенности алгоритмизации численных решений задач разрушения неоднородных тел, представленных в виде совокупности упруго-хрупких структурных элементов. Представлены результаты численного моделирования процессов деформирования и разрушения неоднородных пластин с концентраторами напряжений при одноосных и двухосных кинематических нагружениях с учетом статистического распределения прочностных характеристик упруго-хрупких структурных элементов и деформационной анизотропии, возникающей вследствие частичной потери их несущей способности. Изучена возможность реализации процессов закритического деформирования структурно неоднородных тел и влияние жесткости нагружающих систем на устойчивость данных процессов.

Результаты, изложенные в данной главе, опубликованы в работах диссертанта [4, 79, 82, 83, 164, 165].

3.1. Алгоритмы численного решения физически нелинейных задач методом конечных элементов

В рамках использования метода конечных элементов для решения физически нелинейных задач теории пластичности с использованием физических соотношений (2.3) либо (2.4) наиболее широко применяется (в том числе в программных пакетах ANSYS Mechanical, Abaqus CAE) следующий алгоритм:

1. Создание геометрии тела, задание свойств материала в рамках выбранной модели неупругого деформирования.

2. Задание граничных условий (перемещений и усилий, по достижении которых расчет прекращается), выбор фиксированного шага нагружения (как некоторой доли от заданных перемещений и усилий).

3. Дискретизация расчетной области.

4. Решение краевой задачи теории упругости методом конечных элементов.

5. Оценка изменения пластических деформаций в конечных элементах. При его отклонении от предыдущего состояния больше заданного – корректировка свойств конечных элементов (методами переменных параметров упругости, дополнительных деформаций и др., в зависимости от выбранной модели материала), переход к п. 4. При отсутствии необходимости корректировки свойств – переход к п. 6.

6. Изменение граничных условий в соответствии с выбранным шагом нагружения. При достижении конечного состояния – завершение расчета, иначе переход к п. 4.

Данный алгоритм подразумевает также использование внутреннего счетчика итераций на данном шаге нагружения для выявления потери сходимости итерационной процедуры корректировки свойств.

Использование пошагового нагружения для решения задач теории пластичности является целесообразным, поскольку возникновение ситуаций скачкообразного изменения свойств и значительного изменения напряженно-деформированного состояния является маловероятным. Однако в случае моделирования процессов разрушения тел, состоящих из упруго-хрупких структурных элементов, данные ситуации возможны, соответственно, необходимой является адаптация рассмотренного алгоритма.

Во-первых, поскольку выполнение критерия разрушения может быть достигнуто одновременно в различных конечных элементах, требуется выбор числа «разрушаемых» за итерацию элементов (процедура «разрушения» имитируется редуцированием жесткостных характеристик элементов). Для

наиболее точного описания процесса разрушения представляется рациональным выбор для редуцирования характеристик на каждой итерации одного «наиболее перегруженного» элемента (с наибольшим отношением эквивалентного напряжения к пределу прочности).

Во-вторых, поскольку «разрушение» одного конечного элемента может вызвать перераспределение напряжений и дальнейшее накопление повреждений в теле, необходимым является пересчет напряженно-деформированного состояния при неизменных граничных условиях с организацией соответствующей итерационной процедуры, которая является эквивалентом итерационной процедуры решения задач теории пластичности. Учет данной особенности в алгоритмах соответствует мгновенному изменению напряженно-деформированного состояния после каждого акта разрушения, однако при этом динамические эффекты не учитываются (в рамках статической постановки задачи).

Пошаговое нагружение применимо для моделирования процессов разрушения упруго-хрупких структурных элементов, однако для наиболее точного описания процессов разрушения целесообразным является использование автоматического шага нагружения, подразумевающего подбор его величины на основе анализа текущего напряженно-деформированного состояния для заведомого выполнения критерия разрушения ровно в одном конечном элементе на следующем шаге. В некоторых случаях автоматический шаг нагружения также может позволить сэкономить вычислительные ресурсы (не требуется многократное увеличение шага для выполнения критерия разрушения).

Рациональным также представляется выбор размера конечного элемента соответствующим характерному объему зоны повреждения. При этом использование именно метода конечных элементов является целесообразным, поскольку подразумевает получение усредненных напряжений и изменение жесткостных характеристик в некотором объеме материала, что соответствует представлениям о нелокальности процессов разрушения.

С учетом вышеизложенного для моделирования процессов деформирования и разрушения неоднородных тел, состоящих из упруго-хрупких элементов, разработан следующий алгоритм:

1. Ввод начальных данных: геометрии тела, упругих свойств материала.
2. Дискретизация расчетной области и генерация прочностных характеристик структурных элементов (предполагается, что один структурный элемент соответствует одному конечному элементу).
3. Задание граничных условий, заведомо не вызывающих выполнение критерия разрушения в конечных элементах.
4. Расчет напряженно-деформированного состояния на основе решения краевой задачи теории упругости.
5. Определение расчетной нагрузки, приложенной к телу. В случае ее значения менее порогового (при снижении нагрузки) расчет завершается, иначе – переход к п. 6.
6. Определение коэффициентов перегрузки, соответствующих отношению эквивалентного напряжения в конечных элементах к пределам прочности. Вычисление максимального из них (K_{max}).
7. Если $K_{max} < 1$, то увеличение внешних нагрузок и перемещений в $1/K_{max}$ раз и переход к п. 4, иначе переход к п. 8.
8. Редуцирование жесткости «наиболее перегруженного» конечного элемента. Переход к п. 4.

Разработанный алгоритм был ранее реализован путем написания программного кода [118] на языке APDL (ANSYS Parametric Design Language).

Далее представлены результаты численного моделирования процессов разрушения неоднородных тел с концентраторами напряжений при одноосных и двухосных кинематических нагружениях с учетом статистического распределения прочностных характеристик упруго-хрупких структурных элементов, а также жесткостных свойств нагружающих систем.

3.2. Закритическое деформирование пластины со случайно распределенными прочностными характеристиками упруго-хрупких структурных элементов

С целью исследования возможности реализации закритической стадии деформирования неоднородного тела со случайными прочностными характеристиками структурных элементов рассмотрена задача кинематического нагружения пластины (ширина 100 мм, высота 20 мм, плоское напряженное состояние, для расчета нагрузок толщина принята равной 1 мм) с краевым эллиптическим концентратором напряжений (малая полуось 1 мм, большая полуось 4 мм). Геометрия тела и граничные условия приведены на рисунке 3.1.

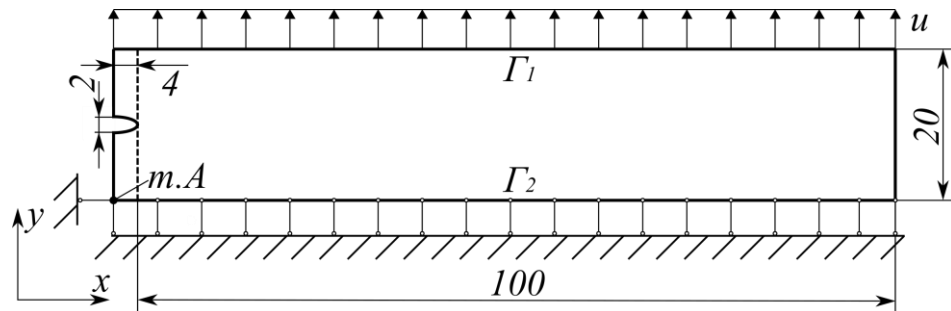


Рисунок 3.1 – Геометрия пластины с краевым концентратором напряжений и граничные условия

Граничные условия:

$$\begin{cases} u_y(\bar{r}, t)|_{\Gamma_1} = u_0(\bar{r}, t), \\ \tau_{xy}(\bar{r}, t)|_{\Gamma_1} = 0, \\ u_y(\bar{r}, t)|_{\Gamma_2} = 0, \\ \tau_{xy}(\bar{r}, t)|_{\Gamma_2} = 0, \\ u_x(\bar{r}, t)|_{m.A} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

остальные поверхности тела являются свободными.

Рассмотрен модельный изотропный материал с модулем Юнга $E = 3$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.36$. Пределы прочности материалов структурных элементов были сгенерированы с использованием равномерного распределения:

$$F(\sigma_B) = \begin{cases} 0, & \sigma_B < \sigma_B^{\min}, \\ \frac{\sigma_B - \sigma_B^{\min}}{\sigma_B^{\max} - \sigma_B^{\min}}, & \sigma_B^{\min} \leq \sigma_B \leq \sigma_B^{\max}, \\ 1, & \sigma_B^{\max} < \sigma_B, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\bar{\sigma}_B = \frac{\sigma_B^{\max} + \sigma_B^{\min}}{2}, \quad SD = \frac{\sigma_B^{\max} - \sigma_B^{\min}}{2\sqrt{3}}, \quad CV = \frac{SD}{\bar{\sigma}_B}.$$

Здесь $\sigma_B^{\max}$ – максимальное значение предела прочности, среднее значение для всех генераций принято равным 40 МПа. Коэффициент вариации задавался в диапазоне от 0 до 0.520 (данные значения позволяют избежать появления элементов с отрицательными пределами прочности) с шагом 0.058.

Пороговое значение внешней нагрузки, соответствующее прекращению расчета, выбрано равным 0.1 кН. При моделировании использован конечный элемент PLANE182, сетка генерировалась автоматически. Задача сходимости решена для случая величины параметра $CV=0.0$. Средний характерный линейный размер элементов L_{el} (определяемый как квадратный корень из отношения площади пластины к числу элементов) выбран в диапазоне 0.120 – 0.204 мм, что соответствует числу элементов 143570 – 49680. На рисунке 3.2 представлены расчетные диаграммы нагружения при различных величинах характерных линейных размеров конечных элементов L_{el} .

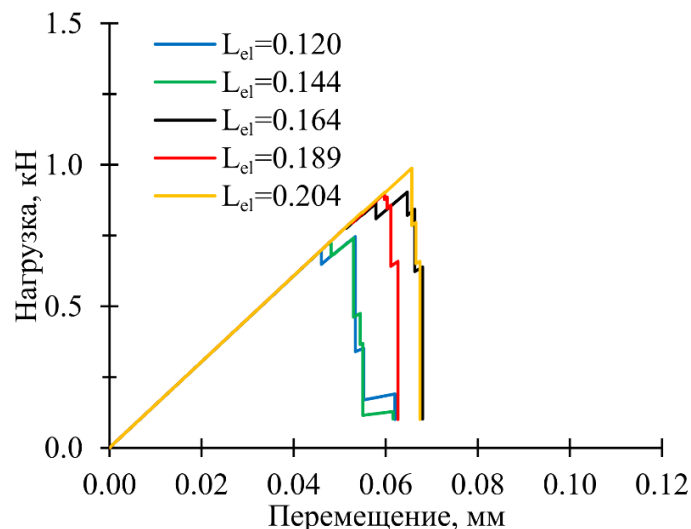


Рисунок 3.2 – Расчетные диаграммы нагружения пластины при различных L_{el}

Результаты демонстрируют, что уменьшение размера конечного элемента не приводит к сходимости, что объясняется изменением размера областей с редуцированными характеристиками, и реализацией различного распределения напряжений в конечных элементах. В связи с этим рациональным представляется использование размера конечного элемента, связанного с характерным размером области разрушения для данного материала. Для выявления закономерностей закритического деформирования пластин со случайно распределенными пределами прочности структурных элементов выбран характерный линейный размер 0.164 мм, что соответствует 77104 конечным элементам (условие сходимости решения краевой задачи теории упругости при этом выполняется).

На рисунке 3.3 приведены типовые диаграммы нагружения, полученные при моделировании процессов разрушения с использованием равномерного закона распределения пределов прочности структурных элементов. Результаты демонстрируют, что с ростом величины разброса прочностных характеристик происходит немонотонное изменение максимальной нагрузки, выдерживаемой телом. Диаграммы нагружения постепенно становятся более гладкими (особенно при значениях $CV \geq 0.462$), на макроуровне реализуется нелинейное поведение с реализацией протяженной стадии закритического деформирования тела.

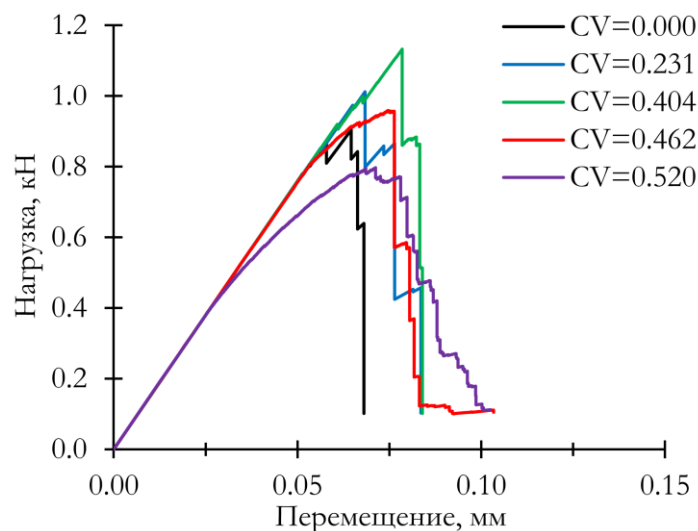
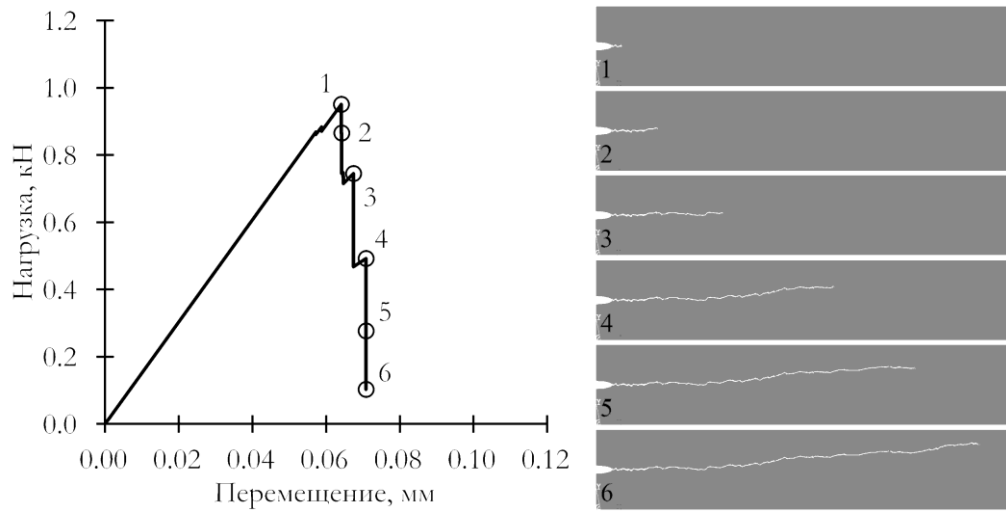


Рисунок 3.3 – Расчетные диаграммы нагружения при различных коэффициентах вариации распределения прочностных характеристик

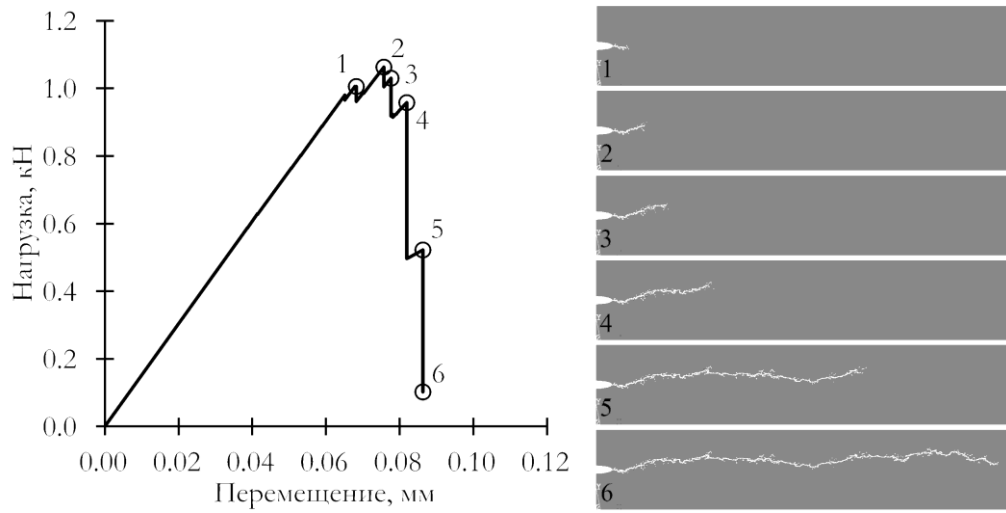
Изучена кинетика процесса разрушения. На рисунке 3.4 представлены типовые диаграммы нагружения и эволюция поврежденных областей, соответствующие отмеченным состояниям. При $CV = 0.173$ накопления повреждений до достижения максимальной нагрузки практически не происходит, макродефект развивается путем последовательного редуцирования жесткостей соседних конечных элементов. Существование устойчивых состояний (при которых итерационная процедура пересчета напряженно-деформированного состояния завершается и происходит переход на следующий шаг нагружения) объясняется особенностями генерации сетки, а также наличием на пути прорастания макродефекта элементов с повышенными значениями предела прочности.

При $CV = 0.346$ еще до достижения максимальной нагрузки наблюдается большее число «разрушенных» элементов в сравнении с предыдущим случаем. Повышение дисперсии распределения прочностных характеристик структурных элементов привело к появлению в области концентрации напряжений элементов со сниженными значениями предела прочности. Это способствует накоплению структурных повреждений вне развивающегося макродефекта.

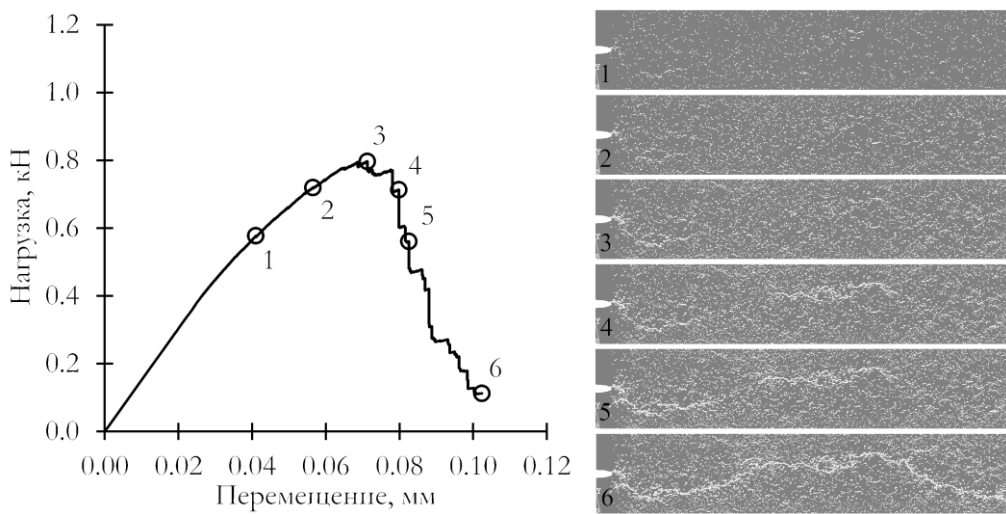
При $CV = 0.520$ наблюдается преимущественно дисперсное накопление повреждений структуры как вблизи концентратора напряжений, так и в объеме тела. Соответственно, рост коэффициента вариации распределения прочностных характеристик структурных элементов приводит к ослаблению влияния концентратора напряжений. Максимальная нагрузка в теле достигается при большом числе структурных элементов с редуцированными жесткостными характеристиками, развитие макродефекта происходит по уже поврежденным областям тела. Наблюдается протяженная стадия закритического деформирования на макроуровне.



а



б



в

Рисунок 3.4 – Типовые диаграммы нагружения и эволюция поврежденных областей при значениях параметра CV : 0.173 (а), 0.346 (б), 0.520 (в)

Таким образом, использование модели деформирования и разрушения структурно неоднородных тел позволило выявить влияние коэффициента вариации распределения пределов прочности на закономерности разрушения пластины с концентратором напряжений. Поскольку в данных процессах наблюдается реализация стадии закритического деформирования тела, целесообразным представляется изучение влияния жесткости нагружающей системы на устойчивость процессов накопления структурных повреждений.

3.3. Влияние жесткости нагружающей системы на реализацию закритической стадии деформирования структурно неоднородного тела

В условиях отсутствия распределения прочностных характеристик ($CV = 0.0$), а также для генераций пределов прочности, соответствующих диаграммам нагружения, представленным на рисунке 3.4, изучено влияние жесткости нагружающей системы на устойчивость процессов накопления повреждений и разрушения.

Проведено численное моделирование процесса деформирования упруго-хрупкого тела с краевым эллиптическим концентратором напряжений при наличии нагружающей системы, задаваемой через дополнительные упругие элементы (рисунок 3.5). В одном случае были заданы дополнительные упругие области высотой h (варьировалась в диапазоне от 2.5 мм до 15 мм), обладающие теми же модулем Юнга и коэффициентом Пуассона, что и материал пластины с концентратором напряжений. Во втором случае нагружение задавалось через систему стержневых элементов жесткостью $R_{ст}$, обеспечивающих эквивалентную жесткость прямоугольной области при растяжении:

$$R_{ст} = \frac{Ewa}{h(N_{уз} - 1)}, \quad (3.3)$$

где $w = 104$ мм – ширина дополнительной упругой области; $a = 1$ мм – толщина пластины, $N_{уз}$ – число узлов на поверхности Γ_1 либо Γ_2 . Учитывается, что стержневые элементы, соединенные с крайними узлами, должны иметь жесткость

$R_{ст}/2$ в силу отсутствия материала с одной из сторон. Нагружение через эквивалентную стержневую систему соответствует предположению об однородности напряженно-деформированного состояния в упругой области.

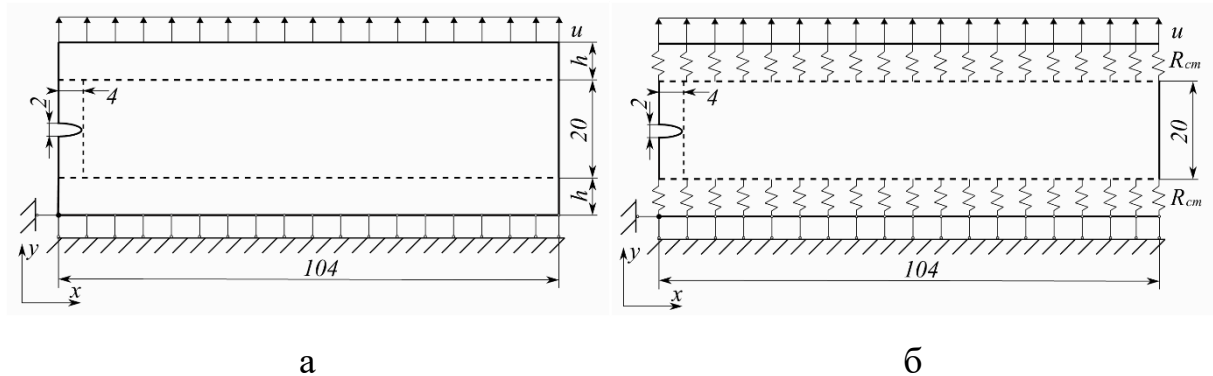


Рисунок 3.5 – Геометрия и схема нагружения тела с нагружающей системой, имитируемой: а – дополнительными упругими областями; б – системой стержневых элементов

Задачи численно решены в программном комплексе ANSYS Mechanical. Дискретизация дополнительных упругих областей осуществлялась с использованием конечного элемента PLANE182, стержневые элементы задавались элементами COMBIN14. Генерируемая конечно-элементная сетка для полосы с концентратором соответствовала полученной при отсутствии нагружающей системы. Завершение расчета происходило при снижении расчетной нагрузки P до 0.1 кН. Численное моделирование проведено при значении параметра h : 0 («жесткое» нагружение), 2.5, 5.0, 7.5, 10, 15 мм.

На рисунке 3.6 приведены расчетные диаграммы нагружения. Отмечено, что дополнительные упругие области могут быть заменены эквивалентной стержневой системой практически без изменения максимальной расчетной нагрузки и диаграмм нагружения при $h < 10$ мм, т.е. до состояния, в котором жесткость нагружающей системы становится сопоставимой с собственной жесткостью исследуемой области. Дальнейшее повышение податливости системы приводит к появлению различий в диаграммах нагружения, связанных с реализацией

неоднородного сложного напряженно-деформированного состояния в упругих областях, которая не может быть учтена при использовании стержневых элементов.

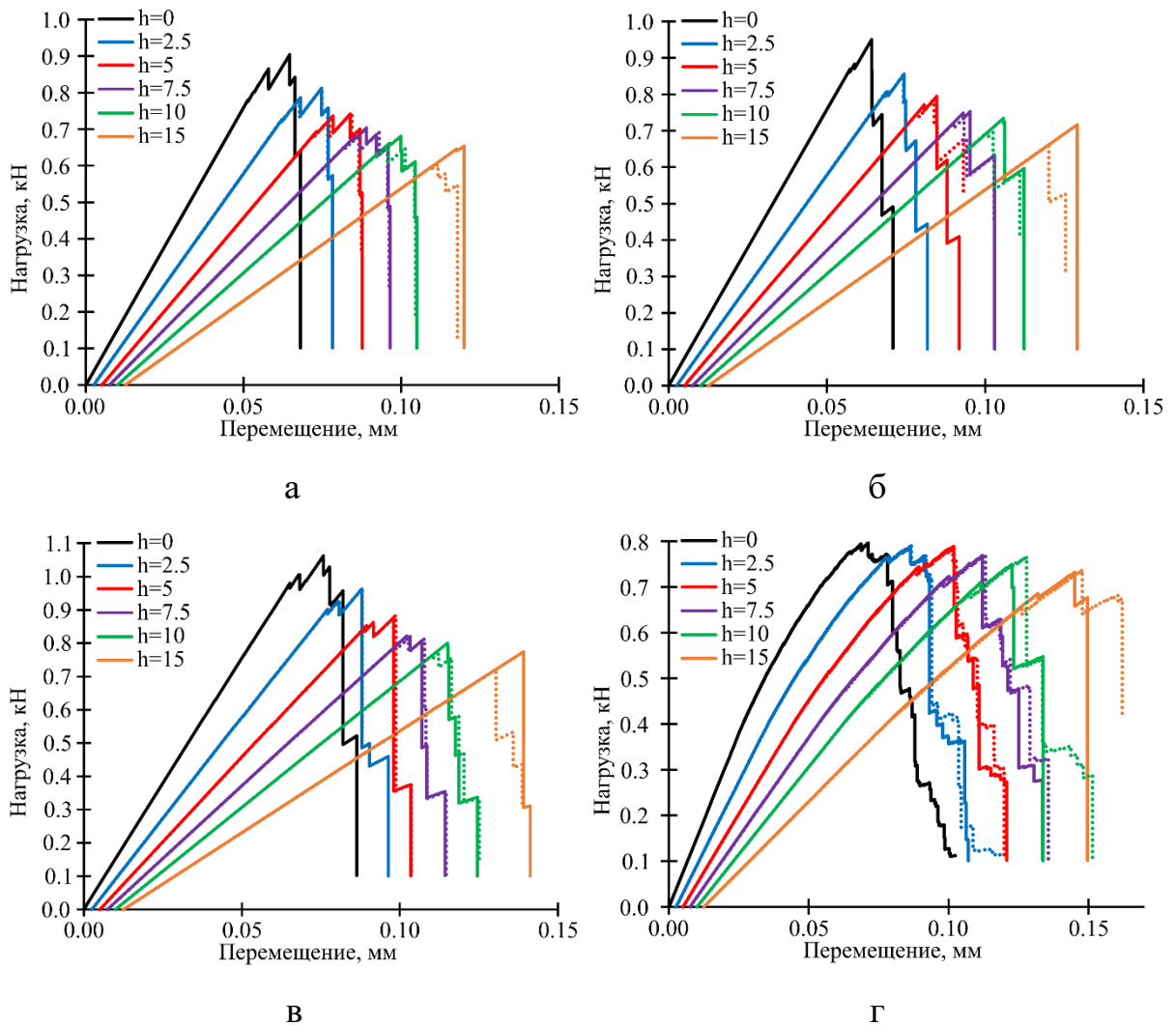


Рисунок 3.6 – Расчетные диаграммы нагружения при различной податливости нагружающей системы, значения параметра CV : 0.000 (а), 0.173 (б), 0.346 (в), 0.520 (г). Сплошные линии – имитация нагружающей системы через дополнительные упругие области, пунктирные – через стержневые элементы

Результаты подтверждают постепенное вырождение стадии закритического деформирования конструкции по мере роста податливости нагружающей системы: происходит снижение числа шагов нагружения (устойчивых переходов без разрушения), сопровождающееся ростом числа итераций внутри шагов (неравновесных актов разрушения). Для сопоставления расчетных диаграмм

нагружения проведено их построение в относительных единицах (точка (1;1) соответствует первому акту разрушения) для пластины с коэффициентом вариации распределения пределов прочности структурных элементов 0.520 (рисунок 3.7а). При жестком нагружении (черный график) после достижения максимальной несущей способности наблюдается протяженная стадия закритического деформирования, отдельные участки которой соответствуют развитию поврежденных зон; при нагружении через дополнительные упругие области высотой $h = 15$ мм (оранжевый график) практически сразу за точкой достижения максимальной несущей способности следует вертикальный участок падения нагрузки, соответствующий неравновесному процессу накопления повреждений, т.е. стадия закритического деформирования вырождается, и процесс деформирования и разрушения становится неустойчивым. Повышение величины параметра h приводит к увеличению среднего угла наклона графиков на стадии закритического деформирования. Данные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными о вырождении стадии закритического деформирования по мере увеличения длины испытываемых образцов (примеры диаграмм нагружения при сжатии бетона приведены на рисунке 3.7б) [172].

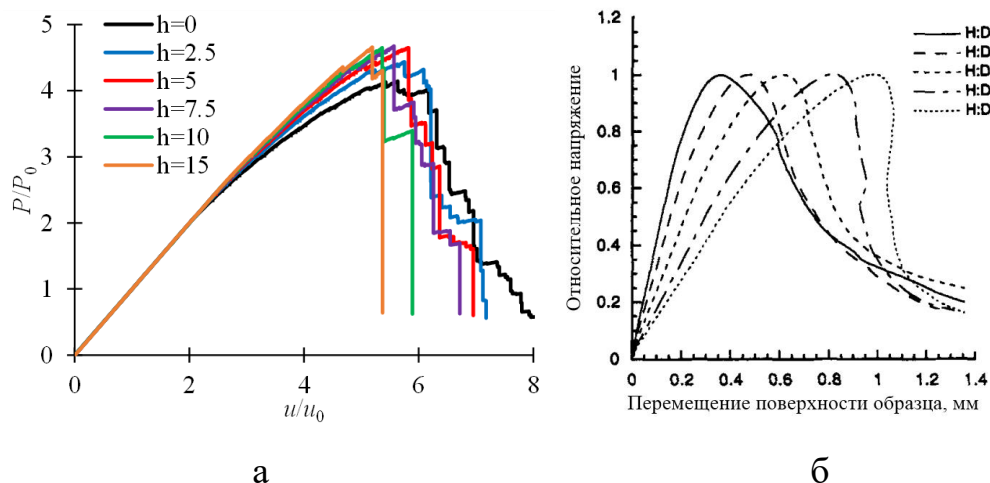


Рисунок 3.7 – Расчетные диаграммы нагружения тела с нагружающей системой,

P_0 , u_0 – нагрузка и перемещение, при которых происходит первый акт разрушения (а); экспериментальные диаграммы нагружения при сжатии образцов бетона с различными отношениями высоты к диаметру ($H:D$) [172] (б)

Проведен анализ влияния податливости нагружающей системы на несущую способность полосы с концентратором напряжений. На рисунке 3.8 приведены графики зависимости максимальной нагрузки, выдерживаемой телом, отнесенной к ее значению при отсутствии нагружающей системы, от длины дополнительных упругих областей h . Снижение жесткости нагружающей системы привело к падению несущей способности во всех случаях, однако при высокой дисперсии распределения пределов прочности структурных элементов изменение максимальной нагрузки существенно ниже. Данная особенность объясняется меньшим влиянием концентратора напряжений на процесс деформирования.

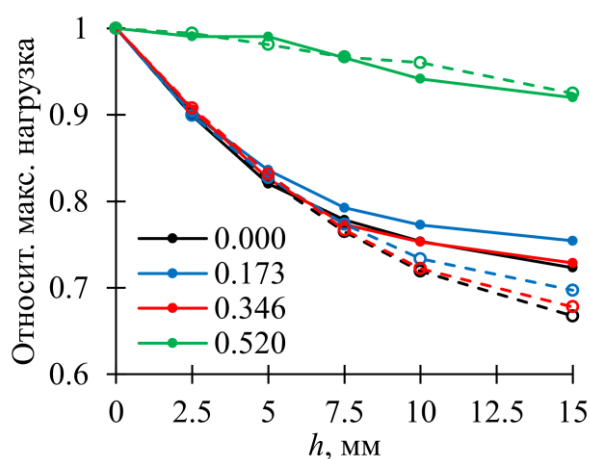


Рисунок 3.8 – Зависимости относительной максимальной несущей способности от жесткости нагружающей системы при различных значениях параметра CV .

Сплошные линии – имитация нагружающей системы через дополнительные упругие области, пунктирные – через системы стержневых элементов

Необходимо отметить, что рост коэффициента вариации распределения прочностных свойств приводит к немономонному изменению относительной несущей способности с ростом податливости нагружения: при $CV=0.000$ и $CV=0.346$ относительное изменение несущей способности существеннее, чем при $CV=0.173$ и $CV=0.520$. Данная закономерность требует дополнительной проверки на основе вычислительных экспериментов для исключения влияния статистического разброса результатов.

Изучено влияние жесткости нагружающей системы на кинетику процесса накопления структурных повреждений. На рисунке 3.9 обозначены элементы с редуцированными жесткостными характеристиками в состоянии, соответствующем завершению численного расчета. Результаты демонстрируют, что изменение жесткости нагружающей системы не оказало влияния на характер процесса накопления повреждений в теле с концентратором напряжений, но в некоторых случаях привело к изменению траектории роста макродефекта.

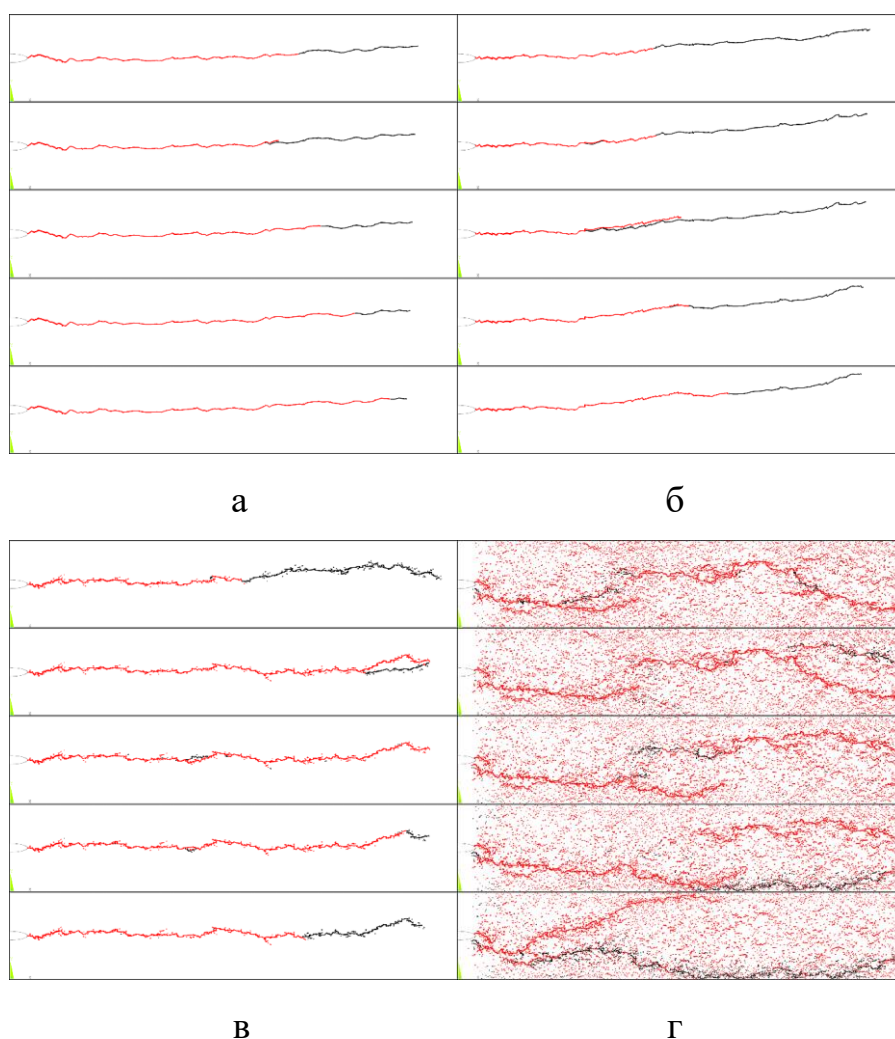


Рисунок 3.9 – Изображения поврежденных областей в момент завершения расчета при различной жесткости нагружающей системы (сверху вниз:

$h = 2.5, 5, 7.5, 10, 15$ мм), значения параметра CV : 0.000 (а), 0.173 (б), 0.346 (в), 0.520 (г). Черный цвет – имитация нагружающей системы через дополнительные упругие области, красный – через системы стержневых элементов

Различие в способе учета нагружающей системы (через дополнительные упругие области – черный цвет, через стержневые элементы – красный цвет) также практически не сказалось на характере процесса разрушения. Соответственно, падение несущей способности при повышении податливости нагружения объясняется изменением напряженно-деформированного состояния вблизи концентратора напряжений, а не сменой механизма разрушения.

Сделан вывод о целесообразности учета свойств нагружающих систем при численном моделировании процессов разрушения структурно неоднородных тел с концентраторами напряжений для оценки устойчивости реализации закритической стадии деформирования на макроуровне. Выявленные закономерности качественно согласуются с результатами экспериментальных исследований.

3.4. Двухосное пропорциональное деформирование и разрушение пластины с центральным концентратором напряжений

Для случаев многоосного нагружения тел представляется целесообразным учет в алгоритмах моделирования процессов разрушения неоднородных тел, состоящих из упруго-хрупких структурных элементов, частичной потери их несущей способности с возникновением деформационной анизотропии вследствие выполнения критерия разрушения (в соответствии со схемой, приведенной на рисунке 2.1). Для этого в п. 8 алгоритма, изложенного в параграфе 3.1, учитывается редуцирование жесткостей в соответствии с выражением (2.8), реализуемое с предварительной проверкой выполнения критерия разрушения в рассматриваемом конечном элементе на одной из предыдущих итераций. Учет частичной потери несущей способности был реализован с помощью дополнительного программного модуля, написанного на языке APDL [119].

Рассмотрена задача двухосного кинематического нагружения пластины (ширина и высота 100 мм, толщина 1 мм, плоское напряженное состояние) с центральным круглым концентратором напряжений (диаметр 20 мм). Изображение тела и условия закрепления приведены на рисунке 3.10. Граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_y(\bar{r}, t)|_{\Gamma_1} = 0; \\ \tau_{xy}(\bar{r}, t)|_{\Gamma_1} = 0; \\ u_x(\bar{r}, t)|_{\Gamma_2} = 0; \\ \tau_{xy}(\bar{r}, t)|_{\Gamma_2} = 0; \\ u_y(\bar{r}, t)|_{\Gamma_3} = U_y(t); \\ \tau_{xy}(\bar{r}, t)|_{\Gamma_3} = 0; \\ u_x(\bar{r}, t)|_{\Gamma_4} = U_x(t); \\ \tau_{xy}(\bar{r}, t)|_{\Gamma_4} = 0; \\ \sigma_{ij}(\bar{r}, t)n_j(\bar{r})|_{\Gamma_5} = 0. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Рассматривалось пять режимов нагружения тела, обозначенных: А, Е – одноосное растяжение вдоль осей x и y , соответственно; С – пропорциональное растяжение равными перемещениями U_x и U_y (соответствуют перемещениям границ тела вдоль каждой из осей) В, D – пропорциональное растяжение при двукратном различии между перемещениями (рисунок 3.10).

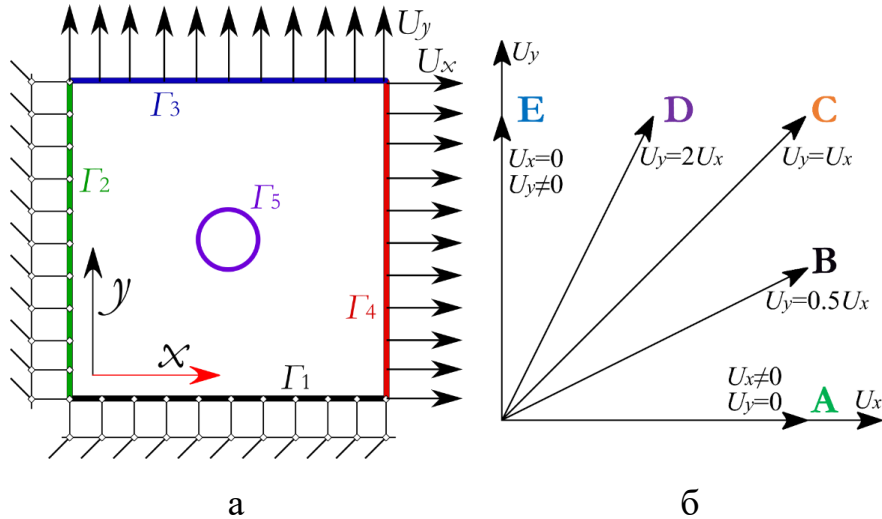


Рисунок 3.10 – Геометрия пластины и схема нагружения (а), режимы пропорционального нагружения (б)

Как и в предыдущих задачах, рассматривается модельный изотропный материал с модулем Юнга $E = 3$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.36$. Пределы прочности материалов структурных элементов были сгенерированы с использованием трехпараметрического закона распределения Вейбулла:

$$F(\sigma_B) = 1 - e^{-\left(\frac{\sigma_B - \sigma_B^{\min}}{\lambda}\right)^\kappa}; \bar{\sigma}_B = \lambda \Gamma\left(\frac{1 + \kappa}{\kappa}\right) + \sigma_B^{\min};$$

$$SD = \lambda \sqrt{\Gamma\left(\frac{2 + \kappa}{\kappa}\right) - \left(\Gamma\left(\frac{1 + \kappa}{\kappa}\right)\right)^2}; CV = \frac{SD}{\bar{\sigma}_B}. \quad (3.5)$$

Здесь $F(\sigma_B)$ – функция распределения ($\sigma_B \geq \sigma_B^{\min}$); $\sigma_B^{\min}$ – минимальное значение предела прочности (выбрано равным $0.1 \sigma_B^{mean}$, где $\sigma_B^{mean} = 40$ МПа); $\Gamma()$ – гамма-функция; $\bar{\sigma}_B$ – математическое ожидание; SD – стандартное отклонение; CV – коэффициент вариации. Параметры распределения κ и λ подбираются численно методом обобщенного понижающего градиента таким образом, чтобы $\bar{\sigma}_B$ соответствовало σ_B^{mean} , и CV соответствовало выбранному значению (варьировалось в диапазоне от 0 до 0.5 с шагом 0.1).

Дискретизация расчетной области осуществлена с использованием встроенного генератора автоматической сетки ANSYS Mechanical. Использован плоский четырехузловой конечный элемент с линейной аппроксимацией поля перемещений PLANE182. Характерный линейный размер конечного элемента выбран равным $L_{el} = 0.33$ мм, что соответствует 88656 элементам, при этом обеспечивается сходимость решения краевой задачи теории упругости. Предполагается, что один структурный элемент соответствует одному конечному элементу, а выбранный размер элемента отражает характерный размер области разрушения модельного материала.

Завершение расчета производилось по достижении эквивалентной растягивающей нагрузки P_x либо P_y (определяются как равнодействующие сил реакции на поверхностях Γ_4 и Γ_3 , соответственно) значения менее 0.1 кН на ниспадающем участке диаграммы нагружения. Для каждого значения

коэффициента вариации были сгенерированы по пять реализаций распределения пределов прочности, для каждой из которых было осуществлено нагружение тела по режимам А–Е.

