

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Снежинский физико-технический институт
Национального исследовательского ядерного университета МИФИ
«ФГАОУ ВО СФТИ НИЯУ МИФИ»

На правах рукописи



Понькин Евгений Игоревич

**КУМУЛЯЦИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ БЕЗУДАРНОМ СЖАТИИ
ДВУМЕРНОЙ МИШЕНИ ДЛЯ ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА**

Специальность 1.1.9 –
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Баутин Сергей Петрович

СНЕЖИНСК – 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР ИСТОЧНИКОВ, ПОСВЯЩЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯМ ЗАДАЧ СИЛЬНОГО БЕЗУДАРНОГО СЖАТИЯ ГАЗА	12
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА В ВАКУУМ НА КОСОЙ СТЕНКЕ	28
2.1 Постановка задачи об истечении газа в вакуум с косой стенки . . .	28
2.2 Построение характеристической задачи Коши стандартного вида для описания истечения политропного газа в вакуум с косой стенки	34
2.2.1 Характеристическая задача Коши стандартного вида для квазилинейной системы уравнений	34
2.2.2 Первая замена переменных	35
2.2.3 Вторая замена переменных	37
2.2.4 Приведение начально-краевой задачи к характеристической задаче Коши стандартного вида	38
2.3 Определение функции $\eta = f(\xi)$, задающей звуковую характеристику $C^\pm$	43
2.4 Теорема существования и единственности поставленной характеристической задачи Коши стандартного вида	48
2.5 Алгоритм построения решения рассматриваемой характеристической задачи Коши стандартного вида	50
2.6 Получение первых коэффициентов $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ ряда по степеням ϑ для искомых функций $u(\xi, \vartheta)$ и $v(\xi, \vartheta)$	53
2.7 Задача Коши для нахождения коэффициента $c_1(\xi)$ ряда по степеням ϑ для искомой функции $c(\xi, \vartheta)$	55
2.8 Построение решения транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в согласованном случае	61
2.9 Построение решения транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в несогласованном случае, когда $\gamma = 3$ ($\kappa = 1$)	65
2.10 Построение решения транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в несогласованном случае, когда $\gamma \neq 3$ ($\kappa \neq 1$)	69

2.11	Получение n -ых коэффициентов ряда $c_n(\xi)$, $u_n(\xi)$, $v_n(\xi)$ по степеням ϑ для искомых функций $c(\xi, \vartheta)$, $u(\xi, \vartheta)$, $v(\xi, \vartheta)$	72
2.12	Построение решения для коэффициента $c_n(\xi)$. Анализ построенного решения	81
2.13	Выводы по главе	83

ГЛАВА 3. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОСТРОЕННОГО РЕШЕНИЯ ИСХОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ . 84

3.1	Результаты газодинамического анализа свойств течений разрежения/сжатия газа, описываемых решением рассматриваемой начально-краевой задачи в согласованном случае	84
3.2	Квазисогласованное приближение	88
3.3	Анализ свойств течений разрежения в квазисогласованном приближении	90
3.3.1	Построение решения транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в частном несогласованном случае для значений γ , допускающих интегрирование $I(\xi)$ в элементарных функциях	90
3.3.2	Определение области течения двойной волны разряжения в квазисогласованном приближении в зависимости от значения угла наклона кривой стенки α и показателя политропы γ	95
3.3.3	Графики функций $c(\xi, \eta)$, $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ в квазисогласованном приближении	97
3.4	Анализ свойств течений сжатия в квазисогласованном приближении. Описание градиентной катастрофы при различных значениях α и γ	101
3.5	Выводы по главе	105

ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИЛЬНОГО БЕЗУДАРНОГО СЖАТИЯ МИШЕНИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОСТРОЕННОГО АВТОМОДЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ 107

4.1	Математическая постановка задачи о сильном безударном сжатии поршнем специального призматического объема газа	108
4.2	Математическое описание сильного сжатия непроницаемым поршнем специального призматического объема	111
4.2.1	Задача Коши для построения закона движения непроницаемого поршня в области центрированной и двойной волны	111
4.2.2	Алгоритм построения поверхности непроницаемого поршня, сжимающего газ в области центрированной и двойной волны	115
4.2.3	Результаты моделирования сжатия призматического объема непроницаемым поршнем в согласованном случае .	117
4.2.4	Параметры локальной кумуляции в области двойной волны в зависимости от начального положения непроницаемого поршня относительно косой стенки	120
4.3	Математическое описание сильного сжатия проницаемым поршнем специального призматического объема	124
4.3.1	Задача Коши для построения закона движения проницаемого поршня в области центрированной и двойной волны	124
4.3.2	Алгоритм построения поверхности проницаемого поршня, сжимающего газ в области центрированной и двойной волны	127
4.3.3	Результаты моделирования сжатия мишени проницаемым поршнем в области двойной волны	128
4.4	Рекомендации по мишеням для управляемого термоядерного синтеза на основании построенных решений соответствующих начально-краевых задач	131
4.5	Выводы по главе	132
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		134
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ		138

	Стр.
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	140
СПИСОК РИСУНКОВ	152
СПИСОК ТАБЛИЦ	154
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ	155

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Управляемый термоядерный синтез (далее УТС) – это способ получения энергии, который в отличие от взрывного термоядерного синтеза, используемого в термоядерных взрывных устройствах, носит управляемый характер. В экспериментах по УТС повторяют схему инициализации горения DT-топлива в термоядерных зарядах, используя излучения лазера вместо ядерного взрыва. В результате воздействия лазерного излучения на поверхность DT-мишени оболочка мишени взрывается (явление абляции) и наиболее горячая внешняя часть оболочки разлетается наружу, а внутренняя холодная часть движется в направлении центра мишени в виде сходящихся сферических ударных волн (радиационная имплозия). Из уравнения ударной адиабаты известно, что водород можно сжать ударной волной (далее УВ) приблизительно в четыре раза. Следовательно, для того чтобы сжать газ в 1000 раз для инициализации «горения» DT-топлива необходимо воздействовать на мишень серией из не менее пяти УВ.

Существует энергетически более выгодный способ зажигания термоядерных реакций в мишени – это безударное сильное сжатие (далее БСС). Данный способ инициализации «горения» DT-топлива до настоящего времени рассматривался исключительно теоретически, и в расчетах предлагались различные конфигурации мишеней для УТС с целью получения максимального коэффициента усиления: одномерные конфигурации (сферически-, цилиндрически симметричные мишени), двумерные конфигурации (специальные призматические объемы), трехмерные конфигурации (тетраэдры, конусы и т.д.).

Для постановки эксперимента по БСС мишени в рамках УТС необходимо построение адекватных математических моделей двумерных или трехмерных течений разрежения и сжатия, использующих аналитические решения соответствующих начально-краевых задач (далее НКЗ), что позволит исключить в эксперименте факторы, препятствующие успешному «зажиганию» мишени. Также это поможет предложить рекомендации по конкретным конфигурациям мишеней для УТС.

Целью данного исследования является математическое описание кумуляции энергии при безударном сжатии двумерной мишени для термоядерного синтеза путем построения локально-аналитического решения системы уравнений газовой динамики (далее СУГД), описывающего двумерное течение в области раз-

режения при разлете политропного газа в вакуум с косо́й стенки или при сжатии в призматическом объеме, в пространстве физических автомодельных переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$.

Для этого необходимо решить следующие **задачи**:

1. Построить в аналитическом виде локально-аналитическое решение начально-краевой характеристической задачи Коши (далее ХЗК) стандартного вида для СУГД, описывающей при $t > 0$ разлет политропного газа в вакуум на косо́й стенке, а при $t < 0$ сильное сжатие призматического объема газа в пространстве физических автомодельных переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$ в общем несогласованном случае, когда нет алгебраической связи между показателем политропы γ и углом наклона косо́й стенки $0 < \alpha < \pi/2$.
2. Для построенного решения исходной НКЗ выполнить газодинамический анализ свойств течений разрежения и сжатия газа в области двойной волны (далее ДВ) в согласованном и несогласованном случаях. Определить границы области существования двумерного течения и значения газодинамических параметров внутри нее для различных значений γ и α при разлете газа в вакуум с косо́й стенки. Построить критерий, при выполнении которого течение сжатия в области ДВ будет безударным. Дать математическое описание явления градиентной катастрофы в течении сжатия для различных значений γ и α , которое описывается построенным решением в квазисогласованном приближении.
3. Применить построенное локально-аналитическое решение ХЗК стандартного вида для СУГД, описывающей разлет газа в вакуум на косо́й стенке в согласованном случае, к описанию сжатия газа, находящегося в специальном призматическом объеме для двух вариантов газодинамического воздействия на мишень, используемых в физических экспериментах. Построить законы движения проницаемых или непроницаемых поршней в области ДВ, сжимающих газ в специальном призматическом объеме, и определить параметры кумуляции газа в ДВ. Предложить рекомендации по конфигурации мишеней для УТС с максимально возможным коэффициентом усиления.

Научная новизна результатов диссертационной работы сводится к следующим положениям:

1. Впервые построено локально-аналитическое решение начально-краевой задачи о разлете политропного газа в вакуум на косой стенке при $t > 0$ в общем несогласованном случае, когда нет алгебраической связи между γ и α , в виде ряда по степеням ϑ , где ϑ – известная функция автомодельных переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$. Впервые определена область абсолютной сходимости построенного решения.
2. Впервые построен критерий для определения значений γ , для которых решение транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ можно построить в явном виде для любых значений $0 < \alpha < \pi/2$. Впервые транспортное уравнение для коэффициента $c_1(\xi)$ проинтегрировано в явном виде для значений $\gamma = 5/3$, $\gamma = 2$, $\gamma = 5/2$.
3. Впервые определена конфигурация течения разрежения в области двойной волны в несогласованном случае для квазисогласованного приближения в зависимости от значений γ и α .
4. В интерпретации решения на сжатие в квазисогласованном приближении впервые определен критерий возникновения в течении градиентной катастрофы в зависимости от значений γ и α . Впервые показано, что для рассматриваемой двумерной мишени в несогласованном случае режим безударного сильного сжатия ограничен критическим значением скорости звука, определяемой из построенного критерия, при достижении которой режим течения сжатия переходит в ударную волну.
5. Впервые построены законы движения проницаемых и непроницаемых поршней, сжимающих водород в специальном призматическом объеме с косой стенкой, с использованием построенного локально-аналитического решения исходной НКЗ в согласованном случае, определены параметры кумуляции газа и мощности энерговложения в мишень.

Теоретическая значимость работы. Исследование дополняет и развивает теоретические результаты по вопросам безударного сильного сжатия специальных призматических объемов.

Практическая значимость работы. На основании построенных локально-аналитических решений, описывающих сжатие политропного газа в специальном

призматическом объеме, и анализа их газодинамических характеристик даны рекомендации по конкретным конфигурациям мишеней для УТС.

Методология и методы диссертационного исследования. Локально-аналитические решения поставленных задач получены в рамках гипотез и ограничений классической теории газовой динамики через представление искомого решения в виде ряда по степеням независимых переменных. Неизвестные коэффициенты в разложении искомых функций (газодинамических параметров) в степенные ряды найдены как решения специальных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту:

1. Конфигурация течения в области ДВ при разлете газа в вакуум замкнута и ограничена косой стенкой, звуковой характеристикой и границей газ-вакуум.
2. В согласованном случае все три границы суть прямые линии. В несогласованном случае звуковая характеристика в зависимости от значения α и γ либо выпукла ($\operatorname{tg}^2 \alpha < \beta$), либо вогнута ($\operatorname{tg}^2 \alpha > \beta$).
3. В несогласованном случае положение звуковой характеристики и границы газ-вакуум при приближении к вакууму ($c_0 \rightarrow 0$) стремится к положению этих кривых в согласованном случае.
4. В несогласованном случае ($\operatorname{tg}^2 \alpha \neq \beta$) в течении ДВ сжатия при достижении критической скорости звука c_0^* ($t_* < 0$) на звуковой характеристике возникает градиентная катастрофа, переходящая в УВ.
5. Зависимость критической скорости звука c_0^* от значения α и γ – критерий возникновения в течении сжатия градиентной катастрофы.
6. Градиентная катастрофа вызвана "несогласованным" перетеканием газа из области ДВ в область плоской волны из-за большего значения скорости звука в области ДВ.
7. При увеличении количества граней мишени, представляющей в поперечном сечении правильный n -угольник ($n \gg 1$), режим течения сжатия не зависит от внешнего воздействия и представляет собой сходящуюся УВ.
8. При сжатии специального призматического объема непроницаемым поршнем в течении ДВ возникает область локальной кумуляции, где давление газа на порядок больше, чем в плоском течении.
9. При уменьшении начального угла наклона непроницаемого поршня к косой стенке степень локальной кумуляции увеличивается.

10. При сжатии мишени проницаемым поршнем область локальной кумуляции не возникает. Сжатие мишени непроницаемым поршнем энергетически более выгодно приблизительно на порядок.