На примере решения задачи о двухосном растяжении пластины при величине коэффициента вариации $CV = 0.5$ и режиме нагружения С изучена реализация в численном решении учета анизотропии, возникающей при частичной потере несущей способности. На рисунке 3.11 приведена часть тела вблизи концентратора напряжений, серым цветом выделены поврежденные элементы, синим цветом – конечные элементы, полностью потерявшие несущую способность. Для каждого из поврежденных/разрушенных элементов изображены оси анизотропии, соответствующие направлениям первых главных напряжений в момент повреждения: красный цвет – направление первого главного напряжения в момент редуцирования жесткости, вдоль которого несущая способность пропадает, черный цвет – направление второго (либо третьего) главного напряжения, вдоль которого несущая способность сохраняется (соответствует направлению симитированной трещины, прошедшей через структурный элемент). Отмечено, что ориентация осей анизотропии соответствует направлению роста макродефекта от концентратора напряжений, что подтверждает адекватность разработанного алгоритма.

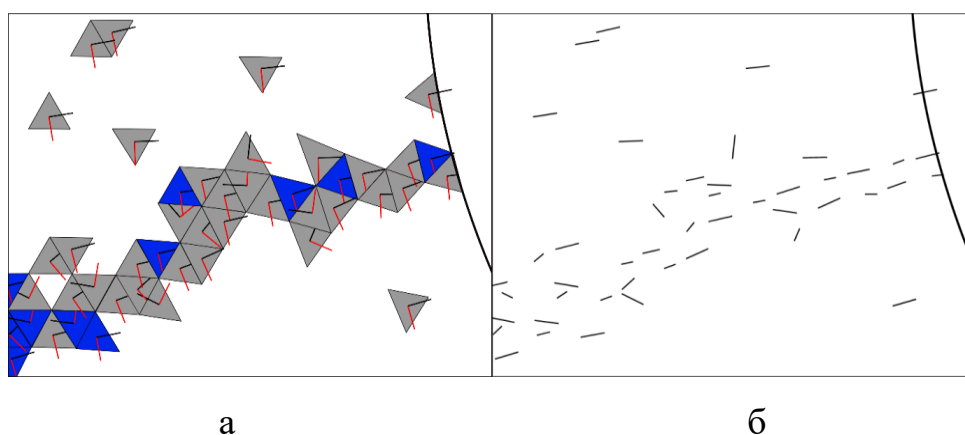


Рисунок 3.11 – Изображение тела с «поврежденными» (серый цвет) и «разрушенными» (синий цвет) конечными элементами и ориентациями осей анизотропии (а), направления микротрещин, «смитированных» при учете деформационной анизотропии (б)

Сопоставлены результаты численного моделирования, полученные при учете анизотропии, возникающей вследствие частичной потери несущей способности (т.е. с применением разработанного алгоритма), с результатами, получаемыми при редуцировании всех жесткостных свойств конечного элемента при выполнении критерия разрушения. Сопоставление проводилось на аналогичном примере двухосного равномерного растяжения пластины с концентратором напряжений. На рисунке 3.12 представлены расчетные диаграммы нагружения в виде зависимости осевых нагрузок P_x и P_y (определяются как равнодействующие сил реакции на поверхностях Γ_4 и Γ_3 , соответственно) от перемещений U_x и U_y (для выбранного режима нагружения $U_x=U_y$), а также изображения тел в состояниях с равными перемещениями (1 и 1') и близкими нагрузками (2 и 2').

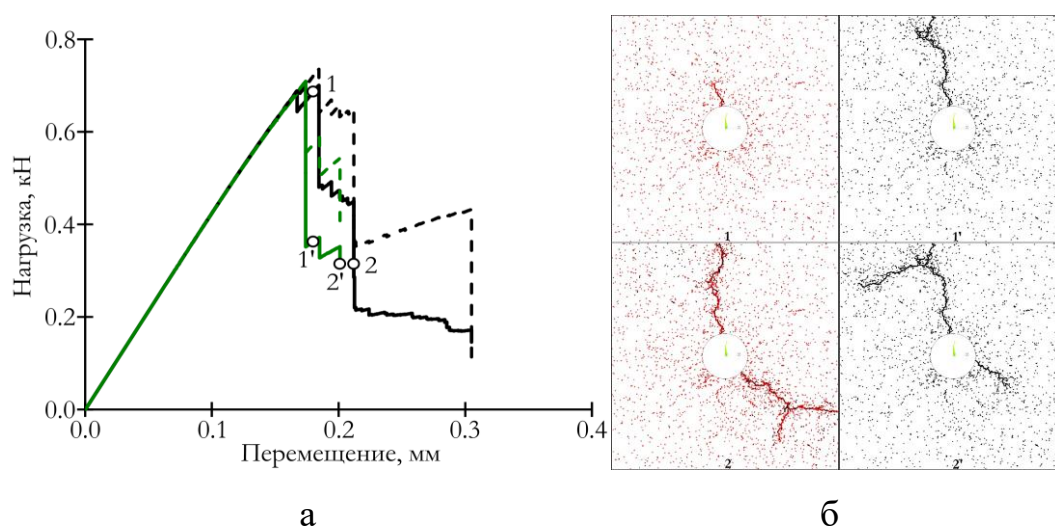


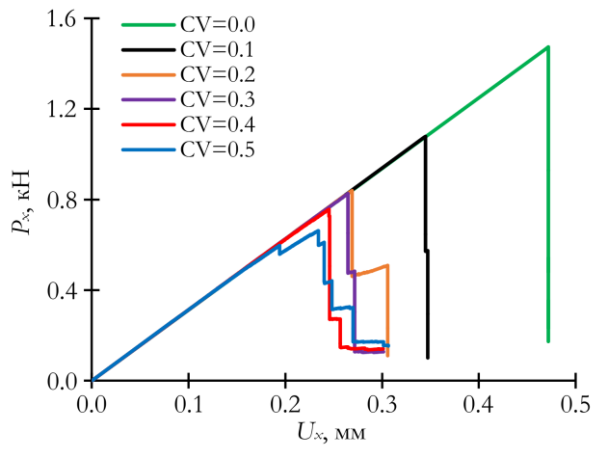
Рисунок 3.12 – Расчетные диаграммы нагружения (а), сплошные линии – зависимости $P_x(U_x)$, штриховые линии – зависимости $P_y(U_y)$, черный цвет – с учетом деформационной анизотропии, зеленый цвет – без ее учета; изображения поврежденных (красный цвет) и полностью потерявших несущую способность (черный цвет) областей (б)

Результаты демонстрируют, что учет частичной потери несущей способности привел к существенному искажению диаграмм нагружения с реализацией более протяженной стадии критического деформирования на макроуровне. Отмечено,

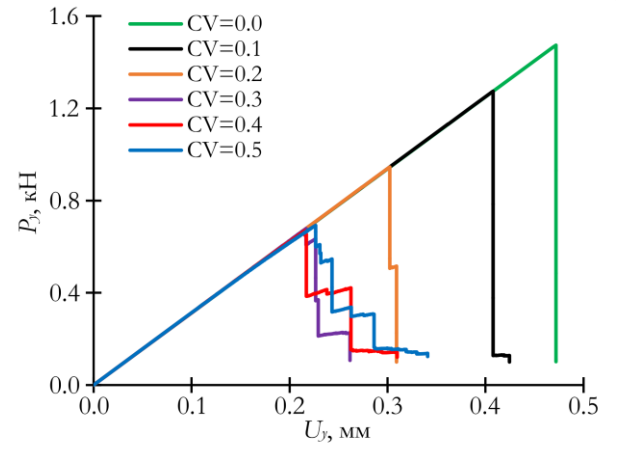
что скачкообразное падение нагрузки при использовании разработанного алгоритма не во всех случаях приводит к падению нагрузки по второй оси нагружения, поскольку в данном направлении несущая способность сохраняется. Учет возникающей вследствие выполнения критерия разрушения деформационной анизотропии привел к изменению траектории роста макродефекта, при этом области с рассеянно разрушенными элементами остались практически неизменными. Полное разрушение, следующее за частичной потерей несущей способности, в основном происходило в конечных элементах, образующих макродефект.

На основе полученных результатов сделан вывод о работоспособности рассмотренного алгоритма решения задач деформирования и разрушения структурно неоднородного тела, а также о целесообразности учета анизотропии, возникающей вследствие частичной потери несущей способности.

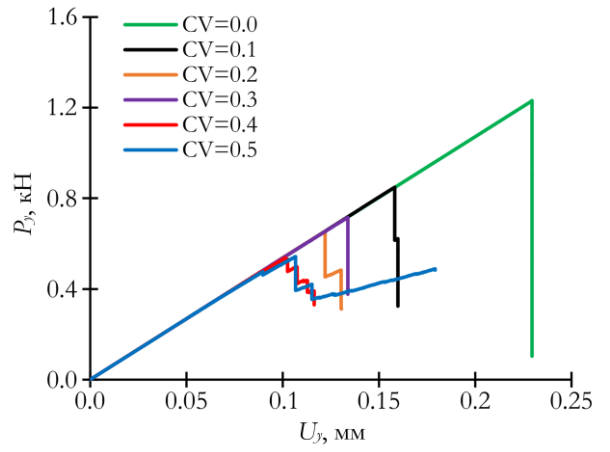
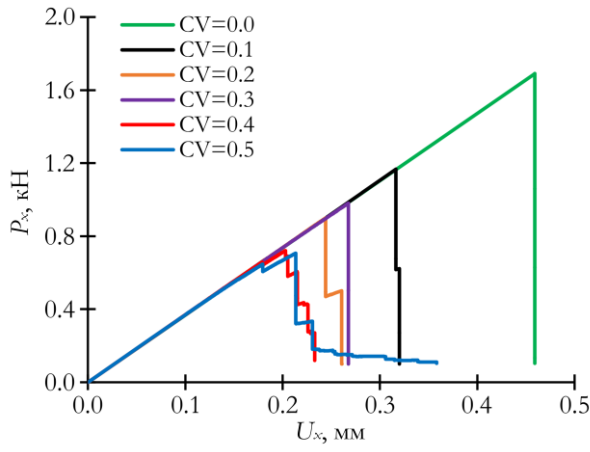
Рассмотрено влияние режима нагружения и коэффициента вариации прочностных характеристик на вид диаграмм нагружения конструкции (рисунок 3.13). Результаты демонстрируют, что повышение коэффициента вариации во всех случаях приводит к постепенному снижению несущей способности тела и перемещения, соответствующего точке достижения максимальной нагрузки, при этом на макроуровне начинает проявляться нелинейный характер деформирования, в том числе с реализацией закритической стадии деформирования тела. При этом в связи с отсутствием элементов со слишком низкими пределами прочности диаграммы нагружения являются практически линейными до достижения максимальной нагрузки. Отмечено возникновение ситуаций, при которых постепенное падение нагрузки по одной из осей приводит к плавному росту нагрузки по другой за счет сохранения сопротивления в направлении роста макродефекта. Изменение режима нагружения при равных коэффициентах вариации распределения прочностных свойств не повлияло качественно на вид диаграмм нагружения, однако наблюдалось немонотонное изменение максимальных нагрузок P_x и P_y . Для всех режимов нагружения достижение максимальных величин усилий в двух направлениях происходило одновременно.



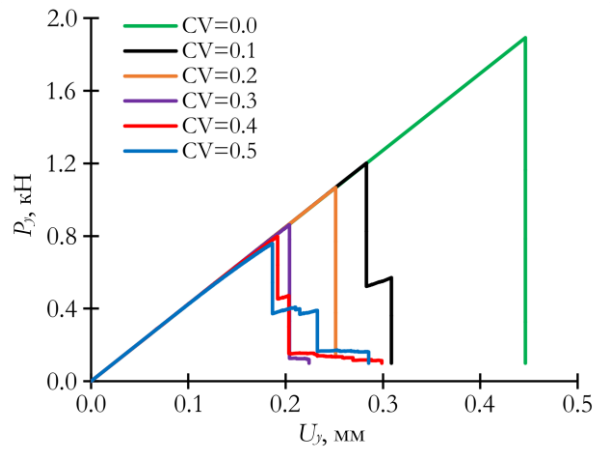
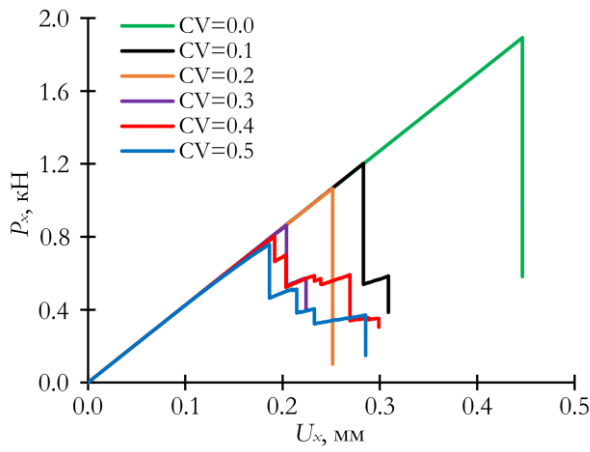
a



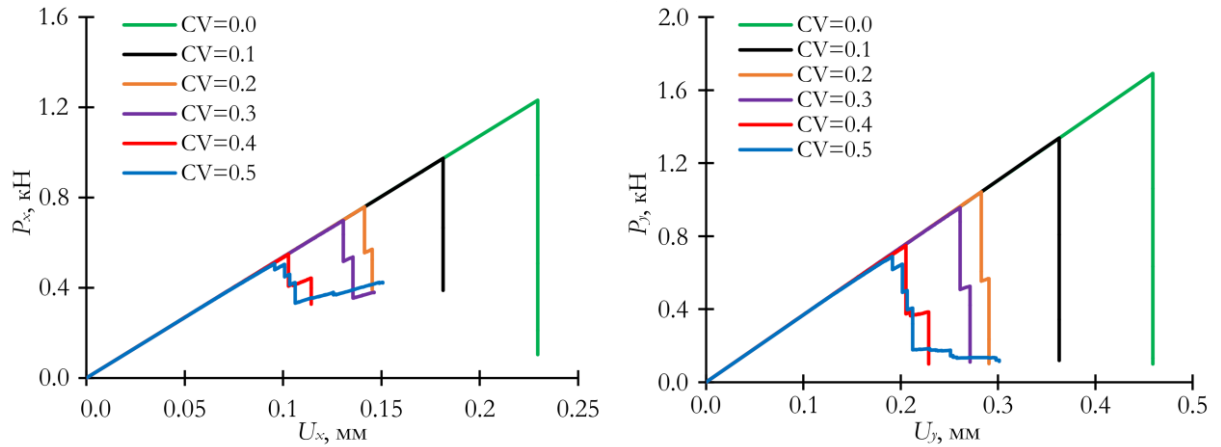
б



B



Г



Д

Рисунок 3.13 – Диаграммы нагружения пластины при различных коэффициентах вариации распределения прочностных характеристик (CV) и режимах нагружения: А (а), Е (б), В–Д (в–д); слева – $P_x(U_x)$, справа – $P_y(U_y)$

Проведен анализ влияния коэффициента вариации распределения пределов прочности и режима нагружения на несущую способность пластины (рисунок 3.14, точки получены усреднением по пяти расчетам). Выявлено, что повышение разброса прочностных характеристик структурных элементов приводит к практически линейному снижению несущей способности, наибольшая несущая способность реализуется при двухосном равномерном пропорциональном растяжении (режим С).

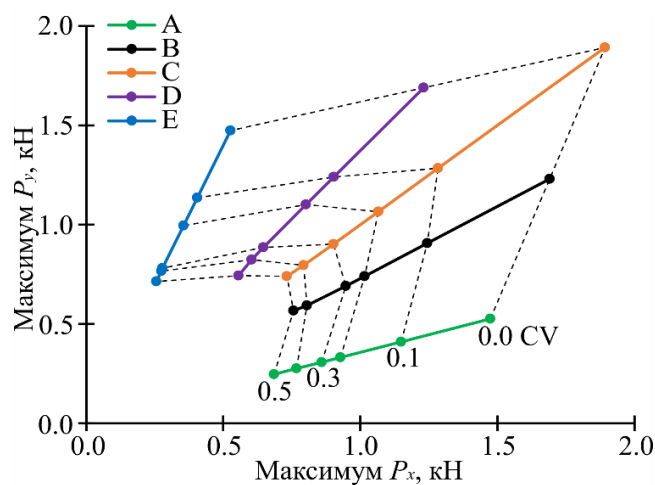


Рисунок 3.14 – Несущая способность пластины при двухосном нагружении

Рассмотрено влияние коэффициента вариации прочностных характеристик и режима нагружения на вид макродефекта при завершении расчета. Результаты приведены на рисунке 3.15: белым цветом обозначены неповрежденные области, серым цветом – частично поврежденные области, синим цветом – области с полностью потерянной несущей способностью. Отмечено, что для случаев одноосного нагружения (режимы А, Е) макродефекты ориентированы поперек оси нагружения, при этом для режимов пропорционального нагружения с двукратным отличием перемещений (режимы В, D) ориентация макродефектов практически не меняется, в некоторых случаях усиливается их ветвление. Для пропорционального нагружения по режиму С наблюдается рост макродефекта в произвольных направлениях, что объясняется равномерностью распределения первых главных напряжений по контуру концентратора. Отмечено, что по мере перехода от двухосного режима нагружения к одноосному рассеянное повреждение отдельных конечных элементов в слабо нагруженных зонах (над и под концентратором для режимов Е, D, справа и слева от концентратора для режимов А, В) существенно снижается. Для случаев $CV=0.0$ и $CV=0.1$ практически отсутствуют отдельные поврежденные либо разрушенные конечные элементы, реализуется локализованный тип накопления повреждений. При $CV=0.2$ число таких элементов увеличивается, но они сосредоточены вблизи концентратора. По мере дальнейшего роста величины CV увеличивается количество рассеянных по объему тела поврежденных и разрушенных структурных элементов, что начинает оказывать влияние на направление развития макродефекта.

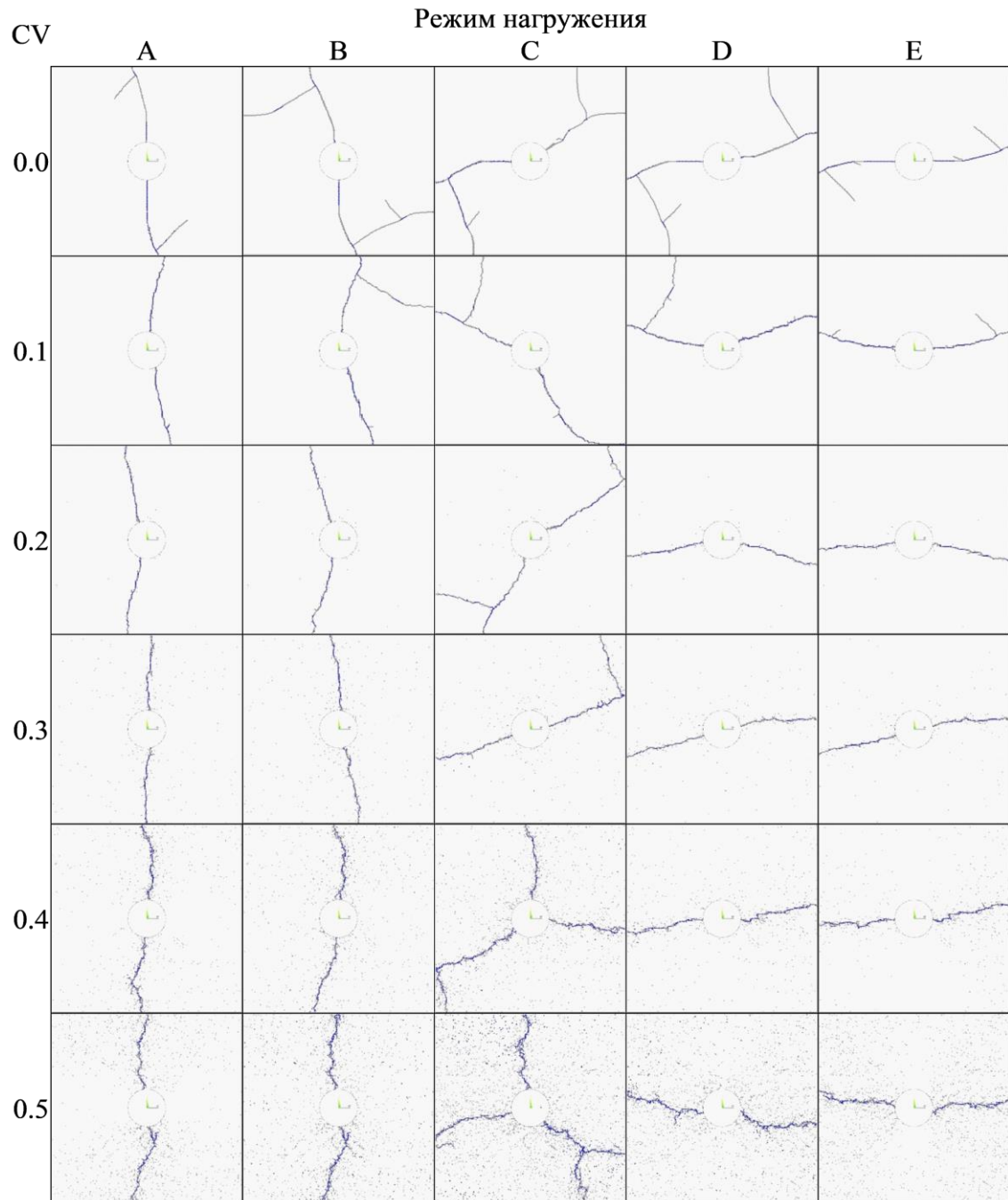


Рисунок 3.15 – Вид макродефекта при различных коэффициентах вариации распределения прочностных характеристик и режимах нагружения

Исследована кинетика процесса накопления повреждений и разрушения. На рисунке 3.16 представлены расчетные диаграммы нагружения, зависимость $P_y(P_x)$ и эволюция поврежденных зон для пластины с $CV = 0.2$ при режиме нагружения C. Выявлено, что к моменту достижения максимальной нагрузки (состояние 1) в теле имеется небольшое число дисперсно распределенных «разрушенных» элементов,

что связано с низкими значениями их пределов прочности. Далее, несмотря на упруго-хрупкое поведение структурных элементов на макроуровне и практически совпадающие зависимости $P_x(U_x)$ и $P_y(U_y)$, наблюдается непропорциональное падение нагрузок в процессе разрушения, что связано с несимметричным прорастанием макродефекта под углом сначала в одной (состояние 2), затем в другой части пластины (состояние 3). При этом на направление роста макродефекта ранее «разрушенные» элементы влияния практически не оказывают в связи с малым их количеством, реализуется локализованный тип накопления повреждений. Поведение тела на макроуровне является близким к упруго-хрупкому.

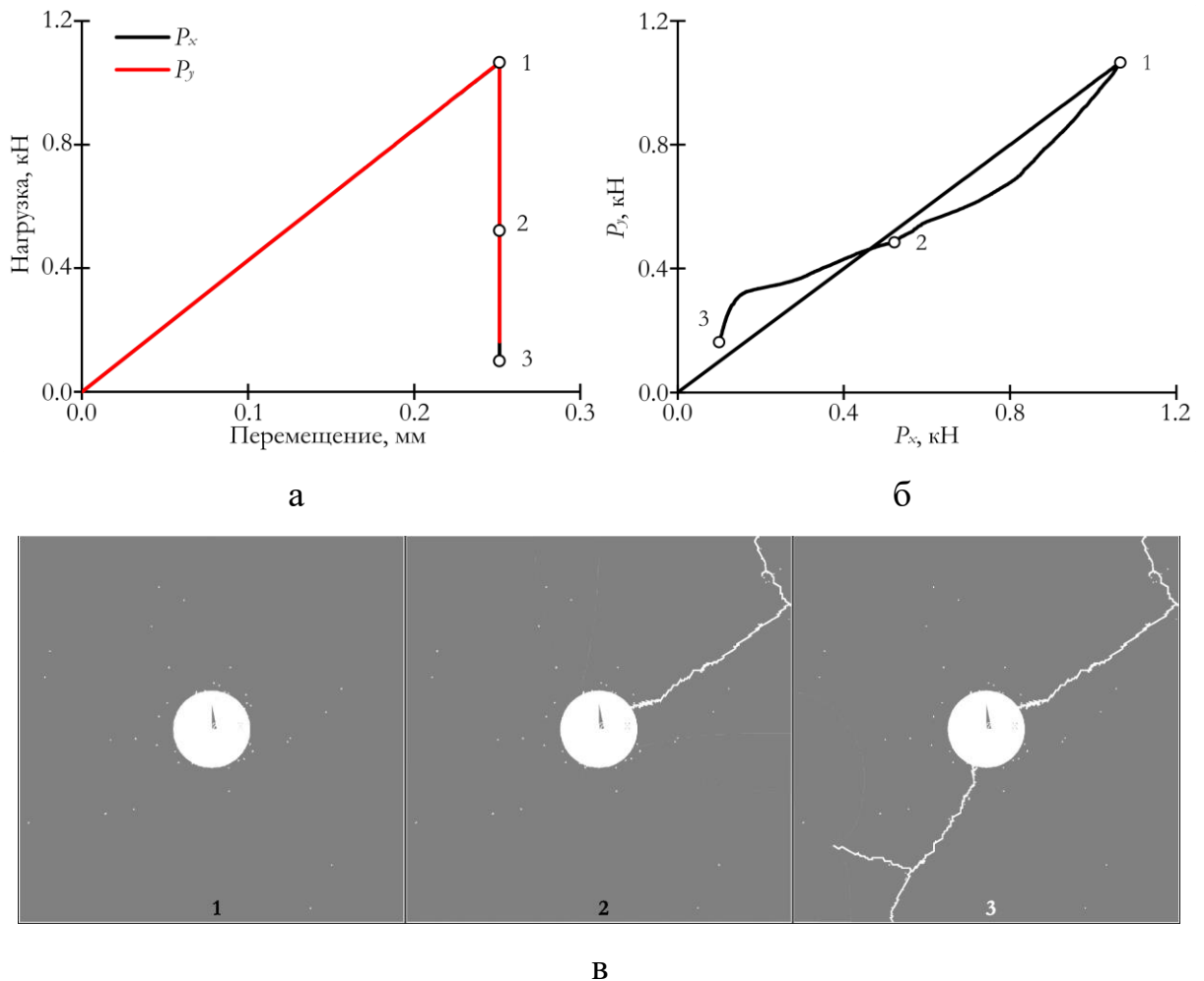
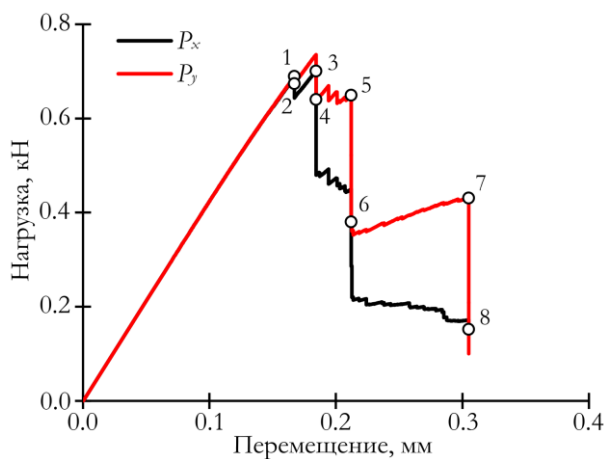
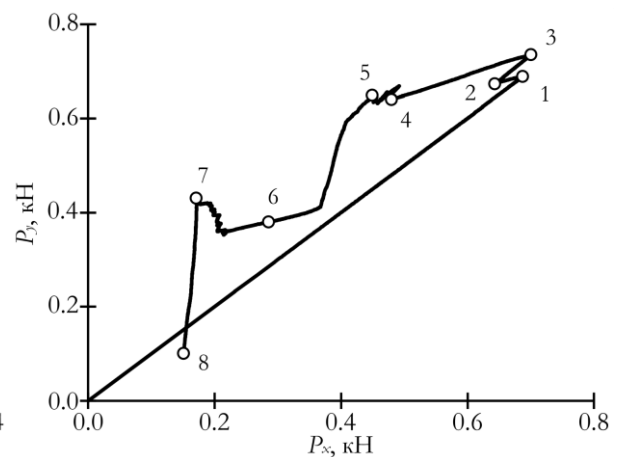


Рисунок 3.16 – Расчетные диаграммы нагружения (а), зависимость $P_y(P_x)$ (б) и эволюция поврежденных зон (в) при $CV = 0.2$, режим С

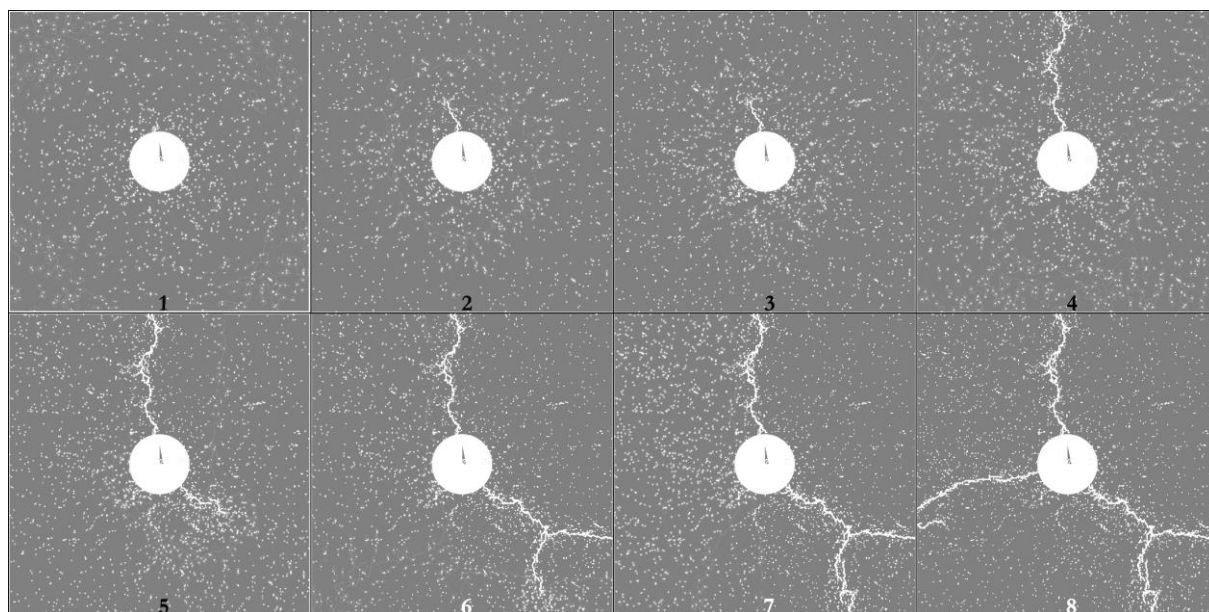
Повышение коэффициента вариации прочностных характеристик до $CV = 0.5$ (рисунок 3.17) привело к появлению различий между диаграммами нагружения $P_x(U_x)$ и $P_y(U_y)$, а также существенной непропорциональности между усилиями P_x и P_y – траектория нагружения имеет сложный вид с локальными областями роста одного из усилий. Выявлено, что еще до момента достижения максимальной нагрузки происходит интенсивное накопление повреждений в объеме тела (состояние 1) с образованием макродефекта у концентратора напряжений (состояния 2, 3). Несмотря на пропорциональное нагружение, первичный макродефект был образован вдоль оси y (состояние 4), что объясняется равномерным распределением первых главных напряжений по контуру круглого концентратора при $U_x = U_y$ (в таких условиях трещина способна расти в любом направлении). До состояния 4 практически не возникало элементов с полностью потерявшим несущую способность материалом. Дальнейшее резкое падение нагрузок по обеим осям происходило по мере прорастания макродефекта, ориентированного под углом (состояния 5, 6). Полное разрушение тела произошло после прорастания макродефекта, ориентированного вдоль оси x (состояния 7, 8), при этом разрушение сопровождалось интенсивным снижением нагрузки P_y при практически неизменной нагрузке P_x .



а



б



В

Рисунок 3.17 – Расчетные диаграммы нагружения (а), зависимость $P_y(P_x)$ (б) и эволюция поврежденных зон (в) при $CV = 0.5$, режим С

На основе полученных результатов сделан вывод о целесообразности применения разработанной модели, учитывающей появление анизотропии при частичной потере несущей способности, для моделирования процессов разрушения неоднородных тел со случайно распределенными прочностными характеристиками структурных элементов. Для случаев двухосного нагружения подтвержден эффект монотонного снижения несущей способности тела при повышении коэффициента вариации распределения прочностных характеристик. Выявлена непропорциональность связи расчетных осевых нагрузок, связанная с образованием макродефектов, различным образом меняющих поперечное сечение тела в каждом из двух направлений. Выявлена реализация различных типов накопления повреждений в зависимости от степени разброса пределов прочности. Подтверждена возможность осуществления закритического деформирования тела при двухосном нагружении.

Выводы по главе 3

1. Для численного моделирования процессов деформирования и разрушения неоднородных тел со случайно распределенными прочностными характеристиками упруго-хрупких структурных элементов рациональным является использования специальных алгоритмов, в которых на каждой итерации проводится редуцирование жесткости не более чем одного наиболее перегруженного конечного элемента, используется автоматический шаг нагружения, реализуется итерационная процедура пересчета полей перемещений, деформаций и напряжений до получения устойчивого состояния, учитывается возникновение анизотропии вследствие частичной потери несущей способности.

2. Результаты численного моделирования процессов деформирования неоднородных пластин со случайно распределенными прочностными характеристиками упруго-хрупких структурных элементов подтверждают возможность реализации закритической стадии деформирования тел на макроуровне вследствие структурного разрушения.

3. Устойчивость процессов закритического деформирования неоднородных тел с упруго-хрупкими структурными элементами определяется свойствами нагружающих систем. Повышение податливости нагружающей системы приводит к уменьшению протяженности стадии закритического деформирования конструкции, что согласуется с экспериментальными данными, не меняет кинетику процесса накопления повреждений, но вызывает снижение несущей способности тела, объясняемое изменением напряженно-деформированного состояния вблизи концентратора напряжений.

ГЛАВА 4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ РАЗУПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

В четвертой главе представлены аналитические решения задач с учетом разупрочнения материала и жесткости нагружающих систем.

Рассмотрена задача о растяжении системы параллельно соединенных элементов с распределенными по равномерному закону их прочностными характеристиками при использовании двухзвенной кусочно-линейной аппроксимации полной диаграммы деформирования материала. Рассмотрен ряд задач о кручении сплошных и полых цилиндрических тел при использовании двух- и трехзвенных аппроксимаций полных диаграмм деформирования, а также произвольной n -звенной кусочно-линейной аппроксимации. На основе полученных решений изучена эволюция зон разупрочнения, определены прочностные и деформационные резервы конструкций, выявляемые за счет учета закритической стадии деформирования, выведены условия реализации полных диаграмм нагружения рассмотренных систем на макроуровне, связанные с жесткостью нагружающих систем.

Результаты данной главы опубликованы в работах [17, 28, 74, 75, 76, 77, 78, 85, 86, 87, 120, 197].

4.1. Задача о растяжении системы параллельно соединенных элементов со случайными прочностными характеристиками

Рассмотрена система из N параллельно соединенных элементов длины L и площади поперечного сечения S . Один край системы зафиксирован, другой соединен с упругим элементом жесткости R , который представляет собой нагружающую систему. Край упругого элемента медленно перемещают на расстояние u_1 . Перемещение правого края системы обозначено как u , а сила, возникающая в системе, как P . Схема нагружения изображена на рисунке 4.1.

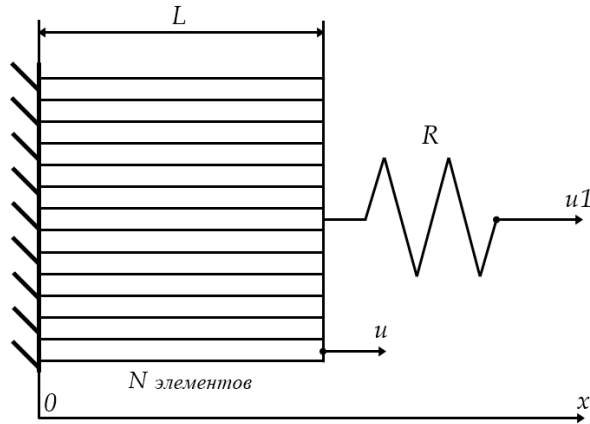


Рисунок 4.1 – Схема нагружения системы параллельно соединенных элементов

Для каждого элемента с индексом i , где $i \in [1; N], i \in \mathbb{N}$, закон связи между нормальным напряжением $\sigma^{(i)}$ и продольной деформацией $\varepsilon^{(i)}$ выбран для простоты кусочно-линейным:

$$\sigma^{(i)} = \begin{cases} E^{(i)} \varepsilon^{(i)}, & 0 \leq \varepsilon^{(i)} \leq \varepsilon_B^{(i)}, \\ \sigma_B^{(i)} - D^{(i)} (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon_B^{(i)}), & \varepsilon_B^{(i)} < \varepsilon^{(i)} \leq \varepsilon_f^{(i)}, \\ 0, & \varepsilon_f^{(i)} < \varepsilon^{(i)}, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_B^{(i)} = \frac{\sigma_B^{(i)}}{E^{(i)}},$$

$$\varepsilon_f^{(i)} = \sigma_B^{(i)} \left(\frac{1}{E^{(i)}} + \frac{1}{D^{(i)}} \right),$$

где $E^{(i)}$ – модуль Юнга; $\sigma_B^{(i)}$, $\varepsilon_B^{(i)}$ – предел прочности и соответствующая деформация; $D^{(i)}$ – модуль разупрочнения (взятый с обратным знаком тангенс угла наклона касательной на участке закритического деформирования); $\varepsilon_f^{(i)}$ – деформация, соответствующая полной потере несущей способности. Данное соотношение соответствует изображенной на рисунке 4.2 полной диаграмме деформирования материала. Целесообразность использования данной аппроксимации подтверждается ее соответствием, в частности, экспериментальным диаграммам нагружения базальтовых нитей, полученных в Центре экспериментальной механики ПНИПУ (рисунок 4.2)

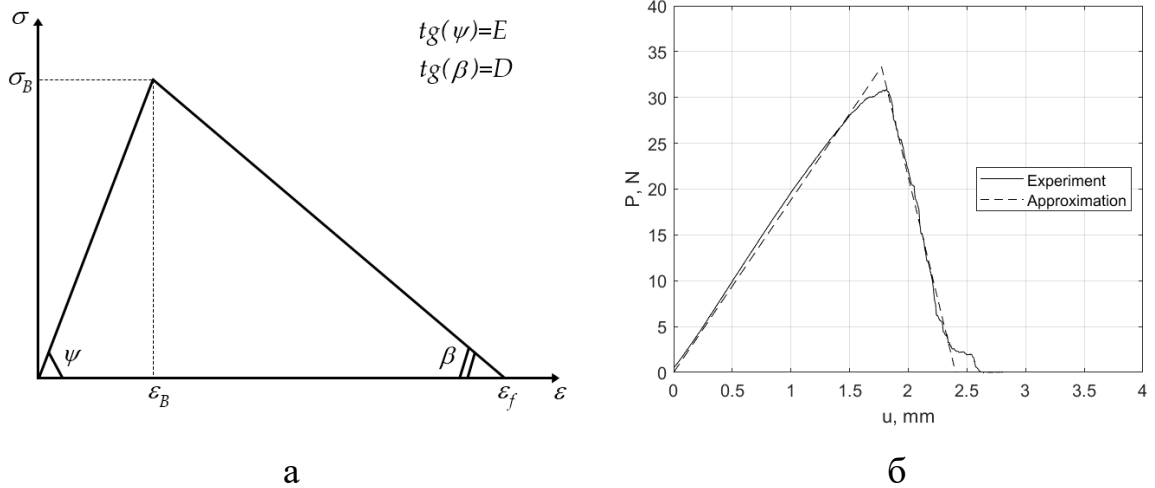


Рисунок 4.2 – Модельная диаграмма деформирования материала элементов системы (а), экспериментальная диаграмма нагружения базальтовой нити и ее аппроксимация двухзвенной кусочно-линейной функцией (б)

Рассмотрен случай, когда для всех элементов значения $E^{(i)}$ и $D^{(i)}$ одинаковы и равны E и D , соответственно, предел прочности распределен по равномерному закону, причем σ_B^{max} , σ_B^{min} – максимальное и минимальное значение пределов прочности; $\bar{\sigma}_B$ – их среднее значение, $\alpha = \frac{\sigma_B^{max} - \sigma_B^{min}}{2\bar{\sigma}_B}$, $\alpha \in [0; 1]$ – коэффициент разброса случайных значений предела прочности:

$$Pr(\sigma_B^{(i)} < z) = \begin{cases} 0, & z \leq \bar{\sigma}_B(1 - \alpha), \\ \frac{z - \bar{\sigma}_B(1 - \alpha)}{2\bar{\sigma}_B\alpha}, & \bar{\sigma}_B(1 - \alpha) < z \leq \bar{\sigma}_B(1 + \alpha), \\ 1, & \bar{\sigma}_B(1 + \alpha) < z. \end{cases} \quad (4.2)$$

Дополнительно введено обозначение

$$\bar{\lambda} = \frac{E + D}{E} \geq 1 \quad (4.3)$$

– безразмерный параметр материала.

Краевая задача для одномерного случая состоит из уравнений равновесия, геометрических соотношений, физических соотношений и двух граничных условий:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{(i)}(x)}{dx} &= 0; \\
\varepsilon^{(i)}(x) &= \frac{du(x)}{dx}; \\
\sigma^{(i)} &= \begin{cases} E\varepsilon^{(i)}, & 0 \leq \varepsilon^{(i)} \leq \varepsilon_B^{(i)}, \\ \sigma_B^{(i)} - D(\varepsilon^{(i)} - \varepsilon_B^{(i)}), & \varepsilon_B^{(i)} < \varepsilon^{(i)} \leq \varepsilon_f^{(i)}, \\ 0, & \varepsilon_f^{(i)} < \varepsilon^{(i)}; \end{cases} \\
u|_{x=0} &= 0; \\
\frac{1}{R}S \sum_{i=1}^N \sigma^{(i)}|_{x=L} + u|_{x=L} &= u_1.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Из постановки следует, что перемещения являются линейной функцией координаты, деформации и напряжения при этом от координаты зависеть не будут. Для всех элементов деформации одинаковы и равны u/L . С учетом вышеизложенного:

$$\begin{aligned}
\sigma^{(i)} &= \begin{cases} E \frac{u}{L}, & 0 \leq \frac{u}{L} \leq \varepsilon_B^{(i)}, \\ \bar{\lambda} \sigma_B^{(i)} - D \frac{u}{L}, & \varepsilon_B^{(i)} < \frac{u}{L} \leq \varepsilon_f^{(i)}, \\ 0, & \varepsilon_f^{(i)} < \frac{u}{L}; \end{cases} \\
\frac{1}{R}S \sum_{i=1}^N \sigma^{(i)} + u &= u_1 \Leftrightarrow \frac{1}{R}P + u = u_1.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Для системы имеются несколько характерных значений перемещения u :

- $u_B^{min} = u_0 = L \frac{\bar{\sigma}_B}{E} (1 - \alpha)$ – завершение стадии упругого деформирования системы и начало разупрочнения первого (наименее прочного) элемента;
- $u_B^{max} = L \frac{\bar{\sigma}_B}{E} (1 + \alpha)$ – начало разупрочнения последнего (наиболее прочного) элемента;
- $u_f^{min} = L \bar{\sigma}_B \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{D} \right) (1 - \alpha)$ – потеря несущей способности первым (наименее прочным) элементом;
- $u_f^{max} = L \bar{\sigma}_B \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{D} \right) (1 + \alpha)$ – полная потеря несущей способности системы.

При достаточно большом числе структурных элементов может быть совершен переход от вероятности начала закритической стадии деформирования и разрушения элементов к соответствующим объемным долям. Доля элементов, перешедших на закритическую стадию деформирования:

$$p = \begin{cases} 0, & u \leq u_B^{\min}, \\ \frac{u - u_B^{\min}}{u_B^{\max} - u_B^{\min}} \Leftrightarrow \left(\frac{u}{u_0} - 1 \right) \frac{1 - \alpha}{2\alpha}, & u_B^{\min} < u \leq u_B^{\max}, \\ 1, & u_B^{\max} < u. \end{cases} \quad (4.6)$$

Аналогично доля элементов, потерявших несущую способность:

$$f = \begin{cases} 0, & u \leq u_f^{\min}, \\ \frac{u - u_f^{\min}}{u_f^{\max} - u_f^{\min}} \Leftrightarrow \left(\frac{u}{u_0} \frac{\bar{\lambda} - 1}{\bar{\lambda}} - 1 \right) \frac{1 - \alpha}{2\alpha}, & u_f^{\min} < u \leq u_f^{\max}, \\ 1, & u_f^{\max} < u. \end{cases} \quad (4.7)$$

Краевая задача (4.4) должна быть дополнена условием, определяющим возможность устойчивого закритического деформирования каждого структурного элемента. Для некоторого перемещения u в системе будет Nf элементов, потерявших несущую способность, $N(p - f)$ элементов в закритической стадии деформирования, $N(1 - p)$ элементов в упругой стадии. Мысленно извлечем один элемент, находящийся в закритической стадии, из системы. Определим величину усилия dP^* , возникающего при малом смещении системы du , как показано на рисунке 4.3, с использованием выражения (4.5):

$$dP^* = N(1 - p) \frac{ES}{L} du - (N(p - f) - 1) \frac{DS}{L} du + Rdu = dP + \frac{DS}{L} du + Rdu \quad (4.8)$$

Условие устойчивости закритической деформации может быть сформулировано следующим образом: жёсткость нагружающей системы элемента dP^*/du больше, чем его собственная жёсткость на закритической стадии деформирования DS/L . Тогда условие устойчивости деформирования системы:

$$\frac{dP^*}{du} = \frac{dP}{du} + \frac{DS}{L} + R \geq \frac{DS}{L} \Leftrightarrow R \geq -\frac{dP}{du}. \quad (4.9)$$

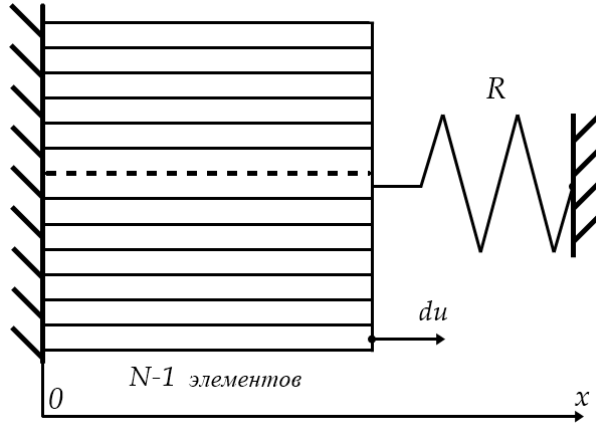


Рисунок 4.3 – Определение жесткости нагружающей системы

Далее рассмотрены различные стадии процесса деформирования системы.

Стадия упругого деформирования (Стадия 1) – на данной стадии $u \leq u_B^{min} = u_0$, все структурные элементы находятся в упругой области. Нагрузка P определяется выражением:

$$P = SN\sigma^{(i)} = \frac{ES}{L}Nu. \quad (4.10)$$

Зависимость является линейной, монотонно возрастающей. При $u = u_0$:

$$P_0 = \frac{ES}{L}Nu_0 = NS\bar{\sigma}_B(1 - \alpha). \quad (4.11)$$

Собственная жесткость системы параллельно соединенных элементов:

$$R_{own} = \frac{P_0}{u_0} = \frac{ESN}{L}. \quad (4.12)$$

Стадия начальной закритической деформации (Стадия 2) – на данной стадии $u_B^{min} < u \leq u_B^{max}$, при этом $u \leq u_f^{min}$. Часть элементов перешла на стадию разупрочнения. Внешняя нагрузка определяется из выражения

$$\begin{aligned} P &= SNp \left(\bar{\lambda}\sigma_B^{(i)} - D \frac{u}{L} \right) + SN(1 - p)E \frac{u}{L} = \\ &= P_0 \left[- \left(\frac{u}{u_0} \right)^2 \bar{\lambda} \frac{1 - \alpha}{4\alpha} + \left(\frac{u}{u_0} \right) \left(\bar{\lambda} \frac{1 - \alpha}{2\alpha} + 1 \right) - \bar{\lambda} \frac{1 - \alpha}{4\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Данная функция имеет максимум при перемещении

$$u^* = u_0 \left[\frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{2\alpha}{1-\alpha} + 1 \right]. \quad (4.14)$$

В случае, если $\frac{2\alpha}{1-\alpha} \leq \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1}$, нагрузка достигает максимума на данной стадии:

$$P_{max} = P_0 \left[\frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{\alpha}{1-\alpha} + 1 \right]. \quad (4.15)$$

В другом случае, если $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} < \frac{2\alpha}{1-\alpha}$, функция является монотонно возрастающей в заданном промежутке, максимальное значение достигается при $u = u_f^{min}$.

Стадия развитой закритической деформации (Стадия 3¹) – на данной стадии $u_B^{max} < u \leq u_f^{min}$, все структурные элементы перешли в стадию разупрочнения, при этом ни один из них не потерял полностью несущую способность. Нагрузка вычисляется как:

$$P = SN \left(\bar{\lambda} \sigma_B^{(i)} - D \frac{u}{L} \right) = P_0 \left[- \left(\frac{u}{u_0} \right) (\bar{\lambda} - 1) + \bar{\lambda} \frac{1}{1-\alpha} \right]. \quad (4.16)$$

Функция является линейной и монотонно убывающей.

Стадия начальной закритической деформации и разрушения (Стадия 3²) – на данной стадии $u_f^{min} < u \leq u_B^{max}$, часть элементов находится в упругой области, часть в зоне разупрочнения, часть потеряла несущую способность. Выражение для нагрузки имеет вид:

$$\begin{aligned} P &= SN(p - f) \left(\bar{\lambda} \sigma_B^{(i)} - D \frac{u}{L} \right) + SN(1 - p) E \frac{u}{L} \\ &= P_0 \left[- \left(\frac{u}{u_0} \right)^2 \frac{2\bar{\lambda} - 1}{2\bar{\lambda}} \frac{1 - \alpha}{2\alpha} + \left(\frac{u}{u_0} \right) \frac{1 + \alpha}{2\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Данная функция имеет максимум при перемещении

$$u^{**} = u_0 \left[\frac{\bar{\lambda}}{2\bar{\lambda} - 1} \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right]. \quad (4.18)$$

Если $\frac{2\alpha}{1-\alpha} \leq \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1}$, функция является монотонно убывающей на данном промежутке, максимальное значение достигается при $u = u_f^{min}$. Если $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} < \frac{2\alpha}{1-\alpha}$, нагрузка достигает максимума на данной стадии:

$$P_{max} = P_0 \left[\frac{\bar{\lambda}}{2\bar{\lambda} - 1} \frac{(1 + \alpha)^2}{4\alpha(1 - \alpha)} \right]. \quad (4.19)$$

Стадия развитой закритической деформации и разрушения (Стадия 4) – на данной стадии $u_f^{min} < u \leq u_f^{max}$, при этом $u_B^{max} < u$. Все структурные элементы перешли в закритическую стадию деформирования, часть из них потеряли несущую способность. Нагрузка рассчитывается через уравнение:

$$P = SN(1 - f) \left(\bar{\lambda} \sigma_B^{(i)} - D \frac{u}{L} \right) =$$

$$= P_0 \left[\left(\frac{u}{u_0} \right)^2 \frac{(\bar{\lambda} - 1)^2}{\bar{\lambda}} \frac{1 - \alpha}{4\alpha} - \left(\frac{u}{u_0} \right) (\bar{\lambda} - 1) \frac{1 + \alpha}{2\alpha} + \bar{\lambda} \frac{(1 + \alpha)^2}{4\alpha(1 - \alpha)} \right]. \quad (4.20)$$

Функция является монотонно убывающей, имеет минимум, равный нулю, достигающийся при перемещении $u = u_f^{max}$.

С использованием выражений (4.10)–(4.11), (4.13), (4.16)–(4.17), (4.20) могут быть построены диаграммы нагружения системы. Некоторые из диаграмм представлены на рисунке 4.4, точками отмечены переходы между стадиями деформирования. Отмечено, что с ростом параметра α и снижением параметра $\bar{\lambda}$ происходит рост максимального значения нагрузки и перемещения.

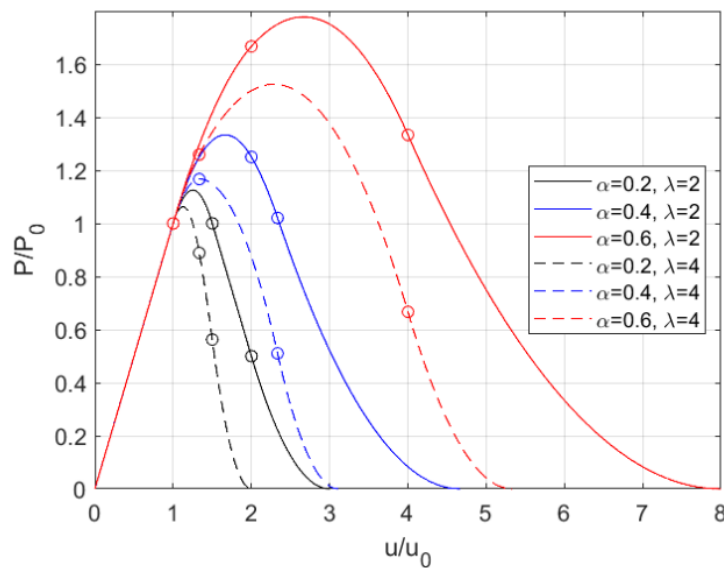


Рисунок 4.4 – Диаграммы нагружения системы параллельно соединенных элементов со случайными прочностными характеристиками

С использованием выражений (4.15), (4.19) можно записать выражение для максимального значения нагрузки P_{max}^{post} , выявляемого при учете закритической стадии деформирования, в виде:

$$\frac{P_{max}^{post}}{P_0} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{\alpha}{1-\alpha} + 1, & \frac{2\alpha}{1-\alpha} \leq \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1}, \\ \frac{\bar{\lambda}}{2\bar{\lambda}-1} \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha(1-\alpha)}, & \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} < \frac{2\alpha}{1-\alpha}. \end{cases} \quad (4.21)$$

При отсутствии учета закритической стадии деформирования (элементы рассматриваются как упруго-хрупкие, что соответствует $\bar{\lambda} \rightarrow \infty$) максимальная нагрузка $P_{max}^{no post}$:

$$\frac{P_{max}^{no post}}{P_0} = \begin{cases} 1, & \frac{2\alpha}{1-\alpha} \leq 1, \\ \frac{(1+\alpha)^2}{8\alpha(1-\alpha)}, & 1 < \frac{2\alpha}{1-\alpha}, \end{cases} \quad (4.22)$$

что совпадает с результатами аналитического решения В.Э. Вильдемана [31]. Соответственно, дополнительный прочностной резерв, выявляемый при учете закритической стадии деформирования, равен:

$$\kappa = \frac{P_{max}^{post}}{P_{max}^{no post}} - 1 = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{\alpha}{1-\alpha}, & \frac{2\alpha}{1-\alpha} \leq 1, \\ \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{8\alpha^2}{(1+\alpha)^2} - \frac{(1-3\alpha)^2}{(1+\alpha)^2}, & 1 < \frac{2\alpha}{1-\alpha} \leq \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1}, \\ \frac{1}{2\bar{\lambda}-1}, & \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} < \frac{2\alpha}{1-\alpha}. \end{cases} \quad (4.23)$$

График данной зависимости приведен на рисунке 4.5. На основе полученных результатов сделан вывод о рациональности учета стадии разупрочнения материала в расчетах систем параллельно соединенных элементов (пучков нитей, однонаправленных композитов и т.д.) с точки зрения уточнения прочностных резервов конструкций.

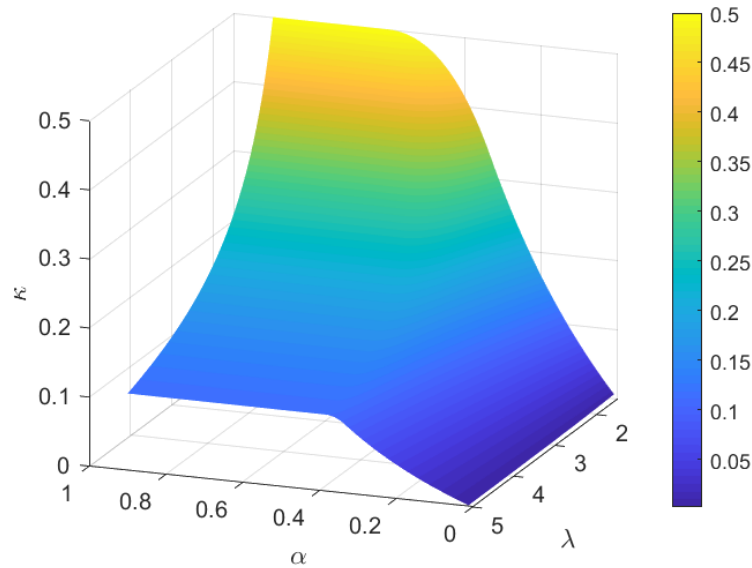


Рисунок 4.5 – Прочностные резервы, выявляемые при учете закритической стадии деформирования

С использованием условия устойчивости из (4.9), а также полученных выражений (4.10), (4.12)–(4.13), (4.16)–(4.17), (4.20), выведено условие, при котором происходит реализация полной диаграммы нагружения системы. Это значит, что жесткость нагружающей системы оказывается достаточной для реализации устойчивого процесса закритического деформирования:

$$\frac{R}{R_{\text{own}}} \geq \begin{cases} \bar{\lambda} - 1, & \frac{2\alpha}{1-\alpha} \leq \frac{1}{\bar{\lambda} - 1}, \\ \frac{\bar{\lambda} - 1}{\bar{\lambda}} \frac{1 + \alpha}{2\alpha}, & \frac{1}{\bar{\lambda} - 1} < \frac{2\alpha}{1 - \alpha}. \end{cases} \quad (4.24)$$

График зависимости (4.24), а также графики зависимости нагрузки P от перемещения u с точками срыва для различных значений жесткости нагружающей системы представлены на рисунке 4.6. Из графиков видно, что с уменьшением жесткости нагружающей системы происходит более ранний срыв с диаграммы нагружения. Сделан вывод о необходимости учета свойств нагружающих систем в расчетах конструкций, в которых может быть реализована закритическая стадия деформирования.

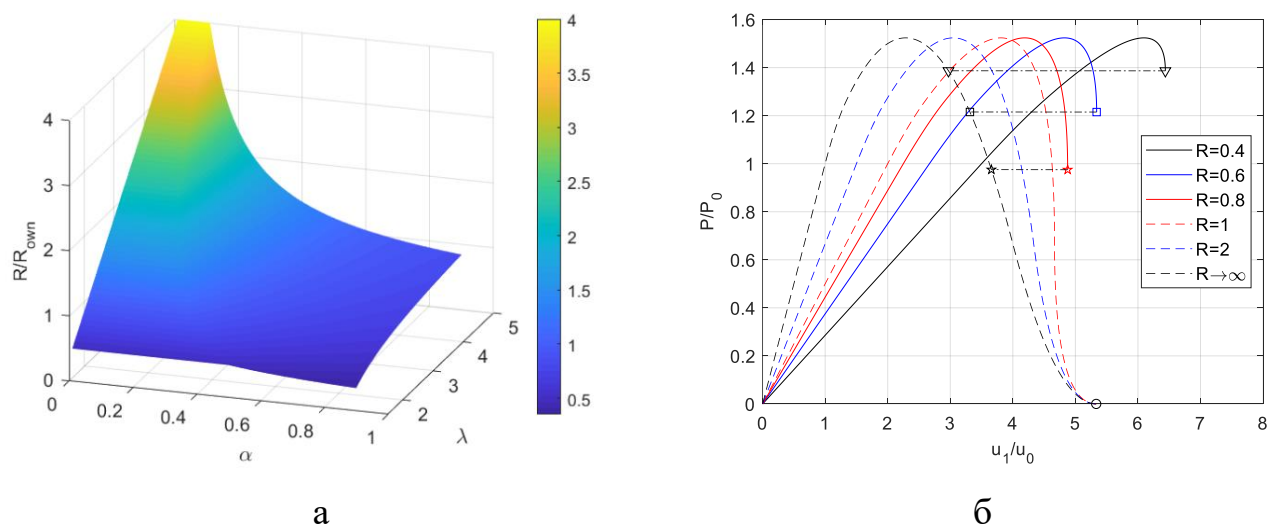


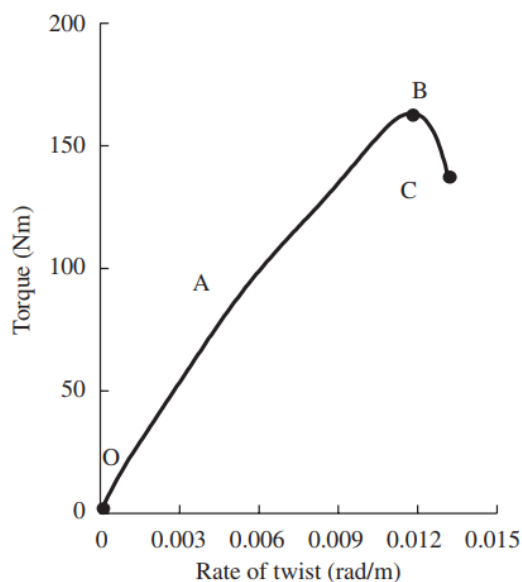
Рисунок 4.6 – Поверхность, соответствующая достаточному значению жесткости нагружающей системы для полной реализации диаграммы нагружения системы (а); диаграмма нагружения $P(u_1)$ (в относительных единицах) для $\alpha = 0.6$, $\bar{\lambda} = 4$ с точками срыва при различных значениях жесткости нагружающей системы (б)

Таким образом, получено и проанализировано новое аналитическое решение задачи растяжения системы параллельно соединенных элементов со случайными прочностными характеристиками с учетом закритической стадии деформирования материала и жесткости нагружающей системы. Продemonстрировано, что с ростом коэффициента разброса и падением модуля спада происходит увеличение максимальной нагрузки, выдерживаемой системой. Определены прочностные резервы, выявляемые путем учета закритической стадии, и условия реализации полной диаграммы нагружения системы, связанные с жесткостью нагружающей системы. Сделан вывод о рациональности учета закритической стадии деформирования в системах параллельно соединенных элементов структуры.

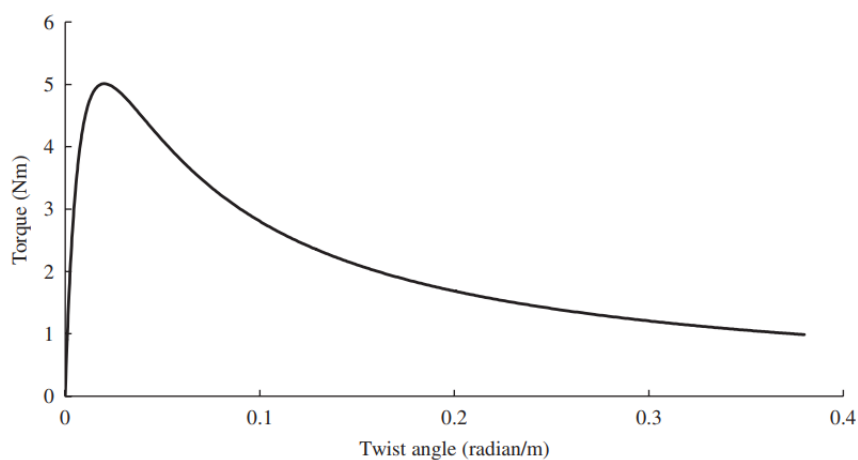
4.2. Задачи о кручении цилиндрических тел

Целесообразность учета стадии разупрочнения материала при кручении цилиндрических тел обосновывается существованием стадии закритического

деформирования на макроуровне (рисунок 4.7), которая не может быть описана в рамках упругопластических моделей с упрочнением или с площадкой текучести.



а



б

Рисунок 4.7 – Диаграммы нагружения при кручении с выраженным участком закритического деформирования: образец хрупкого бетона [198] (а), типовая диаграмма нагружения образца пластичного материала [198] (б)

Рассмотрен полый осесимметричный стержень длины L с наружным диаметром D и внутренним диаметром $d = \alpha D$, $\alpha \in [0;1)$ в цилиндрической системе координат, связанной с осью стержня. Материал стержня является изотропным и

упругопластическим. Один торец стержня закреплен, ко второму через упругий элемент с жесткостью на кручение R_φ прикладывается угол поворота φ_0 , обеспечивающий крутящий момент M . Схема нагружения полого цилиндра изображена на рисунке 4.8.

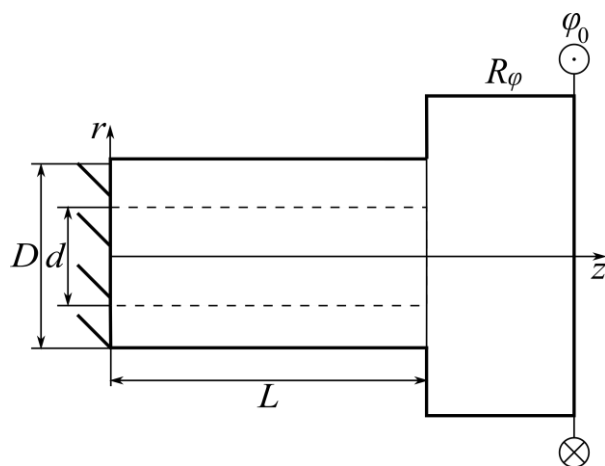


Рисунок 4.8 – Схема нагружения полого цилиндрического тела

Учетом массовых сил можно пренебречь в случаях, когда возникающие под действием силы тяжести нормальные напряжения много меньше касательных напряжений, возникающих вследствие кручения. Если ускорение свободного падения направлено ортогонально оси z , то максимальные нормальные напряжения

на поверхности тела (для консольной балки) $\sigma_{изг} = \frac{4\rho g L^2}{D(1+\alpha^2)}$, где ρ – плотность

материала, g – ускорение свободного падения. Максимальные касательные напряжения на поверхности тела в момент начала неупругого деформирования соответствуют пределу текучести материала при сдвиге τ_{pl} (при пренебрежимо малых нормальных напряжениях), что дает оценку условий, при которых

массовыми силами можно пренебречь: $\frac{L^2}{D(1+\alpha^2)} \ll \frac{\tau_{pl}}{4\rho g}$. Например, для стали 20

$\tau_{pl} \approx 240$ МПа, $\rho = 7850$ кг/м³, откуда следует $\frac{L^2}{D(1+\alpha^2)} \ll 3116$ м. Соответственно,

пренебрежение массовыми силами допустимо при длинах цилиндра, не более чем в 5-6 раз превышающих его диаметр.

Постановка краевой задачи для данного тела в цилиндрической системе координат примет вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \\
 & \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0, \\
 & \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \\
 & \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 & 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\
 & \sigma_{ij} = (3K(1-\kappa)V_{ijmn} - 2G(1-g)H_{ijmn})\varepsilon_{mn},
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

где r, θ, z – координаты точки; σ_{ij} – тензор напряжений; ε_{ij} – тензор деформаций; u_i – вектор перемещений; K, G – упругие модули объемного сжатия и сдвига материала, соответственно; κ, g – функции поврежденности (аналоги функций пластичности Ильюшина при всестороннем растяжении и чистом сдвиге); $V_{ijmn} = \delta_{ij}\delta_{mn}/3$ – шаровой тензор, $H_{ijmn} = I_{ijmn} - V_{ijmn}$, $I_{ijmn} = \delta_{im}\delta_{jn}/2 + \delta_{in}\delta_{jm}/2$, δ_{ij} – символ Кронекера.

В силу симметрии, наличия одного силового фактора – крутящего момента M , а также при принятии гипотезы плоских сечений, две компоненты вектора перемещений являются нулевыми, третья компонента не зависит от окружной координаты:

$$u_r(r, \theta, z) = 0; \quad u_z(r, \theta, z) = 0; \quad u_\theta(r, \theta, z) = u_\theta(r, z). \tag{4.26}$$

При выполнении гипотезы о сохранении радиусов сечений прямыми связь между компонентой вектора перемещений u_θ и углом поворота сечения φ является линейной:

$$u_\theta(r, z) = r\varphi(z). \tag{4.27}$$

В таком случае компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{rz} = 0, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta(r, z)}{\partial z} = r \frac{d\varphi(z)}{dz}. \quad (4.28)$$

Единственная ненулевая компонента тензора напряжений:

$$\sigma_{\theta z} = G(1 - g)\gamma_{\theta z}. \quad (4.29)$$

Три уравнения равновесия вырождаются в одно:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} = 0 \Rightarrow G \left(1 - g - \frac{\partial g}{\partial \gamma_{\theta z}} \gamma_{\theta z} \right) \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} = 0. \quad (4.30)$$

Обозначим угол поворота сечения на правом торце стержня $\varphi(L) = \varphi_L$, в таком случае с учетом равенства нулю угла закручивания левого торца стержня решение дифференциального уравнения (4.30) имеет вид

$$\varphi(z) = \frac{z}{L} \varphi_L. \quad (4.31)$$

Из выражений (4.27), (4.28) и (4.31) следует, что угол сдвига равен

$$\gamma_{\theta z} = r \frac{\varphi_L}{L}. \quad (4.32)$$

Из равенства внешних и внутренних силовых факторов следует

$$M = \int_{d/2}^{D/2} 2\pi r^2 \sigma_{\theta z}(r) dr. \quad (4.33)$$

Связь между углами поворота φ_L и φ_0 примет вид

$$\varphi_0 = \varphi_L + \frac{M}{R_\varphi}. \quad (4.34)$$

Условие устойчивости процесса деформирования может быть получено из следующих соображений: при активном нагружении положительному приращению угла поворота φ_0 должно соответствовать положительное приращение угла поворота торца стержня φ_L (процесс разгрузки не рассматривается). В таком случае с использованием выражения (4.34) получено условие устойчивости, связывающее жесткость нагружающей системы R_φ с собственной жесткостью стержня:

$$\frac{d\varphi_0}{d\varphi_L} \geq 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{R_\varphi} \frac{dM}{d\varphi_L} \geq 0 \Rightarrow \frac{dM}{d\varphi_L} \geq -R_\varphi. \quad (4.35)$$

Таким образом, в задаче с использованием выражений (4.29), (4.32)–(4.35) определяются связь крутящего момента с углом закручивания системы, распределение напряжений по поперечному сечению стержня и устойчивость процесса деформирования.

4.2.1. Сплошной цилиндр при жестком нагружении

Рассмотрена задача о кручении стержня круглого поперечного сечения при его «жестком» нагружении с учетом разупрочнения материала (в таком случае $\varphi_L = \varphi_0$). Выбрана двухзвенная кусочно-линейная аппроксимация связи напряжений и деформаций:

$$\tau_{\theta z} = \begin{cases} G\gamma_{\theta z}, & 0 \leq \gamma_{\theta z} < \gamma_y, \\ G\gamma_y - D_G(\gamma_{\theta z} - \gamma_y), & \gamma_y \leq \gamma_{\theta z} < \gamma_f, \\ 0, & \gamma_f \leq \gamma_{\theta z}. \end{cases} \quad (4.36)$$

Здесь γ_y – угол сдвига, соответствующий началу пластических деформаций (стадии разупрочнения) и напряжению τ_y ; γ_f – угол сдвига, соответствующий полной потере несущей способности; D_G – модуль разупрочнения при сдвиге. Соотношение (4.36) обеспечивает проиллюстрированную на рисунке 4.9 двухзвенную полную диаграмму деформирования материала.

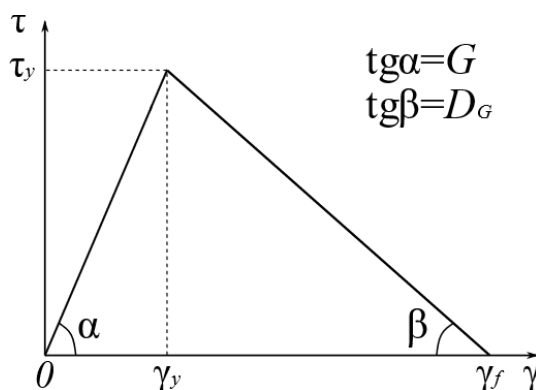


Рисунок 4.9 – Двухзвенная кусочно-линейная аппроксимация полной диаграммы деформирования материала при сдвиге

Для удобства дальнейших расчетов введено обозначение

$$\bar{\lambda} = \frac{G + D_G}{G}, \quad (4.37)$$

откуда следует $\gamma_f = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1} \gamma_y$.

Связь между внешним крутящим моментом M и углом закручивания устанавливается из (4.33) с учетом (4.36):

$$M = 2\pi G \frac{\varphi_L}{L} \int_0^{\rho_y} r^3 dr + 2\pi G \int_{\rho_y}^{\rho_f} r^2 \left(\bar{\lambda} \gamma_y + (1 - \bar{\lambda}) \frac{\varphi_L}{L} r \right) dr, \quad (4.38)$$

где использованы соотношения

$$\rho_y = \begin{cases} L \frac{\gamma_y}{\varphi_L}, & L \frac{\gamma_y}{\varphi_L} < \frac{D}{2}, \\ \frac{D}{2}, & L \frac{\gamma_y}{\varphi_L} \geq \frac{D}{2}, \end{cases} \quad \rho_f = \begin{cases} L \frac{\gamma_f}{\varphi_L}, & L \frac{\gamma_f}{\varphi_L} < \frac{D}{2}, \\ \frac{D}{2}, & L \frac{\gamma_f}{\varphi_L} \geq \frac{D}{2}, \end{cases} \quad (4.39)$$

где ρ_y, ρ_f – расстояния от центра сечения до границ соответственно упругой зоны и зоны закритической деформации; $\rho_y = D/2$ при отсутствии пластических деформаций (максимальный угол сдвига меньше угла сдвига γ_y), аналогично $\rho_f = D/2$, когда отсутствуют участки разрушенного материала. В области $\rho_f \leq r \leq D/2$ в случае устойчивого деформирования имеет место полностью разрушенный материал с нулевым сопротивлением внешним нагрузкам. Эпюры распределения напряжений имеют вид, представленный на рисунке 4.10.

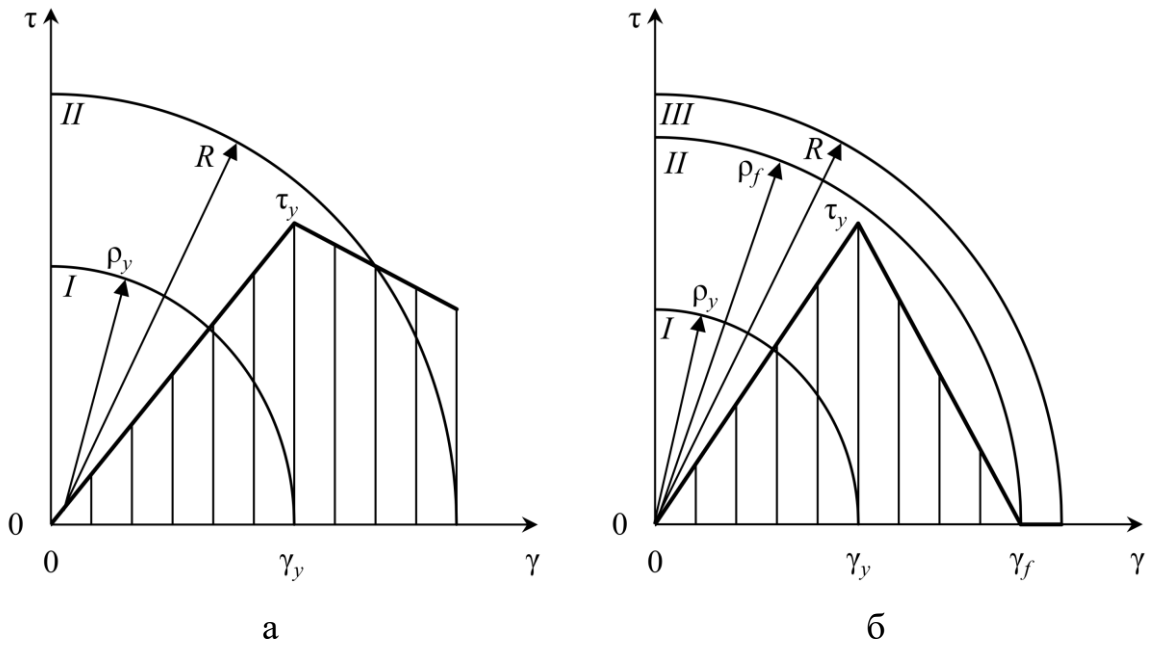


Рисунок 4.10 – Эпюры напряжений: стадия начальной закритической деформации (а); стадия закритической деформации и разрушения (б); *I* – упругая зона; *II* – зона закритического деформирования; *III* – зона разрушения

Стадия начальной закритической деформации характеризуется тем, что $\gamma_y < \varphi_L D / (2L) < \gamma_f$. Начало разупрочнения стержня с полярным моментом инерции I_ρ происходит при крутящем моменте M_y и угле закручивания φ_y :

$$M_y = G I_\rho \frac{\varphi_y}{L}, \quad \varphi_y = \frac{2L\gamma_y}{D}, \quad (4.40)$$

тогда из (4.38) следует

$$\frac{M}{M_y} = (1 - \bar{\lambda}) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{\bar{\lambda}}{3} \left(4 - \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3 \right). \quad (4.41)$$

Точка экстремума φ^* полученной функции:

$$\frac{\varphi^*}{\varphi_y} = \sqrt[4]{\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1}}, \quad (4.42)$$

при этом $\varphi^* < 2L\gamma_f/D$, следовательно, экстремальное значение функции достигается на данной стадии. Экстремальное значение крутящего момента:

$$\frac{M^*}{M_y} = \frac{4}{3} \bar{\lambda} \left(1 - \left(\frac{\bar{\lambda} - 1}{\bar{\lambda}} \right)^{\frac{3}{4}} \right). \quad (4.43)$$

Будем понимать под резервом несущей способности величину, показывающую, насколько максимальный крутящий момент M^* , рассчитанный с учетом участка разупрочнения материала, превышает момент M_y , рассчитанный для стержня, работающего в упругой области. Тогда из формулы (4.43) следует, что чем меньше $\bar{\lambda}$, т.е. чем меньше модуль спада материала, тем больше прочностной резерв несущей способности стержня. Графически зависимость (4.43) представлена на рисунке 4.11.

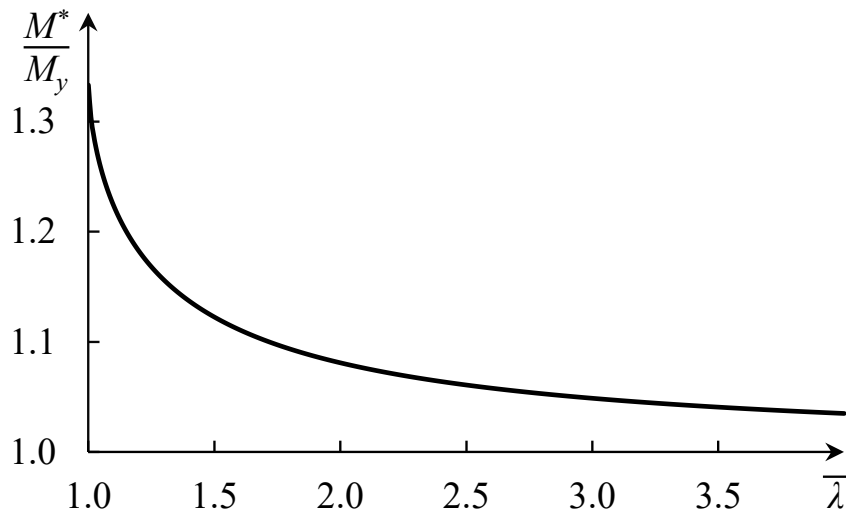


Рисунок 4.11 – Зависимость максимального значения крутящего момента от $\bar{\lambda}$

Формула (4.42) отражает зависимость соответствующего моменту M^* значения экстремального угла поворота φ^* от $\bar{\lambda}$. Данная зависимость показана на рисунке 4.12. Из графика видно, что с уменьшением $\bar{\lambda}$ растет экстремальное значение φ^* . При $\bar{\lambda} \rightarrow 1$ (для идеального упругопластического материала) $\varphi^* \rightarrow \infty$, материал в данном сечении целиком переходит в пластическое состояние; радиус упругой области стремится к нулю. Данная ситуация соответствует известному решению, приведенному в работе [102].

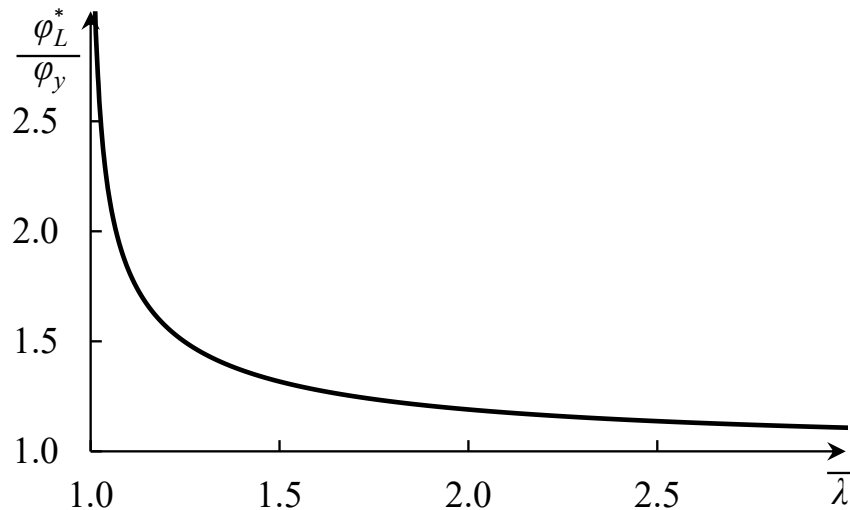


Рисунок 4.12 – Зависимость экстремального угла закручивания от $\bar{\lambda}$

Стадия закритической деформации и разрушения характеризуется неравенством $\gamma_f \leq \varphi_L D / (2L)$. Из выражения (4.38) следует:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\bar{\lambda}}{3} \left(\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1} \right)^3 - 1 \right) \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3. \quad (4.44)$$

Полученная функция является монотонно убывающей. Графики, иллюстрирующие зависимость крутящего момента от угла закручивания торца стержня, приведены на рисунке 4.13. При «мягком» нагружении экстремальные значения являются предельными, так как невозможно дальнейшее увеличение нагрузки; при «жестком» нагружении после достижения экстремума момент может уменьшаться, асимптотически стремясь к нулю. При деформировании стержня через нагружающую систему возможной является реализация срывов в различных точках на диаграмме нагружения.

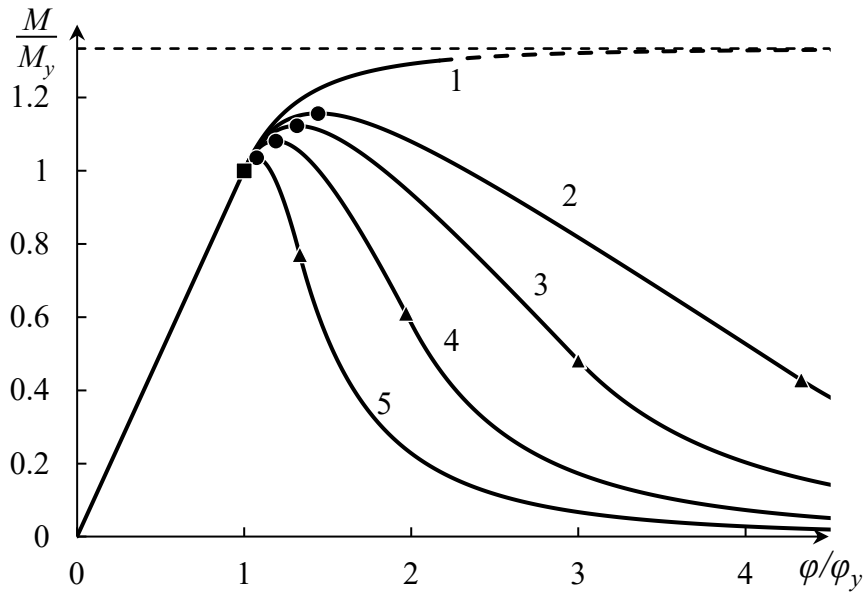


Рисунок 4.13 – Графики зависимости крутящего момента от угла закручивания торца стержня для различных значений $\bar{\lambda}$: 1–5 соответствуют $\bar{\lambda} = 1, 1.3, 1.5, 2, 4$; штриховая линия ограничивает график для $\bar{\lambda} = 1$; маркеры на диаграммах: ■ – начало разупрочнения, ● – экстремум, ▲ – появление полностью потерявшего несущую способность материала

Из полученных результатов можно сделать вывод, что материал, обладающий меньшим значением модуля разупрочнения при сдвиге, является более эффективным для применения в конструкциях, работающих на кручение.

Поскольку реальные материалы демонстрируют также существование участка упрочнения на диаграммах деформирования, целесообразным является решение поставленной задачи с трехзвенной кусочно-линейной аппроксимацией диаграммы деформирования при сдвиге:

$$\tau_{\theta z} = \begin{cases} G\gamma_{\theta z}, & 0 \leq \gamma_{\theta z} < \gamma_y; \\ G\gamma_y + G'(\gamma_{\theta z} - \gamma_y), & \gamma_y \leq \gamma_{\theta z} < \gamma_B; \\ (G - G')\gamma_y + G'\gamma_B - D_G(\gamma_{\theta z} - \gamma_B), & \gamma_B \leq \gamma_{\theta z} < \gamma_f; \\ 0, & \gamma_f \leq \gamma_{\theta z}. \end{cases} \quad (4.45)$$

Здесь γ_B – угол сдвига, соответствующий пределу прочности при сдвиге τ_B и началу стадии разупрочнения; G' – модуль упрочнения при сдвиге. Соотношения

(4.45) обеспечивают проиллюстрированную на рисунке 4.14 трехзвенную кусочно-линейную аппроксимацию полной диаграммы деформирования. Для удобства введены обозначения:

$$\bar{\kappa} = \frac{G - G'}{G}, \quad \beta = \frac{\gamma_B}{\gamma_y}, \quad \chi = \frac{\gamma_f}{\gamma_y} = \frac{\beta \bar{\lambda} + (1 - \beta) \bar{\kappa}}{\bar{\lambda} - 1}. \quad (4.46)$$

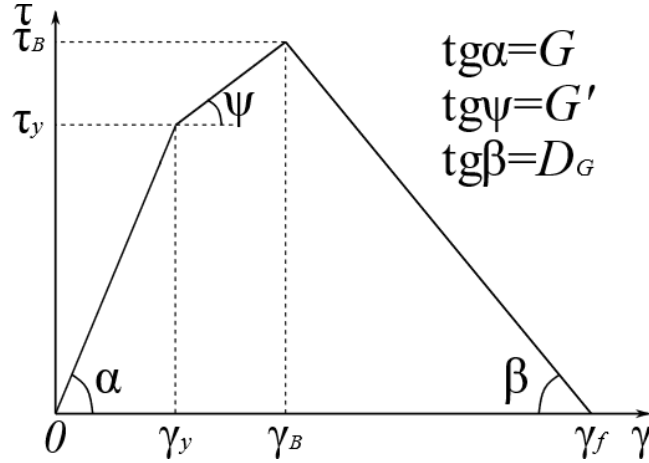


Рисунок 4.14 – Трехзвенная кусочно-линейная аппроксимация полной диаграммы деформирования материала при сдвиге

Из условия равенства между внутренними и внешними силовыми факторами следует

$$\begin{aligned} M = & 2\pi G \frac{\varphi_L}{L} \int_0^{\rho_y} r^3 dr + 2\pi G \int_{\rho_y}^{\rho_B} r^2 \left(\bar{\kappa} \gamma_y + (1 - \bar{\kappa}) \frac{\varphi_L}{L} r \right) dr + \\ & + 2\pi G \int_{\rho_B}^{\rho_f} r^2 \left(\chi (\bar{\lambda} - 1) \gamma_y + (1 - \bar{\lambda}) \frac{\varphi_L}{L} r \right) dr, \end{aligned} \quad (4.47)$$

где использованы соотношения

$$\rho_y = \begin{cases} L \frac{\gamma_y}{\varphi_L}, & L \frac{\gamma_y}{\varphi_L} < \frac{D}{2}, \\ \frac{D}{2}, & L \frac{\gamma_y}{\varphi_L} \geq \frac{D}{2}, \end{cases} \quad \rho_B = \begin{cases} L \frac{\gamma_B}{\varphi_L}, & L \frac{\gamma_B}{\varphi_L} < \frac{D}{2}, \\ \frac{D}{2}, & L \frac{\gamma_B}{\varphi_L} \geq \frac{D}{2}, \end{cases} \quad \rho_f = \begin{cases} L \frac{\gamma_f}{\varphi_L}, & L \frac{\gamma_f}{\varphi_L} < \frac{D}{2}, \\ \frac{D}{2}, & L \frac{\gamma_f}{\varphi_L} \geq \frac{D}{2}, \end{cases} \quad (4.48)$$

где ρ_B – расстояние от центра сечения до границы зоны пластического упрочнения.