Степень достоверности результатов, полученных в настоящем исследовании, обеспечивается корректным использованием аппарата математической теории, описывающей течения политропного газа, численных методов решения задач газовой динамики, методов решения краевых задач математической физики и корректным сравнением частных случаев полученных аналитических решений с аналитическими, численными и экспериментальными результатами других авторов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, Россия, 2020).
2. Международная конференция «Забабахинские научные чтения» (Снежинск, Россия, 2021, 2023, 2025).
3. Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии» (Москва, Россия, 2021, 2022, 2024).
4. Международный симпозиум «Неравновесные процессы в сплошных средах – 2024» (Пермь, Россия, 2024).
5. XVIII Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов» (Екатеринбург, Россия, 2024).
6. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, Россия, 2023).
7. Всероссийская конференция «Пермские гидродинамические научные чтения» (Пермь, Россия, 2022).
8. Всероссийская научно-практическая конференция «Научная сессия НИЯУ МИФИ» по направлению «Инновационные ядерные технологии» (Снежинск, Россия, 2019, 2020, 2022, 2023, 2024, 2025).
9. Всероссийская конференция молодых ученых-механиков (Сочи, Россия, 2020).

Результаты исследований также были представлены на научных семинарах:

1. Научный семинар Института механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, председатели д.ф.-м.н., проф. П. Г. Фрик и д.ф.-м.н., проф. Т. П. Любимова.

2. Научный семинар СФТИ НИЯУ МИФИ «Дифференциальные уравнения и их приложения», г. Снежинск, председатель д.ф.-м.н., проф. С. П. Баутин.

Личный вклад автора. Автором диссертации лично в полном объеме выполнены все выкладки для построения локально-аналитических решений СУГД в постановке, предложенной научным руководителем. Автором диссертации написан код программ для построения поверхности проницаемых и непроницаемых поршней, сжимающих специальный призматический объем, и газодинамического исследования двумерных течений разрежения и сжатия.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 25 печатных изданиях, в том числе 5 работах, изданных в журналах рекомендуемых ВАК и индексируемых MathSciNet, zbMATH, Web of Science, Scopus, 20 работ в тезисах докладов конференций. Зарегистрированы 3 программы для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 1 приложения. Полный объем диссертации составляет 155 страниц, включая 36 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 109 наименований.

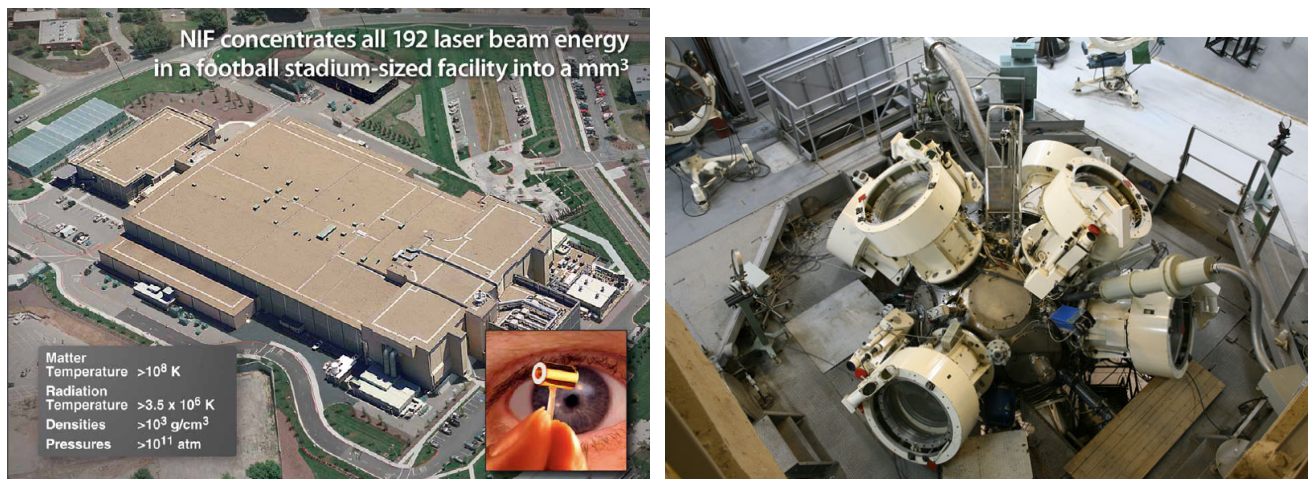
ГЛАВА 1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР ИСТОЧНИКОВ, ПОСВЯЩЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯМ ЗАДАЧ СИЛЬНОГО БЕЗУДАРНОГО СЖАТИЯ ГАЗА

В настоящее время в мире ведутся интенсивные исследования в области управляемого термоядерного синтеза (далее УТС) – это способ получения энергии, который в отличие от взрывного термоядерного синтеза, используемого в термоядерных взрывных устройствах, носит управляемый характер. В качестве топлива используются легкие ядра (изотопы водорода, гелия, лития), которые в результате иницилирующего воздействия сливаются с выделением энергии большей, чем вложено в мишень. Перспективность данного научного направления связана с тем, что при успешной реализации УТС человечество получает неисчерпаемый источник относительно дешевой энергии [1–3].

Одним из широко развиваемых экспериментальных направлений УТС является инерциальный управляемый термоядерный синтез (далее ИУТС). Все физические эксперименты по ИУТС можно разделить по способу воздействия на сферически симметричную DT-мишень: воздействие лазерным излучением различной структуры, т.е. заданным внешним давлением; потоком заряженных частиц (ионные пучки), т.е. движением сжимающего непроницаемого поршня.

Способ внешнего воздействия на мишень заданным внешним давлением лазерного излучения используется в установке NIF (см. рис. 1.1а), находящейся в LLNL (California, USA), и установке «Искра-5» (см. рис. 1.1б), находящейся во РФЯЦ-ВНИИЭФ (г. Саров, Россия). Результаты масштабных экспериментов в этой области с использованием данных установок описаны в следующих публикациях: [4–11] – установка NIF и [12–18] – установка «Искра-5».

Данный вариант реализации ИУТС получил отдельное название – лазерный управляемый термоядерный синтез. В результате воздействия лазерного излучения на поверхность DT-мишени (см. рис. 1.2) оболочка мишени испаряется (явление абляции) и наиболее горячая внешняя часть оболочки (корона) разлетается наружу, а внутренняя холодная часть движется в направлении центра мишени в виде сходящихся сферических ударных волн, сжимая DT-топливо (радиационная имплозия). Таким образом пытаются сжать материал мишени до порога реакций синтеза – температуры плазмы порядка 10^8 К. Данный способ по сути повторяет реализацию «горения» легких ядер в термоядерной бомбе, где зажигание термоядерных реакций осуществляется ядерным взрывом.



(a)

(б)

Рисунок 1.1 – Установки для реализации ЛТС: (а) NIF в LLNL (California, USA), (б) установка «Искра-5» в РФЯЦ–ВНИИЭФ (г. Саров, Россия)



Рисунок 1.2 – Разлет оболочки DT-мишени в результате воздействия лазерного излучения с оболочкой мишени в инерциальном термоядерном синтезе

В установке NIF импульс 192 лазеров направляется в капсулу (полый золотой цилиндр) с шаровой мишенью из DT-льда (см. рис. 1.3), которая называется хольраум (*hohlraum*), чьи стенки пребывают в радиационном равновесии с полостью. Общая энергия пучков составляет около 1,8 МДж. В результате взаимодействия лазерного излучения с поверхностью хольраума энергия лазера конвертируется в мягкое рентгеновское излучение, которое фокусируется на шаровую DT-мишень (схема переноса энергии в хольрауме представлена на рис. 1.3 из работы [19]). При должном нагреве капсула схлопывается (имплозия) внутрь DT-слоя.

В эксперименте на установке NIF 5 декабря 2022 года (см. работу [19]) в результате термоядерной имплозии методом непрямого сжатия удалось получить коэффициент усиления мишени $G_{target} = 1.5$ (см. рис. 1.4).

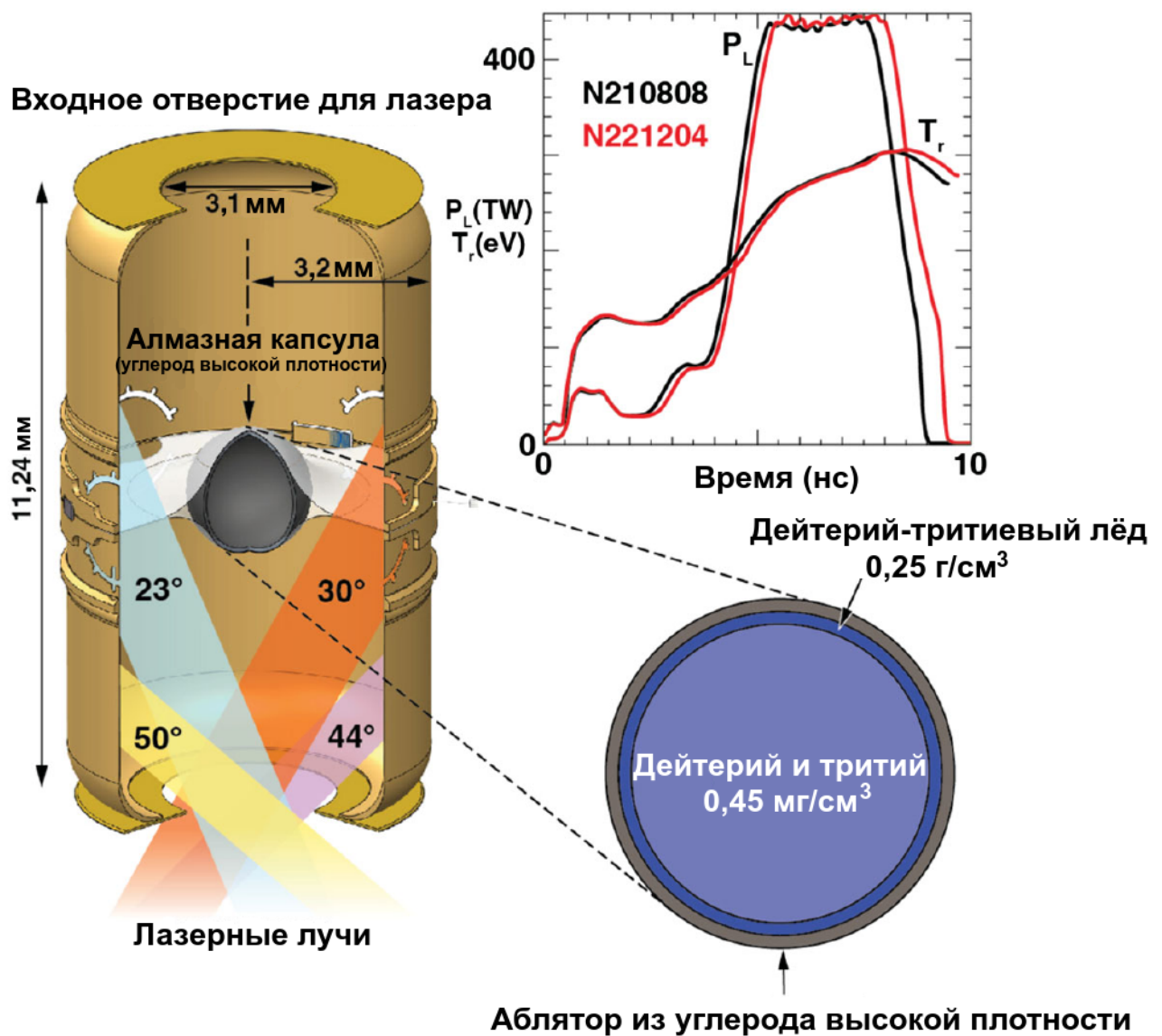


Рисунок 1.3 – Конструкция хольраума и DT-мишени в эксперименте LLNL на установке NIF по материалам [19]. Слева: схематическое изображение мишени и конфигурации лазера, включая хольраум. Внизу справа: конфигурация капсулы из углерода высокой плотности и топлива на основе дейтерия и трития. Вверху справа: зависимость общей мощности лазера и температуры излучения T_r от времени. Для эксперимента N221204 (красная линия) по сравнению с экспериментом N210808 (черная линия) толщина капсулы из углерода высокой плотности была увеличена на 7 %, а энергия лазера – на 7,9 %

Успешная реализация зажигания DT-мишени в установках типа NIF или «Искра-5» ограничена двумя основными факторами. Во-первых, из уравнения ударной адиабаты (кривая Γ на рис. 1.5а) известно, что водород можно сжать

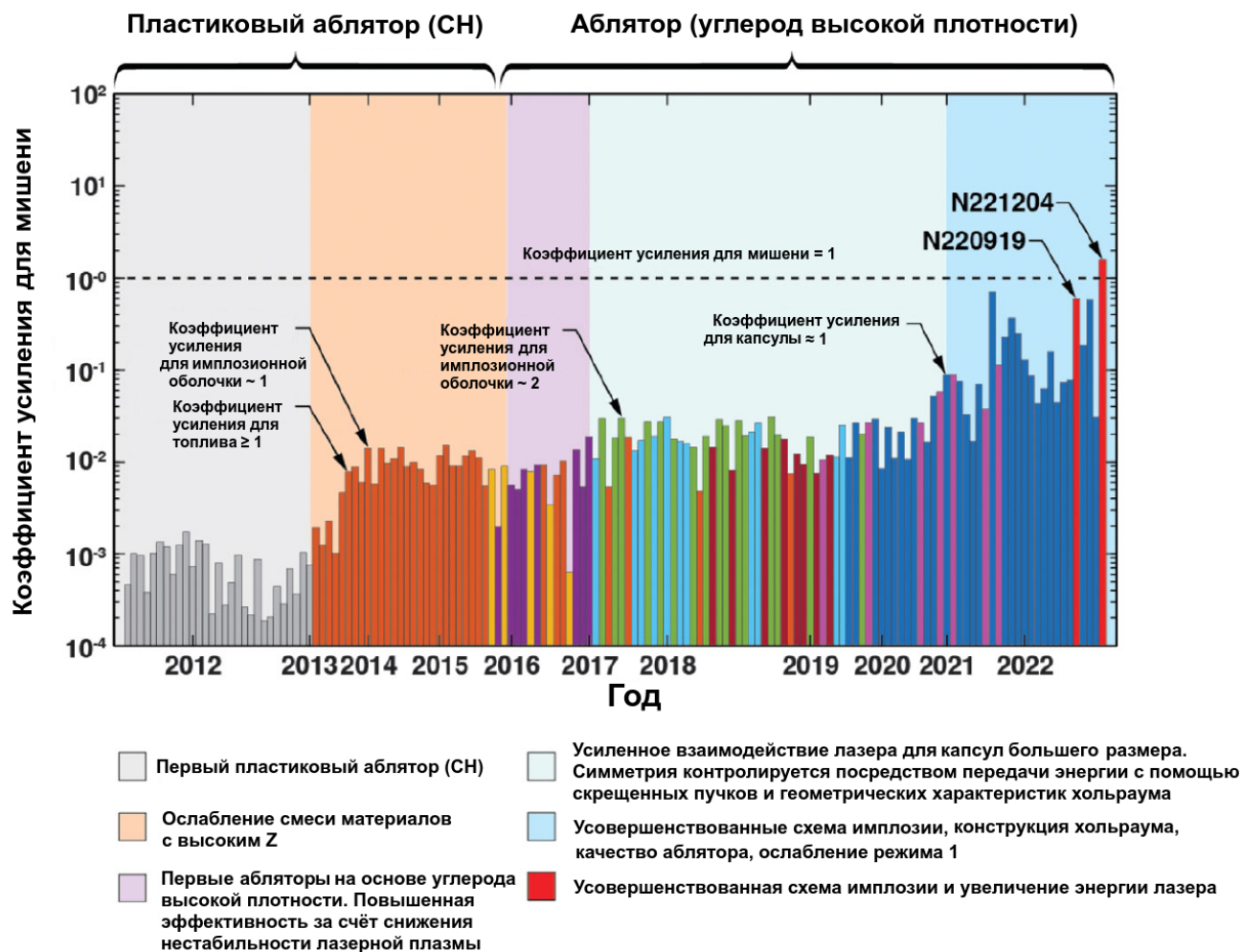


Рисунок 1.4 – Зависимость коэффициента усиления мишени от календарной даты (по материалам [19]). По горизонтали указано начало каждого года. Цвет узких полос коэффициента усиления мишени соответствует различным схемам имплозии, а пунктирная горизонтальная линия соответствует коэффициенту усиления мишени, равному 1, в соответствии с критериями воспламенения Национальной академии наук США [20]

ударной волной приблизительно в четыре раза

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \bigg|_{\gamma=5/3} = 4.$$

Следовательно, для того чтобы сжать газ в 1000 раз для инициализации «горения» DT-топлива необходимо воздействовать на мишень серией из не менее пяти ударных волн (кривые Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 и т.д. на рис. 1.5б).

Во-вторых, возникновением гидродинамической неустойчивости, вызванной (см., например, [18]), в том числе, характером воздействия на мишень.

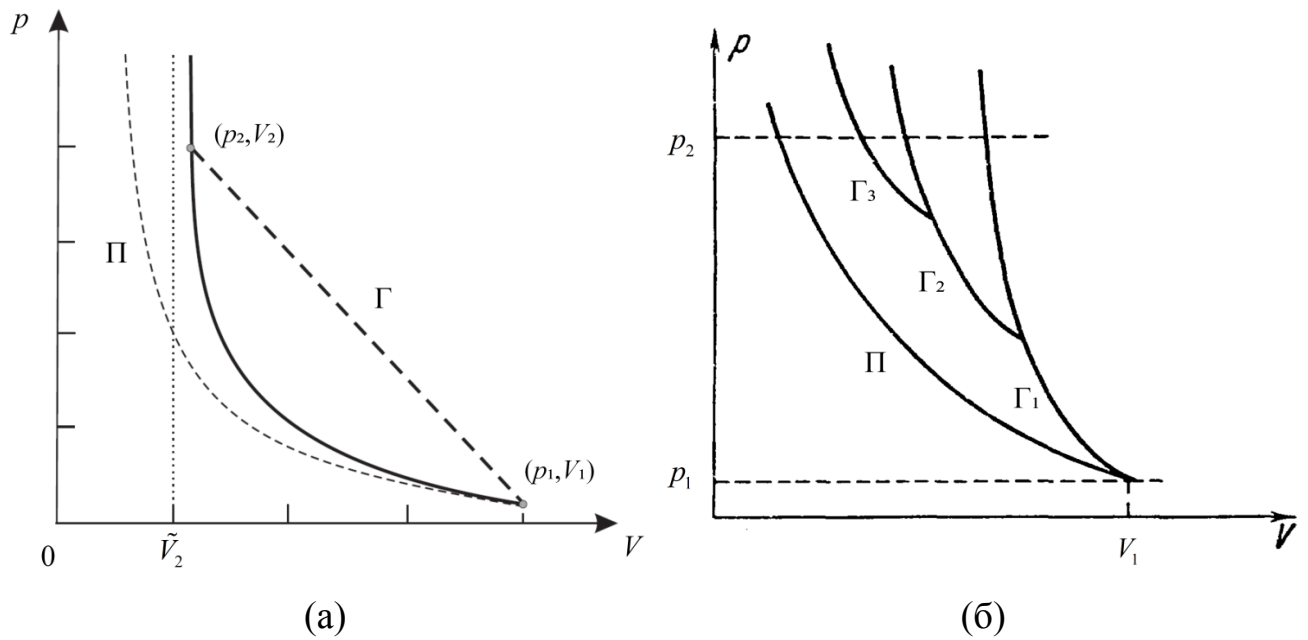


Рисунок 1.5 – График адиабаты Гюгонио (а). Серия последовательных ударных волн для сжатия DT-мишени (б)

Гидродинамическая неустойчивость, возникающая внутри области сжатия в результате воздействия излучения на мишень, приводит к образованию на капсуле пальчиковобразных выступов (см. рис. 1.6), в связи с чем достичь успеха в подобных экспериментах долго не удавалось [4—11].

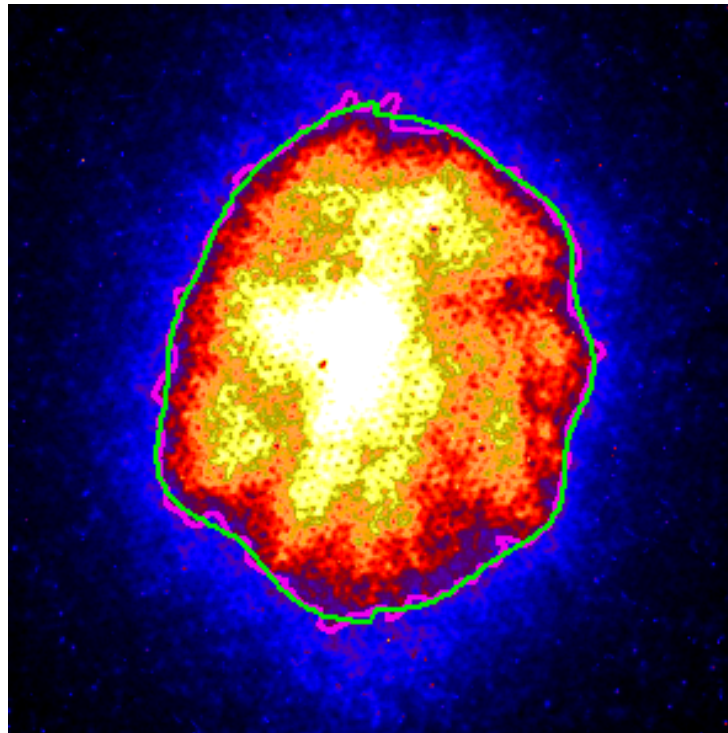


Рисунок 1.6 – Вид DT-мишени в момент сжатия рентгеновским излучением

Существует более энергетически выгодный способ инициализации «горения» термоядерного топлива в мишени – это безударное сжатие. Данный способ

теоретически позволит увеличить коэффициент усиления мишени G_{target} , в сравнении с «ударным» вариантом воздействия на мишень (кривая П на рис. 1.5б), и уменьшить влияние гидродинамической неустойчивости на течения сжатия.

Для постановки эксперимента по безударному сильному сжатию мишени в рамках УТС необходимо построение адекватных математических моделей двумерных и трехмерных течений разрежения и сжатия, использующих аналитические решения соответствующих начально-краевых задач, что позволит исключить в эксперименте факторы, препятствующие успешному «зажиганию» мишени. Также это поможет предложить рекомендации по конкретным конфигурациям мишеней для УТС.

Считается, что математическое описание сильного сжатия в рамках модели газовой динамики для идеального политропного газа позволяет определить основные закономерности и дать некоторые рекомендации для конструкции конкретных мишеней и процессов их обжаривания [21; 22].

Удобство работы с этой математической моделью (газовая динамика) обусловлено следующими свойствами идеального газа как сплошной среды. Идеальный политропный газ с точки зрения термодинамики является двухпараметрической средой. Отсюда при выборе двух параметров, описывающих свойства сплошной среды, например плотность ρ и показатель политропы газа γ , остальные параметры выражаются через них с помощью УРС

$$p = A^2(S)\rho^\gamma/\gamma, \quad p = \rho T,$$

т.е. при постоянной энтропии ($A^2(S) = 1$) температура есть функция от плотности

$$T = \rho^{\gamma-1}.$$

Во-вторых, в газовой динамике часто используют модель идеального газа при разных значениях показателя γ :

1. для воздуха $\gamma = 1.4$;
2. для водорода $\gamma = 5/3$;
3. для воды $\gamma = 7$;
4. для мелкой воды $\gamma = 2$;
5. для продуктов взрыва $\gamma = 3$.

При этом значение γ не связано с числом степеней свободы, зависящим от числа пространственных переменных, отсюда моделью газовой динамики (УРС и

СУГД) можно пользоваться при описании одно-, дву- и трехмерных течений при произвольном значении γ .

Начало аналитическим исследованиям свойств решений уравнений газовой динамики, в том числе описанию явления градиентной катастрофы, было положено в работах Римана [23; 24], Гюгонио [25] и лорда Рэлея [26]. В XX веке данное научное направление получило мощный толчок к развитию благодаря разработке в США и СССР ядерных, а затем и термоядерных зарядов, где энергия ядерного взрыва вкладывается в виде ударной волны в DT-мишень [27; 28].

Еще в 50-е годы прошлого века стало понятно, что вложение энергии в мишень необходимо осуществлять безударным способом [28—30], то есть без образования ударной волны. БСС – это течение, при котором все вещество рассматриваемой области за характерное время коллапсирует в одной точке или плоскости, искомые течения идеального газа могут отделяться друг от друга только слабыми разрывами без образования сильного разрыва (ударной волны). В таких течениях сохраняется энтропия, поэтому процесс, несмотря на формальную неограниченность требующейся энергии, является наиболее экономным [31].

К настоящему времени различными авторами получены четыре точных решения СУГД, описывающих процесс безударного сильного сжатия объемов первоначально однородного и покоящегося газа:

1. Простая центрированная волна Б. Римана, описывающая сжатие одномерного плоско-симметричного слоя до бесконечной плотности. Подробное описание безударного сильного сжатия плоского однородного слоя газа, первоначально находящегося в покое, приведено в книгах Л. В. Овсянникова [29] и С. П. Баутина [32];
2. Автомодельные решения Л. И. Седова, описывающие сжатие одномерных объемов газа со сферической или цилиндрической симметрией [33]. Автомодельные решения Л. И. Седова интерпретированы на задачу безударного сильного сжатия в работах И. Е. Забабахина и В. А. Симоненко [34], Я. М. Каждана [35—37], А. Н. Крайко, Н. И. Тилляевой [38];
3. Двумерное решение В. А. Сучкова, описывающее сжатие призмы при согласованных значениях показателя γ и угла призмы. Это решение предложено в работе В. А. Сучкова [39] для задачи об истечении газа в вакуум с косой стенки и интерпретировано для описания безударного сильного сжатия специальных призм А. Ф. Сидоровым [40];

4. Трехмерное решение А. Ф. Сидорова, описывающее сжатие многогранника при согласованных значениях показателя γ и двугранных углов. Это решение предложено в работе [41] для задачи об истечении газа из трехгранного угла, а затем в работе [40] интерпретировано для описания безударного сильного сжатия специальных многогранников.