На стадиях упругого ($\rho_y = \rho_B = \rho_f = D/2$) и упругопластического деформирования ($\rho_y = \gamma_y L / \varphi_L$, $\rho_B = \rho_f = D/2$) выражение (4.47) после преобразований совпадает с известными решениями. Получим соотношения, позволяющие определять распределение напряжений в сечении стержня, на стадии закритического деформирования материала.

Стадия начальной закритической деформации характеризуется выражением $\gamma_B \leq \varphi_L D / (2L) < \gamma_f$. После преобразования из уравнения (4.47) следует

$$\frac{M}{M_y} = -A \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3 + B - C \frac{\varphi_L}{\varphi_y}, \quad (4.49)$$

$$A = \frac{1}{3} \left(\bar{\kappa} + (\bar{\lambda} - \bar{\kappa}) \beta^4 \right), \quad B = \frac{4}{3} \chi (\bar{\lambda} - 1), \quad C = (\bar{\lambda} - 1).$$

Экстремальное значение угла закручивания торца стержня определяется из условия равенства нулю производной полученной функции:

$$\frac{\varphi^*}{\varphi_y} = \sqrt[4]{\frac{\bar{\kappa} + (\bar{\lambda} - \bar{\kappa}) \beta^4}{\bar{\lambda} - 1}}, \quad (4.50)$$

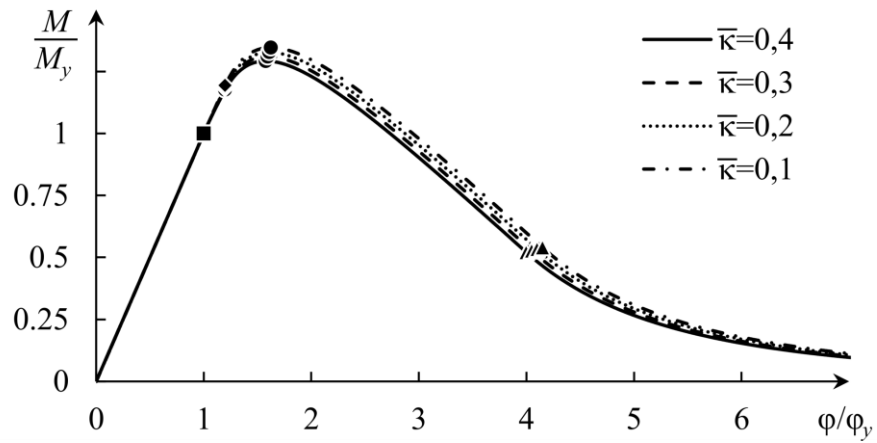
отмечено, что точка максимума достигается до начала разрушения материала.

Стадия закритической деформации и разрушения характеризуется тем, что $\gamma_f \leq \varphi_L D / (2L)$. Уравнение зависимости крутящего момента от относительного угла поворота торца стержня выглядит следующим образом:

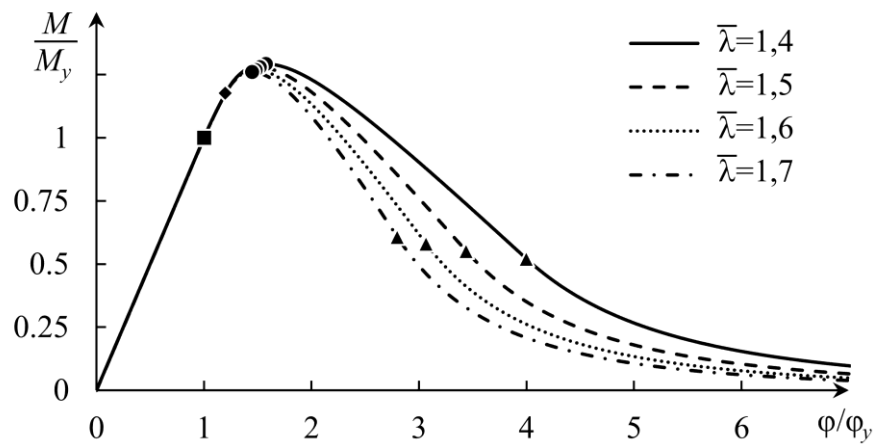
$$\frac{M}{M_y} = \frac{1}{3} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3 \left(\chi^4 (\bar{\lambda} - 1) - \beta^4 (\bar{\lambda} - \bar{\kappa}) - \bar{\kappa} \right). \quad (4.51)$$

Функция монотонно убывает и ограничена снизу нулем.

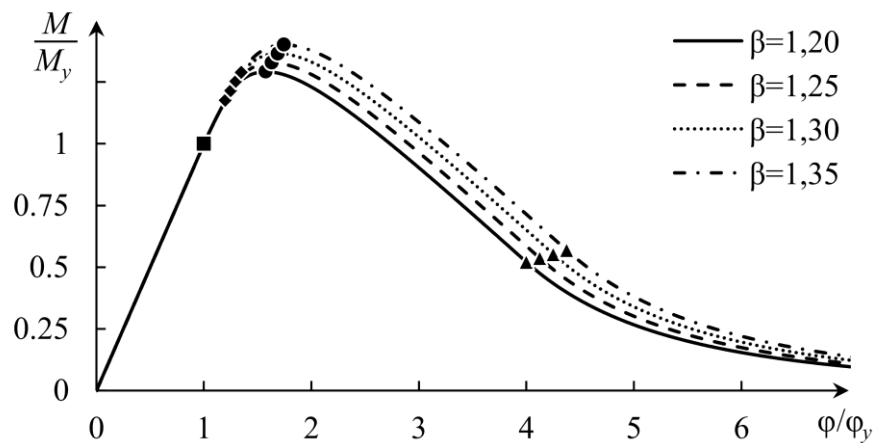
Графики зависимостей крутящего момента от относительного угла поворота торца стержня для разных значений коэффициентов $\bar{\kappa}$, $\bar{\lambda}$, β показаны на рисунке 4.15. Из графиков видно, что максимальное значение момента и соответствующее значение угла поворота прямо пропорциональны коэффициенту β и обратно пропорциональны коэффициентам $\bar{\kappa}$, $\bar{\lambda}$. При этом наибольшее влияние оказывает β ; коэффициент $\bar{\kappa}$ на изменение вида графика влияет слабо. В предельном случае,



а



б



в

Рисунок 4.15 – Графики зависимости крутящего момента от угла закручивания для материала с участком упрочнения при различных параметрах: $\bar{\kappa}$ (а), $\bar{\lambda}$ (б), β (в); маркеры на диаграммах: ■ – начало упрочнения, ◆ – начало разупрочнения, ● – экстремум, ▲ – появление полностью разрушенного материала

при $\beta = 1$, из данного решения задачи может быть получено предыдущее (осуществляется переход к двухзвенной кусочно-линейной аппроксимации диаграммы деформирования материала при сдвиге).

Таким образом, полученные аналитические решения задач о кручении цилиндрического тела круглого поперечного сечения с учетом разупрочнения материала на основе использования двухзвенной и трехзвенной аппроксимаций диаграммы деформирования демонстрирует возможность равновесного развития зон закритического деформирования при жестком нагружении. Проведенные оценки резервов, связанных с реализацией стадии разупрочнения материала в зависимости от параметров диаграммы деформирования, позволяют сделать вывод о целесообразности учета стадии закритического деформирования при проведении прочностного анализа конструкций.

4.2.2. Полый цилиндр с учетом жесткости нагружающей системы

Рассмотрена задача кручения полого цилиндра с внутренним диаметром d и внешним диаметром D , $\alpha = d/D$ – геометрический параметр стержня. Жесткое нагружение осуществляется через последовательно соединенный с цилиндром упругий элемент с жесткостью на кручение R_ϕ , что имитирует нагружающую систему (рисунок 4.8). Закон связи между касательным напряжением и сдвиговой деформацией выбирается двухзвенным кусочно-линейным, удовлетворяющий соотношениям (4.36).

Пусть начало пластического деформирования происходит при крутящем моменте M_y и угле поворота правого торца ϕ_y , также обозначим собственную жесткость стержня при кручении в упругой области R_L :

$$M_y = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) G \gamma_y; \quad \phi_y = \frac{2 \gamma_y L}{D}; \quad R_L = \frac{M_y}{\phi_y} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) G. \quad (4.52)$$

В таком случае выражение (4.33) принимает вид

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\left(\frac{2\rho_y}{D}\right)^4 - \alpha^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \bar{\lambda} \frac{\left(\frac{2\rho_f}{D}\right)^3 - \left(\frac{2\rho_y}{D}\right)^3}{1 - \alpha^4} - (\bar{\lambda} - 1) \frac{\left(\frac{2\rho_f}{D}\right)^4 - \left(\frac{2\rho_y}{D}\right)^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y};$$

$$\frac{2\rho_y}{D} = \begin{cases} 1, & \varphi_L < \varphi_y; \\ \frac{\varphi_y}{\varphi_L}, & \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y; \\ \alpha, & \frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L; \end{cases} \quad \frac{2\rho_f}{D} = \begin{cases} 1, & \varphi_L < \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1} \varphi_y; \\ \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1} \frac{\varphi_y}{\varphi_L}, & \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1} \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1} \frac{1}{\alpha} \varphi_y; \\ \alpha, & \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1} \frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L, \end{cases} \quad (4.53)$$

где ρ_y, ρ_f – расстояния от центра сечения до границы зоны разупрочнения и зоны с потерявшим несущую способность материалом соответственно. Получены зависимости крутящего момента от угла закручивания торца стержня процесс деформирования тела на различных стадиях.

Стадия упругого деформирования (Стадия 1) характеризуется углом закручивания $\varphi_L < \varphi_y$, связь крутящего момента с углом закручивания торца является линейной:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\varphi_L}{\varphi_y}. \quad (4.54)$$

Стадия начальной закритической деформации (Стадия 2) – здесь $\varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y$ и $\varphi_L < \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1} \varphi_y$. Момент зависит от угла поворота торца следующим образом:

$$\frac{M}{M_y} = \left(1 - \bar{\lambda} \frac{1}{1 - \alpha^4}\right) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \bar{\lambda} \frac{1}{1 - \alpha^4} - \frac{1}{3} \bar{\lambda} \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^3. \quad (4.55)$$

Данная функция имеет на исследуемом промежутке точку максимума

$$\frac{\varphi_L^*}{\varphi_y} = \sqrt[4]{\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - (1 - \alpha^4)}}. \quad (4.56)$$

Максимальное значение крутящего момента:

$$\frac{M^*}{M_y} = \frac{4}{3} \frac{1}{1-\alpha^4} \left(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^{\frac{1}{4}} \left(\bar{\lambda} - (1-\alpha^4) \right)^{\frac{3}{4}} \right). \quad (4.57)$$

Условие устойчивости примет вид

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \bar{\lambda} \frac{1}{1-\alpha^4} \left(1 - \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^4 \right) - 1. \quad (4.58)$$

Далее, в зависимости от геометрии стержня и свойств материала, возможна реализация двух различных сценариев развития зон неупругого деформирования.

Стадия начального разрушения (Стадия 3.1): $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y$, связь крутящего момента с углом закручивания рассчитывается по формуле

$$\frac{M}{M_y} = -\frac{\alpha^4}{1-\alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{1}{3} \bar{\lambda} \left(\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} \right)^3 - 1 \right) \frac{1}{1-\alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3. \quad (4.59)$$

Данная функция является монотонно убывающей. Условие устойчивости:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \frac{\alpha^4}{1-\alpha^4} + \bar{\lambda} \left(\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} \right)^3 - 1 \right) \frac{1}{1-\alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^4. \quad (4.60)$$

Стадия развитого закритического деформирования (Стадия 3.2). Диапазон углов поворота торца определяется неравенством $\frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} \varphi_y$, выражение (4.53) принимает вид

$$\frac{M}{M_y} = (1-\bar{\lambda}) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \bar{\lambda} \frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^4}. \quad (4.61)$$

Функция является линейной и монотонно убывающей, условие устойчивого закритического деформирования:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \bar{\lambda} - 1. \quad (4.62)$$

После любого из сценариев (Стадия 3.1 либо 3.2) при соблюдении условий устойчивости реализуется стадия развитого закритического деформирования и

разрушения (Стадия 4) – здесь $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} \varphi_y \leq \varphi_L \leq \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} \varphi_y$ и $\frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L$, связь момента с углом закручивания имеет вид

$$\frac{M}{M_y} = (\bar{\lambda} - 1) \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} - \frac{4}{3} \bar{\lambda} \frac{\alpha^3}{1 - \alpha^4} + \frac{1}{3} \bar{\lambda} \left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1} \right)^3 \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3. \quad (4.63)$$

Функция монотонно убывает, имеет соответствующий правой границе рассматриваемого промежутка минимум, в котором момент становится равным нулю (происходит полная потеря несущей способности). Условие устойчивости:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq -(\bar{\lambda} - 1) \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} + \bar{\lambda} \left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1} \right)^3 \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^4. \quad (4.64)$$

Эпюры распределения напряжений по сечению для различных стадий деформирования приведены на рисунке 4.16.

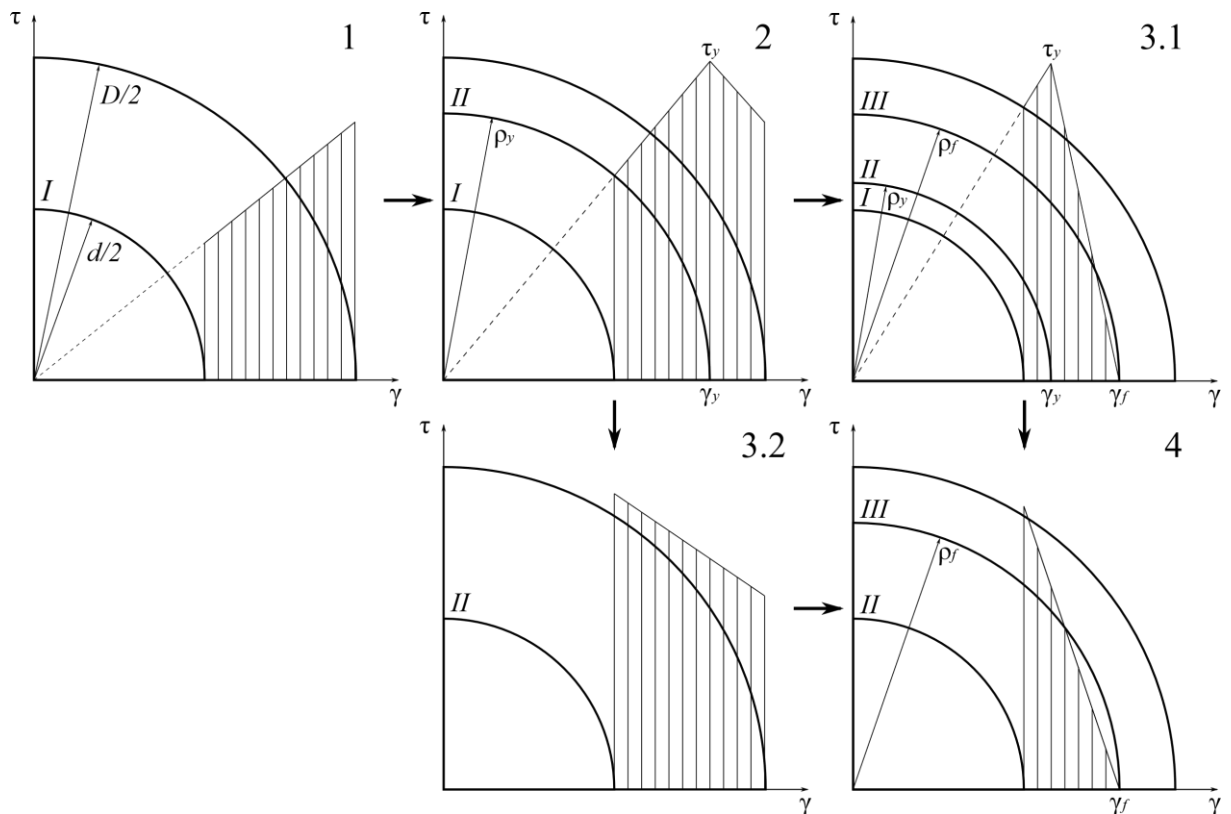


Рисунок 4.16 – Эпюры распределения напряжений на различных стадиях, *I* – область упругого деформирования, *II* – область разупрочнения, *III* – область с полностью потерявшим несущую способность материалом

На рисунке 4.17 приведены диаграммы нагружения (в относительных единицах) для различных наборов значений параметров $\bar{\lambda}$ и α . На рисунке 4.18 приведены иллюстрирующие выражения (4.57) и (4.56) поверхности, определяющие зависимости максимального значения крутящего момента и экстремального значения угла поворота торца стержня от его геометрии и свойств материала. Выявлено, что при снижении модуля спада материала и внутреннего диаметра стержня происходит рост максимального крутящего момента и соответствующего ему угла закручивания. Из графиков видно, что учет закритической стадии деформирования позволяет выявить дополнительные прочностные и деформационные резервы рассматриваемой конструкции.

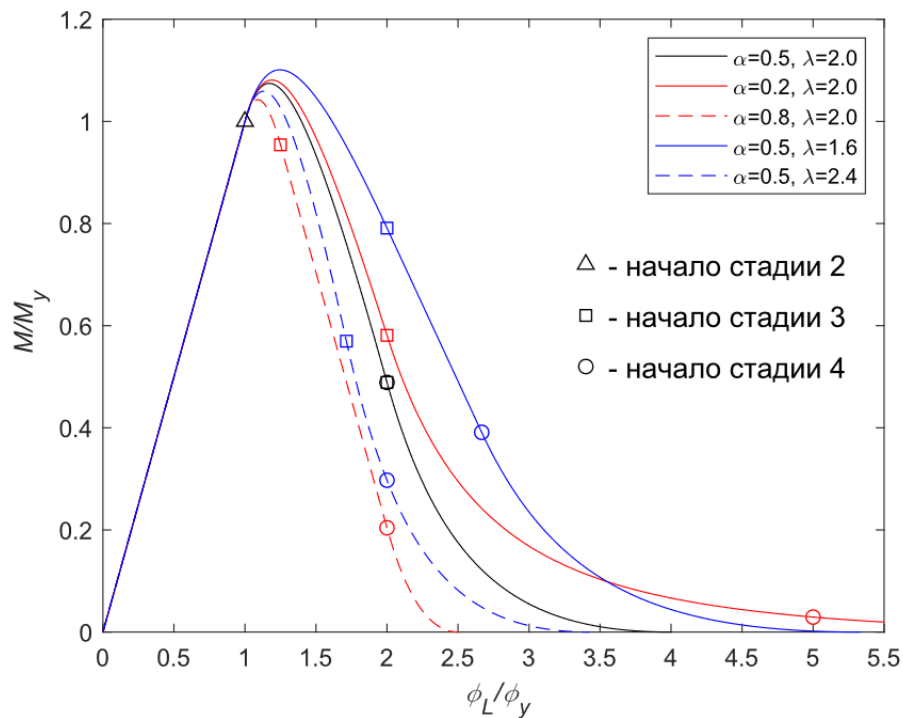


Рисунок 4.17 – Диаграммы нагружения при различных параметрах

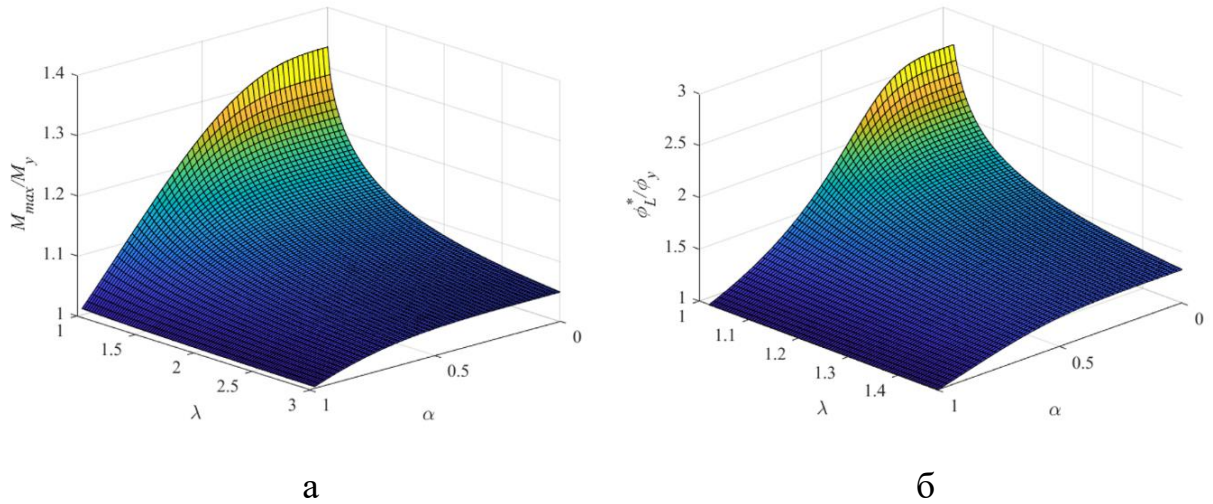


Рисунок 4.18 – Зависимость максимального значения крутящего момента (а) и соответствующего угла закручивания торца (б) от параметров $\bar{\lambda}$ и α

Анализ выражений (4.58), (4.60), (4.62), (4.64) позволяют сформировать условие реализации полной диаграммы нагружения, т.е. определить необходимую для реализации устойчивого процесса закритического деформирования жесткость нагружающей системы:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \begin{cases} \bar{\lambda} \left(1 - \left(\frac{\bar{\lambda} - 1}{\bar{\lambda}} \right)^4 \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} - 1, & \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1} \leq \frac{1}{\alpha}; \\ \bar{\lambda} - 1, & \frac{1}{\alpha} < \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1}. \end{cases} \quad (4.65)$$

Иллюстрация данной формулы приведена на рисунке 4.19, также представлена диаграмма нагружения в виде зависимости крутящего момента от задаваемого угла поворота φ_0 для различных значений жесткости нагружающей системы, указаны точки срыва с диаграммы нагружения. Таким образом, подтверждается необходимость учета свойств нагружающих систем в расчетах конструкций в случае возможной реализации закритического деформирования на макроуровне.

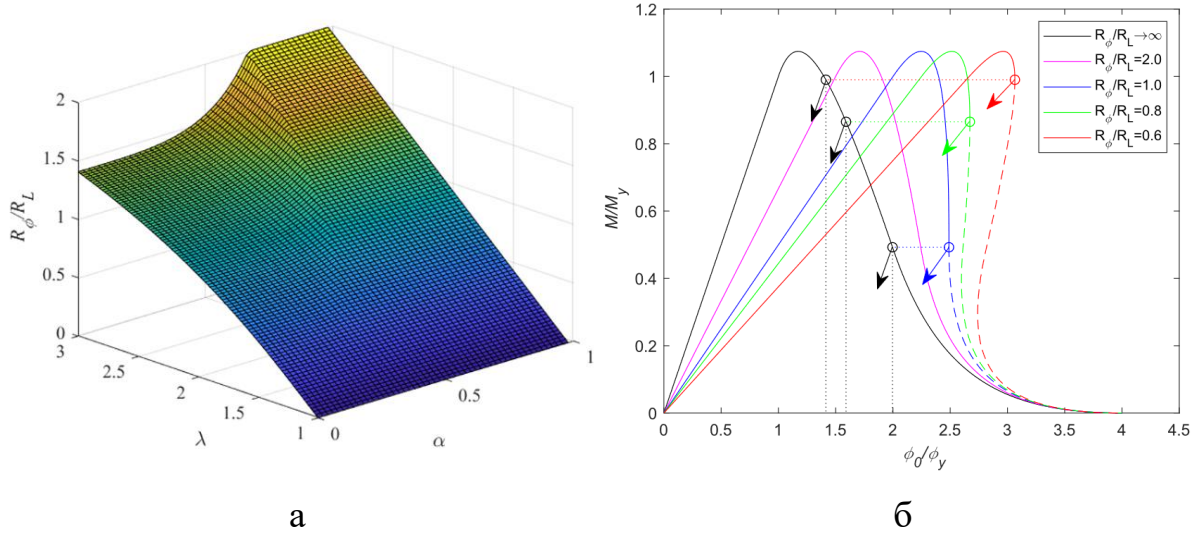


Рисунок 4.19 – Зависимость требуемого значения жесткости нагружающей системы для реализации полной диаграммы нагружения от параметров материала и геометрии стержня (а); вид диаграмм нагружения при различных значениях относительной жесткости нагружающей системы (б)

Аналогичная задача решена при трехзвенной кусочно-линейной аппроксимации полной диаграммы деформирования (4.45). Выражение (4.33) с учетом обозначений (4.46), (4.52) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_y} = & \frac{\left(\frac{2\rho_y}{D}\right)^4 - \alpha^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + (1 - \bar{\kappa}) \frac{\left(\frac{2\rho_B}{D}\right)^4 - \left(\frac{2\rho_y}{D}\right)^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + (1 - \bar{\lambda}) \frac{\left(\frac{2\rho_f}{D}\right)^4 - \left(\frac{2\rho_B}{D}\right)^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \\ & \frac{4}{3} \bar{\kappa} \frac{\left(\frac{2\rho_f}{D}\right)^3 - \left(\frac{2\rho_y}{D}\right)^3}{1 - \alpha^4} + \frac{4}{3} \beta (\bar{\lambda} - \bar{\kappa}) \frac{\left(\frac{2\rho_f}{D}\right)^3 - \left(\frac{2\rho_B}{D}\right)^3}{1 - \alpha^4}; \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\frac{2\rho_y}{D} = \begin{cases} 1, & \varphi_L < \varphi_y; \\ \frac{\varphi_y}{\varphi_L}, & \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y; \\ \alpha, & \frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L; \end{cases} \quad \frac{2\rho_B}{D} = \begin{cases} 1, & \varphi_L < \beta \varphi_y; \\ \beta \frac{\varphi_y}{\varphi_L}, & \beta \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \beta \varphi_y; \\ \alpha, & \frac{1}{\alpha} \beta \varphi_y \leq \varphi_L; \end{cases} \quad \frac{2\rho_f}{D} = \begin{cases} 1, & \varphi_L < \chi \varphi_y; \\ \chi \frac{\varphi_y}{\varphi_L}, & \chi \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \chi \varphi_y; \\ \alpha, & \frac{1}{\alpha} \chi \varphi_y \leq \varphi_L, \end{cases}$$

где ρ_y , ρ_B – расстояния от центра сечения до границы зон упрочнения и разупрочнения соответственно.

Стадия упругого деформирования (Стадия 1) для данной задачи будет эквивалентна предыдущему рассмотренному случаю (4.54).

Стадия начального упрочнения (Стадия 2) – здесь $\varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y$ и $\varphi_L < \beta \varphi_y$.

Момент зависит от угла поворота торца стержня следующим образом:

$$\frac{M}{M_y} = \left(1 - \bar{\kappa} \frac{1}{1 - \alpha^4}\right) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \bar{\kappa} \frac{1}{1 - \alpha^4} - \frac{1}{3} \bar{\kappa} \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^3. \quad (4.67)$$

Данная функция является монотонно возрастающей.

Далее в зависимости от соотношения между параметрами материала и геометрии стержня нагружение будет реализовываться по различным сценариям развития зон неупругого деформирования.

Стадия начального разупрочнения (Стадия 3.1): угол закручивания торца стержня удовлетворяет неравенствам $\beta \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y$ и $\varphi_L < \chi \varphi_y$, зависимость момента от угла закручивания:

$$\frac{M}{M_y} = \left(1 - \bar{\lambda} \frac{1}{1 - \alpha^4}\right) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \chi (\bar{\lambda} - 1) \frac{1}{1 - \alpha^4} - \frac{1}{3} (\beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa}) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^3. \quad (4.68)$$

При $\frac{1}{\alpha} < \chi$ данная функция является монотонно возрастающей. Иначе данное выражение обладает точкой максимума

$$\frac{\varphi_L^*}{\varphi_y} = \sqrt[4]{\frac{\beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa}}{\bar{\lambda} - (1 - \alpha^4)}}, \quad (4.69)$$

в которой принимает значение

$$\frac{M^*}{M_y} = \frac{4}{3} \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\chi (\bar{\lambda} - 1) - (\beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa})^{\frac{1}{4}} (\bar{\lambda} - (1 - \alpha^4))^{\frac{3}{4}} \right). \quad (4.70)$$

В таком случае требуется условие устойчивости:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\bar{\lambda} - (\beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa}) \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^4 \right) - 1. \quad (4.71)$$

Стадия развитого упрочнения (Стадия 3.2) характеризуется углами закручивания торца в диапазоне $\frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L < \beta \varphi_y$, выражение (4.66) принимает вид

$$\frac{M}{M_y} = (1 - \bar{\kappa}) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \bar{\kappa} \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^4}. \quad (4.72)$$

Функция является монотонно возрастающей.

Стадия начального разрушения (Стадия 4.1) – здесь $\chi \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y$,

крутящий момент рассчитывается по формуле

$$\frac{M}{M_y} = -\frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{1}{3} \left(\chi^4 (\bar{\lambda} - 1) - (\beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa}) \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3. \quad (4.73)$$

Данная функция на рассматриваемом промежутке является монотонно убывающей; условие устойчивости закритического деформирования:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} - \left(\chi^4 (\bar{\lambda} - 1) - (\beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa}) \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^4. \quad (4.74)$$

Стадия развитого упрочнения и начального разупрочнения (Стадия 4.2):

$\beta \varphi_y \leq \varphi_L < \beta \frac{1}{\alpha} \varphi_y$, $\frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L < \chi \varphi_y$, связь момента с углом закручивания имеет вид

$$\frac{M}{M_y} = \left(1 - \bar{\kappa} - \frac{\bar{\lambda} - \bar{\kappa}}{1 - \alpha^4} \right) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \left(\chi (\bar{\lambda} - 1) - \bar{\kappa} \alpha^3 \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} - \frac{1}{3} \beta^4 (\bar{\lambda} - \bar{\kappa}) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3. \quad (4.75)$$

Данная функция имеет на исследуемом промежутке точку максимума

$$\frac{\varphi_L^*}{\varphi_y} = \beta^4 \sqrt[4]{\frac{\bar{\lambda} - \bar{\kappa}}{(\bar{\lambda} - 1) + (1 - \bar{\kappa}) \alpha^4}}. \quad (4.76)$$

Максимальное значение крутящего момента на данной стадии:

$$\frac{M^*}{M_y} = \frac{4}{3} \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\chi (\bar{\lambda} - 1) - \bar{\kappa} \alpha^3 - \beta (\bar{\lambda} - \bar{\kappa})^{\frac{1}{4}} \left((\bar{\lambda} - 1) + (1 - \bar{\kappa}) \alpha^4 \right)^{\frac{3}{4}} \right). \quad (4.77)$$

Условие устойчивости:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq (\bar{\lambda} - \bar{\kappa}) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(1 - \beta^4 \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^4 \right) - (1 - \bar{\kappa}). \quad (4.78)$$

Стадия развитого упрочнения и начального разрушения (Стадия 5.1) – угол закручивания торца лежит в диапазонах $\frac{1}{\alpha}\varphi_y \leq \varphi_L < \frac{\beta}{\alpha}\varphi_y$ и $\chi\varphi_y \leq \varphi_L$, крутящий момент равен

$$\frac{M}{M_y} = -\left(1-\bar{\kappa}\right)\frac{\alpha^4}{1-\alpha^4}\frac{\varphi_L}{\varphi_y} - \frac{4-\bar{\kappa}}{3}\frac{\alpha^3}{1-\alpha^4} + \frac{1}{3}\left(\chi^4(\bar{\lambda}-1) - \beta^4(\bar{\lambda}-\bar{\kappa})\right)\frac{1}{1-\alpha^4}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^3. \quad (4.79)$$

Данная функция является монотонно убывающей; необходимая жесткость нагружающей системы определяется неравенством:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \left(1-\bar{\kappa}\right)\frac{\alpha^4}{1-\alpha^4} + \left(\chi^4(\bar{\lambda}-1) - \beta^4(\bar{\lambda}-\bar{\kappa})\right)\frac{1}{1-\alpha^4}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^4. \quad (4.80)$$

Стадия развитого разупрочнения (Стадия 5.2) – на данной стадии $\frac{\beta}{\alpha}\varphi_y \leq \varphi_L < \chi\varphi_y$, выражение (4.66) принимает вид

$$\frac{M}{M_y} = -\left(\bar{\lambda}-1\right)\frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3}\chi\left(\bar{\lambda}-1\right)\frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^4}. \quad (4.81)$$

Функция является монотонно убывающей. Условие устойчивости:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \left(\bar{\lambda}-1\right). \quad (4.82)$$

Стадия развитой закритической деформации и разрушения (Стадия 6) – здесь $\chi\varphi_y \leq \varphi_L \leq \frac{1}{\alpha}\chi\varphi_y$ и $\frac{\beta}{\alpha}\varphi_y \leq \varphi_L$, связь момента с углом закручивания имеет вид

$$\frac{M}{M_y} = \left(\bar{\lambda}-1\right)\frac{\alpha^4}{1-\alpha^4}\frac{\varphi_L}{\varphi_y} - \frac{4}{3}\chi\left(\bar{\lambda}-1\right)\frac{\alpha^3}{1-\alpha^4} + \frac{1}{3}\chi^4\left(\bar{\lambda}-1\right)\frac{1}{1-\alpha^4}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^3. \quad (4.83)$$

Функция (4.83) монотонно убывает, аналогично (4.63) имеет соответствующий правой границе рассматриваемого промежутка минимум, в котором крутящий момент становится равным нулю и происходит полная потеря несущей способности. Закритическое деформирование является устойчивым при выполнении условия

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq -(\bar{\lambda} - 1) \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} + \chi^4 (\bar{\lambda} - 1) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^4. \quad (4.84)$$

Эпюры распределения напряжений по сечению для различных стадий деформирования и возможные переходы между ними приведены на рисунке 4.20.

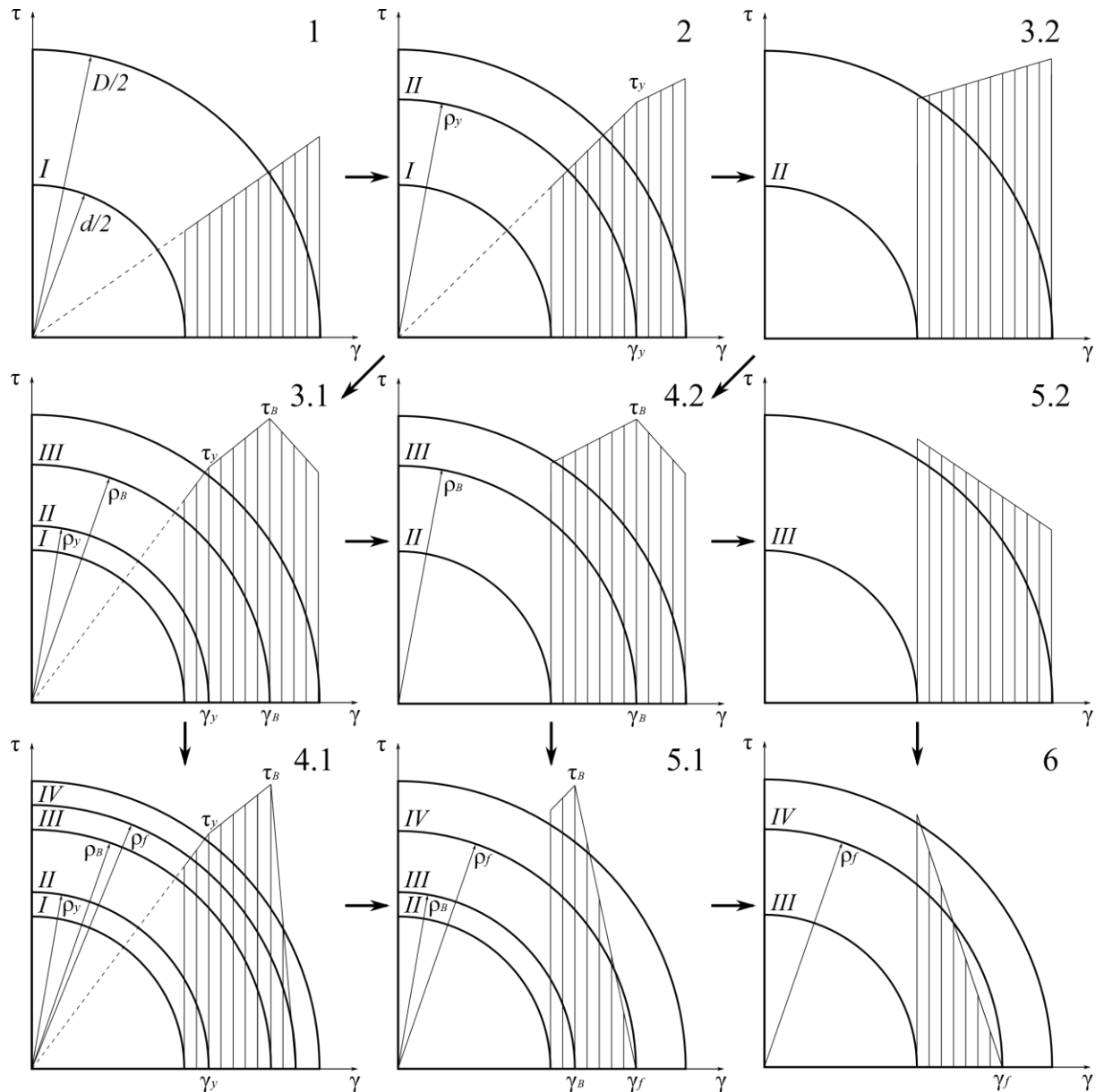


Рисунок 4.20 – Эпюры распределения напряжений, *I* – область упругого деформирования, *II* – область упрочнения, *III* – область разупрочнения, *IV* – область с полностью потерявшим несущую способность материалом

Из решения следует, что максимальное значение крутящего момента определяется выражением

$$\frac{M^*}{M_y} = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{1}{1-\alpha^4} \left(\chi(\bar{\lambda}-1) - (\beta^4 \bar{\lambda} + (1-\beta^4) \bar{\kappa})^{\frac{1}{4}} (\bar{\lambda} - (1-\alpha^4))^{\frac{3}{4}} \right), & \chi \leq \frac{1}{\alpha}; \\ \frac{4}{3} \frac{1}{1-\alpha^4} \left(\chi(\bar{\lambda}-1) - \bar{\kappa} \alpha^3 - \beta (\bar{\lambda} - \bar{\kappa})^{\frac{1}{4}} \left((\bar{\lambda}-1) + (1-\bar{\kappa}) \alpha^4 \right)^{\frac{3}{4}} \right), & \frac{1}{\alpha} < \chi. \end{cases} \quad (4.85)$$

На рисунке 4.21 приведены диаграммы нагружения (в относительных единицах) для различных наборов значений параметров $\bar{\kappa}$, β , $\bar{\lambda}$ и α . Анализ показывает, что увеличение максимального значения крутящего момента происходит при росте модуля упрочнения, росте протяженности стадии упрочнения, снижении модуля спада и снижении внутреннего диаметра стержня. Рост максимального значения момента сопровождается смещением точки экстремума вправо, что говорит о сопутствующем увеличении деформационных резервов конструкции.

Условие реализации полной диаграммы нагружения при кручении полого цилиндрического тела имеет вид:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \begin{cases} \left(\bar{\lambda} \left(1 - \frac{\beta^4}{\chi^4} \right) + \bar{\kappa} \frac{\beta^4 - 1}{\chi^4} \right) \frac{1}{1-\alpha^4} - 1, & \chi < \frac{1}{\alpha}; \\ \left(\bar{\lambda} \left(1 - \frac{\beta^4}{\chi^4} \right) + \bar{\kappa} \left(\frac{\beta^4}{\chi^4} - \alpha^4 \right) \right) \frac{1}{1-\alpha^4} - 1, & \frac{1}{\alpha} \leq \chi < \frac{\beta}{\alpha}; \\ \bar{\lambda} - 1, & \frac{\beta}{\alpha} \leq \chi. \end{cases} \quad (4.86)$$

Отметим, что полученные выражения сводятся к представленным в предыдущем параграфе при $\alpha \rightarrow 0$.

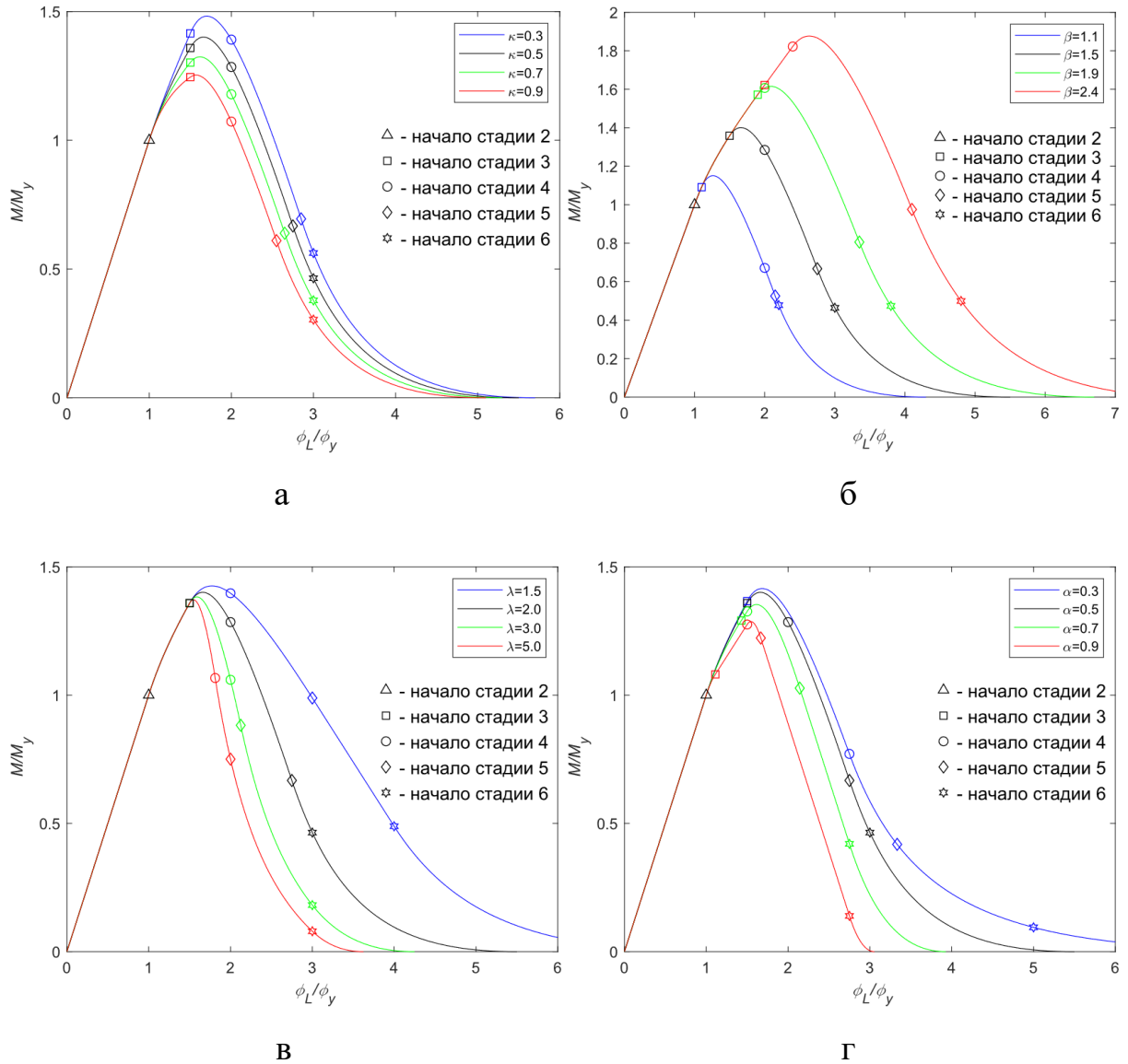


Рисунок 4.21 – Диаграммы нагружения при различных значениях параметров:

$\bar{\kappa}$ (а), β (б), $\bar{\lambda}$ (в) и α (г)

Таким образом, получено новое аналитическое решение задачи о кручении полого цилиндрического тела с учетом жесткости нагружающей системы. Рассмотрены двухзвенная и трехзвенная кусочно-линейная аппроксимации полной диаграммы деформирования материала. Получены и проанализированы соотношения, описывающие зависимость крутящего момента от угла поворота торца стержня на различных стадиях деформирования. Определены точки максимума и максимальные значения функции крутящего момента; выявлена их связь со свойствами материала и геометрией полого стержня. Подтверждена

возможность выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов рассматриваемой конструкции. Рассмотрен вопрос устойчивости закритического деформирования при кручении. Определена необходимая для реализации полной диаграммы нагружения жесткость нагружающей системы. На основе вышеизложенного можно сделать вывод о рациональности учета стадии разупрочнения материала и жесткости нагружающих систем в расчетах конструкций.

4.2.3. Обобщение задачи о кручении на случай многозвенной диаграммы деформирования материала

С целью обеспечения возможности прогнозирования поведения тел при кручении с учетом стадии разупрочнения материала для произвольных полных диаграмм деформирования рассмотрено обобщение рассматриваемой задачи на случай кусочно-линейной аппроксимации полной диаграммы деформирования материала при чистом сдвиге, состоящей из трех характерных стадий: I – упругого деформирования, II – пластического деформирования (как упрочнения, так и разупрочнения), состоящей из n участков, III – полной потери несущей способности. Введены обозначения: τ_{pl}^0 , γ_{pl}^0 – предел текучести материала и соответствующая сдвиговая деформация; $\tau_{pl}^{(i)}$, $\gamma_{pl}^{(i)}$ – касательное напряжение и сдвиговая деформация, соответствующие завершению i -й стадии пластического деформирования, $i \in [1; n]$; $G = \tau_{pl}^0 / \gamma_{pl}^0$ – упругий модуль сдвига материала; $G^{(i)} = (\tau_{pl}^{(i)} - \tau_{pl}^{(i-1)}) / (\gamma_{pl}^{(i)} - \gamma_{pl}^{(i-1)})$ – касательный модуль упрочнения (либо разупрочнения) на i -й стадии пластического деформирования; $\lambda_{(i)} = G^{(i)} / G$ – относительное значение касательного модуля; $\beta_{(i)} = \gamma_{pl}^{(i)} / \gamma_{pl}^0$ – относительная величина сдвиговой деформации, соответствующей завершению i -й стадии пластического деформирования. С учетом введенных обозначений кусочно-линейная аппроксимация полной диаграммы деформирования материала описывается выражением:

$$\frac{\tau}{\tau_{pl}^0} = \begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma_{pl}^0}, & 0 \leq \frac{\gamma}{\gamma_{pl}^0} < 1; \\ 1 + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\lambda_{(j)} (\beta_{(j)} - \beta_{(j-1)}) \right) + \lambda_{(i)} \left(\frac{\gamma}{\gamma_{pl}^0} - \beta_{(i-1)} \right), & \beta_{(i-1)} \leq \frac{\gamma}{\gamma_{pl}^0} < \beta_{(i)}; \\ 0, & \beta_{(n)} \leq \frac{\gamma}{\gamma_{pl}^0}. \end{cases} \quad (4.87)$$

Иллюстрация типовой полной диаграммы деформирования при чистом сдвиге, описываемой выражением (4.87), приведена на рисунке 4.22.

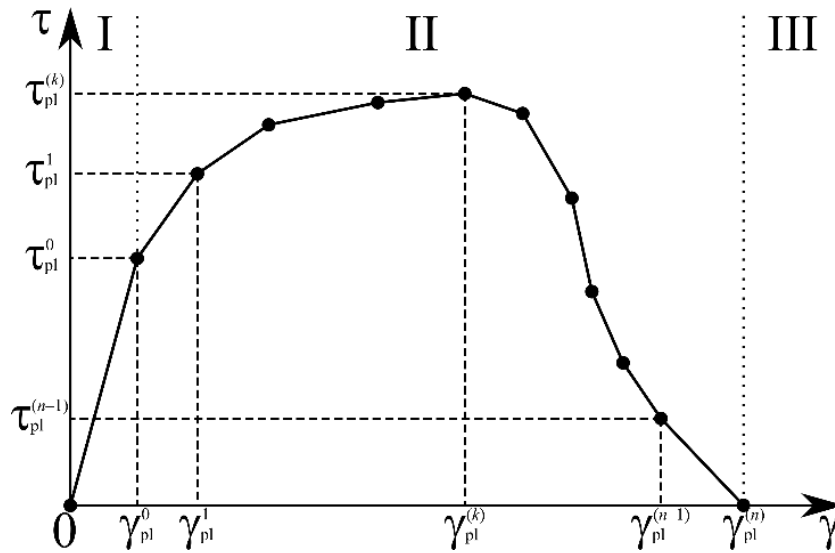


Рисунок 4.22 – Иллюстрация полной диаграммы деформирования материала при чистом сдвиге: I – стадия упругого деформирования; II – стадия пластического деформирования из n участков; III – стадия полной потери несущей способности

Из выражения (4.32) следует, что в зависимости от величин угла закручивания торца тела φ_L и параметра α зона упругого деформирования:

1) реализуется во всем теле при $0 \leq \varphi_L < 2\gamma_{pl}^0 L/D$ (далее величину $2\gamma_{pl}^0 L/D$ будем обозначать как φ_{pl} – угол закручивания торца тела, соответствующий началу пластического деформирования);

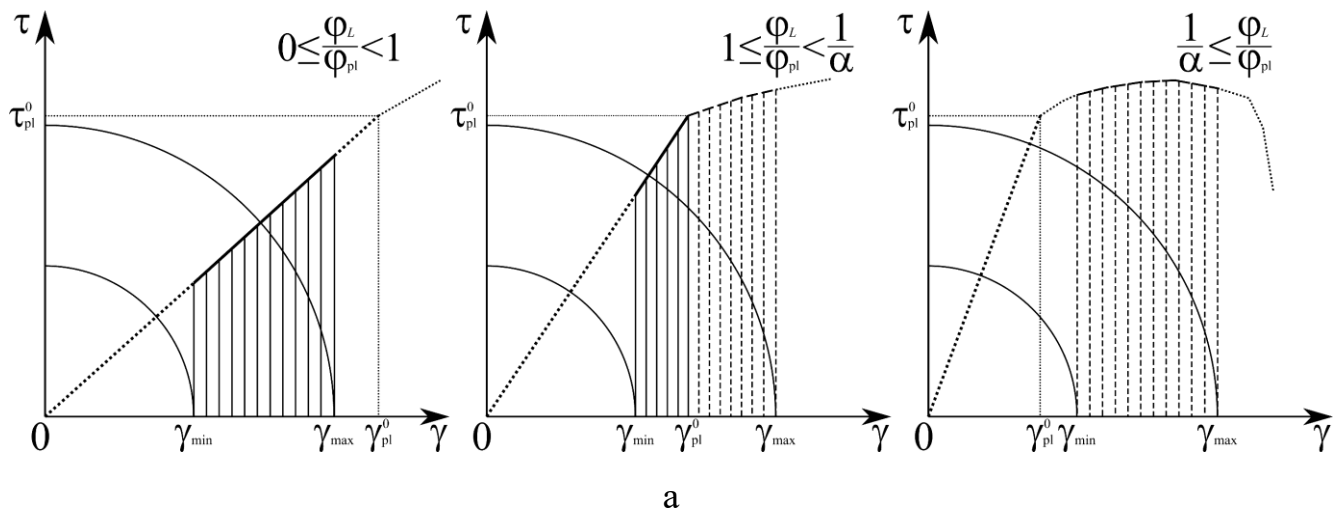
2) реализуется вблизи внутренней поверхности тела при $\varphi_{pl} \leq \varphi_L < \varphi_{pl}/\alpha$;

3) не реализуется при $\varphi_{pl}/\alpha \leq \varphi_L$.

Зона, соответствующая i -му участку на диаграмме деформирования материала:

- 1) не реализуется при $0 \leq \varphi_L / \varphi_{pl} < \beta_{(i-1)}$;
- 2) реализуется вблизи наружной поверхности тела при $\beta_{(i-1)} \leq \varphi_L / \varphi_{pl} < \beta_{(i-1)} / \alpha$ и $\varphi_L / \varphi_{pl} < \beta_{(i)}$;
- 3) реализуется в центральной части тела при $\beta_{(i)} \leq \varphi_L / \varphi_{pl} < \beta_{(i-1)} / \alpha$;
- 4) реализуется во всем объеме тела при $\beta_{(i-1)} / \alpha \leq \varphi_L / \varphi_{pl} < \beta_{(i)}$;
- 5) реализуется вблизи внутренней поверхности тела при $\beta_{(i)} \leq \varphi_L / \varphi_{pl} < \beta_{(i)} / \alpha$ и $\beta_{(i-1)} / \alpha \leq \varphi_L / \varphi_{pl}$;
- 6) не реализуется при $\beta_{(i)} / \alpha \leq \varphi_L / \varphi_{pl}$.

Зона с материалом, полностью потерявшим несущую способность, появляется при $\beta_{(n)} \leq \varphi_L / \varphi_{pl}$, полная потеря несущей способности тела происходит при $\varphi_L / \varphi_{pl} = \beta_{(n)} / \alpha$. Перечисленные случаи реализации различных зон деформирования материала проиллюстрированы на рисунке 4.23.



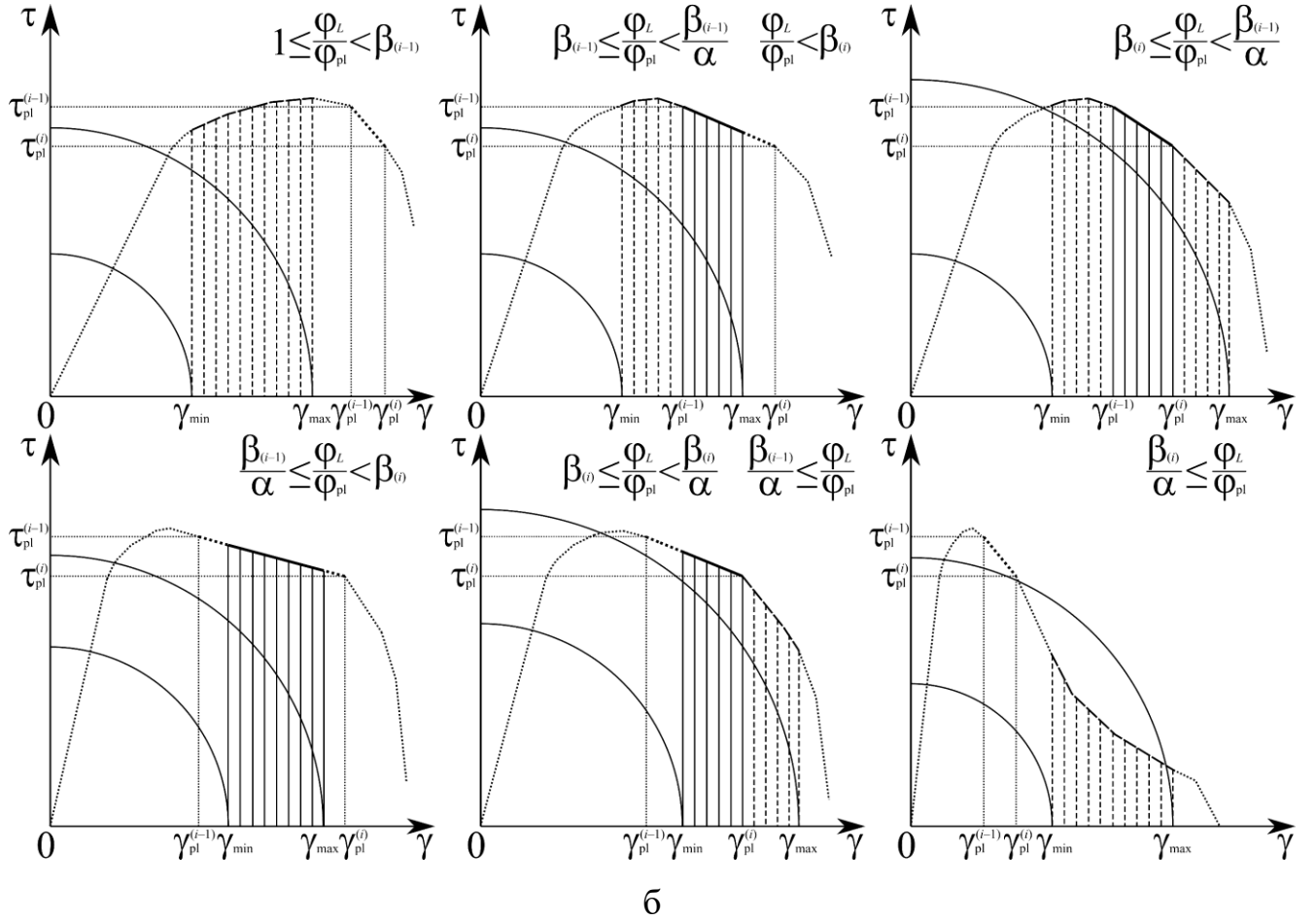


Рисунок 4.23 – Иллюстрации различных случаев реализации зон упругого (а) и пластического (б) деформирования материала: сплошные линии – реализуемая в данном состоянии часть рассматриваемого участка диаграммы деформирования; штриховые линии – реализуемая часть диаграммы вне рассматриваемого участка; пунктирные линии – не реализуемые части диаграммы деформирования

Обозначим величину крутящего момента, соответствующую началу пластического деформирования, как $M_{pl} = \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}{16} \tau_0^{pl}$. С учетом рассмотренных случаев реализации различных участков диаграммы деформирования материала зависимость крутящего момента от угла закручивания торца тела определяется уравнением:

$$\frac{M}{M_{pl}} = \left(A^{el} + \sum_{i=1}^n A_{(i)}^{pl} \right) \frac{\phi_L}{\phi_{pl}} + \sum_{i=1}^n B_{(i)}^{pl} + \left(C^{el} + \sum_{i=1}^n C_{(i)}^{pl} \right) \left(\frac{\phi_L}{\phi_{pl}} \right)^{-3}, \quad (4.88)$$

где безразмерные коэффициенты A^{el} , C^{el} , $A^{\text{pl}}_{(i)}$, $B^{\text{pl}}_{(i)}$, $C^{\text{pl}}_{(i)}$ вычисляются согласно выражениям:

$$A^{\text{el}} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < 1; \\ -\frac{\alpha^4}{1-\alpha^4}, & 1 \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \frac{1}{\alpha}; \\ 0, & \frac{1}{\alpha} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}}; \end{cases} \quad C^{\text{el}} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < 1; \\ \frac{1}{1-\alpha^4}, & 1 \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \frac{1}{\alpha}; \\ 0, & \frac{1}{\alpha} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}}; \end{cases} \quad (4.89a)$$

$$A^{\text{pl}}_{(i)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \beta_{(i-1)}; \\ \frac{1}{1-\alpha^4} \lambda_{(i)}, & \beta_{(i-1)} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \frac{\beta_{(i-1)}}{\alpha}, \quad \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \beta_{(i)}; \\ 0, & \beta_{(i)} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \frac{\beta_{(i-1)}}{\alpha}; \\ \lambda_{(i)}, & \frac{\beta_{(i-1)}}{\alpha} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \beta_{(i)}; \\ -\frac{\alpha^4}{1-\alpha^4} \lambda_{(i)}, & \beta_{(i)} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \frac{\beta_{(i)}}{\alpha}, \quad \frac{\beta_{(i-1)}}{\alpha} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}}; \\ 0, & \frac{\beta_{(i)}}{\alpha} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}}; \end{cases} \quad (4.89b)$$

$$B_{(i)}^{\text{pl}} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \beta_{(i-1)}; \\ \frac{4}{3} \frac{1}{1-\alpha^4} \left(\frac{\tau_{\text{pl}}^{(i-1)}}{\tau_{\text{pl}}} - \lambda_{(i)} \beta_{(i-1)} \right), & \beta_{(i-1)} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \frac{\beta_{(i-1)}}{\alpha}, \quad \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \beta_{(i)}; \\ 0, & \beta_{(i)} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \frac{\beta_{(i-1)}}{\alpha}; \\ \frac{4}{3} \frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^4} \left(\frac{\tau_{\text{pl}}^{(i-1)}}{\tau_{\text{pl}}} - \lambda_{(i)} \beta_{(i-1)} \right), & \frac{\beta_{(i-1)}}{\alpha} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \beta_{(i)}; \\ -\frac{4}{3} \frac{\alpha^3}{1-\alpha^4} \left(\frac{\tau_{\text{pl}}^{(i-1)}}{\tau_{\text{pl}}} - \lambda_{(i)} \beta_{(i-1)} \right), & \beta_{(i)} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \frac{\beta_{(i)}}{\alpha}, \quad \frac{\beta_{(i-1)}}{\alpha} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}}; \\ 0, & \frac{\beta_{(i)}}{\alpha} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}}; \end{cases} \quad (4.89\text{B})$$

$$C_{(i)}^{\text{pl}} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \beta_{(i-1)}; \\ \frac{1}{3} \frac{1}{1-\alpha^4} \beta_{(i-1)}^4 \lambda_{(i)} - \frac{4}{3} \frac{1}{1-\alpha^4} \beta_{(i-1)}^3 \frac{\tau_{\text{pl}}^{(i-1)}}{\tau_{\text{pl}}}, & \beta_{(i-1)} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \frac{\beta_{(i-1)}}{\alpha}, \quad \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \beta_{(i)}; \\ \frac{1}{1-\alpha^4} \left(\beta_{(i)}^4 - \frac{4}{3} \beta_{(i)}^3 \beta_{(i-1)} + \frac{1}{3} \beta_{(i-1)}^4 \right) \lambda_{(i)} + \frac{4}{3} \frac{1}{1-\alpha^4} (\beta_{(i)}^3 - \beta_{(i-1)}^3) \frac{\tau_{\text{pl}}^{(i-1)}}{\tau_{\text{pl}}}, & \beta_{(i)} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \frac{\beta_{(i-1)}}{\alpha}; \\ 0, & \frac{\beta_{(i-1)}}{\alpha} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \beta_{(i)}; \\ \frac{1}{1-\alpha^4} \left(\beta_{(i)}^4 - \frac{4}{3} \beta_{(i)}^3 \beta_{(i-1)} \right) \lambda_{(i)} + \frac{4}{3} \frac{1}{1-\alpha^4} \beta_{(i)}^3 \frac{\tau_{\text{pl}}^{(i-1)}}{\tau_{\text{pl}}}, & \beta_{(i)} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < \frac{\beta_{(i)}}{\alpha}, \quad \frac{\beta_{(i-1)}}{\alpha} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}}; \\ 0, & \frac{\beta_{(i)}}{\alpha} \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}}. \end{cases} \quad (4.89\text{Г})$$

В частном случае, когда рассматривается сплошное цилиндрическое тело с сечением в форме круга ($\alpha \rightarrow 0$), выражения (4.89) примут вид:

$$A^{\text{el}} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < 1; \\ 0, & 1 \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}}; \end{cases} \quad C^{\text{el}} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}} < 1; \\ 1, & 1 \leq \frac{\varphi_L}{\varphi_{\text{pl}}}; \end{cases} \quad (4.90\text{a})$$

$$A_{(i)}^{pl} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{\Phi_L}{\Phi_{pl}} < \beta_{(i-1)}; \\ \lambda_{(i)}, & \beta_{(i-1)} \leq \frac{\Phi_L}{\Phi_{pl}} < \beta_{(i)}; \\ 0, & \beta_{(i)} \leq \frac{\Phi_L}{\Phi_{pl}}; \end{cases} \quad B_{(i)}^{pl} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{\Phi_L}{\Phi_{pl}} < \beta_{(i-1)}; \\ \frac{4}{3} \left(\frac{\tau_{pl}^{(i-1)}}{\tau_{pl}} - \lambda_{(i)} \beta_{(i-1)} \right), & \beta_{(i-1)} \leq \frac{\Phi_L}{\Phi_{pl}} < \beta_{(i)}; \\ 0, & \beta_{(i)} \leq \frac{\Phi_L}{\Phi_{pl}}; \end{cases} \quad (4.90б)$$

$$C_{(i)}^{pl} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{\Phi_L}{\Phi_{pl}} < \beta_{(i-1)}; \\ \frac{1}{3} \beta_{(i-1)}^4 \lambda_{(i)} - \frac{4}{3} \beta_{(i-1)}^3 \frac{\tau_{pl}^{(i-1)}}{\tau_{pl}}, & \beta_{(i-1)} \leq \frac{\Phi_L}{\Phi_{pl}} < \beta_{(i)}; \\ \left(\beta_{(i)}^4 - \frac{4}{3} \beta_{(i)}^3 \beta_{(i-1)} + \frac{1}{3} \beta_{(i-1)}^4 \right) \lambda_{(i)} + \frac{4}{3} (\beta_{(i)}^3 - \beta_{(i-1)}^3) \frac{\tau_{pl}^{(i-1)}}{\tau_{pl}}, & \beta_{(i)} \leq \frac{\Phi_L}{\Phi_{pl}}. \end{cases} \quad (4.90в)$$

Обозначим собственную жесткость тела при кручении на стадии упругого деформирования как $R_{el} = M_{pl}/\Phi_{pl}$. Условие устойчивости (4.35) определяется неравенством:

$$\frac{R_{\varphi}}{R_{el}} > - \frac{d \frac{M}{M_{pl}}}{d \frac{\Phi_L}{\Phi_{pl}}} = - \left(A^{el} + \sum_{i=1}^n A_{(i)}^{pl} \right) + 3 \left(C^{el} + \sum_{i=1}^n C_{(i)}^{pl} \right) \left(\frac{\Phi_L}{\Phi_{pl}} \right)^{-4}. \quad (4.91)$$

В качестве иллюстрации рассматривается процесс кручения полого цилиндрического тела при использовании полной диаграммы деформирования модельного материала при сдвиге, полученной путем пересчета диаграммы деформирования стали 40Х, приведенной в работе [21]. Рассматриваемая зависимость касательных напряжений от сдвиговой деформации изображена на рисунке 4.24а, точками отмечены границы линейных участков диаграммы деформирования материала. Для расчета диаграммы нагружения системы по аналитическому решению разработана программа для ЭВМ [120]. Для бесконечной жесткости нагружающей системы (т.е. при жестком нагружении, $\Phi_0 \rightarrow \Phi_L$) и значении параметра $\alpha=0.6$ построена диаграмма нагружения тела при кручении

(рисунок 4.24б). На диаграмме точками обозначены моменты: 1 – начала пластического деформирования материала; 2 – начала закритического деформирования материала; 3 – появления области с полностью потерявшим несущую способность материалом.

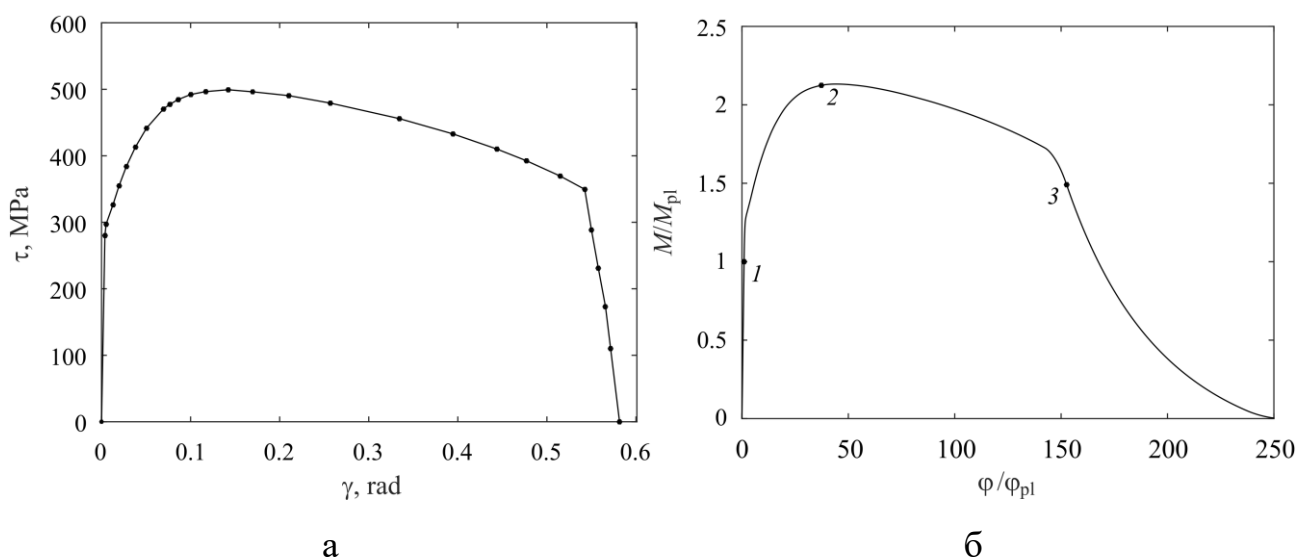


Рисунок 4.24 – Модельная диаграмма деформирования материала при сдвиге (а) и пример получаемой диаграммы нагружения тела при кручении (б)

Отмечено, что достижение максимальной несущей способности тела происходит после начала реализации закритического деформирования материала. Для представленной диаграммы нагружения при переходе от точки начала процесса разупрочнения до точки, соответствующей максимальному крутящему моменту, наблюдается рост величины крутящего момента на 0,39% и рост угла закручивания торца стержня на 18,74%. Также выявлено, что после достижения точки с максимальным крутящим моментом происходит плавное снижение крутящего момента при существенном росте угла закручивания. Сделан вывод о целесообразности учета закритической стадии деформирования материала при проведении уточненного прочностного анализа конструкций для прогнозирования их поведения в случае возникновения аварийных ситуаций.

Рассмотрено влияние геометрии тела (параметра α) на вид диаграмм нагружения при кручении и выявляемые прочностные и деформационные резервы. На рисунке 4.25а приведены диаграммы нагружения при величинах $\alpha = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$. На диаграммах обозначены области реализации: I – пластического упрочнения материала; II – стадии разупрочнения; III – зоны с полностью потерявшим несущую способность материалом. Результаты демонстрируют приближение формы диаграммы нагружения к форме диаграммы деформирования материала при сдвиге по мере уменьшения толщины сечения цилиндра (т.е. по мере роста величины параметра α). При этом наблюдается монотонное снижение дополнительных прочностных и деформационных резервов (рисунок 4.25б, в). Наличие изломов на графиках связано с достижением точки максимума на диаграмме нагружения на различных стадиях закритического деформирования. Таким образом, подтверждена возможность выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов при учете стадии разупрочнения материала.

Проиллюстрирована возможность потери устойчивости процесса деформирования цилиндра ($\alpha = 0,6$) при кручении при недостаточной жесткости нагружающей системы. На рисунке 4.25г приведены диаграммы нагружения для различных значений отношения жесткости нагружающей системы к жесткости стержня на упругой стадии: $R = R_{\phi}/R_{el} = 0,038; 0,01; 0,006$, а также при кинематическом нагружении. Результаты подтверждают реализацию обрыва диаграмм нагружения в различных точках при изменении жесткости нагружающей системы: с ее уменьшением потеря устойчивости наблюдается раньше. Отмечено, что по достижении порогового значения жесткости нагружающей системы (для рассматриваемого случая $R \approx 0,039$) реализуется полная диаграмма нагружения цилиндра при кручении. Сделан вывод о необходимости учета свойств нагружающих систем при расчетах конструкций, в которых возможна реализация зон разупрочнения материала.

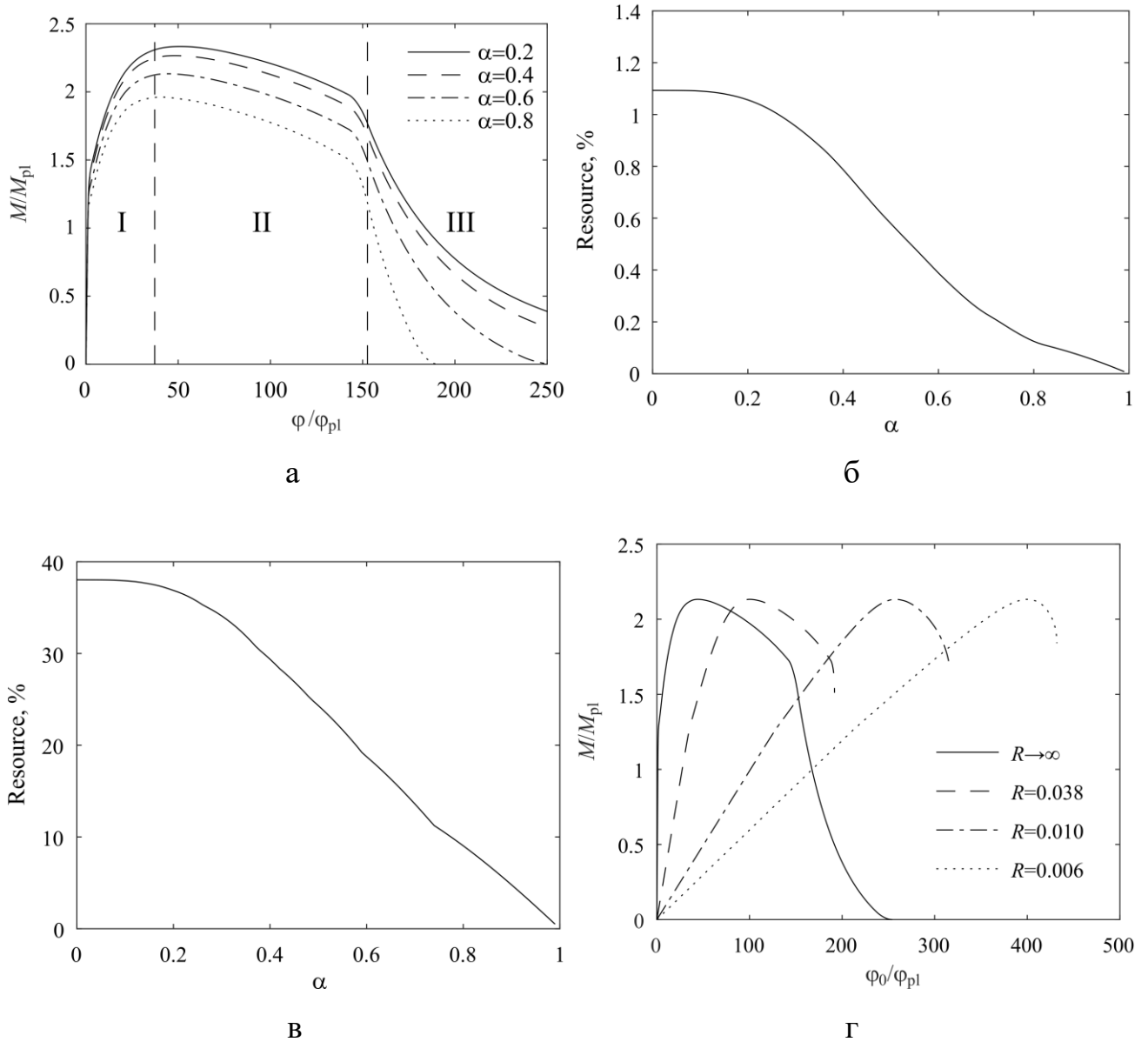


Рисунок 4.25 – Диаграммы нагружения при различной геометрии тела (а), графики зависимости дополнительных прочностных (б) и деформационных (в) резервов от параметра α , диаграммы нагружения при различных отношениях жесткости нагружающей системы к собственной жесткости стержня (г)

Таким образом, получено аналитическое решение задачи кручения полого цилиндра при учете закритического деформирования материала и жесткости нагружающей системы при рассмотрении n -звенной кусочно-линейной аппроксимации полной диаграммы нагружения. Выведены условия устойчивости закритического деформирования тела. Подтверждена возможность выявления

дополнительных прочностных и деформационных резервов конструкций при учете разупрочнения материала. Отмечена необходимость учета свойств нагружающих систем для определения точек срыва с диаграмм нагружения тела. На основе вышеизложенного сделан вывод о целесообразности проведения уточненного прочностного анализа конструкций с позиций механики закритического деформирования для обеспечения безопасности ответственных конструкций в случае возникновения аварийных ситуаций.

Выводы по главе 4

На основе анализа полученных аналитических решений краевых задач с учетом разупрочнения материала и жесткости нагружающей системы сделаны следующие выводы.

1. Начало реализации стадии закритического деформирования материала не во всех случаях приводит к началу закритического деформирования системы на макроуровне – этому предшествует увеличение внешних нагрузок, выдерживаемых системой. Соответственно, путем учета закритического деформирования материала могут быть выявлены дополнительные прочностные и деформационные резервы конструкций.

2. Стадийность процессов деформирования рассмотренных систем связана не только со свойствами материала на стадии разупрочнения, но и с параметрами статистического распределения прочностных характеристик (для системы параллельно соединенных элементов) и геометрическими параметрами тела (для полых цилиндров). Возможной является реализация различных сценариев процесса нагружения и характера эволюции зон разупрочнения.

3. Свойства нагружающей системы определяют возможность реализации устойчивого процесса закритического деформирования на макроуровне. По достижении некоторой пороговой жесткости нагружающей системы процесс нагружения может быть осуществлен равновесно до полной потери несущей способности.

ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕЛ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ УЧЕТЕ РАЗУПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Пятая глава посвящена численному моделированию процессов неупругого деформирования тел с концентраторами напряжений при учете закритической стадии деформирования материала.

Получены новые численные решения задач деформирования пластин с концентраторами напряжений различной геометрии при учете закритической стадии деформирования материала. Изучена эволюция зон разупрочнения. Подтверждена возможность выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов конструкции при учете разупрочнения материала. Проведено сопоставление результатов численного моделирования растяжения пластины с концентратором напряжений с данными натурных экспериментов; продемонстрировано качественное соответствие расчетных и экспериментальных диаграмм нагружения тела и полей деформаций.

Результаты, представленные в данной главе, опубликованы в работах диссертанта [21, 74, 80, 86, 87, 89, 90].

5.1. Эволюция зон закритического деформирования в телах с концентраторами напряжений

С целью изучения возможности равновесного развития зон закритического деформирования материала в твердых телах в рамках теории течения (использована функция текучести Мизеса, ассоциированный закон течения, изотропное упрочнение материала) рассмотрена задача растяжения пластины с эллиптическим концентратором напряжений (рисунок 5.1а). Предполагается отсутствие массовых сил, используются логарифмические деформации. В качестве модельной выбрана диаграмма деформирования стали 40Х (рисунок 5.1б) [21]. На диаграмме деформирования материала обозначены стадии: I – упругого

деформирования; II – упрочнения; III, IV – разупрочнения. Модуль Юнга материала – 220.5 ГПа, коэффициент Пуассона 0.26.

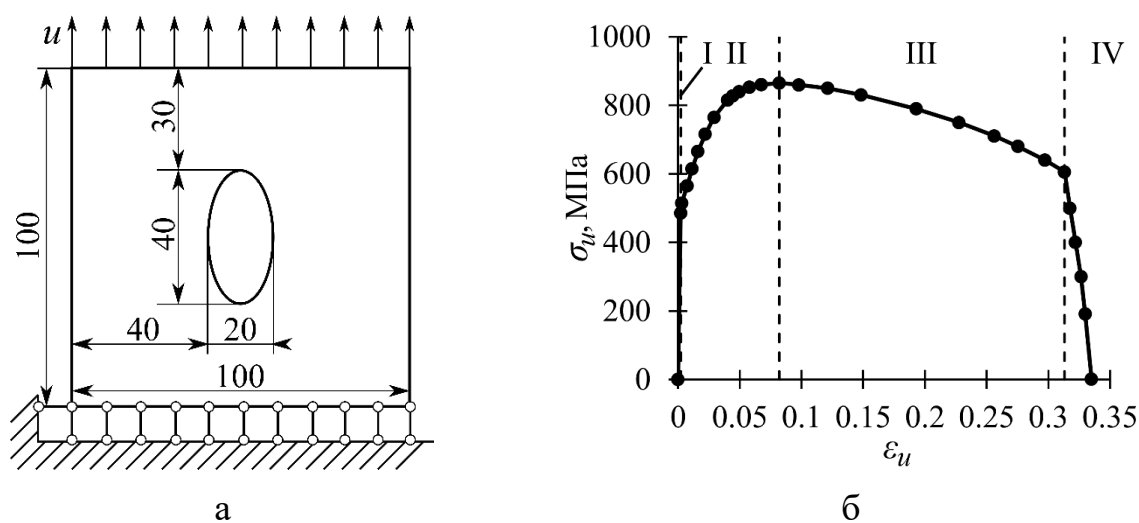


Рисунок 5.1 – Геометрия пластины с эллиптическим концентратором напряжений и граничные условия (а); диаграмма деформирования материала (б)

Решения краевых задач получены методом конечных элементов в программно-прикладном пакете Abaqus CAE. Использован алгоритм решения физически нелинейных задач, изложенный в параграфе 3.1. Сетка конечных элементов (тип элемента CPS4R) сгенерирована равномерно, симметрично относительно осей симметрии тела. Число конечных элементов составило 8842 (соответствует 18168 узловых неизвестных, характерный линейный размер конечного элемента 1.03 мм). Использован автоматически подбираемый шаг нагружения с величиной не более 0.005 мм. Завершение расчета происходило при потере сходимости итерационной процедуры.

В результате решения поставленной задачи построена расчетная диаграмма нагружения пластины (рисунок 5.2а). В точке 0 на диаграмме завершается упругое деформирование пластины, начинается образование области пластического упрочнения (происходит переход к области II на диаграмме деформирования материала). Точка I соответствует началу реализации стадии закритического деформирования около концентратора напряжений (происходит переход к области

III на диаграмме деформирования материала) – при использовании только восходящего участка диаграммы деформирования данная точка соответствовала бы завершению расчета. В точке 4 достигается максимальная несущая способность пластины, после чего наблюдается разупрочнение тела на макроуровне. Точка 6 соответствует завершению расчета (потере устойчивости численного решения).

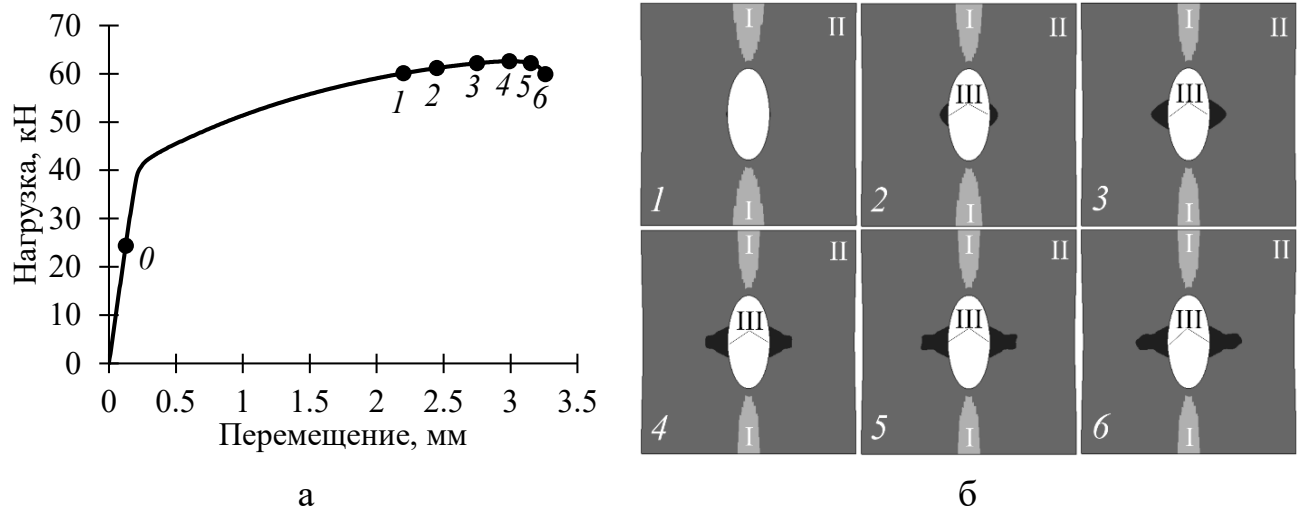


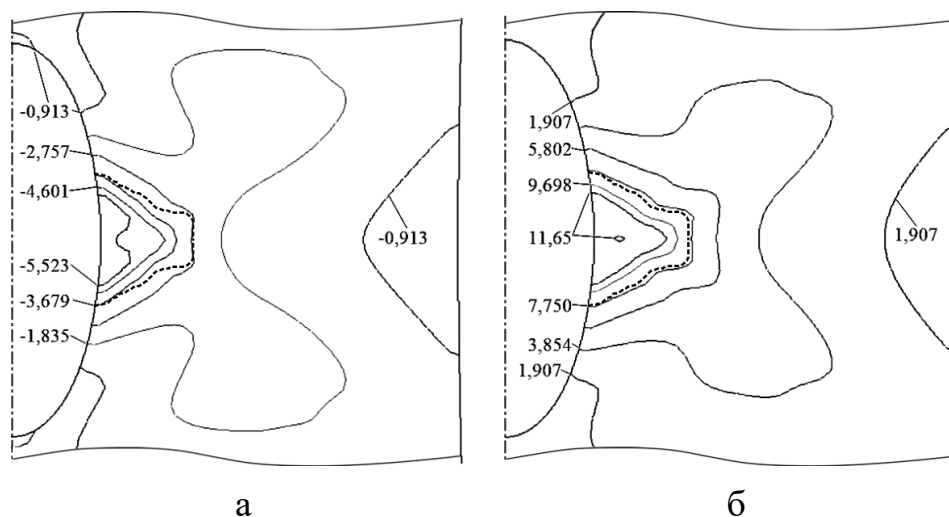
Рисунок 5.2 – Расчетная диаграмма нагружения пластины с концентратором напряжений (а); эволюция областей разупрочнения материала (б), зоны I–III соответствуют стадиям на диаграмме деформирования материала (рисунок 5.14)

На основе полученных результатов можно сделать вывод о возможности устойчивого развития зон закритического деформирования материала. Обнаружен рост нагрузки от начала реализации стадии разупрочнения до достижения максимальной несущей способности на $\approx 4\%$, однако увеличение перемещения при этом составило 36% , что демонстрирует возможность прогнозирования качественно иного поведения тела за счет учета разупрочнения материала.

Проведен анализ эволюции зон, соответствующих различным участкам на диаграмме деформирования материала (рисунок 5.2б): I – области упругого деформирования, II – пластического упрочнения, III – начального разупрочнения. Результаты демонстрируют, что от начала реализации стадии закритического деформирования до достижения максимальной несущей способности тела (точки

1–4 на диаграмме нагружения) область разупрочнения развивается около концентратора напряжений, при этом имеет гладкую форму. После начала разупрочнения пластины на макроуровне (точки 4–6 на диаграмме нагружения) наблюдается появление и развитие вытянутых поперек направления приложения нагрузки «языков» около уже сформированной зоны разупрочнения материала. При этом в наиболее узком поперечном сечении пластины наблюдается сужение, что в совокупности с образованием протяженной области разупрочнения объясняет снижение нагрузки и реализацию стадии закритического деформирования пластины на макроуровне.

Рассмотрены поля деформаций ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} и скалярной эквивалентной пластической деформации $e_{\text{экв}}^p$ вблизи концентратора напряжений при достижении максимальной нагрузки (точка 4 на диаграмме нагружения) и перед потерей устойчивости численного решения (точка 6). Изображения полей приведены на рисунках 5.3 и 5.4, штриховой линией обозначена граница зоны разупрочнения. Результаты демонстрируют, что до достижения максимальной нагрузки в теле зона закритического деформирования развивается от концентратора напряжений. После начала разупрочнения тела на макроуровне наблюдается незначительное нарушение симметрии полей деформаций, а также образование локализации деформаций в виде двух полос, сливающихся в одну, вблизи концентратора напряжений.