В работах [40—45] А. Ф. Сидоровым и О. Б. Хайрулиной описано построение процессов безударного сжатия газа, находящегося внутри призм и тетраэдров специальных форм (специальные случаи согласованного истечения и сжатия газа). Невыполнение условия согласования ведет к возникновению особенностей и даже УВ, что доказано С.П. Баутиным [46].

Природа неустойчивости течений сжатия может быть вызвана несимметричностью воздействия, и, как следствие, наблюдается возникновение двух-, трехмерных течений в мишени. С другой стороны, рядом авторов в работах [1; 21; 34; 47] было показано, что при сжатии таких конструкций, как конус, тетраэдр, призма, можно достичь большей кумуляции, чем при сжатии одномерных конструкций. В связи с этим интересна задача об истечении газа в вакуум с косоугольной стенки, так как ее решение можно использовать при описании безударного сжатия специального призматического объема газа.

В 1963 году В. А. Сучков опубликовал работу «Истечение в вакуум на косоугольной стенке» [39]. В ней построено частное точное решение СУГД, описывающее двумерное течение газа (ДВ) при выполнении конкретного соотношения между γ — показателем политропы газа и тангенсом угла α наклона косоугольной стенки

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma}.$$

Для построения аналитического решения, описывающего данное двумерное течение, использовался математический аппарат, который приводит к сложному виду дифференциальным уравнениям, что дает возможность построить только частные решения рассматриваемых начально-краевых задач.

Метод решения задачи состоит в том, что исходная СУГД

$$\begin{cases} c_t + uc_x + vc_y + \varkappa c(u_x + v_y) = 0, \\ u_t + uu_x + vv_y + \frac{c}{\varkappa}c_x = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \frac{c}{\varkappa}c_y = 0, \\ c|_{C^+} = c_0, \quad u|_{C^+} = u_0, \quad v|_{C^+} = 0, \\ v|_{y=x \operatorname{tg} \alpha} = u \operatorname{tg} \alpha|_{y=x \operatorname{tg} \alpha}, \quad \varkappa = \frac{\gamma - 1}{2} \end{cases} \quad (1.1)$$

сводилась к одному дифференциальному уравнению для функции $\Phi = \Phi(t, x, y)$ – потенциала скорости газа в двумерном случае, где $u = \Phi_x$, $v = \Phi_y$, u , v – компоненты вектора скорости газа $\mathbf{V}$ в декартовой системе координат. Этот прием традиционно использовался для аналогичных задач с целью уменьшения объема выкладок (например, см. [46; 48]).

Таким образом, исходная СУГД преобразовывалась к уравнению вида

$$\begin{aligned} & \Phi_{tt} + 2 \sum_{i=1}^2 \left[\Phi_{x_i} \Phi_{x_i t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (1 - \delta_{ik}) \Phi_{x_i} \Phi_{x_k} \Phi_{x_i x_k} - \frac{1}{2} (c^2 - \Phi_{x_i}^2) \Phi_{x_i x_i} \right] = 0, \\ & c^2 = (\gamma - 1) \left[M - \Phi_t - \frac{1}{2} (\Phi_{x_1}^2 + \Phi_{x_2}^2) \right], \quad M = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Чтобы описать разлет газа в вакуум, в качестве независимых переменных выбирают

$$t, \quad u_1 = \Phi_{x_1}, \quad u_2 = \Phi_{x_2},$$

а далее с помощью преобразования Лежандра

$$\Psi(t, u_1, u_2) = x_1 u_1 + x_2 u_2 - \Phi(t, x_1, x_2) + Mt \quad (1.3)$$

делается переход к новой неизвестной функции $\Psi(t, u_1, u_2)$. Уравнение для $\Psi(t, u_1, u_2)$ строится из (1.2) с учетом (1.3) и введенных обозначений $u = u_1$, $v = u_2$

$$\begin{aligned} & \Psi_{tt} (\Psi_{uu} \Psi_{vv} - \Psi_{uv}^2) + [c^2 - (\Psi_{ut} - u)^2] \Psi_{vv} + 2(\Psi_{ut} - u)(\Psi_{vt} - v) \Psi_{uv} + \\ & + [c^2 - (\Psi_{vt} - v)^2] \Psi_{uu} = 0, \quad c^2 = 2\varkappa \left(\Psi_t - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

НУ и ГУ задачи (1.1), записанные для функции $\Psi(t, u, v)$, имеют вид

$$\Psi(t, u, v)|_{v=0} = t \left\{ \frac{u^2}{2} + \frac{\varkappa}{2} \left[c_0 + \frac{u}{\varkappa} \right]^2 \right\}, \quad c_0 = \text{const} > 0, \quad (1.5)$$

$$\Psi_v(t, u, v)|_{v=u \operatorname{tg} \alpha} = \Psi_u(t, u, v) \operatorname{tg} \alpha|_{v=u \operatorname{tg} \alpha}. \quad (1.6)$$

Решение задачи (1.4)–(1.6) строится в пространстве годографа u, v в виде ряда по степеням v . Для нахождения значений газодинамических параметров c, u, v в пространстве физических переменных t, x, y необходимо выполнять обратное преобразование Лежандра (1.3), что в общем несогласованном случае сделать в явном виде затруднительно.

В следующих по хронологии работах А. Ф. Сидорова [40–42; 49] показана связь между задачами сжатия конкретных мишеней и соответствующего истечения газа в вакуум. Так, двумерное истечение газа в вакуум с косой стенки в работе [41] было интерпретировано для описания сильного сжатия газа, заполняющего специальный призматический объем, и была установлена принципиально большая степень кумуляции газа, чем при неограниченном сжатии плоских, цилиндрических и сферических объемов газа.

Так, для случая сферического сжатия [40] значение параметра ν равно

$$\nu_1 \sim (-\tau)^{-6(\gamma-2)/(3\gamma-1)}, \quad \tau \in [-1, 0),$$

а для случая конического сжатия ν равно

$$\nu_2 \sim (-\tau)^{-6(\gamma-2)/(\gamma+1)},$$

здесь $\nu = E/\rho$ – величина, характеризующая экономичность процесса сжатия для получения больших плотностей.

Функция $\nu \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -0$, если $1 < \gamma < 2$, тогда

$$\nu_2 \sim \nu_1^{(3\gamma-1)/(\gamma+1)},$$

отсюда $3\gamma - 1 > \gamma + 1$ для указанного диапазона γ .

Таким образом, рассмотренный процесс конической кумуляции в идеальном газе оказывается энергетически более экономичным и при этом обеспечивает более высокую степень кумуляции.

С. П. Баутиным и С. Л. Дерябиным в работе [50, с. 196 — 214] в пространстве специальных независимых переменных рассмотрена задача об истечении газа в вакуум при произвольном значении угла $\alpha : 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ – наклона косой стенки, не связанном со значением γ . Доказано существование и единственность локально-аналитических решений соответствующих начально-краевых задач. В случае общих течений связь задач об истечении газа в вакуум и задач о неограниченном сжатии газа в конечный момент времени установлена С. П. Баутиным [46].

Все указанные исследования двумерных течений сжатия выполнялись в пространстве специальных функций, и построенные решения соответствующих НКЗ записать в явном виде через переменные физического пространства-времени (t, x, y) возможно только в частных (согласованных) случаях. Для практического использования решений СУГД, описывающих движение газа при сильном сжатии в двойной волне, необходимо построить решение соответствующей НКЗ в пространстве физических автомодельных переменных. Для этого необходимо непосредственно строить решение СУГД, сводя ее к ХЗК стандартного вида, а не искать решение для функции потенциала $\Psi(t, u, v)$. В настоящей работе излагаются исследования ДВ разрежения и сжатия в «задаче об угле» на основании построенного автомодельного решения СУГД – $U = (c, u, v)$ в пространстве переменных (t, x, y) в общем несогласованном случае.

Параллельно построению локально-аналитических решений, описывающих режим течения БСС в одно-, двух- и трехмерной геометрии [32; 51–62], разрабатывались на основе полученных решений специальные мишени [31; 63–70] для постановки эксперимента по УТС. При этом в выборе конфигурации мишеней для УТС учитывалось разделение течения сжатия на области покоя, одно-, двух-, трехмерных течений, а также тот факт, что между этими областями существует переток газа. Таким образом, интегральный (для всей мишени) коэффициент усиления G_{target} будет зависеть от начальной конфигурации мишени, а также от степени локальной кумуляции и доли массы газа, находящейся в области локальной кумуляции.

Из результатов моделирования плоско-, цилиндрически-, сферически-симметричных течений сжатия, приведенных в работах [32; 46; 59; 71–73], можно сделать следующие выводы:

1. Течение сжатия описывается простой волной Римана для случая плоско-симметричной области, и обобщенной волной Римана для цилиндрически-, сферически-симметричной области сжатия;
2. Сжатие плоско-, цилиндрически-, сферически-симметричного слоя идеального газа с помощью двух непроницаемых поршней дает большую степень кумуляции, чем сжатие газа одним поршнем (конфигурация Мизеса, сжатие «из покоя в покой»).

Далее приведен обзор вариантов конфигурации мишеней капсул, которые могут быть использоваться в экспериментах по ЛТС и являются результатом ма-

тематического моделирования сильного сжатия идеального газа, представленного в работах [1; 32; 46; 59; 71—73; 82—84; 74; 90—92].

Один из вариантов мишени, который прорабатывался в работах [31; 63—70], где реализуется первый способ воздействия (сжатие непроницаемым поршнем), представлен на рис. 1.7. Здесь энергия (ток тяжелых ионизированных частиц) вкладывается в бериллий, который, расширяясь, давит на золотой цилиндр, а последний как непроницаемый поршень воздействует на DT-мишень. Экспериментов с мишенями данного типа не проводилось.

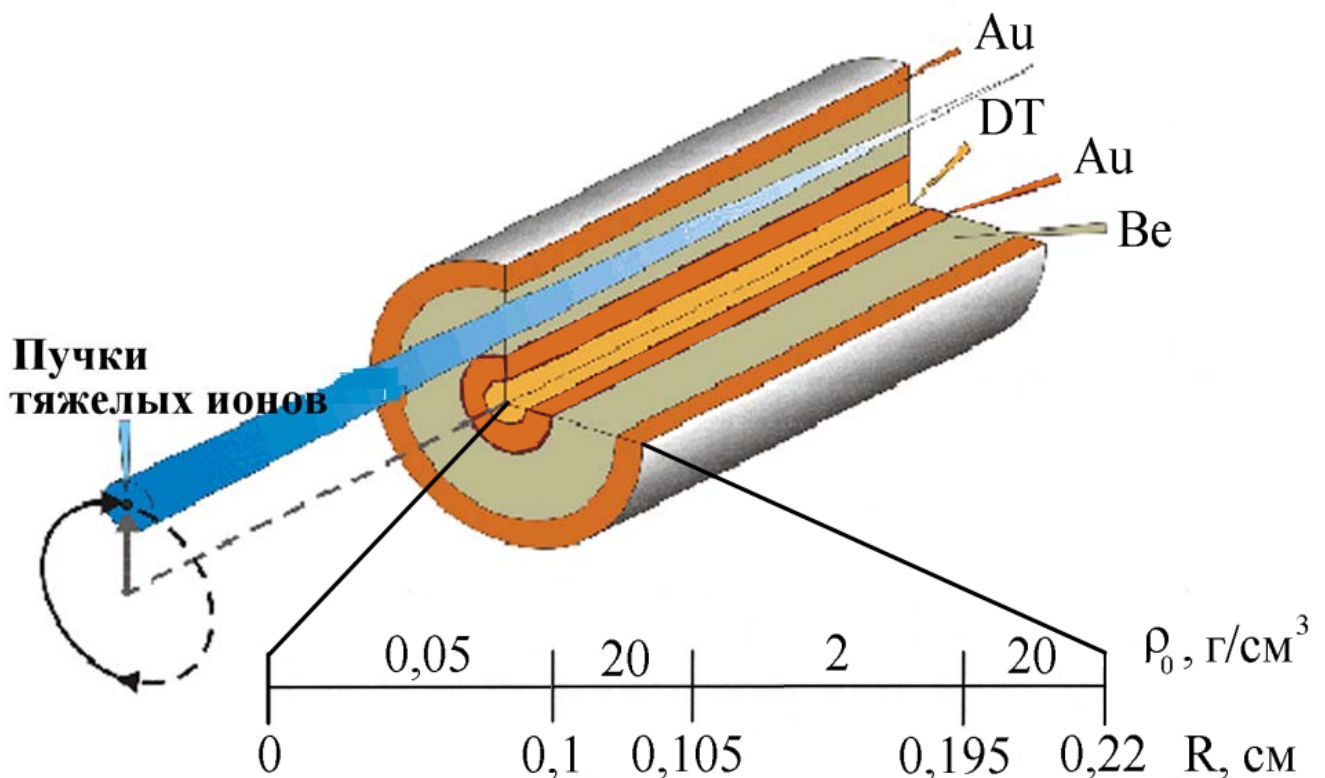


Рисунок 1.7 – Цилиндрическая мишень для реализации УТС, когда газ сжимается движением непроницаемого поршня (воздействие на мишень пучка ионов)

Однако капсула в виде шара или цилиндра эффективна, только когда внешнее воздействие имеет свойство самосимметризации. Именно это имеет место при схождении к центру или к оси симметрии детонационных волн при ядерном взрыве. Если нет самосимметризации внешнего воздействия, то амплитуды неоднородностей, имеющих на границе капсулы, не убывают в процессе сжатия, но при этом размеры капсулы уменьшаются. Следовательно, отношение этих величин растет. Это и есть простейшее проявление неустойчивости фокусирующихся течений сжатия. Математическое моделирование процессов сферического

и цилиндрического сжатия сплошной среды подтверждает это как в случае фокусировки ударной волны [75], так и при фокусировке течений со слабыми разрывами [32; 46; 59].

Решение этой проблемы, возможно, состоит в том, чтобы использовать такие конфигурации капсул, у которых при уменьшении их размеров не стремились бы к нулю радиусы кривизны поверхностей, разделяющих капсулу и область внешнего воздействия. Такими капсулами являются, например, тетраэдр или треугольная призма [1; 74], у которых внешние грани вогнуты к центру тетраэдра или к оси симметрии призмы (см. рис. 1.8).

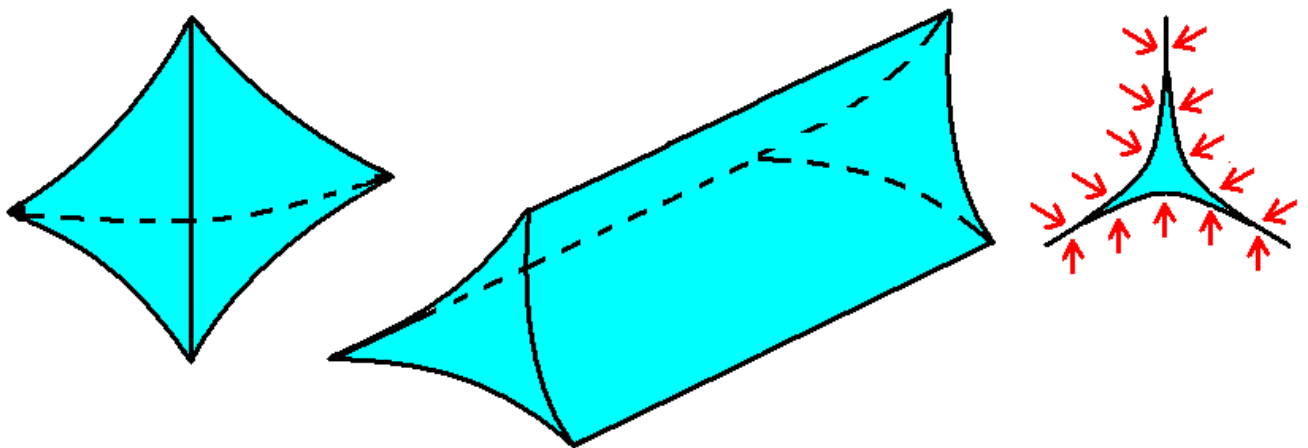


Рисунок 1.8 – Возможные конфигурации капсул

Помимо бóльшей устойчивости течений сжатия для таких капсул особой спецификой является то, что в угловых областях течений имеет место большое увеличение давления. Ранее это было подтверждено как установлением асимптотик процесса такого сжатия [41], так и доказательством существования составных изэнтропических течений для соответствующих начально-краевых задач [46; 59].

Капсулы с такими конфигурациями также можно покрывать слоем золота для снижения неоднородности внешнего воздействия. При этом в случае, когда радиус золотой оболочки будет убывать в процессе сжатия (как, например, в конфигурации, предложенной в [31]), то это приведет к нарушению симметрии оболочки, поскольку одна и та же масса оболочки должна будет входить во все меньший объем. А в случае, когда поверхность оболочки вогнута к центру или к оси симметрии капсулы, то в процессе сжатия капсулы «лишние» объемы оболочки будут складываться вне капсулы (см. рис. 1.9).

При наличии перетока газа из области ЦВ в область ДВ и ограниченности времени работы мишени наличием особенности течения в области ДВ

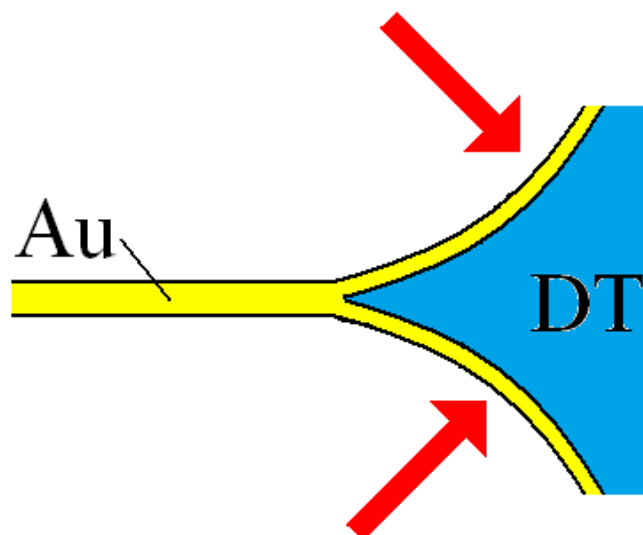


Рисунок 1.9 – Поведение оболочки в процессе сжатия капсулы

необходимо увеличить степень кумуляции газа в области ЦВ за счет изменения конфигурации течения (конфигурация Мизеса, сжатие «из покоя в покой»). Для этого необходимо помещать в центр тетраэдрной капсулы (см. рис. 1.10) или на ось симметрии призматической капсулы твердый сердечник, повторяющий геометрию капсулы и имеющий соответствующий размер.

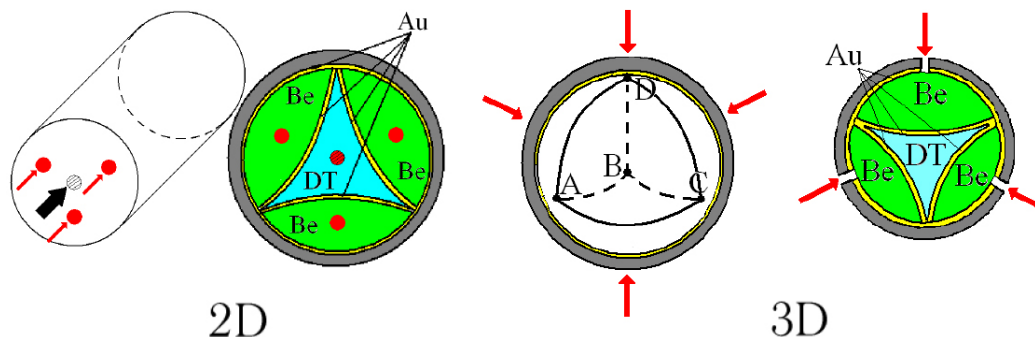


Рисунок 1.10 – Капсула с сердечником

Главный смысл этой рекомендации: возникающее отражение сжимаемой среды от сердечника будет, во-первых, повышать плотность среды, а, во-вторых, для получения соответствующих степеней сжатия потребуются меньший внешний энергетический вклад.

Эти выводы следуют из результатов работ [71—73], в которых численно смоделирован безударный переход однородного покоящегося газа под действием сжимающего поршня также в однородное покоящееся состояние, но с бóльшим значением плотности – переход «из покоя в покой». В частности, в этих работах установлено, что при данном способе сжатия газа значение энергии, затраченной

движущимся поршнем на сжатие газа, меньше, чем при других способах сжатия, при этом время воздействия чуть больше.

На рис. 1.11 показана область определения составного течения при переходе газа «из покоя в покой». Здесь прямая AD – неподвижная стенка, выполняющая роль сердечника, отражающего течение, порожденное движением сжимающегося поршня; линия GE – траектория движения сжимающегося поршня; линии GB , BFE , FC , EC – звуковые характеристики непрерывного составного течения. Цифрами 0–4 помечены разные области составного течения, причем в областях с номерами ноль и четыре находится однородный покоящийся газ с начальной и итоговой плотностями соответственно. В точке E имеется особенность течения, аналогичная особенностям в плоской центрированной волне. На рис. 1.12а

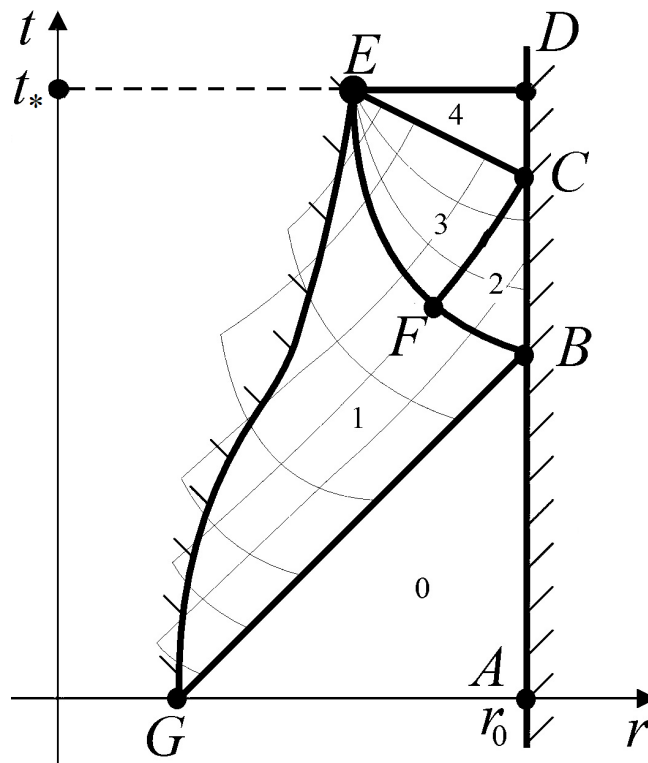


Рисунок 1.11 – Область построения течений в задаче сжатия «из покоя в покой»

приведено поведение с течением времени плотности газа на сжимающем поршне, а также распределение плотности сжатого газа в финальный момент сжатия $t = t_*$ в четвертой области течения (см. рис. 1.11). Особенность течения в точке E передает разрыв плотности газа в этой точке: на поршне плотность строго меньше, чем плотность сжатого газа. На рис. 1.12б приведена зависимость от времени работы, произведенной сжимающим поршнем при переходе «из покоя в покой».

В результате решения задачи о «сжатии угла» в общем несогласованном случае в пространстве физических автомодельных экспериментов будет

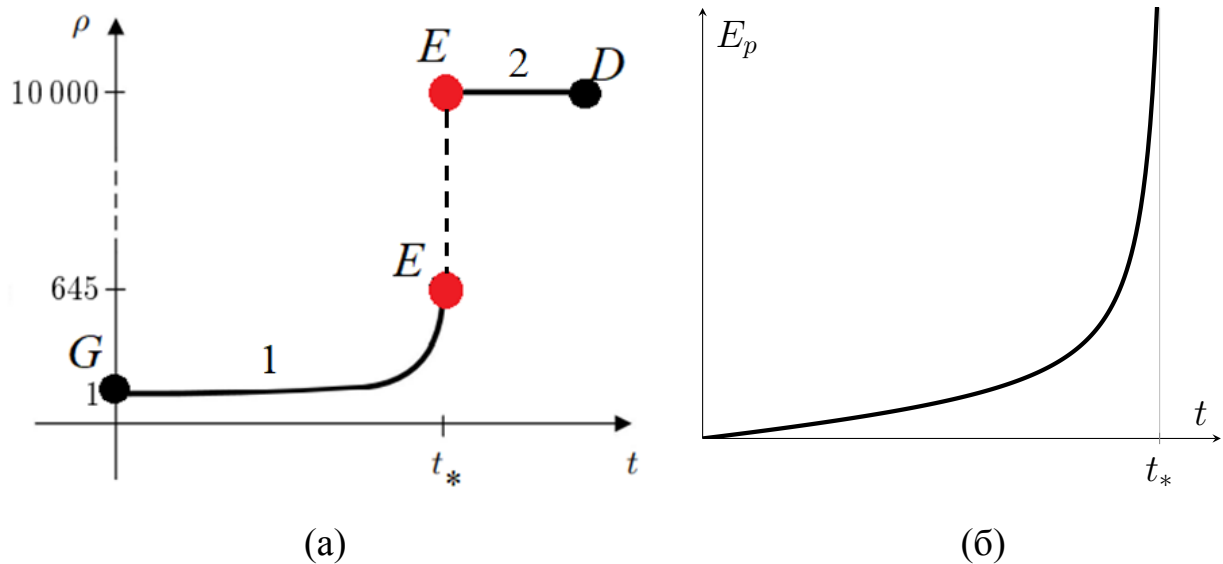


Рисунок 1.12 – Поведение плотности на сжимающем поршне и распределение плотности в финальный момент сжатия «из покоя в покой» (а). Зависимость от времени работы, производимой сжимающим поршнем (б)

возможность предложить для эксперимента по УТС мишень, альтернативную предложенным.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА В ВАКУУМ НА КОСОЙ СТЕНКЕ

2.1 Постановка задачи об истечении газа в вакуум с косой стенки

Рассмотрим газ, покоящийся в клиновидной области плоскости xOy , ограниченной двумя прямыми непроницаемыми стенками: прямая OB на рис. 2.1а, задаваемая уравнением $x = 0$ при $y \geq 0$, и прямая косая стенка OF на рис. 2.1а, задаваемая уравнением $y = x \operatorname{tg} \alpha$. Скорость звука c в покоящемся газе равна единице.