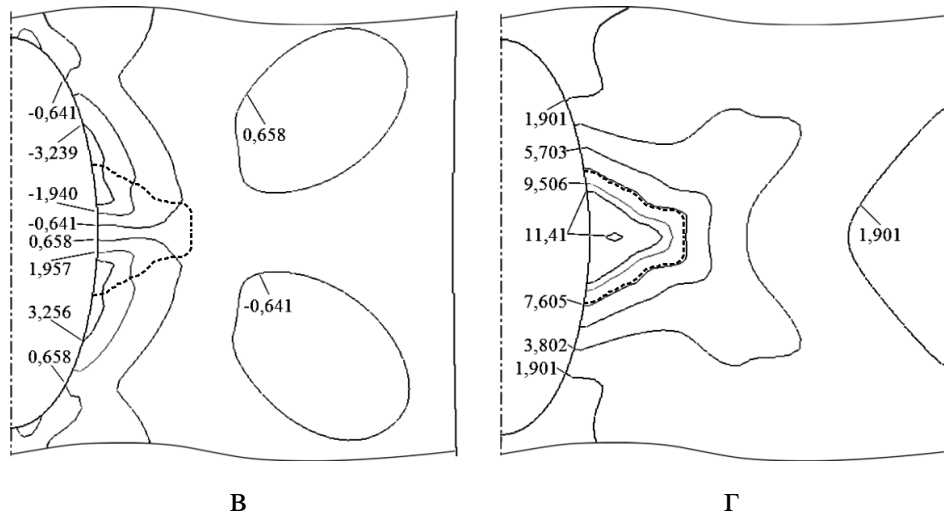


Рисунок 5.3 – Поля деформаций при максимальной нагрузке (точка 4 на рисунке 5.2а): $\varepsilon_{11} \cdot 10^2$ (а), $\varepsilon_{22} \cdot 10^2$ (б), $\varepsilon_{12} \cdot 10^2$ (в), $e_{\text{эКВ}}^p \cdot 10^2$ (г)

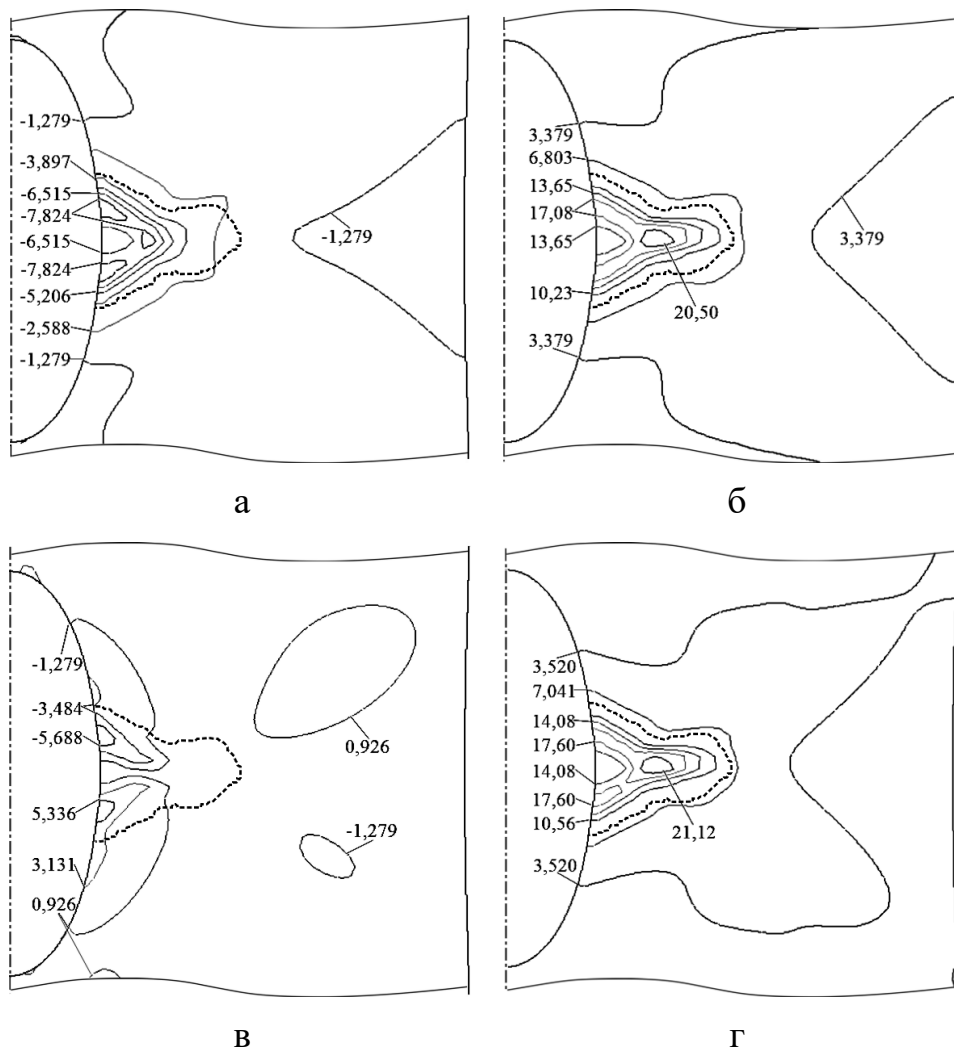


Рисунок 5.4 – Поля деформаций перед потерей устойчивости численного решения (точка 6 на рис. 5.29): $\varepsilon_{11} \cdot 10^2$ (а), $\varepsilon_{22} \cdot 10^2$ (б), $\varepsilon_{12} \cdot 10^2$ (в), $e_{\text{эКВ}}^p \cdot 10^2$ (г)

С целью исследования сходимости решения аналогичной задачи получены на сетках с числом элементов 14164 (28938 узловых неизвестных, характерный линейный размер конечного элемента 0.81 мм) и 56426 (114076 узловых неизвестных, характерный линейный размер конечного элемента 0.41 мм). Расчетные диаграммы нагружения, полученные при использовании сеток с различными числами конечных элементов, представлены на рисунке 5.5а.

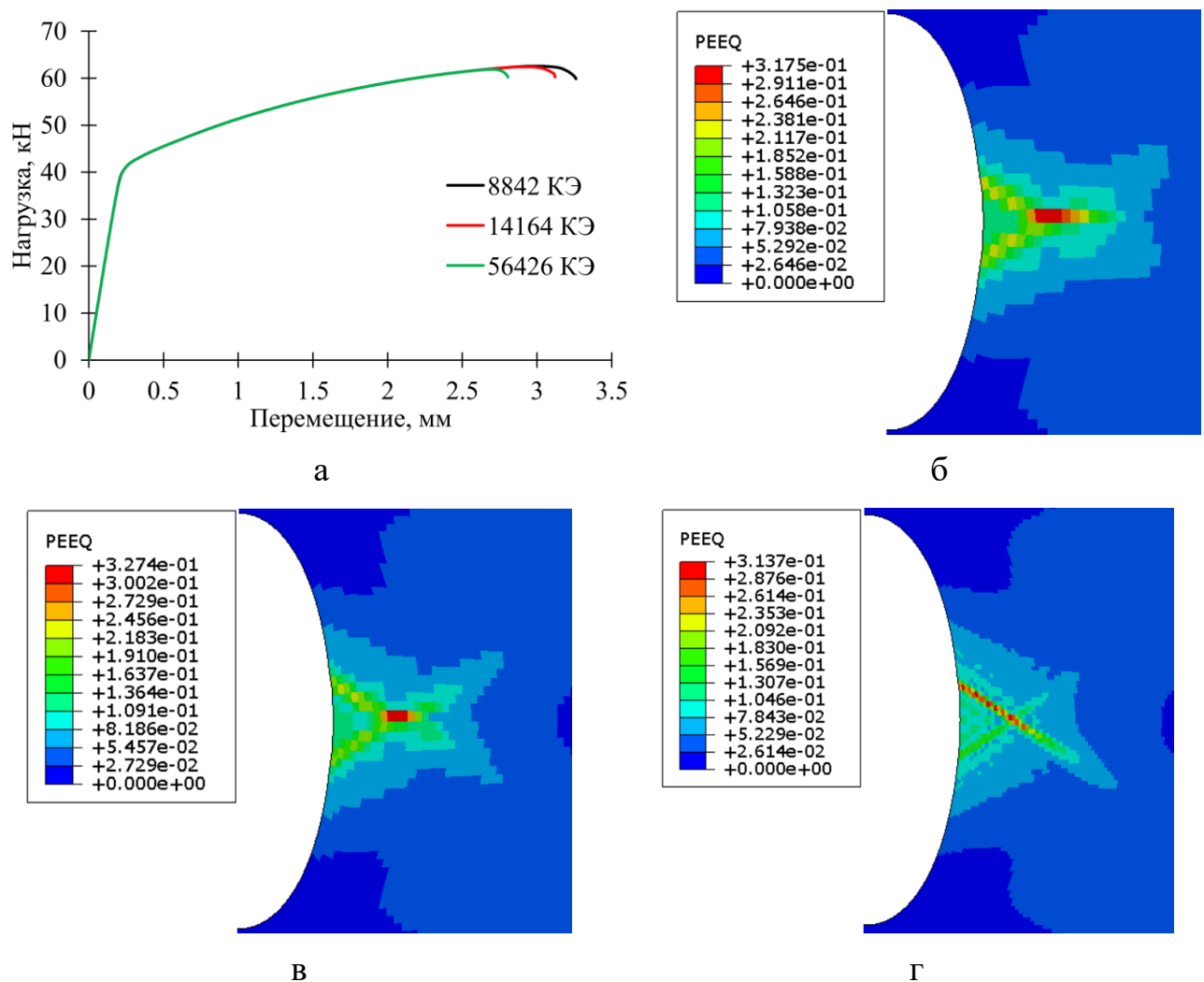


Рисунок 5.5 – Расчетные диаграммы нагружения пластины при различном числе конечных элементов (а), поля деформации $e_{\text{эКВ}}^p$ перед потерей устойчивости численного решения при числе конечных элементов: 8842 (а), 14164 (в), 56426 (г)

Результаты демонстрируют, что уменьшение размера конечного элемента приводит к снижению максимальной нагрузки, выдерживаемой телом, а также к

уменьшению соответствующего перемещения, при котором происходит переход к закритическому деформированию тела. Данная особенность объясняется изменением характерного размера области локализации деформаций, что проиллюстрировано на рисунках 5.5б–г (происходит изменение ширины полосы локализации деформаций, ширина которой соответствует ширине одного конечного элемента). По аналогии с задачами деформирования и разрушения структурно неоднородных тел, где отсутствует сходимость решения при измельчении конечно-элементной сетки, можно предположить, что размер конечного элемента в задачах с разупрочнением материала не может быть сколь угодно малым, а должен соответствовать некоторому размеру области закритического деформирования, для которого характерна используемая диаграмма деформирования материала со стадией разупрочнения. Данный характерный размер является, по сути, материальной константой, определение которой требует разработки расчетно-экспериментальных методов.

Помимо вышеизложенного, особенностью получаемых решений является нарушение сходимости итерационной процедуры. Данная особенность может быть связана, с одной стороны, с невозможностью получения полей перемещений, деформаций и напряжений, удовлетворяющих постановке задачи и заданным граничным условиям (для реализации устойчивого деформирования может потребоваться уменьшение перемещений, приложенных к границе пластины), с другой стороны, с резким изменением угла наклона касательной на диаграмме деформирования материала (при переходе от стадии III к IV). Во втором случае возможным является нарушение условий устойчивости процесса закритического деформирования в отдельном конечном элементе (как некотором структурном элементе тела), для проверки которых требуется определение жесткости окружения конечного элемента. Данный вопрос также требует отдельного изучения.

Таким образом, на основе полученных численных решений подтверждается возможность реализации устойчивого развития зон закритического деформирования материала в твердых телах. Начало процессов разупрочнения

материала не соответствует началу реализации закритического деформирования тела на макроуровне; выявлена возможность прогнозирования качественно иного поведения материала при учете разупрочнения материала с определением дополнительных прочностных и деформационных резервов тел с концентраторами напряжений.

5.2. Влияние геометрии концентратора напряжений на процессы деформирования тел

Изучено влияния геометрии концентратора напряжений на характер эволюции зон разупрочнения материала, а также на величину выявляемых прочностных и деформационных резервов. Получен ряд численных решений задач растяжения пластин с эллиптическими концентраторами напряжений различной геометрии. Геометрия пластины (размеры указаны в миллиметрах) и граничные условия приведены на рисунке 5.6 (в силу симметрии рассмотрена четверть расчетной области); параметр a , соответствующий величине малой полуоси эллипса, варьировался в диапазоне от 2 до 10 мм.

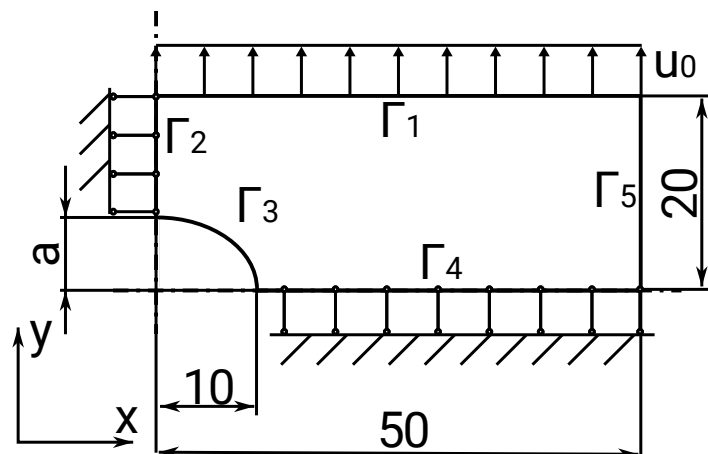


Рисунок 5.6 – Геометрия пластины и граничные условия

Для численного моделирования также используется экспериментальная диаграмма деформирования стали 40Х (рисунок 5.16). Для более полного изучения

эволюции зон разупрочнения в пластинах с концентраторами напряжений осуществлено дополнительное разделение диаграммы деформирования на стадии: I – упругого деформирования; II, III – упрочнения; IV, V, VI – закрического деформирования (рисунок 5.7). Модуль Юнга материала составляет 220.5 ГПа, коэффициент Пуассона 0.26.

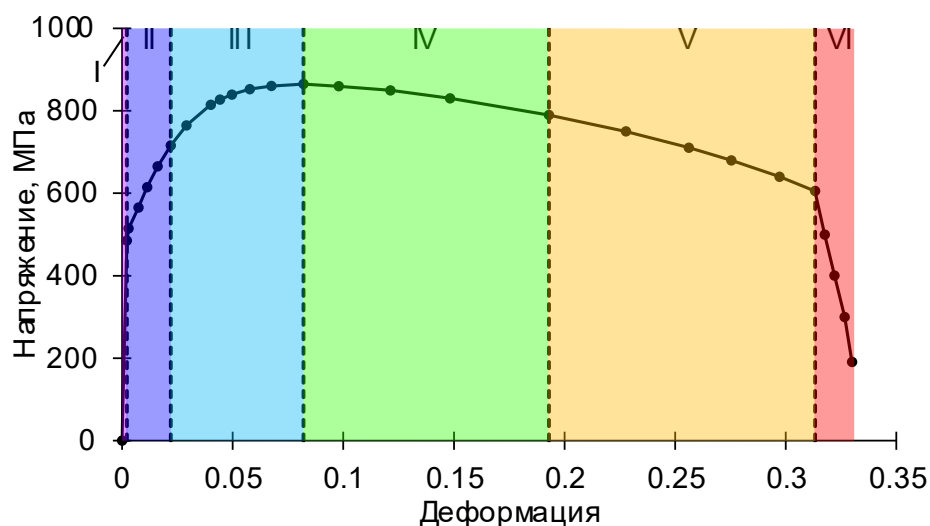


Рисунок 5.7 – Диаграмма деформирования стали 40Х, цветом обозначены различные стадии деформирования материала

Для моделирования использован четырехугольный конечный элемент с линейной аппроксимацией CPS4R, сетка генерировалась автоматически, характерный линейный размер конечного элемента составлял 0.12 мм. Шаг нагружения задавался автоматически, но максимальный шаг перемещения границы был ограничен значением 0.004 мм. Численное решение задач проводилось до потери сходимости итерационной процедуры.

Изучен вид диаграмм нагружения пластины и эволюция зон неупругого деформирования при растяжении пластин с концентраторами напряжений различной геометрии, результаты приведены на рисунке 5.8. Числами на диаграммах нагружения обозначены моменты: 1 – начала реализации пластического упрочнения (стадии II); 2 – начала реализации стадии III; 3 – начала реализации закрического деформирования (стадии IV); 4 и 5 – начала реализации

стадий V и VI, соответственно. Цветами обозначены зоны, соответствующие различным участкам диаграммы деформирования, приведенной на рисунке 5.7.

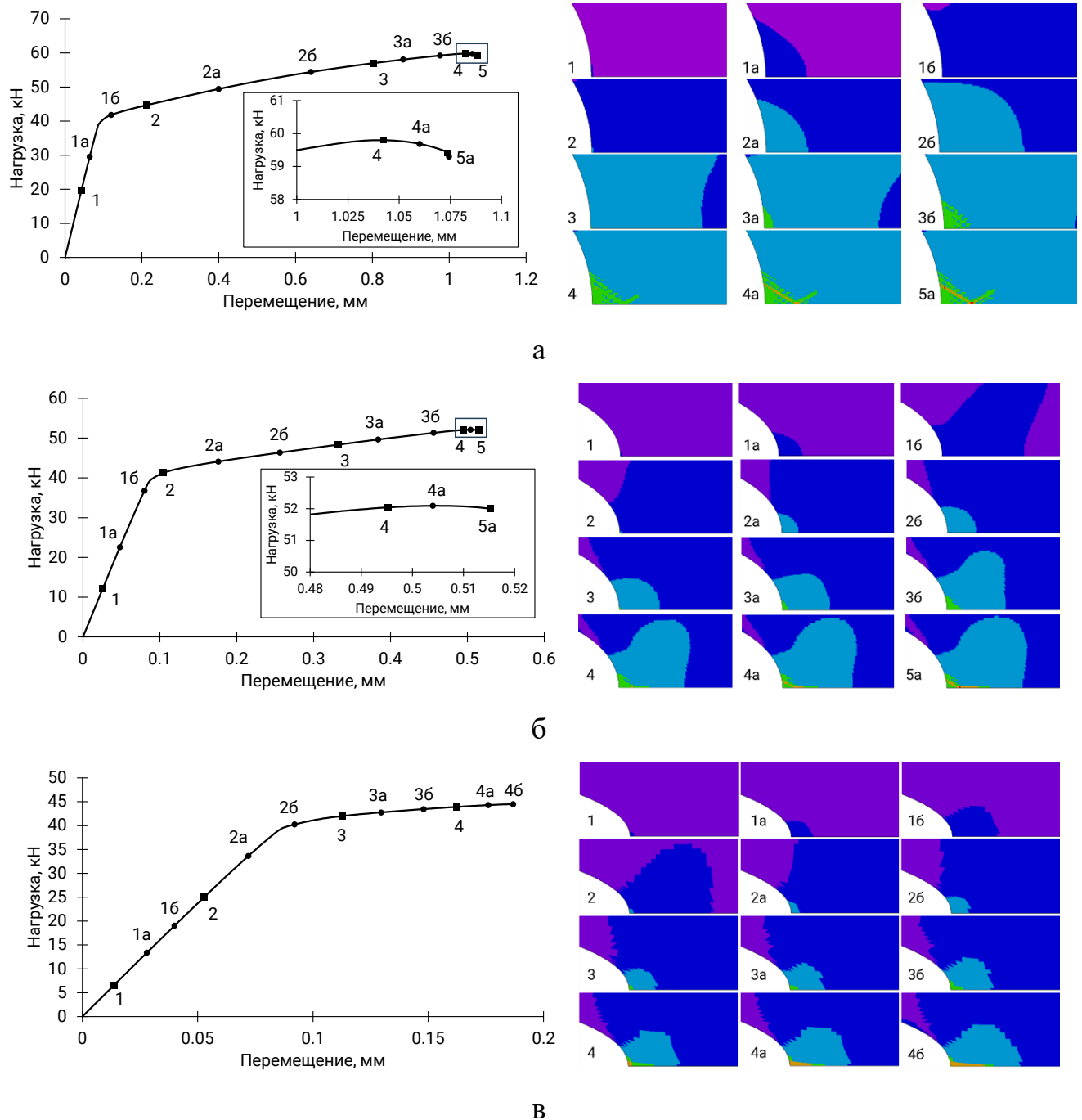


Рисунок 5.8 – Диаграммы нагружения пластин (слева) и эволюция зон пластического деформирования у границы концентратора (справа), значения параметра a : 10 мм (а), 5 мм (б), 2 мм (в)

Результаты демонстрируют возможность выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов при учете стадии разупрочнения материала, что является подтверждением результатов, изложенных в предыдущем параграфе. Выявлено, что для круглого концентратора напряжений ($a = 10$ мм) начальное развитие области разупрочнения происходит в виде зоны с гладким контуром, затем наблюдается локализация деформаций в виде полосы, в которой происходит образование полос локализации (материал находится в стадиях V и VI). Для узкого эллиптического концентратора напряжений ($a = 2$ мм) зона разупрочнения является малой и локализуется в виде полосы, проходящей вдоль горизонтальной оси (т.е. образуется трещиноподобная ослабленная зона). Для эллиптического концентратора напряжений с малой полуосью $a = 5$ мм наблюдается смешанный характер эволюции зон разупрочнения: сначала развивается зона разупрочнения с гладким контуром, затем в ней происходит образование локализации в виде узкой полосы, расположенной под углом к оси нагружения, после чего наблюдается локализация в виде полосы, расположенной вдоль горизонтальной оси. Сделан вывод о существенном влиянии геометрии концентратора напряжений на характер эволюции зон разупрочнения.

Проведен анализ выявляемых при учете стадии разупрочнения материала дополнительных прочностных и деформационных резервов, определяемых по формулам:

$$\kappa = \frac{P_{\text{макс.}} - P_{\text{закр.}}}{P_{\text{закр.}}}; \lambda = \frac{u_{\text{макс.}} - u_{\text{закр.}}}{u_{\text{закр.}}}. \quad (5.1)$$

Здесь κ и λ – прочностной и деформационный резервы соответственно; $P_{\text{макс.}}$, $u_{\text{макс.}}$ – максимальная нагрузка, выдерживаемая телом, и соответствующее перемещение; $P_{\text{закр.}}$ и $u_{\text{закр.}}$ – нагрузка и перемещение, соответствующие началу реализации стадии разупрочнения материала (достижению предела прочности материала).

На рисунке 5.9 приведены графики, отражающие зависимости выявленных при учете закритической стадии деформирования резервов от параметра a . Результаты демонстрируют, что для рассматриваемых концентраторов и условий

нагружения прочностной резерв составляет 4–8%, однако деформационный резерв составляет 30–70%. Отмечена немонотонность зависимости прочностного резерва от величины малой полуоси эллиптического концентратора, связанная со сменой характера эволюции зон закритического деформирования материала.

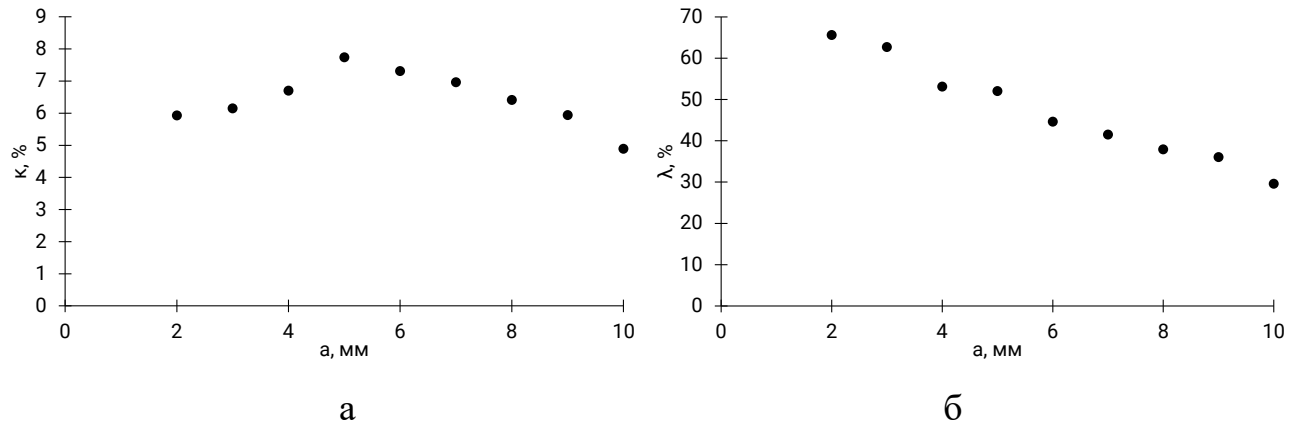
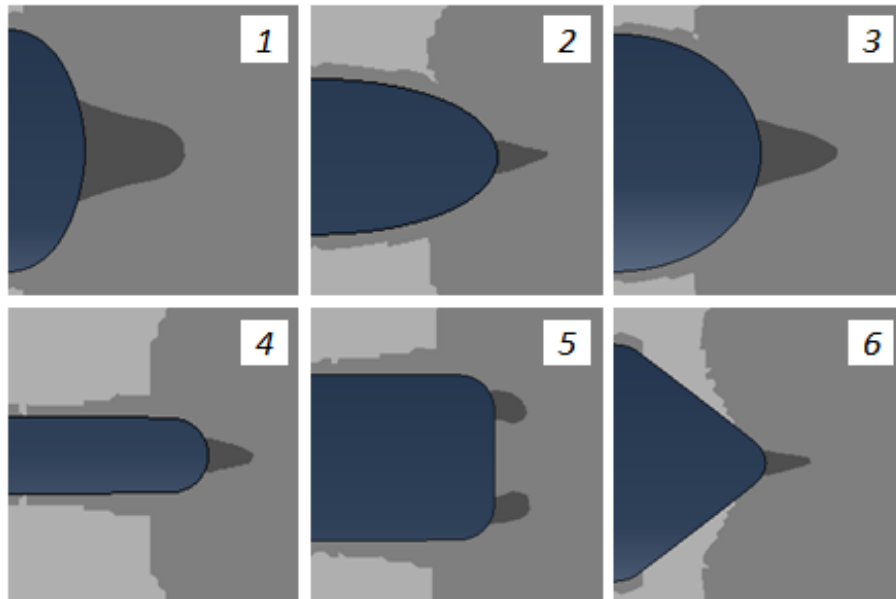


Рисунок 5.9 – Зависимости прочностного (а) и деформационного (б) резервов от величины параметра a

Рассмотрен вид зоны закритического деформирования в момент достижения максимальной нагрузки при различных формах концентратора напряжений (рисунок 5.10): 1 – эллиптического, вытянутого вдоль оси нагружения; 2 – эллиптического, вытянутого поперек оси нагружения; 3 – круглого; 4 – узкого прямоугольного со скруглением; 5 – широкого прямоугольного со скруглением; 6 – ромбовидного со скруглением. Выявленные для рассмотренных геометрий прочностные и деформационные резервы приведены на рисунке 5.10.



а

№	Прочн. резерв, %	Деформ. резерв, %
1	4,8	50,0
2	10,8	75,8
3	7,6	59,4
4	12,1	92,3
5	10,7	75,3
6	11,0	85,0

б

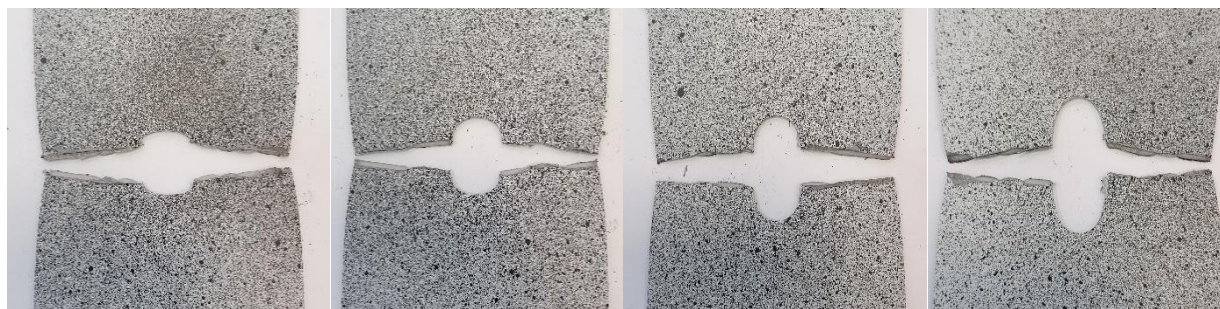
Рисунок 5.10 – Вид зон закритического деформирования (темно-серый цвет) для различных форм концентраторов напряжений (а); выявленные путем учета разупрочнения дополнительные прочностные и деформационные резервы (б)

На основе полученных решений сделан вывод, что повышение размера области закритического деформирования (сопутствующее снижению радиуса кривизны у концентратора), как правило, приводит к падению выявляемых дополнительных прочностных и деформационных резервов. Соответственно, учет закритического деформирования материала в расчетах конструкций является наиболее важным при наличии острых вырезов, рядом с которыми возможным является интенсивное деформирование. Данная особенность также подтверждает целесообразность учета разупрочнения материала при решении задач механики тел с трещинами (в частности, использования модели когезионной зоны).

Вышеизложенные результаты демонстрируют, что для концентраторов напряжений различной геометрии возможным является равновесное развитие зон закритического деформирования. Во всех случаях учет разупрочнения материала позволил прогнозировать наличие дополнительных небольших прочностных и значительных деформационных резервов конструкций. Их величина зависит от геометрии концентратора напряжений, и не коррелируют с размером области разупрочнения материала. На основе вышеизложенного можно сделать вывод о целесообразности учета закритического деформирования материала при прогнозировании механического поведения конструкций для повышения их безопасности.

5.3. Сопоставление результатов численного моделирования с данными натурных экспериментов

С целью установления соответствия результатов численного прогнозирования процессов деформирования тел сложной геометрии данным натурных экспериментов проведены испытания на растяжение пластин из стали 20 с эллиптическими концентраторами напряжений различной геометрии (рисунок 5.11): толщина образцов составляла 3 мм, ширина в рабочей части 90 мм, ширина концентратора 18 мм, высота концентратора варьировалась от 6 до 24 мм с шагом 6 мм. Эксперименты проведены на электромеханической испытательной системе Instron 5989 (максимальная нагрузка – до 600 кН) при скорости перемещения траверсы 10 мм/мин. С помощью бесконтактной оптической видеосистемы VIC-3D и метода корреляции цифровых изображений проведено определение полей перемещений и деформаций на поверхности образцов (результаты получены В.А. Мельниковой).



б

Рисунок 5.12 – Экспериментальные диаграммы нагружения (а) и фото образцов после испытаний, слева направо: высота эллиптического концентратора 6, 12, 18 и 24 мм (б)

Для построения диаграммы деформирования материала проведены испытания на растяжение образца-полоски из стали 20. С использованием инструмента «виртуальный экстензометр» получены значения продольной и поперечной деформаций в области шейки, с помощью которых построены экспериментальные диаграммы деформирования стали 20. Модуль Юнга материала составил 200 ГПа, коэффициент Пуассона 0.27, диаграмма деформирования материала в виде связи истинных напряжений с истинными деформациями приведена на рисунке 5.13 (точки на диаграмме далее закладывались в расчет).

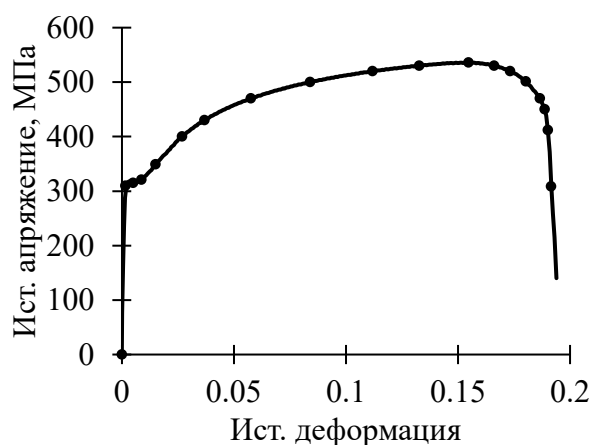


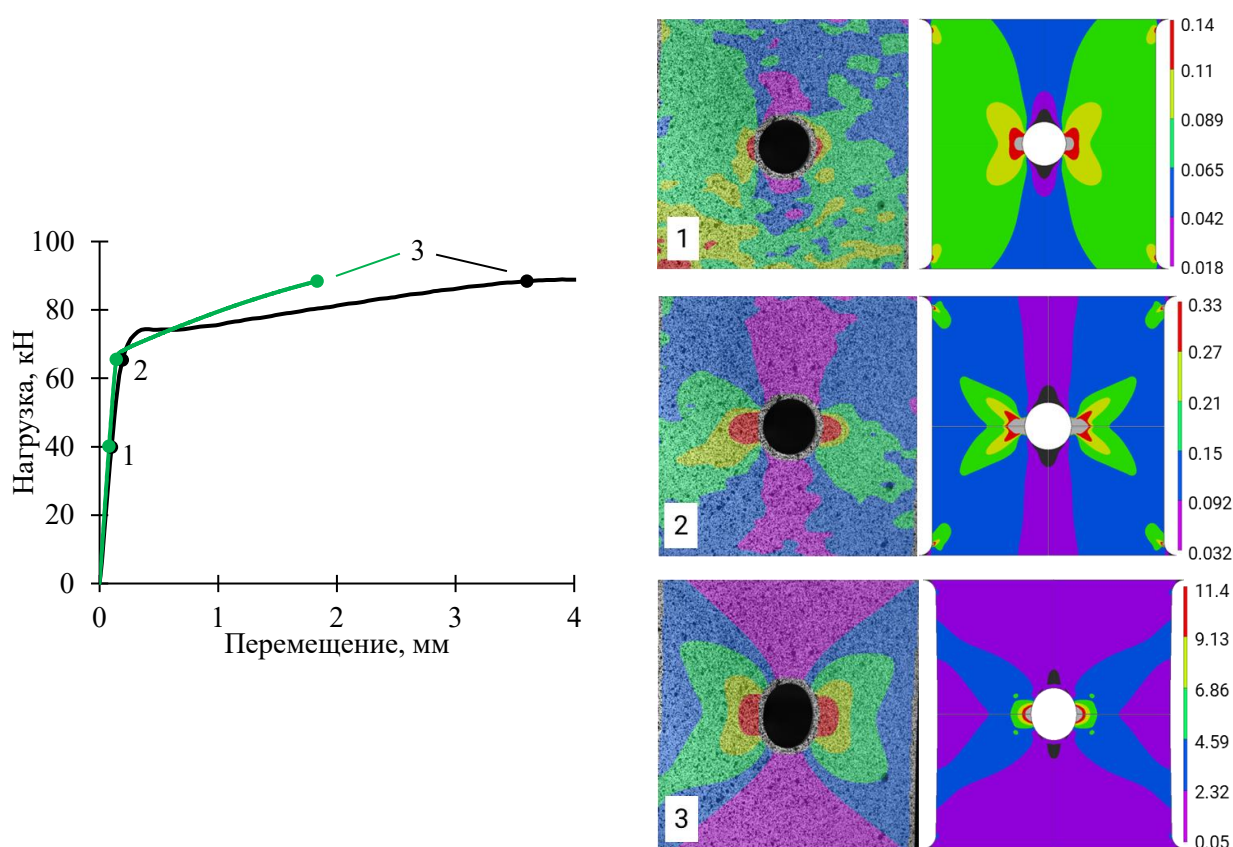
Рисунок 5.13 – Диаграмма деформирования стали 20

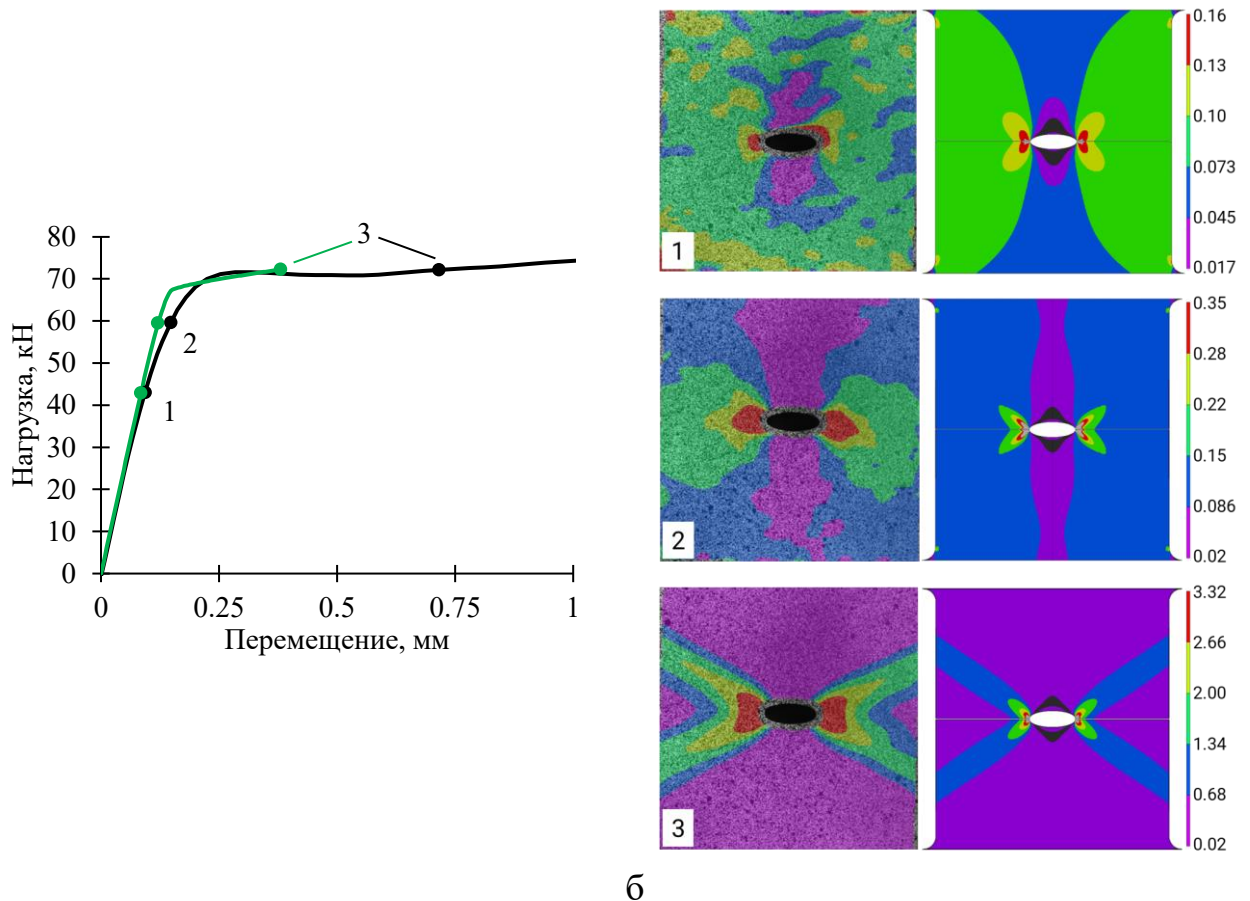
Проведено сопоставление результатов прогнозирования процессов деформирования пластин с данными натурных экспериментов. Поскольку в рассматриваемых испытаниях жесткость конструктивно-подобных элементов сопоставима с жесткостью нагружающей системы, для корректного сравнения диаграмм нагружения произведен пересчет перемещений границы образца:

$$u = u_0 - \frac{P}{R}, \quad (5.2)$$

где u – реальное перемещение границы образца; u_0 – перемещение, определяемое по встроенному датчику испытательной системы; P – осевая нагрузка; R – жесткость нагружающей системы. Подбор величины R был осуществлен таким образом, чтобы обеспечивалось соответствие экспериментальных и расчетных диаграмм нагружения на упругой стадии. Значение R составило 215 кН/мм.

На рисунке 5.14 представлены совмещенные диаграммы нагружения, а также расчетные и экспериментальные поля продольных деформаций ε_{yy} (направление оси y совпадает с направлением оси нагружения) для состояний с равной нагрузкой.





б

Рисунок 5.14 – Сопоставление численного моделирования и натурных экспериментов, значения параметра a : 18 мм (а), 6 мм (б). Черный и зеленый графики – экспериментальная и расчетная диаграммы нагружения; поля деформаций ε_{yy} (%): слева – экспериментальные, справа – расчетные

Отмечено хорошее качественное и количественное соответствие расчетной и экспериментальной диаграмм нагружения, а также хорошее соответствие полей продольных деформаций на поверхности тел. Возникающие различия объясняются, во-первых, недостаточностью подбора диаграммы деформирования материала по данным стандартных испытаний в связи с реализацией неоднородного сложного напряженного состояния; во-вторых, возможной необходимостью использования другой модели механического поведения стали 20. Для решения данных проблем необходимой является разработка и модернизация расчетно-экспериментальных методов построения полных диаграмм деформирования материалов. Кроме этого, необходимым является учет

возможности устойчивого распространения трещин в твердом теле (появления областей с полностью потерявшим несущую способность материалом).

Сопоставление результатов вычислительных и натурных экспериментов подтверждает рациональность проведения прогнозирования процессов деформирования тел сложной геометрии с учетом закритической стадии деформирования материала.

Выводы по главе 5

На основе анализа результатов численного моделирования процессов деформирования тел с концентраторами напряжений при учете закритической стадии деформирования материала сделаны следующие выводы.

1. В телах с концентраторами напряжений возможным является устойчивое развитие зон закритического деформирования материала. Момент появления зон закритического деформирования не соответствует началу реализации разупрочнения тела на макроуровне, соответственно, при учете разупрочнения материала могут быть выявлены дополнительные прочностные и деформационные резервы конструкций.

2. Геометрия концентратора напряжений оказывает существенное влияние на характер эволюции зон разупрочнения и величину выявляемых прочностных и деформационных резервов. Обнаружена немонотонность зависимости прочностного резерва от радиуса кривизны концентратора, связанная с изменением характера развития зон разупрочнения.

3. Результаты численного моделирования процессов деформирования с учетом разупрочнения материала качественно соответствуют данным натурных экспериментов как по диаграммам нагружения, так и по полям деформаций на поверхности тел, что подтверждает целесообразность использования моделей закритического деформирования при проведении прочностного анализа конструкций для уточнения их механического поведения в аварийных ситуациях и повышения техногенной безопасности.

ГЛАВА 6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ КОГЕЗИОННОЙ ЗОНЫ

Данная глава посвящена численному моделированию процессов равновесного роста трещин с использованием модели когезионной зоны, т.е. при учете разупрочнения материала у вершины трещины.

Получены новые численные решения задач деформирования и разрушения тела с трещиной в рамках модели когезионной зоны. Тело представлено в виде совокупности двух упругих частей, соединенных через промежуточный слой (имитируемый когезионными элементами), отсутствие части которого имитирует начальную трещину. Рассмотрены двухзвенные кусочно-линейные аппроксимации полных диаграмм деформирования материала промежуточного слоя. Изучена эволюция зоны разупрочнения по мере равновесного роста трещины. Исследовано влияние параметров диаграммы деформирования материала промежуточного слоя на поведение тела на макроуровне. Изучено влияние нагружающих систем на устойчивость процесса равновесного роста трещины.

Результаты, представленные в данной главе, опубликованы в работах диссертанта [22, 74, 81, 83, 86, 87, 89].

6.1. Моделирование процессов равновесного роста трещин с использованием модели когезионной зоны

В условиях плоской деформации рассмотрены модельные задачи деформирования и разрушения тела, состоящего из двух прямоугольных частей (длиной $c = 100$ мм и шириной $a = 2$ мм), соединенных через тонкий укороченный промежуточный слой (длиной $c - l_0$ и шириной $b = 0.001$ мм), отсутствие части которого имитирует начальную трещину длины l_0 (25 мм). Декартова система координат связана с вершиной начальной трещины. Геометрия тела приведена на рисунке 6.1 (соответствует образцу ГОСТ Р 56815-2015 [43]).

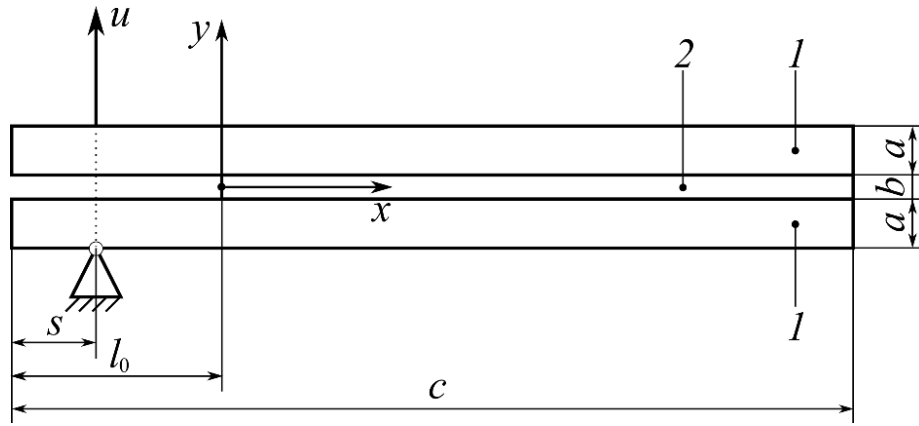


Рисунок 6.1 – Геометрия тела и граничные условия, 1 – упругие части, 2 – промежуточный слой, в котором прорастает трещина

Граничные условия: шарнирно закреплена точка на расстоянии $s = 10$ мм от левого края нижней поверхности; к аналогичной точке на верхней поверхности прикладывается перемещение u вдоль оси y , перемещение вдоль оси x отсутствует. Остальные поверхности являются свободными, массовые силы не учитываются. По поверхностям, соединяющим верхнюю и нижнюю части тела с промежуточным слоем, задаются условия идеального контакта. Между верхней и нижней частью тела задаются условия жесткого контакта без трения (во избежание проникновения данных частей друг в друга в процессе решения задачи).

Материал верхней и нижней частей образца является однородным, упругим и ортотропным, механические характеристики: $E_{xx} = E_{zz} = 56$ ГПа; $E_{yy} = 22$ ГПа; $\nu_{xy} = \nu_{yz} = 0.30$; $\nu_{xz} = 0.04$; $G_{xy} = G_{yz} = 3$ ГПа; $G_{xz} = 17$ ГПа. Материал промежуточного слоя деформируется согласно модели когезионной зоны (2.20). В силу симметрии данной задачи в промежуточном слое ненулевой будет являться только компонента тензора напряжений σ_{yy} и деформаций ε_{yy} .