В момент времени $t = 0$ вертикальную стенку OB мгновенно убирают, после чего начинается движение газа из области покоя (помечено цифрой 0 на рис. 2.1) в область вакуума (помечено цифрой 3 на рис. 2.1) вдоль косой стенки OF . Данное движение будем называть истечением газа в вакуум вдоль косой стенки.

Течение в области волны разрежения имеет сложный характер. Для его адекватного описания используется СУГД [29; 32; 56]

$$\begin{cases} \rho_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \\ s_t + \mathbf{V} \cdot \nabla s = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

совместно с уравнением состояния для идеального политропного газа

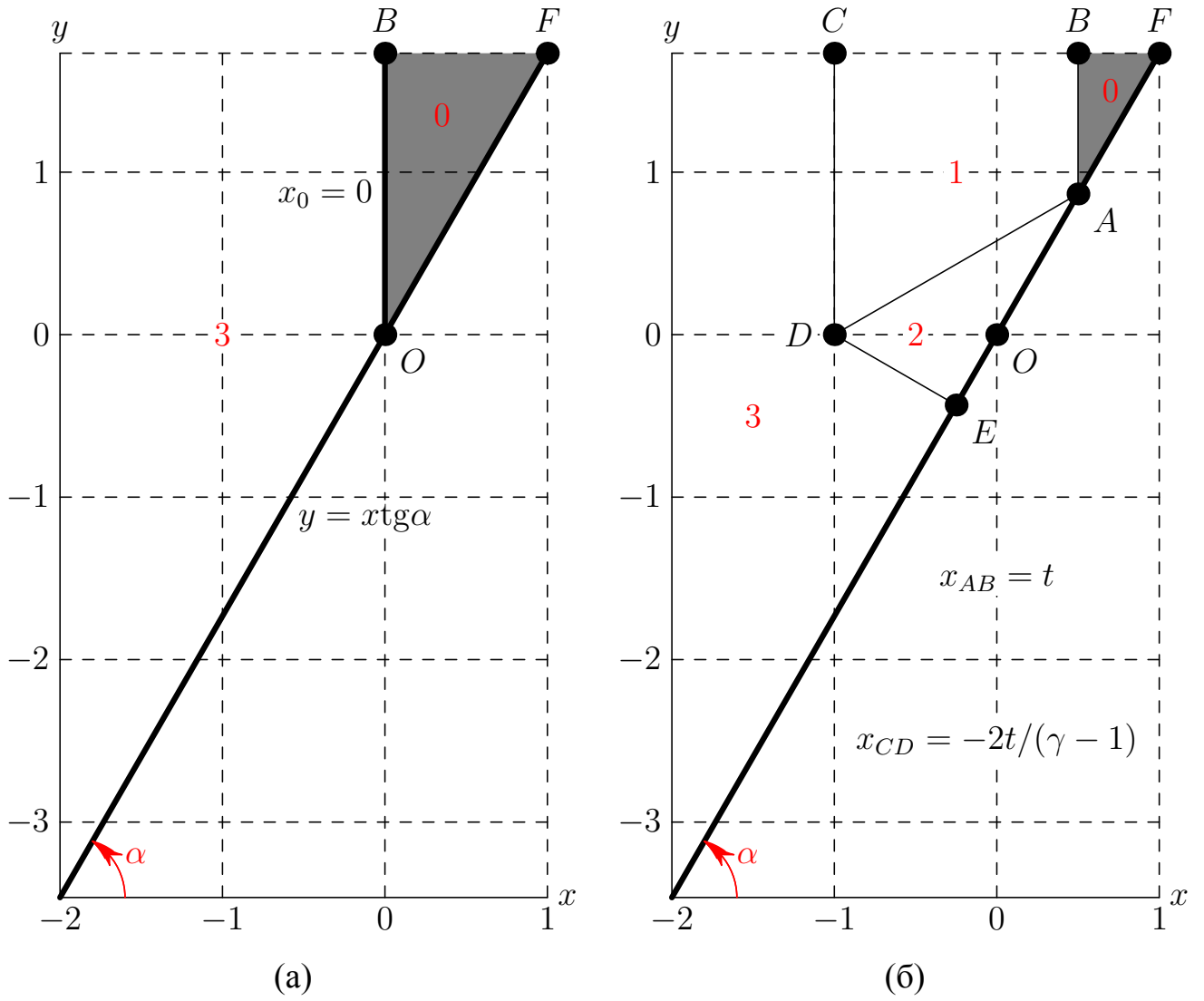
$$p = \frac{A^2(S) \rho^\gamma}{\gamma}. \quad (2.2)$$

В соотношениях (2.1), (2.2) уравнения записаны для независимых переменных t, x, y , обозначающих соответственно время и декартовы координаты в двумерном пространстве; $\mathbf{V} = \{u, v\}$ – вектор скорости газа; $s = A(S)$ – энтропийная функция.

Система (2.1) – квазилинейная система дифференциальных уравнений с частными производными, где все производные входят в (2.1) линейно, а коэффициенты перед производными зависят от искомых функций.

Введем новую искомую функцию взамен плотности

$$\sigma = \rho^{(\gamma-1)/2}. \quad (2.3)$$



0 – область покоящегося газа; 1 – область течения в виде ЦВ; 2 – область течения в виде ДВ; 3 – область вакуума

Рисунок 2.1 – Конфигурация потока в момент $t = 0$ (а) и в момент $t > 0$ (б)

Функция σ связана с энтропийной функцией s и скоростью звука в среде c через следующее соотношение

$$c = s\sigma. \quad (2.4)$$

Для изэнтропического течения ($s = \text{const}$) значение функции c совпадает со значением функции σ , то есть $c = \sigma$. Перепишем (2.1) с учетом (2.3) для новых искомых функций σ , $\mathbf{V}$ и s [29; 32; 56]

$$\begin{cases} \sigma_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \sigma + \frac{\gamma - 1}{2} \sigma \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s \nabla s + \frac{2}{\gamma - 1} \sigma s^2 \nabla \sigma = 0, \\ s_t + \mathbf{V} \cdot \nabla s = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Далее будут рассматриваться только изэнтропические течения, поэтому система (2.5) с учетом соотношения (2.4) приводится к следующему виду [32; 46; 56] для искомых функций c, u, v в пространстве переменных t, x, y

$$\begin{cases} c_t + uc_x + vc_y + \kappa c(u_x + v_y) = 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + \frac{c}{\kappa} c_x = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \frac{c}{\kappa} c_y = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Все переменные в системе (2.6) стандартным образом сделаны безразмерными с использованием конкретных значений размерных масштабных значений: t_{00} – времени, x_{00} – расстояния, u_{00} – скорости, ρ_{00} – плотности. При этом положено, что

$$t_{00} = \frac{x_{00}}{u_{00}}, \quad u_{00} = c_{00}, \quad c_{00} = \rho_{00}^{(\gamma-1)/2}.$$

Для системы (2.6) сделаем замену независимых переменных [82; 93–96]

$$\tau = t, \quad \xi = \frac{x}{t}, \quad \eta = \frac{y}{t}, \quad (2.7)$$

где τ, ξ, η – нестационарные автомодельные переменные.

Якобиан D замены (2.7)

$$D = \begin{vmatrix} \tau_t & \tau_x & \tau_y \\ \xi_t & \xi_x & \xi_y \\ \eta_t & \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x/t^2 & 1/t & 0 \\ -y/t^2 & 0 & 1/t \end{vmatrix} = \frac{1}{t^2}$$

отличен от нуля при $t < \infty$, тогда замена переменных (2.7) невырожденная.

Выражения для частных производных функций c, u, v с учетом замены (2.7) будут равны

$$\begin{aligned} c_t &= c_\tau - \frac{\xi}{\tau} c_\xi - \frac{\eta}{\tau} c_\eta, & c_x &= \frac{1}{\tau} c_\xi, & c_y &= \frac{1}{\tau} c_\eta, \\ u_t &= u_\tau - \frac{\xi}{\tau} u_\xi - \frac{\eta}{\tau} u_\eta, & u_x &= \frac{1}{\tau} u_\xi, & u_y &= \frac{1}{\tau} c_\eta, \\ v_t &= v_\tau - \frac{\xi}{\tau} v_\xi - \frac{\eta}{\tau} v_\eta, & v_x &= \frac{1}{\tau} v_\xi, & v_y &= \frac{1}{\tau} v_\eta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставим (2.8) в (2.6) и, умножив на τ , получим

$$\begin{cases} \tau c_\tau + (u - \xi) c_\xi + (v - \eta) c_\eta + \kappa c(u_\xi + v_\eta) = 0, \\ \tau u_\tau + (u - \xi) u_\xi + (v - \eta) u_\eta + \frac{c}{\kappa} c_\xi = 0, \\ \tau v_\tau + (u - \xi) v_\xi + (v - \eta) v_\eta + \frac{c}{\kappa} c_\eta = 0. \end{cases}$$

Положим, $\frac{\partial}{\partial \tau} = 0$, тогда решение рассматриваемой системы будет автомодельным, то есть будет зависеть только от переменных ξ и η (см. [82; 93—96])

$$\begin{cases} (u - \xi) c_\xi + (v - \eta) c_\eta + \kappa c (u_\xi + v_\eta) = 0, \\ (u - \xi) u_\xi + (v - \eta) u_\eta + \frac{c}{\kappa} c_\xi = 0, \\ (u - \xi) v_\xi + (v - \eta) v_\eta + \frac{c}{\kappa} c_\eta = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Исследуем систему (2.9), для этого запишем выражение для полного дифференциала вертикальной компоненты скорости $v = v(\xi, \eta)$

$$dv = v_\xi d\xi + v_\eta d\eta.$$

Так как компоненты вектора $\{\xi, \eta\}$ линейно независимы, то линейная комбинация dv равна нулю тогда и только тогда, когда $v_\xi = 0$ и $v_\eta = 0$. Из уравнения $dv = 0$ следует, что $v = \text{const}$. Рассмотрим случай, когда значение этой константы равно нулю, то есть $v = 0$, тогда система (2.9) принимает вид

$$\begin{cases} (u - \xi) c_\xi - \eta c_\eta + \kappa c u_\xi = 0, \\ (u - \xi) u_\xi - \eta u_\eta + \frac{c}{\kappa} c_\xi = 0, \\ \frac{c}{\kappa} c_\eta = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Будем рассматривать нетривиальные решения уравнения $\frac{c}{\kappa} c_\eta = 0$, тогда из последнего уравнения системы (2.10) следует, что скорость звука является функцией переменной ξ , то есть $c = \varphi(\xi)$. С учетом этого из первого уравнения системы (2.10) следует, что $u = \psi(\xi)$, тогда $u_\eta = 0$, и система (2.10) преобразуется к виду

$$(u - \xi) c_\xi + \kappa c u_\xi = 0, \quad (u - \xi) u_\xi + \frac{c}{\kappa} c_\xi = 0. \quad (2.11)$$

Система (2.11) имеет известное решение [23—26; 28; 29; 32; 56]

$$c = \frac{\kappa \xi + 1}{\kappa + 1}, \quad u = \frac{\xi - 1}{\kappa + 1}, \quad (2.12)$$

называемое центрированной волной Римана для случая плоско-симметричного одномерного изэнтропического течения газа или просто ЦВ.

Следовательно, выражение $v = 0$ задает характеристическую поверхность системы (2.9), которая отделяет область двумерного течения или ДВ от области

течения ЦВ. В пространстве физических автомодельных переменных $\{\xi, \eta\}$ выражение $v = 0$ записывается уравнением $\eta = f(\xi)$, где $f(\xi)$ – неизвестная функция независимой переменной ξ .

Область покоя также отделена от области течения ЦВ звуковой характеристикой, которая задается уравнением $u = 0$. Найдем уравнение звуковой характеристики $u = 0$ в пространстве переменных $\{\xi, \eta\}$, в соответствии с (2.12) получим уравнение

$$\frac{\xi - 1}{\varkappa + 1} = 0, \quad \xi = 1, \quad x = t. \quad (2.13)$$

Граница с вакуумом течения типа ЦВ определяется из решения уравнения $c = 0$, тогда согласно (2.12)

$$\frac{\varkappa\xi + 1}{\varkappa + 1} = 0, \quad \xi = -\frac{1}{\varkappa}, \quad x = -\frac{2}{\gamma - 1}t. \quad (2.14)$$

Выражения (2.13) и (2.14) задают известные законы движения границы течения ЦВ с вакуумом и покоем, приведенные к примеру в работах [46; 48].

Из анализа системы (2.6) следует, что область пространства, заполненная газом, состоит из трех непересекающихся подобластей: области покоя, области течения типа ЦВ и области течения типа ДВ, которые стыкуются друг с другом через звуковые характеристики, задаваемые уравнениями $v = 0$ и $u = 0$.

На рис. 2.1б приведена конфигурация течения в области разрежения и покоя для момента времени $t > 0$. В области, помеченной цифрой 0, находится покоящийся однородный газ, который отделен от течения типа ЦВ звуковой характеристикой AB – вертикальной прямой, задаваемой уравнением (2.13). Течение ЦВ расположено в области, помеченной цифрой 1, примыкает к вакууму через свободную границу, являющуюся вертикальной прямой CD и распространяющуюся в вакуум по закону (2.14). В области, помеченной цифрой 2, находится ДВ – искомое двумерное течение. Это течение отделено от ЦВ звуковой характеристикой AD , которая в общем случае неизвестна и задается уравнением $\eta = f(\xi)$ в пространстве физических автомодельных переменных $\{\xi, \eta\}$. С двух оставшихся сторон область течения ДВ ограничена косой стенкой OF и границей с вакуумом DE соответственно.

Таким образом, можно поставить НКЗ, решение которой описывает течение в области ДВ [82; 93–96]

$$\begin{cases} (u - \xi) c_\xi + (v - \eta) c_\eta + \kappa c (u_\xi + v_\eta) = 0, \\ (u - \xi) u_\xi + (v - \eta) u_\eta + \frac{c}{\kappa} c_\xi = 0, \\ (u - \xi) v_\xi + (v - \eta) v_\eta + \frac{c}{\kappa} c_\eta = 0, \\ c|_{AD} = c_0, \quad u|_{AD} = u_0, \quad v|_{AD} = 0, \\ v|_{\eta=\xi \operatorname{tg} \alpha} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\eta=\xi \operatorname{tg} \alpha}, \end{cases} \quad (2.15)$$

где $u_0 = (\xi - 1)/(\kappa + 1)$ и $c_0 = \xi - u_0$ – параметры газа на характеристике AD , соответствующие параметрам газа в плоском течении [28; 29; 32; 56]. Далее звуковую характеристику AD , разделяющую течения ЦВ и ДВ, будем обозначать символом C^+ .

Перепишем задачу (2.15) в векторно-матричном виде [85; 86; 97–100] для вектора $\mathbf{U} = (c, u, v)^T$

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{U}_\xi + \mathbf{B}\mathbf{U}_\eta = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}|_{C^+} = \mathbf{U}_0, \quad v|_{\eta=\xi \operatorname{tg} \alpha} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\eta=\xi \operatorname{tg} \alpha}. \end{cases} \quad (2.16)$$

НУ задачи (2.16) задается значением вектора $\mathbf{U}$ на характеристике C^+

$$\mathbf{U}|_{C^+} = \mathbf{U}_0 = (c_0, u_0, 0)^T.$$

Краевое или ГУ задачи (2.16) задается в виде условия непротекания газа на косой стенке

$$v|_{\eta=\xi \operatorname{tg} \alpha} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\eta=\xi \operatorname{tg} \alpha}.$$

Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ задачи (2.16) соответственно равны

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u - \xi & \kappa c & 0 \\ c/\kappa & u - \xi & 0 \\ 0 & 0 & u - \xi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v - \eta & 0 & \kappa c \\ 0 & v - \eta & 0 \\ c/\kappa & 0 & v - \eta \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

При этом НУ и ГУ, коэффициенты матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ задачи (2.16) предполагаются аналитическими функциями.

Постановка задачи об истечении политропного газа в вакуум с косой стенки в области ДВ в пространстве физических автомодельных переменных $\{\xi, \eta\}$ закончена. Далее задача (2.16) будет приведена к виду ХЗК стандартного вида.

2.2 Построение характеристической задачи Коши стандартного вида для описания истечения политропного газа в вакуум с косой стенки

2.2.1 Характеристическая задача Коши стандартного вида для квазилинейной системы уравнений

Задача (2.16), поставленная в п. 2.1, может быть сведена к ХЗК стандартного вида, для которой справедлив аналог теоремы Ковалевской и на доказательстве которой в дальнейшем строится решение задачи (2.16). В данном параграфе рассматривается определение ХЗК стандартного вида, и формулируется теорема существования и единственности аналитического решения произвольной ХЗК [27; 50; 76—79].

Пусть для вектора

$$\mathbf{U} = \left(u_1(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n), u_2(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n), \dots, u_m(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n) \right)^T$$

задана квазилинейная система из m уравнений с частными производными

$$\mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vartheta} + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_i} = \mathbf{C}. \quad (2.18)$$

Для системы (2.18) на координатной плоскости $\vartheta = 0$ заданы НУ

$$\mathbf{U}|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}^0(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{pmatrix} u_1^0(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n) \\ u_2^0(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n) \\ \dots \\ u_m^0(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n) \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Компоненты вектора $\mathbf{U}^0$ являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки

$$M_0(\vartheta = 0, \xi_1 = 0, \dots, \xi_n = 0).$$

Коэффициенты матриц $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n, \mathbf{C}$ зависят от независимых переменных $\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_n$ и от искомых функций $u_1, \dots, u_m$ и являются аналитическими функциями в окрестности точки

$$M_{00}(\vartheta = 0, \xi_1 = 0, \dots, \xi_n = 0, u_1 = u_1^0(0, \dots, 0), \dots, u_m = u_m^0(0, \dots, 0)).$$

Задача Коши (2.18), (2.19) называется *характеристической*, если равен нулю определитель матрицы $\mathbf{A}_0$

$$\det \mathbf{A}_0|_{\substack{\vartheta=0 \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}^0}} \equiv 0. \quad (2.20)$$

ХЗК называется задачей *стандартного вида*, если

$$\mathbf{A}_0|_{\substack{\vartheta=0 \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}^0}} = \begin{pmatrix} A_{r \times r}^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица $A_{r \times r}^0$ имеет размеры $r \times r$ и ее определитель в точке M_{00} отличен от нуля

$$\det A_{r \times r}^0|_{M_{00}} \neq 0,$$

остальные элементы матрицы $\mathbf{A}_0|_{\substack{\vartheta=0 \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}^0}}$ равны нулю.

Во-вторых, в точке M_{00} в матрице $\mathbf{A}_1$ отличен от нуля минор $A_{(m-r) \times (m-r)}^1$, размером $(m-r) \times (m-r)$ и стоящий в правом нижнем углу этой матрицы. Второе условие записывается следующим образом

$$\mathbf{A}_1|_{\substack{\vartheta=0 \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}^0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{(m-r) \times (m-r)}^1 \end{pmatrix}, \quad \det A_{(m-r) \times (m-r)}^1|_{M_{00}} \neq 0. \quad (2.21)$$

В работе [50] методом мажорант доказывается теорема существования и единственности решения ХЗК стандартного вида для задачи (2.18), (2.19), которая формулируется в следующем виде

Теорема 1. *Задача (2.18), (2.19) при выполнении условий (2.20) – (2.21) в случае аналитичности входных данных имеет в некоторой окрестности точки $(\vartheta = 0, \xi_1 = 0, \dots, \xi_n = 0)$ единственное аналитическое решение.*

Далее задача (2.16) в результате невырожденных замен будет сведена к ХЗК стандартного вида. Для новой НКЗ будет доказан аналог теоремы Ковалевской, математическая формулировка которой приведена в данном параграфе.

2.2.2 Первая замена переменных

При сведении задачи (2.16) к ХЗК стандартного вида необходимо выполнить замену независимых переменных ξ, η так, чтобы в новых переменных НУ и

ГУ были «нулевыми». Так как уравнения НУ и ГУ в задаче (2.16) не являются «нулевыми», следовательно, необходимо сделать две замены переменных. Сделаем первую замену переменных [82; 94; 95; 85; 100—102]

$$\vartheta = \eta - f(\xi), \quad \xi' = \xi, \quad (2.22)$$

где линия $\vartheta = 0$, то есть линия $\eta = f(\xi)$ задает звуковую характеристику C^+ . Якобиан J замены (2.22) равен

$$J = \begin{vmatrix} \vartheta_\eta & \vartheta_\xi \\ \xi'_\eta & \xi'_\xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -f'_\xi \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 \cdot f'_\xi.$$

При выполнении условия $|f'_\xi| < \infty$ значение якобиана замены (2.22) равно $J = 1$, поэтому замена (2.22) невырожденная. При введенной замене производные в СУГД задачи (2.16) заменяются по следующим формулам

$$\begin{aligned} c_\xi &= c_{\xi'} \xi'_\xi + c_\vartheta \vartheta_\xi = c_{\xi'} - c_\vartheta f'_\xi, & c_\eta &= c_{\xi'} \xi'_\eta + c_\vartheta \vartheta_\eta = c_\vartheta, \\ u_\xi &= u_{\xi'} \xi'_\xi + u_\vartheta \vartheta_\xi = u_{\xi'} - u_\vartheta f'_\xi, & u_\eta &= u_{\xi'} \xi'_\eta + u_\vartheta \vartheta_\eta = u_\vartheta, \\ v_\xi &= v_{\xi'} \xi'_\xi + v_\vartheta \vartheta_\xi = v_{\xi'} - v_\vartheta f'_\xi, & v_\eta &= v_{\xi'} \xi'_\eta + v_\vartheta \vartheta_\eta = v_\vartheta. \end{aligned}$$

В результате система задачи (2.16) преобразуется к виду (для переменной ξ' штрих для облегчения написания опущен):

$$\begin{cases} (u - \xi) c_\xi + \kappa c u_\xi + [v - \vartheta - f - (u - \xi) f'_\xi] c_\vartheta - \kappa c f'_\xi u_\vartheta + \kappa c v_\vartheta = 0, \\ \frac{c}{\kappa} c_\xi + (u - \xi) u_\xi - \frac{c}{\kappa} f'_\xi c_\vartheta + [v - \vartheta - f - (u - \xi) f'_\xi] u_\vartheta = 0, \\ (u - \xi) v_\xi + \frac{c}{\kappa} c_\vartheta + [v - \vartheta - f - (u - \xi) f'_\xi] v_\vartheta = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

С учетом (2.23) запишем задачу (2.16) в переменных ξ, ϑ (см. [82; 94; 95; 85; 100—102])

$$\begin{cases} [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}] \mathbf{U}_\vartheta + \mathbf{A} \mathbf{U}_\xi = 0, \\ \mathbf{U}|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}_0, \quad v|_{\vartheta=\xi \operatorname{tg} \alpha - f(\xi)} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\vartheta=\xi \operatorname{tg} \alpha - f(\xi)}. \end{cases} \quad (2.24)$$

При этом вид матрицы $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]$ системы из задачи (2.24) следующий

$$[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}] = \begin{pmatrix} a_{11} & -\kappa c f' & \kappa c \\ -c f' / \kappa & a_{11} & 0 \\ c / \kappa & 0 & a_{11} \end{pmatrix}, \quad a_{11} = v - \vartheta - f - f'_\xi (u - \xi).$$

В результате замены (2.22) НУ задачи (2.16) «занулены».

2.2.3 Вторая замена переменных

Далее делается вторая замена переменных [85; 100—102], которая «зануляет» краевое условие рассматриваемой задачи. Вместо переменных ϑ и ξ по формулам

$$\vartheta' = \vartheta, \quad \zeta = \vartheta + f(\xi) - \xi \operatorname{tg} \alpha \quad (2.25)$$

берутся новые независимые переменные ϑ' и ζ .

Косая стенка OF (см. рис. 2.1а), задаваемая уравнением $y = x \operatorname{tg} \alpha$ или $\eta = \xi \operatorname{tg} \alpha$ в переменных ξ и η , с учетом замен (2.22) и (2.25) в новых переменных ϑ и ζ , имеет вид $\zeta = 0$, то есть при замене (2.25) косая стенка берется за новую координатную ось.

Якобиан последней замены переменных (2.25) равен

$$J_2 = \begin{vmatrix} \zeta_{\vartheta} & \zeta_{\xi} \\ \vartheta'_{\vartheta} & \vartheta'_{\xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f'_{\xi} - \operatorname{tg} \alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{tg} \alpha - f'_{\xi}.$$

Чтобы замена (2.25) была невырожденной, необходимо выполнение следующего неравенства

$$J_2 = \operatorname{tg} \alpha - f'_{\xi} \neq 0, \quad (2.26)$$

то есть наклон косой стенки не равен наклону звуковой характеристики, разделяющей ЦВ и ДВ, в точке их пересечения. Доказательство неравенства (2.26) выполним после нахождения неизвестной функции $f(\xi)$.

Из соотношения

$$\zeta - \vartheta = f(\xi) - \xi \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.27)$$

неявно задающего, с учетом неравенства (2.26), функцию ξ от $(\zeta - \vartheta)$, однозначно определяется равенство

$$\xi = \varphi(\zeta - \vartheta). \quad (2.28)$$

Однако дальше для простоты записи будут сохраняться обозначения $f(\xi)$, f'_{ξ} , $c_0(\xi)$, естественно, подразумевая наличие связи (2.28).