В качестве иллюстрации рассмотрена двухзвенная диаграмма деформирования материала промежуточного слоя (рисунок 6.2), модуль Юнга материала выбран равным 4 ГПа, модуль сдвига – 1.5 ГПа, предел прочности при растяжении $\sigma_B = 10$ МПа, удельная энергия разрушения (площадь под диаграммой деформирования материала при растяжении) – 137500 Дж/м³, что соответствует модулю разупрочнения материала (модулю тангенса угла наклона касательной на

стадии разупрочнения) $D = 400$ МПа. Зависимость $\omega_{E_I}(\varepsilon_{yy})$, обеспечивающая реализацию указанной диаграммы деформирования, имеет вид:

$$\omega_{E_I}(\varepsilon_{yy}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_{yy} \leq \frac{\sigma_B}{E}, \\ \left(1 + \frac{D}{E}\right) \left(1 - \frac{\sigma_B}{E} \frac{1}{\varepsilon_{yy}}\right), & \frac{\sigma_B}{E} < \varepsilon_{yy} \leq \frac{\sigma_B}{E} + \frac{\sigma_B}{D}, \\ 1, & \frac{\sigma_B}{E} + \frac{\sigma_B}{D} < \varepsilon_{yy}. \end{cases} \quad (6.1)$$

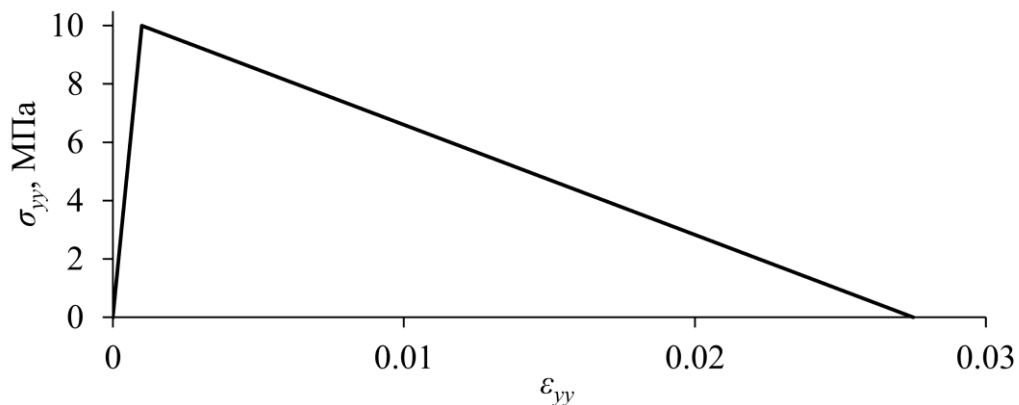


Рисунок 6.2 – Модельная диаграмма деформирования материала промежуточного слоя

Численное решение данной задачи осуществлялось в программном комплексе Abaqus CAE. Дискретизация расчетной области осуществлена следующим образом: для упругих частей построена сетка из четырехугольных конечных элементов с линейной аппроксимацией поля перемещений, применен конечный элемент типа CPE4R, длина и ширина элемента составляли 0.1 мм; для промежуточного слоя использован специальный когезионный элемент COH2D4 с длиной 0.1 мм (рисунок 6.3). Применение данного элемента подразумевает корректировку упругих свойств, аналогичную методу переменных параметров упругости (материал при этом является упруго-хрупким). Нагружение тела осуществлялось пошагово до достижения перемещения $u = 10$ мм либо до потери сходимости итерационной процедуры. Шаг перемещения составлял 0.02 мм.

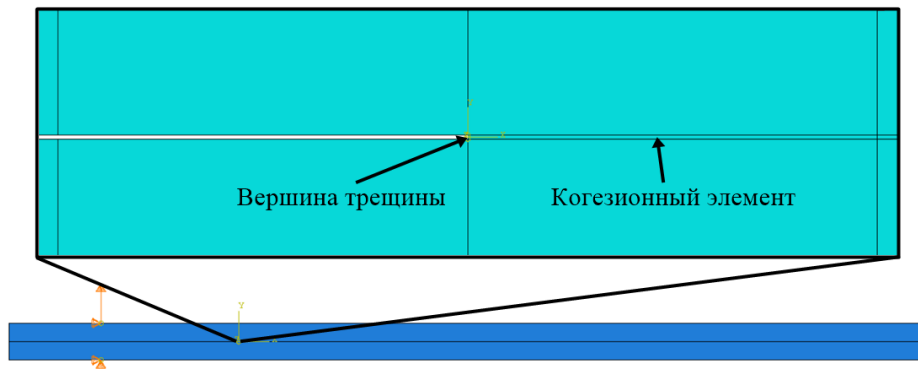


Рисунок 6.3 – Часть конечно-элементной сетки у вершины трещины

Анализ поведения тела проведен по эпюре нормальных напряжений σ_{yy} в промежуточном слое (рисунок 6.4). На эпюре можно выделить несколько характерных точек: 1 – точка, где полностью реализована закритическая стадия деформирования материала; 2 – точка, соответствующая частичной реализации закритической стадии; 3 – точка, соответствующая пределу прочности материала; 4 – точка в упругой области растяжения; 5 – точка в недеформированном состоянии, являющаяся переходной между областью растяжения и областью сжатия; 6 – точка в упругой области сжатия. Из эпюры видно, каким образом реализуется полная диаграмма деформирования вблизи вершины трещины, видны области (слева направо): с разрушенным материалом, реализации закритической стадии, упругого растяжения, упругого сжатия.

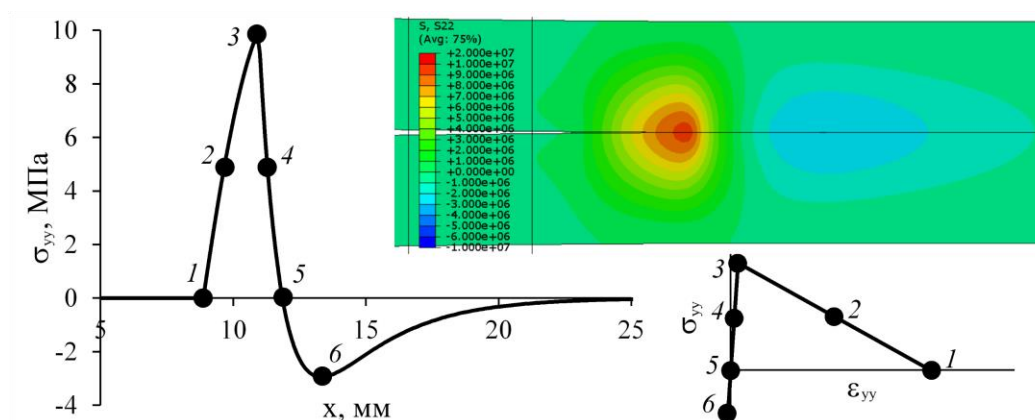
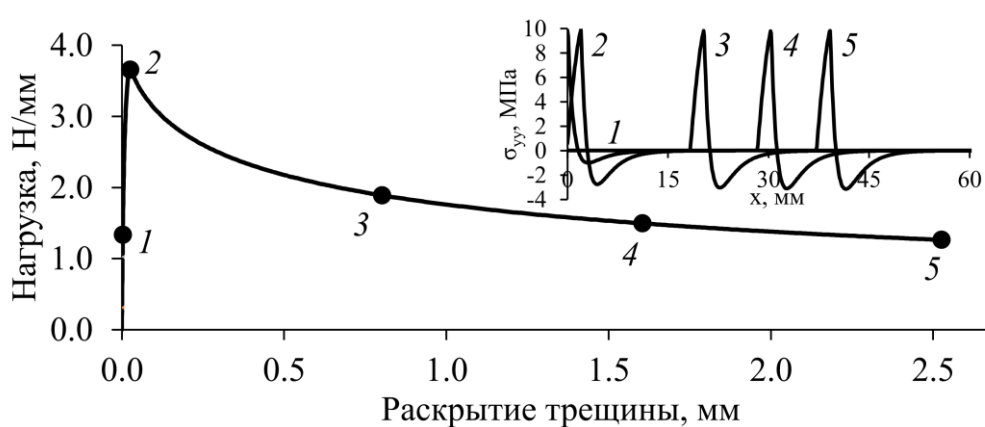
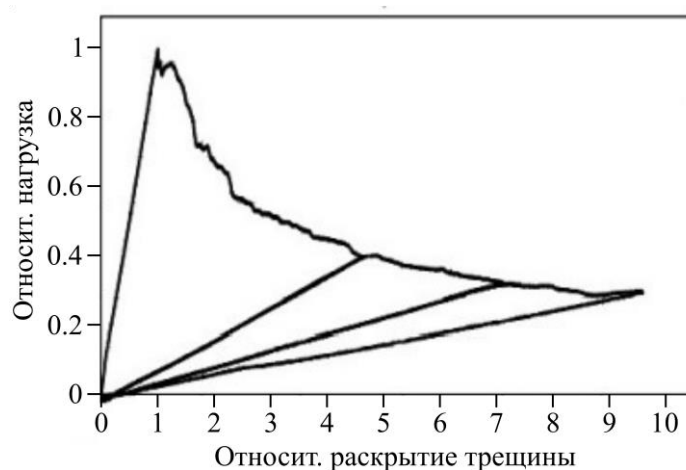


Рисунок 6.4 – Эпюра и поле напряжений σ_{yy} в промежуточном слое, точки 1–6 на эпюре соответствуют точкам на диаграмме деформирования материала промежуточного слоя

Расчетные диаграммы нагружения строятся в координатах «нагрузка» – «раскрытие трещины», которое определяется как разность перемещений точек тела в вершине начальной трещины. Типовая диаграмма нагружения и вид эпюр напряжений в промежуточном слое для некоторых состояний приведены на рисунке 6.5. На диаграмме обозначены: 1 – момент, где происходит образование зоны закритического деформирования материала; 2 – момент, где происходит первое удаление конечного элемента (начало роста трещины); 3–5 – состояния по мере роста трещины (происходит постепенное увеличение области сжатия).



а



б

Рисунок 6.5 – Расчетная диаграмма нагружения и эволюция эпюр напряжений в промежуточном слое (а), экспериментальная диаграмма нагружения композитного образца на разрыв между слоях (в относительных единицах) при росте трещины [69] (б)

Внешняя нагрузка способна значительно увеличиваться после начала реализации разупрочнения материала, однако после начала роста трещины происходит монотонное снижение нагрузки. Отмечено качественное соответствие расчетной диаграммы экспериментальным, получаемым путем испытаний композитных образцов на разрыв между слоев [69].

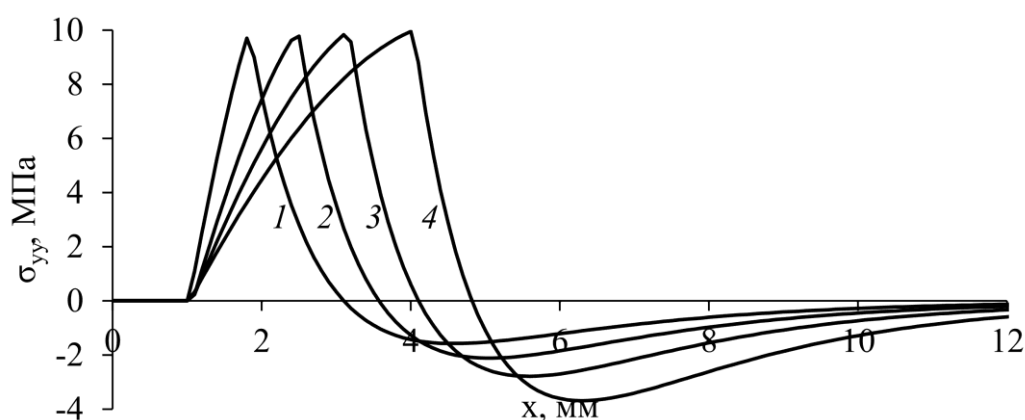
Таким образом, подтверждается возможность реализации закритической стадии деформирования материала у вершины трещины. Качественное соответствие результатов численного моделирования данным экспериментов подтверждает целесообразность применения модели когезионной зоны, учитывающей реализацию стадии разупрочнения материала.

6.2. Влияние поведения материала на стадии разупрочнения на процесс равновесного роста трещины

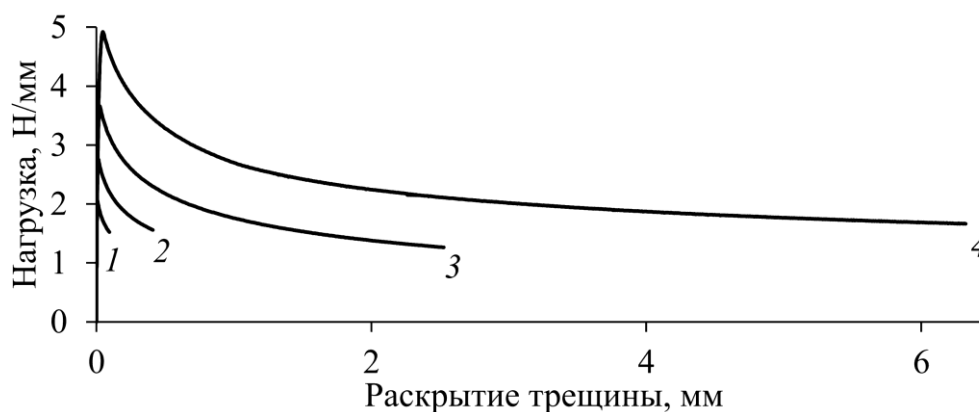
Рассмотрен процесс разрушения тела при использовании аналогичных двухзвенных кусочно-линейных диаграмм деформирования материала промежуточного слоя с различными модулями разупрочнения. Модуль Юнга во всех случаях составлял 4 ГПа, модуль сдвига – 1.5 ГПа, предел прочности при растяжении – 10 МПа. Модули разупрочнения выбирались в диапазоне от 100 до 4000 МПа, что соответствует удельной энергии разрушения (площади под диаграммой деформирования) от 25000 до 512500 Дж/м³.

Анализ эпюр нормальных напряжений σ_{yy} в промежуточном слое (рисунок 6.6а) демонстрирует, что повышение модуля разупрочнения (снижение удельной энергии разрушения) приводит к изменению распределения напряжений вблизи вершины трещины, качественно соответствующего виду диаграмм деформирования. Помимо этого, уменьшение значения D приводит к уменьшению области упругого сжатия. Расчетные диаграммы нагружения для различных модулей разупрочнения представлены на рисунке 6.6б. Результаты демонстрируют, что снижение модуля разупрочнения приводит к существенному увеличению несущей способности тела (что объясняется повышением площади

под эпюрой напряжений, соответствующей равнодействующей внешнего усилия), а также способствует увеличению максимальной величины раскрытия трещины.



а



б

Рисунок 6.6 – Эпюры напряжений σ_{yy} в промежуточном слое для различных значений модуля разупрочнения (а) и расчетные диаграммы нагружения (б), графики 1–4 соответствуют $D = 1800$ МПа, 800 МПа, 400 МПа, 200 МПа

Зависимости максимальной нагрузки, выдерживаемой конструкцией, максимальных величин раскрытия и длины трещины от величины модуля разупрочнения представлены на рисунке 6.7. Рост нагрузки при снижении величины параметра D объясняется большим размером участка закритического деформирования (при равной деформации несущая способность увеличивается), а также повышением величины удельной энергии разрушения. Склонность к росту максимальной величины раскрытия трещины при уменьшении модуля спада

связана с увеличением податливости системы. Выявлено, что в некотором диапазоне существует обратная пропорциональность между максимальной длиной трещины и модулем спада, т.е. чем более податливым является промежуточный слой, тем больше длина пророщенной трещины. После достижения некоторого значения модуля спада максимальная длина трещины изменяется слабо (достигается некоторое предельное для конструкции состояние). Отмечено, что полученные зависимости не являются монотонными. Это может быть связано как с влиянием размера конечно-элементной сетки и величины шага нагружения, так и с отсутствием дополнительного условия устойчивости процесса деформирования, учитывающего свойства нагружающей системы.

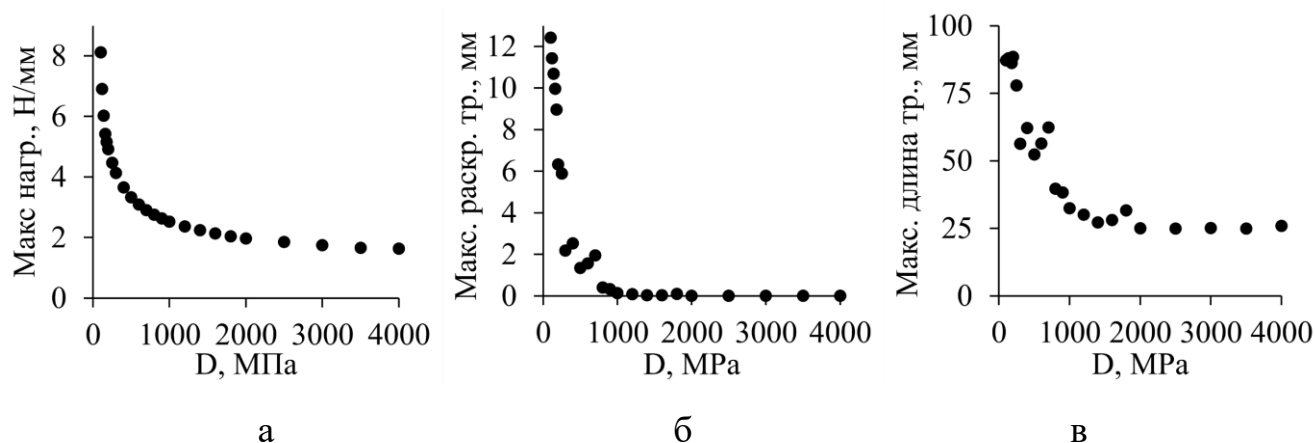


Рисунок 6.7 – Зависимости максимальных нагрузки (а), раскрытия трещины (б) и длины трещины (в) от модуля разупрочнения материала

С целью дополнения полученных результатов и выявленных закономерностей проведено моделирование процессов равновесного роста трещин при использовании двухзвенных аппроксимаций диаграмм деформирования материала промежуточного слоя с различными соотношениями между модулем разупрочнения и модулем Юнга материала. Рассмотренные диаграммы деформирования материала приведены на рисунке 6.8. Значения модуля Юнга E материала промежуточного слоя были выбраны равными 4000, 3000, 2000, 1500, 1250, 1000, 875, 800 МПа, предел прочности – 10 МПа, значения модуля

разупрочнения D подбирались таким образом, чтобы удельная энергия разрушения составила 75000 Дж/м^3 (позволяет во всех случаях обеспечить полную потерю несущей способности материала при одинаковой деформации).

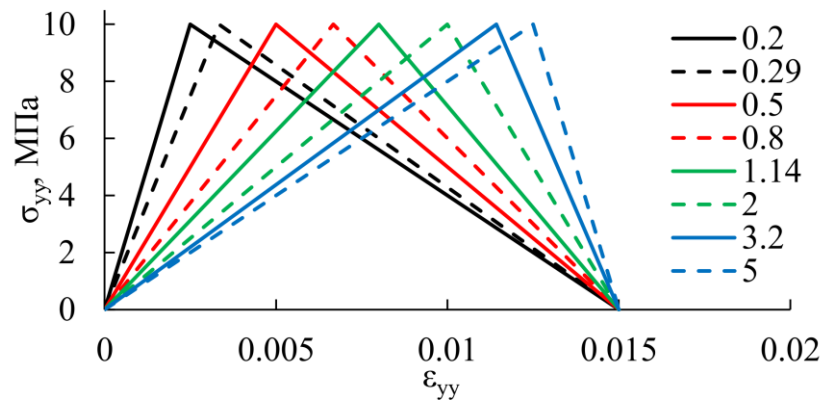


Рисунок 6.8 – Диаграммы деформирования материала промежуточного слоя, число на легенде соответствует величине D/E

На рисунке 6.9а представлены эпюры нормальных напряжений в промежуточном слое после начала процесса равновесного роста трещины. Результаты демонстрируют подобие эпюр напряжений и диаграмм деформирования материала, закладываемых в расчет, что в совокупности с представленными на рисунке 6.6а результатами подтверждает гипотезу С.Д. Волкова о подобии характера распределения напряжений у вершины трещины и полных диаграмм деформирования материала. Отмечено наличие обширной области закритического деформирования (когезионной зоны), а также рост размера данной зоны при уменьшении параметра D/E , сопровождающийся увеличением максимальных сжимающих напряжений (по модулю) в области сжатия.

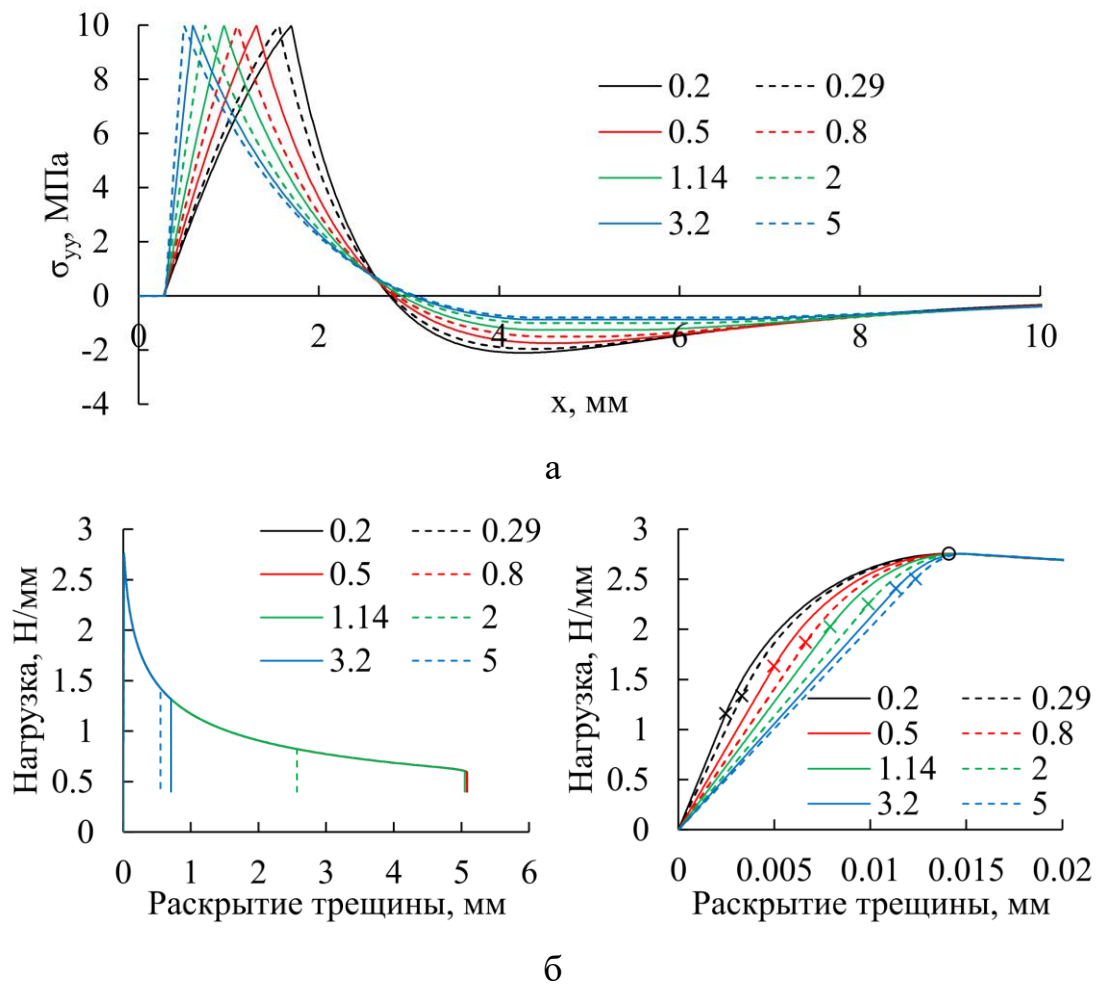


Рисунок 6.9 – Эпюры нормальных напряжений в промежуточном слое (а) и расчетные диаграммы нагружения (б), число на легенде соответствует D/E

Построены расчетные диаграммы нагружения (в виде зависимости нагрузки на единицу толщины тела от раскрытия трещины), представленные на рисунке 6.9б. Для наглядности на графиках точки, в которых происходила потеря сходимости численных процедур, обозначены вертикальными участками падения нагрузки до значения 0.4 Н/мм. Результаты демонстрируют, что до момента достижения максимальной нагрузки (на графике обозначена окружностью), соответствующего началу процесса равновесного роста трещины, с ростом величины D/E точка начала реализации закритического деформирования материала (обозначена на графике крестом) смещается вправо и вверх. Однако диаграмма деформирования материала не влияет на вид диаграммы нагружения после начала процесса роста трещины. Отмечено уменьшение раскрытия трещины,

при котором происходит потеря сходимости численного решения, с ростом величины D/E .

Построены зависимости длины пророщенной трещины и максимального раскрытия трещины от параметра D/E (рисунок 6.10). Результаты демонстрируют существование диапазона соотношений модуля разупрочнения материала к модулю упругости, в котором практически не происходит изменения максимального раскрытия трещины и длины равновесно пророщенной трещины. При повышении величины модуля разупрочнения происходит постепенное снижение данных величин. Отмечено, что данное снижение может быть связано с особенностями организации численных процедур, соответственно, подтверждается необходимость дополнительного изучения условий устойчивости закритического деформирования материала у вершины трещины.

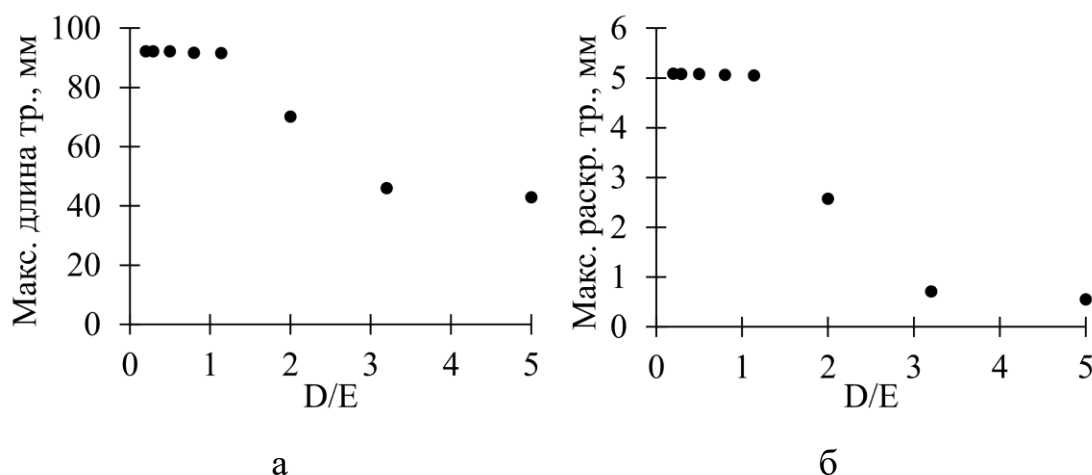


Рисунок 6.10 – Зависимости максимальной длины трещины (а) и раскрытия трещины (б) от соотношения между модулем разупрочнения и модулем упругости

На основе полученных результатов можно сделать вывод о справедливости гипотезы С.Д. Волкова о подобии характера распределения напряжений у вершины трещины и полных диаграмм деформирования материалов. Вызывают вопросы условия перехода от равновесного к динамическому разрушению конструкции, связанные с определением устойчивости процессов закритического деформирования.

6.3. Влияние жесткости нагружающих систем на устойчивость процесса разрушения

С целью изучения влияния жесткости нагружающей системы на устойчивость процессов равновесного роста трещин рассмотрена схема нагружения рассматриваемого тела через дополнительный упругий элемент жесткости R (рисунок 6.11). Подобная схема была предложена в работе [179].

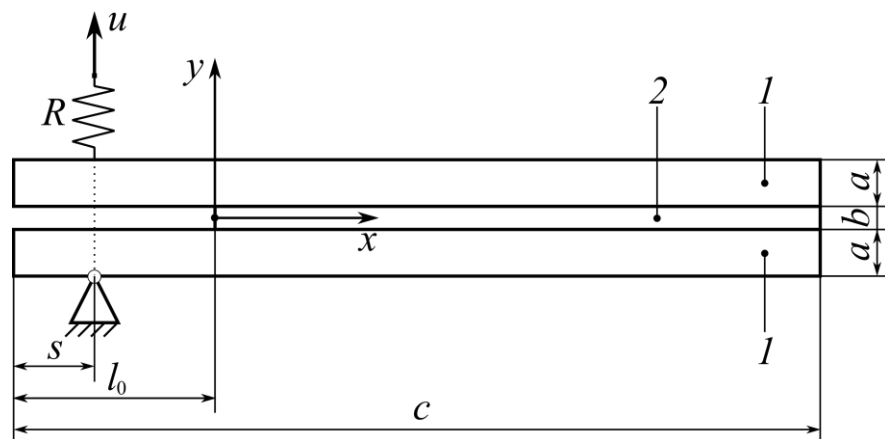


Рисунок 6.11 – Схема нагружения тела через дополнительный упругий элемент с жесткостью R

Условием реализации устойчивого процесса деформирования и разрушения тела является достаточная жесткость нагружающей системы (упругого элемента). Необходимо отметить, что наибольший угол наклона на закритической стадии диаграммы нагружения тела (участок, для реализации которого необходима наибольшая жесткость нагружающей системы) соответствует началу процесса роста трещины. Соответственно, можно сделать вывод, что в случае обеспечения достаточной жесткости R равновесный процесс роста трещины будет реализован до потери устойчивости численного решения, как и при жестком нагружении, в противном случае будет происходить потеря устойчивости (как и в случае мягкого нагружения).

Для диаграммы нагружения, представленной на рисунке 6.5а, максимальный тангенс угла наклона касательной (по модулю) составляет $\approx 3.4 \text{ Н/мм}^2$ (жесткость

упругого элемента на единицу толщины тела). Соответственно, при жесткости упругого элемента R менее данной величины равновесный рост трещины для рассматриваемой задачи неосуществим, в противном случае равновесный рост трещины осуществляется аналогично случаю жесткого нагружения.

В результате численного моделирования процесса разрушения по представленной схеме установлено, что при $R = 3 \text{ Н/мм}^2$ расчет действительно завершается в точке с максимальной нагрузкой, тогда как при $R = 4 \text{ Н/мм}^2$ расчет проходит полностью. Полученные результаты подтверждают вышеизложенное заключение о характере влияния нагружающих систем в рассмотренных задачах.

Проанализировано влияние длины начальной трещины на вид диаграмм нагружения рассматриваемого тела, параметр l_0 варьировался в диапазоне от 10 до 40 мм. Результаты представлены на рисунке 6.12. Обнаружено существование единой зависимости нагрузки от перемещения при равновесном росте трещины. Данная диаграмма зависимости нагрузки от перемещения является геометрическим местом точек, соответствующих началу роста трещины, по аналогии с критической кривой, полученной А. Гриффитсом. Повышение величины l_0 приводит к уменьшению угла наклона на начальном участке разупрочнения тела. Соответственно, сделан вывод, что для обеспечения устойчивого процесса роста трещины с увеличением ее начальной длины требуется меньшая жесткость нагружающей системы.

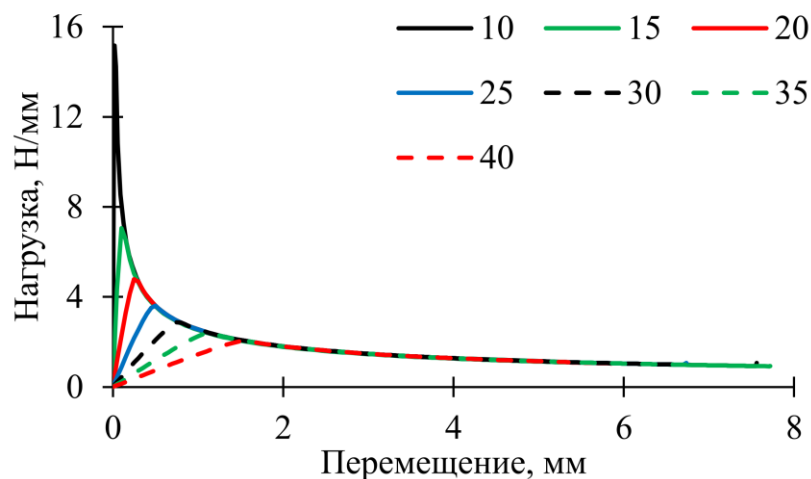


Рисунок 6.12 – Диаграммы нагружения тела при различных величинах l_0

Поскольку упругие части исследуемого тела передают нагрузку промежуточному слою, они являются для него нагружающей системой. В связи с этим рассмотрено влияние жесткости упругих частей на процесс равновесного роста трещины. Для этого характеристики материала упругих частей (модули Юнга и сдвига) были умножены на коэффициент f (варьировался в диапазоне от 0.6 до 1.4 с шагом 0.2), $f < 1$ имитирует повышение податливости нагружающей системы, $f > 1$ – повышение жесткости. Использована ранее рассмотренная двухзвенная аппроксимация диаграммы деформирования с модулем разупрочнения $D = 400$ МПа и модулем Юнга 4 ГПа. Полученные расчетные диаграммы нагружения (в виде зависимости расчетной нагрузки от перемещения u при жестком нагружении) представлены на рисунке 6.13. Понижение жесткости упругих частей привело к падению несущей способности тела с трещиной, при этом качественно характер поведения тела после начала роста трещины остался неизменным. Отмечена немонотонная зависимость перемещения, при котором происходит потеря сходимости итерационной процедуры, от жесткости нагружающей системы. При этом увеличение значения f приводило к росту максимальной длины трещины, что подтверждает положительное влияние повышенной жесткости нагружения на устойчивость процессов равновесного роста трещин.

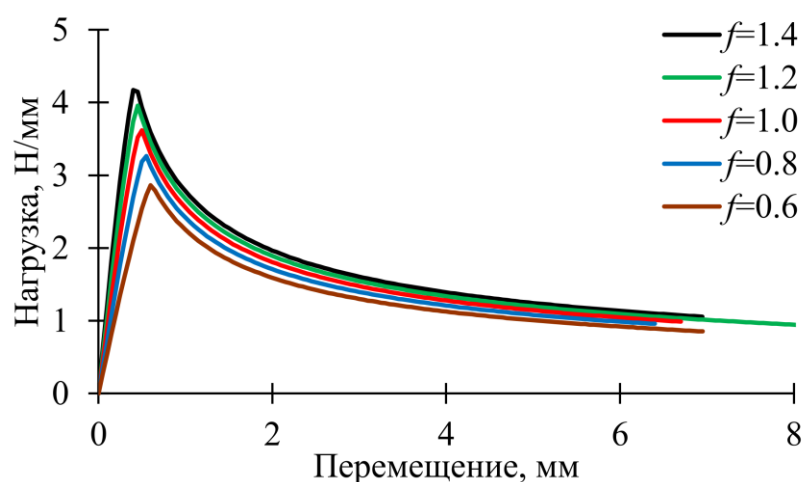


Рисунок 6.13 – Расчетные диаграммы нагружения тела при различной жесткости упругих частей (различных величинах параметра f)

Особенностью рассматриваемых задач является наличие состояния, в котором происходит потеря сходимости численного решения. С одной стороны, данное состояние может возникать в случаях, когда слишком большой шаг нагружения является причиной отсутствия сходимости численного решения за требуемое число итераций. С другой стороны, реализация данного состояния может быть связана с выполнением некоторого критерия перехода от равновесного роста трещины к динамическому. Одной из причин данного перехода может являться потеря устойчивости процесса закритического деформирования материала у вершины трещины, которая не может быть учтена в рамках применяемых методов решения, поскольку корректировка свойств приводит только к изменению модуля упругости материала промежуточного слоя (на каждой итерации решение задачи является упругим). Данные особенности подчеркивают важность проблемы определения свойств нагружающих систем по отношению к областям материала, находящимся на закритической стадии деформирования.

В силу симметрии в рассмотренных задачах для определения условий устойчивости закритического деформирования материала у вершины трещины достаточным является вычисление жесткости нагружающей системы только в направлении вдоль оси y . Мысленно извлечем небольшой (на длине dl) объем материала промежуточного слоя у вершины трещины. Оставшаяся часть тела будет представлять из себя нагружающую систему. При фиксированных граничных условиях приложим на берегах трещины на отрезках dl с началом в вершине трещины противоположно направленные малые перемещения du , которое заведомо не приведут к качественному изменению состояния тела (не спровоцируют неравновесный рост трещины). При этом в системе возникнут силы реакций опор dP . Жесткость нагружающей системы по отношению к извлеченному объему материала в таком случае будет определяться выражением $R_{н.с.} = dP/du$. Жесткость извлеченного участка, в свою очередь, может быть оценена как $R = dlDt/b$, где D – модуль разупрочнения материала у вершины трещины, t – ширина тела, b – высота адгезионного слоя. Условие устойчивости процесса закритического деформирования имеет вид $R_{н.с.} \geq R$. Таким образом, для

рассмотренной задачи предложен способ определения жесткости нагружающей системы и оценки устойчивости процесса разупрочнения материала у вершины трещины, который может быть реализован с применением следующего алгоритма.

1. Проводится нагружение тела до состояния, в котором начинается процесс роста трещины (данное состояние соответствует достижению максимальной несущей способности конструкции);

2. Фиксируются граничные условия;

3. Удаляется из расчета когезионный элемент, находящийся у вершины трещины;

4. К узлам в вершине трещины прикладываются противоположно направленные малые перемещения du (порядка 1% от толщины промежуточного слоя);

5. Путем решения краевой задачи с исключенным элементом определяется сила реакции dP в этих узлах;

6. Вычисляется жесткость нагружающей системы по отношению к области материала в вершине трещины: $R_{н.с.}=dP/du$;

7. Жесткость объема материала у вершины трещины определяется выражением $R= dlDb/(2h)$, здесь dl – длина стороны когезионного элемента (уменьшение величины R вдвое связано с приложением перемещений к узлам, а не к отрезкам);

8. В случае выполнения условия устойчивости $R_{н.с.} \geq R$ малые перемещения du снимаются, ранее удаленный когезионный элемент вновь добавляется в расчет, происходит изменение граничных условий и переход к п. 2. В противном случае предполагается, что произойдет переход от равновесного роста трещины к динамическому, и расчет прекращается.

При достаточно высоком значении $R_{н.с.}$ оценка данной величины может производиться не на каждой итерации для экономии вычислительных ресурсов.

Данный алгоритм апробирован для оценки жесткости нагружающей системы по отношению к локальной области разупрочняющегося материала. Рассмотренная в параграфе 6.2 задача деформирования тела с трещиной, использована

двухзвенная аппроксимация полной диаграммы деформирования материала с модулем Юнга $E=1$ ГПа, модулем разупрочнения $D=2$ ГПа, пределом прочности 10 МПа. Жесткость когезионного элемента при разупрочнении в вершине трещины в таком случае составляет 10000 Н/мм (при толщине тела 1 мм).

На рисунке 6.14 представлена ранее полученная при фиксированном шаге перемещения диаграмма нагружения. Для состояний 1 (начало процесса роста трещины) и 2 (момент перед потерей сходимости численного решения), отмеченных на диаграмме, с применением вышеизложенного алгоритма проведена оценка величины $R_{н.с.}$. Результаты продемонстрировали, что значения жесткости нагружающей системы составили 259539 Н/мм и 69522 Н/мм, соответственно, сделан вывод о достаточной жесткости нагружающей системы для дальнейшего устойчивого процесса равновесного роста трещины. Следовательно, причиной потери сходимости численного решения является слишком высокое значение шага перемещения. Решение аналогичной задачи с уменьшенным шагом нагружения привело к реализации более продолжительного процесса равновесного роста трещины, диаграмма нагружения приведена на рисунке 6.14.

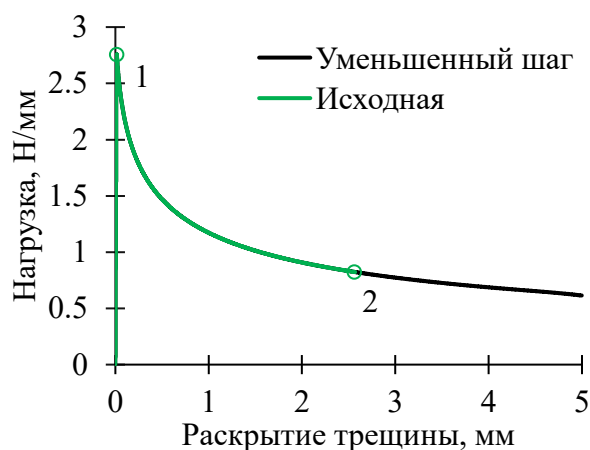


Рисунок 6.14 – Расчетные диаграммы нагружения тела с трещиной: исходная и при уменьшенном шаге нагружения

На основе полученных результатов можно сделать вывод о целесообразности учета свойств нагружающих систем при рассмотрении процессов деформирования

тел с трещинами в рамках моделей, учитывающих разупрочнение материала у вершины трещины. Продемонстрирована рациональность рассмотрения перехода от равновесного к динамическому разрушению как результата потери устойчивости закритического деформирования материала у вершины трещины.

Выводы по главе 6

На основе анализа результатов численного моделирования процессов деформирования и разрушения тел с трещинами с использованием модели когезионной зоны сделаны следующие выводы.

1. Вблизи вершины трещины возможным является образование и развитие зон разупрочнения материала. Начало закритического деформирования тела соответствует «страгиванию» трещины (появлению области с полностью потерявшим несущую способность материалом), после которого возможным является ее равновесное развитие. Соответственно, целесообразным является рассмотрение процессов разрушения с позиций закритического деформирования.

2. Уменьшение модуля спада на стадии разупрочнения материала, соответствующее росту протяженности данной стадии, способствует реализации более равновесного процесса разрушения тела, что объясняется в том числе ростом удельной энергии разрушения материала. При равных величинах данного параметра понижение отношения модуля разупрочнения к модулю упругости материала способствует повышению устойчивости процесса роста трещины.

3. Жесткость нагружающей системы влияет на устойчивость процессов равновесного роста трещин. Для тела с заложенной начальной трещиной равновесный рост трещины реализуется полностью при обеспечении достаточной жесткости нагружающей системы в момент страгивания трещины. Разработанный алгоритм определения жесткости нагружающей системы по отношению к находящейся на стадии разупрочнения области материала у вершины трещины представляется целесообразным для оценки устойчивости процесса роста трещины и определения момента перехода к динамическому разрушению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования.

1. Проанализированы макрофеноменологические и структурно-феноменологические модели неупругого деформирования и разрушения. Изучены способы учета нагружающих систем в граничных условиях. На основе использования метода суперэлементов получены матричные соотношения, являющиеся эквивалентом нелокальных граничных условий контактного типа.

2. Численно исследованы процессы деформирования и разрушения неоднородных тел с учетом статистического распределения прочностных характеристик упруго-хрупких структурных элементов, анизотропии, возникающей вследствие частичной потери их несущей способности. Установлено, что процессы разрушения структурных элементов могут приводить к реализации закритической стадии деформирования тела, устойчивость реализации которой зависит от свойств нагружающей системы.

3. Получены аналитические решения краевых задач о растяжении системы параллельно соединенных элементов со случайными прочностными характеристиками и о кручении цилиндрических тел при учете разупрочнения материала. Проанализирована эволюция зон неупругого деформирования. Установлено, что учет разупрочнения материала позволяет выявить дополнительные прочностные и деформационные резервы, определена их связь с геометрическими и материальными параметрами. Выявлено, что достаточная жесткость нагружающей системы является условием реализации полных диаграмм нагружения на макроуровне.

4. Проведен численный анализ процессов деформирования пластин с концентраторами напряжений различной геометрии при учете закритической стадии деформирования материала. Изучена эволюция зон разупрочнения, отмечена возможность их устойчивого развития. Подтверждена возможность выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов при учете

стадии закритического деформирования материала. Проведено сопоставление результатов численных решений с данными натурных экспериментов.

5. Проведено численное моделирование процессов равновесного роста трещин с использованием модели когезионной зоны. Проанализировано влияние значений параметров разупрочнения материала и характеристик жесткости нагружающей системы на зону разупрочнения у вершины трещины и стадию закритического деформирования тела. Подтверждена применимость модели механики трещин, учитывающей реализацию зоны разупрочнения, для описания процессов равновесного роста трещин и определения условий перехода к динамическому разрушению.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы.

Полученные в диссертации аналитические и численные решения физически нелинейных краевых задач и новые данные о закономерностях неупругого деформирования и разрушения твердых тел подтверждают целесообразность использования структурно-феноменологических моделей деформирования неоднородных тел, моделей деформационного разупрочнения и нелинейных моделей механики трещин для изучения процессов закритического деформирования конструкций.

Результаты исследования подтверждают рациональность развития методологии проведения уточненного прочностного анализа ответственных конструкций для повышения их безопасности в направлениях учета реализации стадии разупрочнения материала, позволяющего выявлять на этапе проектирования дополнительные прочностные и деформационные резервы и прогнозировать уточненное поведение конструкций в условиях возникновения аварийных ситуаций, а также учета свойств нагружающих систем для определения устойчивости процессов закритического деформирования и разрушения с оценкой их катастрофичности.

Перспективы дальнейшей разработки темы заключаются:

1) в развитии структурно-феноменологических моделей деформирования и разрушения неоднородных сред для учета физических процессов, происходящих

на различных масштабных уровнях, реальной структуры материалов, пластического деформирования, а также процессов накопления повреждений (в том числе вследствие циклических и динамических воздействий);

2) в развитии моделей деформационного разупрочнения (в том числе для тел с трещинами) для учета конечных и больших деформаций, а также динамических эффектов;

3) в развитии способов учета свойств нагружающих систем при численном решении краевых задач (в том числе в рамках метода суперэлементов) и оценки устойчивости процессов закритического деформирования в твердых телах;

4) в разработке и развитии расчетно-экспериментальных методов идентификации параметров диаграмм деформирования материалов на стадии разупрочнения (в том числе в условиях локализации деформаций);

5) в применении рассмотренных моделей для прогнозирования процессов неупругого деформирования и разрушения элементов ответственных конструкций и решения прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анализ мезоструктуры и кинетики разрушения элементов сетчатых композитных конструкций при трансверсальном сжатии с использованием стохастической МКЭ-микромеханики / С. Б. Сапожников, Н. А. Шабурова, А. В. Игнатова, А. Н. Шаныгин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 4. – С. 54-66.
2. Анализ методов построения истинных диаграмм деформирования упругопластических материалов при больших деформациях / В. Г. Баженов, Д. А. Казаков, С. С. Куканов, Д. Л. Осетров, А. А. Рябов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 4. – С. 12-22.
3. Аннин, Б. Д. Упруго-пластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
4. Аспекты численного моделирования процессов разрушения упруго-хрупких тел / В. Э. Вильдеман, Е. В. Феклистова, А. И. Мугатаров, М. Н. Муллахметов, А. М. Кучуков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2023. – Т. 16, № 4. – С. 420-429.
5. Астафьев, В. И. Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара: Издательство «Самарский университет», 2001. – 632 с.
6. Баженов, В. Г. Анализ закономерностей растяжения упругопластических образцов и образования шейки с учетом краевых эффектов / В. Г. Баженов, С. Л. Осетров, Д. Л. Осетров // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 4. – С. 133-140.
7. Баженов, В. Г. Численное моделирование растяжения стержня и идентификация параметров деформирования материала в режиме сверхпластичности / В. Г. Баженов, С. Л. Осетров, Д. Л. Осетров // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 4. – С. 471-483.

8. Баренблатт, Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении / Г. И. Баренблатт // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1961. – №4. – С. 3-56.

9. Барях, А. А. Деформирование соляных пород / А. А. Барях, С. А. Константинова, В. А. Асанов; ответственный редактор Н.С. Булычев. – Екатеринбург: Уральское отделение РАН, 1996. – 204 с.

10. Беглов, А. Д. Теория расчета железобетонных конструкций на прочность и устойчивость. Современные нормы и Евростандарты / А. Д. Беглов, Р. С. Санжаровский. – Москва: Изд-во АСВ, 2006. – 221 с.

11. Белостоцкий, А. М. Суперэлементное моделирование статического и динамического НДС многоэтажных панельных зданий / А. М. Белостоцкий, И. М. Сутурин // Сборник научных трудов МГСУ «Вопросы прикладной математики и вычислительной механики». – 2002. – С. 57-69.

12. Борзенков, С. М. Полуаналитические сингулярные элементы для плоских и пространственных задач теории упругости / С. М. Борзенков, В. П. Матвеев // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 1995. – № 6. – С. 48-61.

13. Ботвина, Л. Р. Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности / Л. Р. Ботвина. – Москва: Наука, 2008. – 333 с.

14. Васильев, В. В. Нелокальные решения задач теории упругости о нагружении неограниченного пространства сосредоточенными силами / В. В. Васильев, С. А. Лурье, В. А. Салов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 4. – С. 3-14.

15. Васин, Р. А. О материалах с падающей диаграммой / Р. А. Васин, Ф. У. Еникеев, М. И. Мазурский // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 1995. – № 2. – С. 181-182.

16. Вильдеман, В. Э. Деформационное разупрочнение и разрушение композиционных материалов зернистой структуры / В. Э. Вильдеман, А. В. Зайцев // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т. 2, № 2. – С. 117-124.

17. Вильдеман, В. Э. Задача о кручении цилиндрического тела с учетом разупрочнения / В. Э. Вильдеман, А. И. Мугатаров // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 4. – С. 29-36.

18. Вильдеман, В. Э. Испытания материалов с построением полных диаграмм деформирования / В. Э. Вильдеман, М. П. Третьяков // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2013. – № 2. – С. 93-98.

19. Вильдеман, В. Э. Кинетика разрушения волокнистых композитов с упругопластической матрицей / В. Э. Вильдеман, И. Н. Рочев // Вестник Пермского государственного технического университета. Математическое моделирование систем и процессов. – 1996. – № 4. – С. 14-19.

20. Вильдеман, В. Э. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / В. Э. Вильдеман, Ю. В. Соколкин, А. А. Ташкинов; под редакцией Ю.В. Соколкина. – Москва: Наука, 1997. – 288 с.

21. Вильдеман, В. Э. Моделирование процесса деформирования пластины с концентратором напряжений при учете закритической стадии деформирования материала / В. Э. Вильдеман, М. П. Третьяков, А. И. Мугатаров // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 3. – С. 32-40.

22. Вильдеман, В. Э. Моделирование процесса равновесного роста трещины в композитном образце с позиций механики закритического деформирования / В. Э. Вильдеман, А. И. Мугатаров // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2022. – Т. 26, № 1. – С. 48-61.

23. Вильдеман, В. Э. Моделирование процессов структурного разрушения и масштабных эффектов разупрочнения на закритической стадии деформирования неоднородных сред / В. Э. Вильдеман, А. В. Ильиных // Физическая мезомеханика. — 2007. — Т. 10, № 4. — С. 23-31.

24. Вильдеман, В. Э. О решениях упругопластических задач с граничными условиями контактного типа для тел с зонами разупрочнения / В. Э. Вильдеман // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т. 62, № 2. – С. 304-312.

25. Вильдеман, В. Э. Равновесные процессы разрушения зернистых композитов / В. Э. Вильдеман, А. В. Зайцев // Механика композитных материалов. – 1996. – № 6. – С. 808-817.

26. Вильдеман, В. Э. Расчет несущей способности толстостенных труб с использованием полных диаграмм деформирования / В. Э. Вильдеман, А. А. Ташкинов // Проблемы прочности. – 1994. – № 8. – С. 48-54.

27. Вильдеман, В. Э. Структурно-феноменологическая модель усталостного накопления повреждений и разрушения неоднородных сред / В. Э. Вильдеман, А. И. Мугатаров // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 4. – С. 50-60.

28. Вильдеман, В. Э. Устойчивость закритического деформирования при кручении толстостенного цилиндрического тела / В. Э. Вильдеман, А. И. Мугатаров // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 4. – С. 135-147.

29. Вильдеман, В. Э. Экспериментальное изучение закритического деформирования и разрушения сталей при высоких температурах / В. Э. Вильдеман, М. П. Третьяков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 1. – С. 27-37.

30. Вильдеман, В. Э. Эффект вибрационной стабилизации процесса закритического деформирования / В. Э. Вильдеман, Е. В. Ломакин, М. П. Третьяков // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 467, № 3. – С. 284-288.

31. Вильдеман, В. Э. Задачи механики закритического деформирования стержневых систем / В. Э. Вильдеман // Вестник Пермского государственного технического университета. Динамика и прочность машин. – 2005. – № 5. – С. 15-29.

32. Владимиров, С. А. Исследование процесса глубокого деформирования образцов с кольцевой выточкой при их растяжении / С. А. Владимиров, С. И. Трефилов // Космонавтика и ракетостроение. – 2017. – Т. 81, № 3. – С. 81-85.
33. Внук, М. П. Модель когезионной зоны с учетом параметра трехосности / М. П. Внук // Физическая мезомеханика. – 2001. – Т. 4, № 4. – С. 9-19.
34. Волков, И.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды / И. А. Волков, Л. А. Игумнов. – Москва: Физматлит, 2017. – 299 с.
35. Волков, С. Д. К теории устойчивости разрушения технических материалов / С. Д. Волков, Г. И. Дубровина, Ю. П. Соковнин // Проблемы прочности. – 1978. – № 2. – С. 3-7.
36. Волков, С. Д. Методы решения краевых задач механики разрушения / С. Д. Волков. – Препр. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. – 67 с.
37. Волков, С. Д. О краевой задаче механики разрушения / С. Д. Волков, Г. И. Дубровина, Ю. П. Соковнин // Проблемы прочности. – 1978. – № 1. – С. 3-7.
38. Волков, С. Д. Статистическая механика композитных материалов / С. Д. Волков, В. П. Ставров. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – 206 с.
39. Волков, С. Д. Функция сопротивления материалов и постановка краевых задач механики разрушения / С. Д. Волков. – Препр. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. – 65 с.
40. Георгиевский, Д. В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических сред / Д. В. Георгиевский. – Москва: УРСС, 1998. – 176 с.
41. Гольдштейн, Р. В. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 22-39.
42. Городецкий, А. С. Возможности применения суперэлементов при решении различных задач строительной механики / А. С. Городецкий // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – № 6. – С. 51-56.
43. ГОСТ Р 56815-2015. Композиты полимерные. Метод определения удельной работы расслоения в условиях отрыва G_{IC} . – Москва: Стандартинформ, 2016. – III, 19 с.

44. Димитриенко, Ю. И. Многомасштабное моделирование упругопластических композиционных материалов / Ю. И. Димитриенко, Ю. В. Юрин, С. В. Сборщиков. – Москва: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), 2024. – 228 с.

45. Дроздовский, Б. А. Влияние трещин на механические свойства конструкционных сталей / Б. А. Дроздовский, Я. Б. Фридман. – Москва: Металлургиздат, 1960. – 260 с.

46. Зайцев, А. В. Учет действительных свойств нагружающих систем при численном решении краевых задач методом конечных элементов / А. В. Зайцев, А. С. Бабкин // Вестник Пермского государственного технического университета. Математическое моделирование систем и процессов. – 2003. – № 11. – С. 19-28.

47. Зайцев, Ю.В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения / Ю. В. Зайцев. – Москва: Стройиздат, 1982. – 196 с.

48. Закономерности неупругого деформирования ортогонально-армированного углепластика при сдвиге в плоскости армирования / А. И. Мугатаров, О. А. Староверов, Е. М. Струнгарь, В. Э. Вильдеман // Новые полимерные композиционные материалы: Материалы XX международной научно-практической конференции. – 2024. – С. 214.

49. Закономерности развития неоднородных полей при закритическом деформировании стальных образцов в условиях растяжения / В. Э. Вильдеман, Е. В. Ломакин, Т. В. Третьякова, М. П. Третьяков // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2016. – №5. – С. 132-139.

50. Закритическое деформирование и разрушение тел с концентраторами в условиях плоского напряженного состояния / В. Э. Вильдеман, Е. В. Ломакин, Т. В. Третьякова, М. П. Третьяков // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2017. – № 5. – С. 22-29.

51. Ибрагимов, В. А. Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой / В. А. Ибрагимов, В. Д. Ключников // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1971. – № 4. – С. 116-121.

52. Ильиных, А. В. Закономерности механического поведения зернистых композитов, связанные с формой и размерами элементов структуры / А. В. Ильиных, В. Э. Вильдеман // Вестник Пермского государственного технического университета. Механика. – 2011. – № 4. – С. 49-61.

53. Ильиных, А. В. Численное моделирование процессов структурного разрушения зернистых композитов с изотропными элементами структуры / А. В. Ильиных // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011 – № 2(23) – С. 99-104.

54. Ильюшин, А. А. Об одной теории длительной прочности / А. А. Ильюшин // Инженерный Журнал. Механика твердого тела. – 1967. – № 3. – С. 21-35.

55. Ильюшин, А. А. Основы математической теории термовязкопластичности / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. – Москва: Наука, 1970. – 280 с.

56. Ильюшин, А. А. Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. – Москва, Ленинград: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

57. Исследование асимптотики поля напряжений в окрестности вершины трещины в условиях ползучести с учетом поврежденности / Д. В. Чаплий, О. Н. Белова, Л. В. Степанова, Ю. С. Быкова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 3. – С. 17-38.

58. Качанов, Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести / Л. М. Качанов // Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук. – 1958. – № 8. – С. 26-31.

59. Кинетика разрушения листовой аустенитной стали на заключительной стадии деформирования / А. А. Лебедев, Н. Г. Чаусов, О. И. Марусий, Ю. Л. Евецкий, Г. Х. Гришай, Б. П. Гриненко // Проблемы прочности. – 1989. – № 3. – С. 16-21.

60. Коллинз, Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение / Дж. Коллинз. – М.: Мир, 1984. – 624 с.

61. Кристенсен, Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен; под ред. Г. С. Шапиро. – Москва: Мир, 1974. – 338 с.
62. Лебедев, А. А. Методика построения полных диаграмм деформирования листовых материалов / А. А. Лебедев, Н. Г. Чаусов, Ю. Л. Евецкий // Проблемы прочности. – 1986. – № 9. – С. 29-32.
63. Лебедев, А. А. Установка для испытания материалов с построением полностью равновесных диаграмм деформирования / А. А. Лебедев, Н. Г. Чаусов // Проблемы прочности. – 1981. – № 12. – С. 104-106.
64. Леонов, М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения / М. Я. Леонов // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1961. – №3. – С 85-92.
65. Линьков, А. М. Об условиях устойчивости в механике разрушения / А. М. Линьков // Доклады Академии наук СССР. – 1977. – Т. 233, №1. – С. 45-48.
66. Локощенко, А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов / А. М. Локощенко. – Москва: Физматлит, 2016. – 504 с.
67. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Машиностроение, 1975. – 399 с.
68. Матвиенко, Ю. Г. Основы физики и механики разрушения / Ю. Г. Матвиенко. – Москва: Издательство физико-математической литературы, 2022. – 144 с.
69. Межслоевая трещиностойкость конструкционных полимерных композиционных материалов / В. Д. Крылов, Н. О. Яковлев, Ю. А. Курганова, О. А. Лашов // Авиационные материалы и технологии. – 2016. – № 1(40). – С. 79-85.
70. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений / В. А. Постнов, С. А. Дмитриев, Б. К. Елтышев, А. А. Родионов. – Ленинград: Судостроение, 1979. – 288 с.
71. Моделирование поведения упругопластических стержней при растяжении-кручении и построение их диаграмм деформирования до разрыва с учетом вида напряженно-деформированного состояния / В. Г. Баженов, Д. А. Казаков, Е. В. Нагорных, Д. Л. Осетров, А. А. Рябов // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. – 2021. – Т. 501, № 1. – С. 23-28.

72. Морозов, Е. М. Механика разрушения упруго-пластических тел / Е. М. Морозов. – Москва: МИФИ, 1987. – 86 с.

73. Морозов, Н. Ф. Динамическая вязкость разрушения в задачах инициирования роста трещин / Н. Ф. Морозов, Ю. В. Петров // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 6. – С. 108-111.

74. Мугатаров, А. И. Аналитические и численные решения краевых задач механики закритического деформирования и разрушения / А. И. Мугатаров // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – 2023. – Т. 3. – С. 631-633.

75. Мугатаров, А. И. Аналитические решения краевых задач механики закритического деформирования о растяжении системы параллельно соединенных элементов со случайными прочностными характеристиками и о кручении полого цилиндрического тела / А. И. Мугатаров, В. Э. Вильдеман // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2024: Тезисы докладов. – 2024. – С. 82.

76. Мугатаров, А. И. Аналитическое решение задачи кручения полого цилиндрического тела с учетом разупрочнения / А. И. Мугатаров, В. Э. Вильдеман // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. – 2022. – Т. 1. – С. 143-144.

77. Мугатаров, А. И. Аналитическое решение задачи о кручении полого цилиндра с учетом закритического деформирования материала и жесткости нагружающей системы / А. И. Мугатаров // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2026. – № 2. – С. 90-111.

78. Мугатаров, А. И. Аналитическое решение задачи растяжения системы параллельно соединенных элементов со случайными прочностными характеристиками с учетом разупрочнения / А. И. Мугатаров, В. Э. Вильдеман // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. – 2023. – Т. 1. – С. 163-164.

79. Мугатаров, А. И. Влияние жесткости нагружающей системы на процесс разрушения упруго-хрупкого тела с концентратором напряжений при учете

статистического распределения прочностных характеристик структурных элементов / А. И. Мугатаров, Е. В. Феклистова, В. Э. Вильдеман // XXXVII Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по современным проблемам машиноведения (посвящена 135-летию Е.А. Чудакова): Сборник трудов конференции. – 2025. – С. 351-354.

80. Мугатаров, А. И. Моделирование процесса деформирования пластины с концентраторами напряжений различной геометрии при учете разупрочнения материала / А. И. Мугатаров, В. Э. Вильдеман // XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред: Тезисы докладов. – 2023. - С. 224.

81. Мугатаров, А. И. Моделирование процесса равновесного роста трещины в рамках модели когезионной зоны с позиций механики закритического деформирования / А. И. Мугатаров, В. Э. Вильдеман // Современные авиационные технологии. International Conference on Aviation Engineering: Материалы XVI международной научно-практической конференции. – 2023. – С. 91-96.

82. Мугатаров, А. И. Моделирование процессов разрушения с учетом статистического распределения прочностных характеристик структурных элементов и анизотропии, возникающей вследствие частичной потери несущей способности / А. И. Мугатаров, Е. В. Феклистова, В. Э. Вильдеман // Современные авиационные технологии. International Conference on Aviation Engineering: материалы XVII Международной научно-практической конференции. – 2025. – С. 18-28.

83. Мугатаров, А. И. Накопление повреждений, разупрочнение, разрушение в аналитических и численных решениях краевых задач / А. И. Мугатаров, В. Э. Вильдеман // Механика в новых материалах, конструкциях, технологиях: Тезисы докладов. – 2026. – С. 134.

84. Мугатаров, А. И. Применение метода суперэлементов для учета свойств нагружающих систем / А. И. Мугатаров, В. Э. Вильдеман // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. – 2025. – Т. 1. – С. 206-207.

85. Мугатаров, А. И. Решение задачи о кручении стержня с учетом полной диаграммы деформирования материала / А. И. Мугатаров, В. Э. Вильдеман // Математическое моделирование в естественных науках. – 2018. – Т. 1. – С. 191-194.

86. Мугатаров, А. И. Решения краевых задач механики закритического деформирования и разрушения / А. И. Мугатаров, В. Э. Вильдеман // Математическое моделирование в естественных науках. – 2025. – С. 218-220.

87. Мугатаров, А. И. Решения краевых задач механики закритического деформирования и разрушения / А. И. Мугатаров, В. Э. Вильдеман // Материалы Всероссийской научной конференции с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2025». – 2025. – С. 406-410.

88. Мугатаров, А. И. Усталостная чувствительность и критические состояния конструкционных композитов / А. И. Мугатаров, О. А. Староверов, В. Э. Вильдеман // Математическое моделирование в естественных науках. – 2022. – Т. 1. – С. 223-225.

89. Мугатаров, А. И. Численное моделирование процессов закритического деформирования тел с концентраторами напряжений / А. И. Мугатаров, В. Э. Вильдеман // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. – 2024. – Т. 1. – С. 119-120.

90. Мугатаров, А. И. Численные решения краевых задач механики закритического деформирования для тел с концентраторами напряжений / А.И. Мугатаров, В.Э. Вильдеман // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2024: Тезисы докладов. – 2024. – С. 83.

91. Муллахметов, М. Н. Численное моделирование микроструктур и процессов разрушения зернистых композитов с учетом влияния межзеренных границ / М. Н. Муллахметов, А. В. Ильиных // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки – 2023. – № 1. – С. 81-101.

92. Мураками, С. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности / С. Мураками, Ю. Н. Радаев // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 1996. – № 4. – С. 93-110.

93. Нагибович, А. И. Методика суперэлементного моделирования динамики систем «основание – конструкции фундаментов и трибун – конструкции покрытия» стадионов Чемпионата мира по футболу 2018 года в России. Описание и верификация // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. – 2018. – Т. 14, № 2. – С. 117-132.

94. Никитин, Л. В. Закономерности разрушения горной породы с внутренним трением и дилатансией / Л. В. Никитин, Е. И. Рыжак // Известия Академии наук СССР. Физика Земли. – 1977. – № 5. – С. 22-37.

95. Новожилов, В. В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах / В. В. Новожилов // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 5. – С. 797-812.

96. Новожилов, В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В. В. Новожилов // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 2. – С. 212-222.

97. Панасюк, В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – Киев: Наук. Думка, 1968. – 246 с.

98. Панин, В. Е. Структурные уровни деформации твердых тел / В. Е. Панин, В. А. Лихачев, Ю. В. Гриняев. – Новосибирск: Наука, 1985. – 229 с.

99. Пантелеев, И. А. Некоторые автомодельные закономерности развития поврежденности при квазихрупком разрушении твёрдых тел / И. А. Пантелеев, О. А. Плехов, О. Б. Наймарк // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 90-100.

100. Паньков, А. А. Пьезокомпозиты и датчики: Часть 1: Статистическая механика пьезокомпозитов / А. А. Паньков. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2022. – 234 с.

101. Петухов, И. М. Механика горных ударов и выбросов / И. М. Петухов, А. М. Линьков. – М.: Недра. – 1983. – 280 с.

102. Писаренко, Г. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский. – Киев: Наукова думка, 1981. – 496 с.

103. Победря, Б. Е. Механика композиционных материалов / Б. Е. Победря. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.
104. Победря, Б. Е. О матрице влияния / Б. Е. Победря, С. В. Шешенин // Вестник Московского государственного университета: Серия 1: Математика. Механика. – 1979. – № 6. – С. 76-81.
105. Работнов, Ю. Н. О механизме длительного разрушения / Ю. Н. Работнов // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 5-7.
106. Радченко, В. П. Математическая модель ползучести и длительной прочности наводороженного титанового сплава ВТ6 при температуре 600 ГРАДУСОВ С / В. П. Радченко, Е. А. Афанасьева, М. Н. Саушкин // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2025. – Т. 29, № 4. – С. 750-762.
107. Радченко, В. П. Метод решения краевой упругопластической задачи о растяжении полосы с концентраторами напряжений с учетом локальных областей пластического разупрочнения материала / В. П. Радченко, С. В. Горбунов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2014. – № 4(37). – С. 98-110.
108. Радченко, В. П. Структурная математическая модель упругопластического деформирования и разрушения металлов в одноосном случае / В. П. Радченко, Е. В. Панферова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 1996. – № 4. – С. 78-84.
109. Радченко, В. П. Структурная модель закритического упругопластического деформирования материалов в условиях одноосного растяжения / В. П. Радченко, Е. В. Небогина, М. В. Басов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2000. – № 9. – С. 55-65.
110. Радченко, В. П. Структурная модель разупрочняющегося при ползучести материала в условиях сложного напряжённого состояния / В. П.

Радченко, Е. В. Небогина, Е. А. Андреева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2009. – № 1(18). – С. 75-84.

111. Радченко, В. П. Численное решение плоской краевой задачи закритического упругопластического деформирования полосы с концентраторами напряжений / В. П. Радченко, С. В. Горбунов // Математическое моделирование и краевые задачи. – 2016. – С. 178-182.

112. Ревуженко, А. Ф. К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов / А. Ф. Ревуженко, Е. И. Шемякин // Прикладная механика и техническая физика. – 1977. – № 3. – С. 156-174.

113. Роговой, А. А. Микроструктурная модель процессов двойникования и раздвойникования мартенситной фазы в сплавах с памятью формы / А. А. Роговой // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2024. – № 3. – С. 516-542.

114. Рыжак, Е. И. Об устойчивом закритическом деформировании в нежесткой трехосной испытательной машине / Е. И. Рыжак // Доклады Академии наук. 1993. – Т. 330, № 2. – С. 197-199.

115. Рыжак, Е. И. Об устойчивом закритическом деформировании упругопластических образцов, стесненных обоймой конечной жесткости / Е. И. Рыжак // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 1995. – № 3. – С. 117-135.

116. Савицкий, Ф. С. Жесткость испытательных машин и ее влияние на спадающий участок диаграммы растяжения и изгиба / Ф. С. Савицкий, Б. А. Вандышев // Заводская лаборатория. – 1956. – Т. 22, № 6. – С. 717-721.

117. Саитова, Р. Р. Развитие концепции поврежденности в механике материалов / Р. Р. Саитова, Ф. М. Бородич, А. Р. Арутюнян // Прикладная математика и механика. – 2024. – Т. 88, № 2. – С. 271-298.

118. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024665735 Российская Федерация. Численное моделирование процесса

разрушения упруго-хрупкого тела: № 2024665244: заявл. 05.07.2024: опубл. 05.07.2024 / Е. В. Феклистова, В. Э. Вильдеман; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

119. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024683004 Российская Федерация. Модуль учета деформационной анизотропии при численном моделировании процесса разрушения упруго-хрупкого тела: № 2024682562: заявл. 02.10.2024: опубл. 02.10.2024 / Е. В. Феклистова, А. И. Мугатаров, В. Э. Вильдеман; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

120. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025618628 Российская Федерация. «Программа для расчета диаграммы нагружения полого цилиндрического тела при кручении с учетом закритического деформирования материала и жесткости нагружающей системы»: заявл. 07.04.2025: опубл. 07.04.2025 / А. И. Мугатаров; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

121. Соколкин, Ю. В. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел / Ю. В. Соколкин, А. А. Ташкинов; Отв. ред. А. А. Поздеев. – Москва: Наука, 1984. – 115 с.

122. Ставрогин, А. Н. Механика деформирования и разрушения горных пород / А. Н. Ставрогин, А. Г. Протосеня. – Москва: Недра, 1992. – 224 с.

123. Степанова, Л. В. Численно-аналитическое моделирование процессов накопления повреждений и эволюции напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в режиме ползучести / Л. В. Степанова, Д. В. Чаплий, О. Н. Белова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2026. – № 1(74). – С. 56-65.

124. Стружанов, В. В. Деформационное резупрочнение материала в элементах конструкций / В. В. Стружанов, В. И. Миронов; Российская академия

наук, Уральское отделение, Институт машиноведения. – Екатеринбург: Институт машиноведения, 1995. – 189 с.

125. Стружанов, В. В. К расчету параметров равновесия и устойчивости процесса кручения круглых стержней из разупрочняющегося материала / В. В. Стружанов, Е. А. Бахарева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2012. – № 2. – С. 53-64.

126. Стружанов, В. В. Метод пересчета экспериментальной диаграммы кручения цилиндрического образца на диаграмму деформирования материала / В. В. Стружанов, Д. И. Вичужанин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 2. – С. 107-113.

127. Стружанов, В. В. О разрушении диска с центральной ослабленной зоной / В. В. Стружанов // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 135-141.

128. Стружанов, В. В. О решении одной не удовлетворяющей условиям Адамара задачи деформирования стержневых систем методом простой итерации / В. В. Стружанов, А. В. Коркин // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2020. – Т. 24, № 3. – С. 595-603.

129. Стружанов, В. В. Об устойчивости процесса растяжения одной стержневой системы с разупрочняющимися элементами / В. В. Стружанов, А. В. Коркин // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. – 2016. – № 3. – С. 4-17.

130. Стружанов, В. В. Растяжение с кручением. Сообщение 1. Свойства материала / В. В. Стружанов, Е. Ю. Просвиряков // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2008. – № 1. – С. 36-44.

131. Стружанов, В. В. Растяжение с кручением. Сообщение 2. Устойчивость процесса деформирования образца в механической системе. Жесткое и мягкое нагружения / В. В. Стружанов, Е. Ю. Просвиряков // Вестник Самарского

государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 77-86.

132. Стружанов, В. В. Растяжение с кручением. Сообщение 3. Итерационный метод расчета параметров равновесия и устойчивость процесса деформирования механической системы при ее смешанном нагружении / В. В. Стружанов, Е. Ю. Просвиряков // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 66-74.

133. Сутырин, В. И. Расчет по частям конечно-элементной (3D) модели конструкции стационарной морской платформы как механической системы «сооружение – свайный фундамент – грунтовое основание» / В. И. Сутырин, Э. Р. Кужахметова // Морские интеллектуальные технологии. – 2024. – № 3-2(65). – С. 132-142.

134. Трусов, П. В. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения / П. В. Трусов, А. И. Швейкин. – Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения Российской академии наук, 2019. – 604 с.

135. Установка для испытаний материалов с построением полных диаграмм деформирования / Н. Г. Чаусов, Д. Г. Войтюк, А. П. Пилипенко, А. М. Кузьменко // Проблемы прочности. – 2004. – № 5. – С. 117-123.

136. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов: в 2 томах / В. Е. Панин, В. Е. Егорушкин, П. В. Макаров [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1995. – 298 с.

137. Фридман, Я. Б. Механические свойства металлов. Ч.1. Деформация и разрушение. / Я. Б. Фридман – Москва: Машиностроение, 1974. – 472 с.

138. Фридман, Я. Б. Механические свойства металлов. Ч.2. Механические испытания. Конструкционная прочность / Я. Б. Фридман – Москва: Машиностроение, 1974. – 368 с.

139. Численное моделирование усталостного разрушения на основе нелокальной теории циклической повреждаемости / Н.Г. Бураго, И. С. Никитин, А.

Д. Никитин, Б. А. Стратула // Математическое моделирование. – 2024. – Т. 36, № 3. – С. 3-19.

140. Шлянников, В. Н. Имитационное моделирование в задачах оценки остаточной долговечности элементов конструкций / В. Н. Шлянников // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 5. – С. 132–149.

141. Экспериментальное и теоретическое исследование больших деформаций цилиндрических образцов из стали 09Г2С с концентраторами напряжений при нагружении растяжением-кручением до разрушения / В. Г. Баженов, Д. А. Казаков, Е. В. Нагорных, Д. Л. Осетров, А. А. Рябов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 69-81.

142. Экспериментальные исследования закритического деформирования и разрушения конструкционных материалов / В. Э. Вильдеман, Е. В. Ломакин, М. П. Третьяков, Т. В. Третьякова, Д. С. Лобанов. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2018 – 156 с.

143. Экспериментальные функции сопротивления легированной стали при растяжении и кручении / С. Д. Волков, Ю. П. Гуськов, В. И. Кривоспицкая, В. И. Миронов, Ю. П. Соковнин, П. С. Соколов // Проблемы прочности. – 1979. – №1. – С. 3-6.

144. Bazant, Z. P. Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials / Z. P. Bazant, J. Planas. – Boca Raton: CRC Press, 1998. – 616 p.

145. Bogdanov, A. A. Fatigue damage assessment and lifetime prediction of short fiber reinforced polymer composites – A review / A. A. Bogdanov, S. V. Panin, P. V. Kosmachev. – Journal of Composites Science. – 2023. – Vol. 7, I. 12. – Art. No. 484.

146. Carpinteri, A. Fracture and Complexity. One Century since Griffith's Milestone / A. Carpinteri. – Dordrecht: Springer, 2021. – XXXI, 949 p.

147. Carpinteri, A. Nonlinear Crack Models for Nonmetallic Materials / A. Carpinteri. – Dordrecht: Springer, 1999. – 320 p.

148. Cohesive Zone Modelling for Fatigue Life Analysis of Adhesive Joints / A. Akhavan-Safar, E. A. S. Marques, R. J. C. Carbas, L. F. M. da Silva. – Cham: Springer, 2022. – 93 p.
149. Complete Stress–Strain Curves of Self-Compacting Steel Fiber Reinforced Expanded-Shale Lightweight Concrete under Uniaxial Compression / M. Zhao, B. Zhang, P. Shang, Y. Fu, X. Zhang, S. Zhao // *Materials*. – 2019. – Vol. 12., I. 18. – Art. No. 2979.
150. Comprehensive study of the structural integrity of a damaged turbine disk using FEM, DIC and phase field methods / R. Khamidullin, V. Shlyannikov, D. Kosov, A. Zakharov // *International Journal of Fatigue*. – 2025. – Vol. 192. – Art. No. 108720.
151. Computer-aided Design of Polymer-based Composites Using Multi-scale Models / S. V. Panin, B. A. Lyukshin, N. Y. Grishaeva, S. A. Bochkareva, I. L. Panov // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. – 2024. – Vol. 17, No. 1. – P. 65-74.
152. Craig, R. R. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses / R. R. Craig, M. C. C. Bampton // *AIAA Journal*. – 1968. – Vol. 6, No. 7. – P. 1313-1319.
153. Craig, R. R. Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis / R. R. Craig, C. J. Chang // *AIAA Journal*. – 1976. – Vol. 14, No. 11. – P. 1633-1635.
154. Critical dynamics of damage-failure transition in wide range of load intensity / O. Naimark, Yu. Bayandin, S. Uvarov, I. Bannikova, N. Saveleva // *Acta Mechanica*. – 2021. – Vol. 232. – P. 1943-1959.
155. Damage-rate-dependent model for impact crushing of thin-ply CFRP tubes / A. Fedorenko, C. Zhao, H. Liu, B. Fedulov, E. Lomakin, C. Liu // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2026. – Vol. 313. – Art. No. 111268.
156. De Borst, R. Numerical aspects of cohesive-zone models / R. de Borst // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2003. – Vol. 70, I. 14. – P. 1743-1757.
157. Degrieck, J. Fatigue damage modeling of fibre-reinforced composite materials: Review / J. Degrieck, W. van Paepegem // *Applied Mechanics Reviews*. – 2001. – Vol. 54, I. 4. – P. 279-300.

158. Description of Fatigue Sensitivity Curves and Transition to Critical States of Polymer Composites by Cumulative Distribution Functions / O. Staroverov, A. Mugatarov, A. Yankin, V. Wildemann // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2023. – Vol. 17, No. 63. – P. 91-99.
159. Dugdale, D. S. Yielding of Steel Sheets Containing Slits / D. S. Dugdale // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1960. – Vol. 8., I. 2 – P. 100-108.
160. Elliott, H. A. An analysis of the conditions for rupture due to Griffith cracks / H. A. Elliott // *Proceedings of the Physical Society*. – 1947. – Vol. 59, No. 2. – P. 208-223.
161. Estimating degradation of strength of neat PEEK and PEEK-CF laminates under cyclic loading by mechanical hysteresis loops / A. Bogdanov, A. Eremin, M. Burkov, S. Panin, P. Lyubutin // *Fracture and Structural Integrity*. – 2023. – Vol. 17, No. 66. – P. 152-163.
162. Fatemi, A. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials / A. Fatemi, L. Yang // *International Journal of Fatigue*. – 1998. – Vol. 20, No. 1. – P. 9-34.
163. Fatigue behavior of pultruded fiberglass tubes under tension, compression and torsion / O. Staroverov, A. Mugatarov, A. Sivtseva, E. Strungar, V. Wildemann, A. Elkin, I. Sergeichev // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2024. – Vol. 18, No. 69. – P. 115-128.
164. Feklistova, E. Numerical modeling of fracture processes of bodies with stress concentrators under conditions of proportional loading, taking into consideration the statistical distribution of ultimate strength and partial loss of load bearing capacity / E. Feklistova, A. Mugatarov, V. Wildemann // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2025. – Vol. 19, No. 74. – P. 55-72.
165. Feklistova, E. Numerical study of the influence of the parameters of statistical distribution of the structural elements' ultimate strength on deformable bodies' fracture processes / E. Feklistova, A. Mugatarov, V. Wildemann // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2024. – Vol. 18, No. 70. – P. 105-120.

166. Fracture processes numerical modeling of elastic-brittle bodies with statistically distributed subregions strength values / E. Feklistova, A. Mugatarov, V. Wildemann, A. Agishev // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2024. – Vol. 18, No. 68. – P. 325-339.
167. He, Z. Mechanical Properties of Rock under Uniaxial Compression Tests of Different Control Modes and Loading Rates / Z. He, G. Wu, J. Zhu // *Scientific Reports*. – 2024. – Vol. 14. – Art. No. 2164.
168. Hou, P. Y. Post-Peak Stress–Strain Curves of Brittle Hard Rocks under Different Loading Environment System Stiffness / P. Y. Hou, M. Cai // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. – 2022. – Vol. 55. – P. 3837-3857.
169. Identification of Post-necking Tensile Stress–Strain Behavior of Steel Sheet: An Experimental Investigation Using Digital Image Correlation Technique / S. K. Paul, S. Roy, S. Sivaprasad, H. N. Bar, S. Tarafder // *Journal of Materials Engineering and Performance*. – 2018. – Vol. 27. – P. 5736-5743.
170. Influence of Fatigue Damage on Mechanical Behavior of Laminated Composite Under $\pm 45^\circ$ Tension / O. Staroverov, A. Mugatarov, E. Strungar, E. Chebotareva, V. Wildemann // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – 2025.
171. Influence of proportional multiaxial fatigue loading on the residual mechanical properties of glass-reinforced plastic pipes / O. Staroverov, A. Mugatarov, A. Kuchukov, E. Strungar, E. Chebotareva, A. Sivtseva, V. Wildemann // *Engineering Failure Analysis*. – 2024. – Vol. 163. – Art. No. 108586.
172. Jansen, D. C. Effect of Length on Compressive Strain Softening of Concrete / D. C. Jansen, S. P. Shah // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1997. – Vol. 123, No. 1. – P. 25-35.
173. Kamaya, M. A procedure for determining the true stress-strain curve over a large range of strains using digital image correlation and finite element analysis / M. Kamaya, M. Kawakubo // *Mechanics of Materials*. – 2011. – Vol. 43, I. 5. – P. 243-253.
174. Liu, J. Research on Brittleness Characteristic Coefficient of Thermal Damage Rock Based on Postpeak Stage of Stress-Strain Curve / J. Liu // *International Journal of Energy Research*. – 2024. – Vol. 2024, I. 1. – Art. No. 3790073.

175. Lobanov, D.S. Evaluation of the Effect of Elevated Temperature and Preliminary Thermal Aging on the Residual Mechanical Properties of a Structural Fiberglass Using the Signals of Acoustic Emission / D. S. Lobanov, E. M. Lunegova // *Mechanics of Composite Materials*. – 2023. – Vol. 59. – P. 101-114.
176. Lomakin, E. Strain rate influence on hardening and damage characteristics of composite materials / E. Lomakin, B. Fedulov, A. Fedorenko // *Acta Mechanica*. – 2021. – Vol. 232. – P. 1875-1887.
177. Mechanical Properties Degradation of Fiberglass Tubes during Biaxial Proportional Cyclic Loading / V. Wildemann, O. Staroverov, E. Strungar, A. Mugatarov, A. Kuchukov // *Polymers*. – 2023. – Vol. 15, No. 9. – Art. No. 2017.
178. Meissner, C. J. A multiple coupling algorithm for the stiffness method of structural analysis / C. J. Meissner // *AIAA Journal*. – 1968. – Vol. 6, No. 11. – P. 2184-2185.
179. Miannay, D. P. *Fracture Mechanics* / D. P. Miannay. – New York: Springer, 1998. – XVIII, 338 p.
180. Needleman, A. An analysis of decohesion along an imperfect interface / A. Needleman // *International Journal of Fracture*. – 1990. – Vol. 42, I. 1. – P. 21-40.
181. Neuber, H. *Kerbspannungslehre. Grundlagen für eine genaue Spannungsrechnung* / H. Neuber. – Berlin: Springer-Verlag, 1937. – 160 p.
182. Non-Linear Necking Behaviour of S275 to S960 Structural Steels under Monotonic Tension / H. C. Ho, K. F. Chung, T. Y. Xiao, M. C. H. Yam, D. A. Nethercot // *Engineering Structures*. – 2022. – Vol. 261. – Art. No. 114263.
183. Planas, J. Asymptotic analysis of a cohesive crack: 2. Influence of the softening curve/ J. Planas, M. Elices // *International Journal of Fracture*. – 1993. – Vol. 64, I. 3. – P. 221-237.
184. Post-peak Stress–Strain Curves of Brittle Rocks Under Axial- and Lateral-Strain-Controlled Loadings / P. Y. Hou, M. Cai, X. W. Zhang, X. T. Feng // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. – 2022. – Vol. 55. – P. 855-884.
185. Przemieniecki, J. S. Matrix Structural Analysis of Substructures / J. S. Przemieniecki // *AIAA Journal*. – 1963. – Vol. 1, No. 1. – P. 138-147.

186. Residual Mechanical Characteristics of Glass Fibre Reinforced Polymer Composite after Preliminary Cyclic Loadings / A. V. Sivtseva, A. I. Mugatarov, O. A. Staroverov, V. E. Wildemann // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* – 2025. – Vol. 89, No. S1. – P. S138-S145.
187. Sevenois R. D. B. Fatigue Damage Modeling Techniques for Textile Composites: Review and Comparison with Unidirectional Composite Modeling Techniques / R. D. B. Sevenois, W. van Paepegem // *Applied Mechanics Reviews.* – 2015. – Vol. 67, I. 2. – Art. No. 020802.
188. Size Effect on the PostNecking Behaviour of Dual-Phase 800 Steel: Modelling and Experiment / L. Zhang, W. Harrison, S. Mehraban, S. G. R. Brown, N. P. Lavery // *Materials.* – 2023. – Vol. 16, I. 4. – Art. No. 1458.
189. Stability of Postcritical Deformation of CFRP under Static $\pm 45^\circ$ Tension with Vibrations / V. Wildemann, O. Staroverov, E. Strungar, E. Lunegova, A. Mugatarov // *Polymers.* – 2022. – Vol. 14, No. 21. – Art. No. 4502.
190. Struzhanov, V. V. Determining the moment of destruction of protective coatings on pipes and spherical vessels / V. V. Struzhanov, A. E. Chaikin // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures.* – 2020. – I. 3. – P. 6-18.
191. Struzhanov, V. V. On the rational choice of the properties of structural elements constituting unidirectional compositions / V. V. Struzhanov // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures.* – 2021. – I. 3. – P. 45-54.
192. Swillo, S. A New Approach for Evaluation True Stress–Strain Curve from Tensile Specimens for DC04 Steel with Vision Measurement in the Post-Necking Phases / S. Swillo, R. Cacko // *Materials.* – 2023. – Vol. 16., I. 2. – Art. No. 558.
193. Taylor, D. The theory of critical distances: a new perspective in fracture mechanics / D. Taylor. – Oxford: Elsevier, 2007. – 284 p.
194. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges / M. Elices, G. V. Guinea, J. Gomez, J. Planas // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2002. – Vol. 69, I. 2. – P. 137-163.

195. Tvergaard, V. Predictions of mixed mode interface crack growth using a cohesive zone model for ductile fracture / V. Tvergaard // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2004. – Vol. 52, I. 4. – P. 925-940.
196. Versaillot, P. D. Experimental Study on the Evolution of Necking Zones of Metallic Materials / P. D. Versaillot, Y. F. Wu, Z. L. Zhao // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2021. – Vol. 189. – Art. No. 106002.
197. Wildemann, V. E. The analytical and numerical solution of the problem of stretching a system of parallel elements with random strength characteristics taking into account the postcritical stage of deformation and rigidity of the loading system / V. E. Wildemann, A. I. Mugatarov, M. P. Tretyakov // *Meccanica*. – 2022. – Vol. 57, No. 9. – P. 2323-2335.
198. Yang Z. X. Interpretation of torsional shear results for nonlinear stress–strain relationship / Z. X. Yang, X. S. Li, J. Yang // *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. – 2008. – Vol. 32, No. 10. – P. 1247-1266.
199. Yang, X. Stress–Strain Model for Lightweight Aggregate Concrete Reinforced with Carbon–Polypropylene Hybrid Fibers / X. Yang, T. Wu, X. Liu // *Polymers*. – 2022. – Vol. 14., I. 9. – Art. No. 1675.
200. Zhang, R. Combining Thermal Loading System with Acoustic Emission Technology to Acquire the Complete Stress-Deformation Response of Plain Concrete in Direct Tension / R. Zhang, L. Guo, W. Li // *Materials*. – 2021. – Vol. 14., I. 3. – Art. No. 602.