При второй замене производные заменяются по следующим формулам

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta'} + \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = [f'_{\xi} - \operatorname{tg} \alpha] \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

В результате система уравнений с частными производными задачи (2.24) будет иметь вид, где штрих у переменной ϑ' опущен

$$[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}] [\mathbf{U}_\vartheta + \mathbf{U}_\zeta] + [f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha] \mathbf{A} \mathbf{U}_\zeta = 0,$$

отсюда НКЗ (2.24) в переменных ϑ, ζ будет иметь вид [85; 100—102]

$$\begin{cases} [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}] \mathbf{U}_\vartheta + [\mathbf{B} - \operatorname{tg} \alpha \mathbf{A}] \mathbf{U}_\zeta = 0, \\ \mathbf{U}|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}_0, \quad v|_{\zeta=0} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0}. \end{cases} \quad (2.29)$$

При этом вид матрицы $[\mathbf{B} - \operatorname{tg} \alpha \mathbf{A}]$ следующий

$$[\mathbf{B} - \operatorname{tg} \alpha \mathbf{A}] = \begin{pmatrix} b_{11} & -\kappa c \operatorname{tg} \alpha & \kappa c \\ -\frac{c}{\kappa} \operatorname{tg} \alpha & b_{11} & 0 \\ c/\kappa & 0 & b_{11} \end{pmatrix}, \quad b_{11} = v - \vartheta - f - \operatorname{tg} \alpha (u - \xi).$$

В результате замены (2.25) ГУ задачи (2.16) «занулены».

2.2.4 Приведение начально-краевой задачи к характеристической задаче Коши стандартного вида

Когда определитель матрицы $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}}$, стоящей перед вектором производных $\mathbf{U}_\vartheta$, выводящих с поверхности $\vartheta = 0$, равен нулю, именно тогда поверхность $\vartheta = 0$ с заданными на ней условиями будет являться характеристической поверхностью [27; 50; 76]. Отсюда, первое необходимое условие, при выполнении которого НЗК (2.29) является ХЗК стандартного вида, следующее

$$\det [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} \equiv 0,$$

при этом в левом верхнем углу матрицы $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}}$ должен стоять ненулевой минор порядка $(n-1) \times (n-1)$, где $n \times n$ – размерность матрицы $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}}$. То есть в рассматриваемом случае вид матрицы $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}}$ должен быть следующий

$$[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.30)$$

Найдем матрицу $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}}$

$$[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \begin{pmatrix} c_0 f' - f & -\kappa c_0 f' & \kappa c_0 \\ -c_0 f' / \kappa & c_0 f' - f & 0 \\ c_0 / \kappa & 0 & c_0 f' - f \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Вид матрицы (2.31) не соответствует виду матрицы (2.30). При этом определитель матрицы $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}}$ равен

$$\begin{aligned} \det [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} &= \begin{vmatrix} c_0 f' - f & -\kappa c_0 f' & \kappa c_0 \\ -\frac{c_0}{\kappa} f' & c_0 f' - f & 0 \\ c_0 / \kappa & 0 & c_0 f' - f \end{vmatrix} = \\ &= (c_0 f' - f) [(c_0 f' - f)^2 - (c_0 f')^2 - c_0^2]. \end{aligned}$$

Определитель матрицы $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]$ в точке $\vartheta = 0$ при $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ тождественно равен нулю, если удовлетворяется нулю одно из уравнений системы:

$$\begin{cases} c_0 f' - f = 0, \\ (c_0 f' - f)^2 - (c_0 f')^2 - c_0^2 = 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Равенство нулю первого сомножителя задает уравнение контактной характеристики C^0 , а равенство нулю второго сомножителя – уравнение звуковых характеристик $C^\pm$ (см. работу [50]).

Найдем ранг матрицы $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}}$ для определения кратности контактной C^0 и звуковых характеристик $C^\pm$.

Случай контактной характеристики C^0

При выполнении равенства $c_0 f' - f = 0$ матрица $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]$ в точке $\vartheta = 0$ при $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ имеет вид

$$[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{C^0} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa c_0 f' & \kappa c_0 \\ -c_0 f' / \kappa & 0 & 0 \\ c_0 / \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для определения ранга матрицы $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{C^0}$ в случае контактной характеристики необходимо умножить матрицу $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{C^0}$ на невырожденные

матрицы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ слева и справа по формуле

$$\mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{C^0} \mathbf{T}_2,$$

что преобразует матрицу $[\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{C^0}$ к виду, когда в левом верхнем углу стоит минор $r \times r$. Матрицы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ равны

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix}.$$

Матрицы обратные к $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ имеют вид

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/f' & 0 & 1/f' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/f' \\ 0 & 0 & 1/f' \end{pmatrix}.$$

Матричное произведение $\mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{C^0} \mathbf{T}_2$ равно

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{C^0} \mathbf{T}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f' \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & -\varkappa c_0 f' & \varkappa c_0 \\ -c_0 f' / \varkappa & 0 & 0 \\ c_0 / \varkappa & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_0 f' / \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & -\varkappa c_0 f' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Видно, что размерность ненулевого минора, стоящего в левом верхнем углу матрицы $\mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{C^0} \mathbf{T}_2$, равна 2, отсюда размерность контактной характеристики C^0 , задаваемой уравнением $c_0 f' - f = 0$, равна 1.

Случай звуковых характеристик $C^\pm$

Рассмотрим второй случай, когда удовлетворяется нулю второе уравнение системы (2.32). В этом случае матрицы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ равны

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ c_0 f' - f & \varkappa c_0 f' & -\varkappa c_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_0 f' - f \\ 0 & 1 & c_0 f' / \varkappa \\ 0 & 0 & -c_0 / \varkappa \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Матрицы обратные к $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ равны

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ f' & (c_0 f' - c_0)/\varkappa c_0 & -1/\varkappa c_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varkappa(c_0 f' - f)/c_0 \\ 0 & 1 & f' \\ 0 & 0 & -\varkappa/c_0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, произведение матриц $\mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{C^\pm} \mathbf{T}_2$ равно

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{C^\pm} \mathbf{T}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ c_0 f' - f & \varkappa c_0 f' & -\varkappa c_0 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} c_0 f' - f & -\varkappa c_0 f' & \varkappa c_0 \\ -c_0 f'/\varkappa & c_0 f' - f & 0 \\ c_0/\varkappa & 0 & c_0 f' - f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_0 f' - f \\ 0 & 1 & c_0 f'/\varkappa \\ 0 & 0 & -c_0/\varkappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_0 f'/\varkappa & c_0 f' - f & 0 \\ c_0 f' - f & -\varkappa c_0 f' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Из (2.34) следует, что кратность звуковой характеристики $C^\pm$ равна единице, так как в левом верхнем углу матрицы $\mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}]|_{C^\pm} \mathbf{T}_2$ стоит ненулевой минор размерности 2. Решением уравнения

$$(c_0 f' - f)^2 - (c_0 f')^2 - c_0^2 = 0$$

являются две функции $\pm f$, отсюда получаем, что сумма кратностей характеристик C^0 и $C^\pm$ равна 3, что совпадает с размерностью СУГД задачи (2.29).

Приведение начально-краевой задачи к характеристической задаче Коши стандартного вида для случая $C^\pm$

Приведем НКЗ (2.29) к ХЗК стандартного вида [85; 86; 101; 102]. Для этого СУГД из задачи (2.29) слева умножается на матрицу $\mathbf{T}_1$ (см. формулу (2.33)), а вектор $\mathbf{U}$ заменяется новым вектором $\mathbf{W}$, который определяется следующим образом

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{U} = (w_1, w_2, w_3)^T = \left(c + v \frac{\varkappa}{c_0} (c_0 f' - f), u + v f', -\frac{\varkappa}{c_0} v \right)^T.$$

Для вектора $\mathbf{W}$ записывается НКЗ – задача (2.29), приведенная к ХЗК стандартного вида

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}] \mathbf{T}_2 \mathbf{W}_\vartheta + \mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - \operatorname{tg} \alpha \mathbf{A}] \mathbf{T}_2 \mathbf{W}_\zeta + \\ \quad + \mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - \operatorname{tg} \alpha \mathbf{A}] \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial \xi} \frac{\mathbf{W}}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{W}|_{\vartheta=0} = \mathbf{W}_0, \quad v|_{\zeta=0} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0}. \end{cases} \quad (2.35)$$

Входные данные задачи (2.35) являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки $(\vartheta = 0, \zeta = 0)$.

Далее используется двойной индекс: первый из них означает номер искомой функции, второй – номер коэффициента в разложении этой функции в степенной ряд по ϑ . Отсюда, вектор $\mathbf{W}_0$ равен

$$\mathbf{W}_0 = \left(w_{1,0}, w_{2,0}, w_{3,0} \right)^T = \left(c_0, u_0, 0 \right)^T.$$

Построим краевое условие для задачи (2.35) через компоненты вектора $\mathbf{W}$. Поскольку

$$w_2 = u + f'_\xi v, \quad w_3 = -\frac{\varkappa}{c_0(\xi)} v,$$

то отсюда следует, что

$$v = -\frac{c_0(\xi)}{\varkappa} w_3, \quad u = w_2 + \frac{c_0(\xi)}{\varkappa} f'_\xi w_3.$$

Краевое условие – условие непротекания

$$v|_{\zeta=0} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0}$$

записывается таким образом

$$-\frac{c_0(\xi)}{\varkappa} w_3 \Big|_{\zeta=0} = \operatorname{tg} \alpha \left[w_2 + \frac{c_0(\xi)}{\varkappa} f'_\xi w_3 \right] \Big|_{\zeta=0},$$

то есть

$$-\frac{c_0(\xi)}{\varkappa} [1 + f'_\xi \operatorname{tg} \alpha] w_3 \Big|_{\zeta=0} = w_2 \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0}$$

или

$$w_3|_{\zeta=0} = -\frac{\varkappa}{c_0(\xi)} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{[1 + f'_\xi \operatorname{tg} \alpha]} w_2|_{\zeta=0}. \quad (2.36)$$

Запишем краевое условие (2.36) задачи (2.35) с учетом неявной связи между переменными ζ , ϑ и ξ , задаваемой соотношениями (2.27) и (2.28)

$$w_3|_{\zeta=0} = - \left[\frac{\varkappa}{c_0(\varphi(\zeta - \vartheta))} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{[1 + f'_\xi(\varphi(\zeta - \vartheta)) \operatorname{tg} \alpha]} \right] \Big|_{\zeta=0} w_2|_{\zeta=0}.$$

Множитель, стоящий перед коэффициентом $w_2|_{\zeta=0}$, обозначим следующим образом

$$g(\vartheta) = - \left[\frac{\varkappa}{c_0(\varphi(\zeta - \vartheta))} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{[1 + f'_\xi(\varphi(\zeta - \vartheta)) \operatorname{tg} \alpha]} \right] \Big|_{\zeta=0}. \quad (2.37)$$

Окончательно НКЗ об истечении политропного газа с косої стенки в вакуум в переменных ϑ , ζ имеет вид [85; 86; 101; 102]

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}] \mathbf{T}_2 \mathbf{W}_\vartheta + \mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - \operatorname{tg} \alpha \mathbf{A}] \mathbf{T}_2 \mathbf{W}_\zeta + \\ \quad + \mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - \operatorname{tg} \alpha \mathbf{A}] \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial \xi} \frac{\mathbf{W}}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{W}|_{\vartheta=0} = \mathbf{W}_0, \quad w_3|_{\zeta=0} = g(\vartheta) w_2|_{\zeta=0}. \end{cases} \quad (2.38)$$

Входные данные задачи (2.38), включая краевое условие, также являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки $(\vartheta = 0, \zeta = 0)$.

Задача (2.38) эквивалентна задаче (2.29), а та, в свою очередь, задаче (2.24), так как замены (2.22) и (2.25) невырожденные. Для того чтобы задача (2.38) была ХЗК стандартного вида, необходимо выполнение следующего условия при $\vartheta = 0$, $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0$ (см. работу [50])

$$\det (\mathbf{T}_1 [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}] \mathbf{T}_2) \Big|_{\vartheta=0}^{\mathbf{w}=\mathbf{w}_0} \equiv 0.$$

Известно, что определитель произведения матриц равен произведению определителей каждой из матриц, отсюда

$$\det \mathbf{T}_1 \Big|_{\vartheta=0}^{\mathbf{w}=\mathbf{w}_0} \cdot \det [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}] \Big|_{\vartheta=0}^{\mathbf{w}=\mathbf{w}_0} \cdot \det \mathbf{T}_2 \Big|_{\vartheta=0}^{\mathbf{w}=\mathbf{w}_0} \equiv 0.$$

Так как матрицы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ невырожденные, то их определители отличны от нуля. В результате получаем матричное уравнение [82]

$$\det [\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A}] \Big|_{\vartheta=0}^{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \equiv 0, \quad (2.39)$$

решение которого дает выражение для функции $f(\xi)$ в явном виде.

Приведение НКЗ (2.29) к ХЗК стандартного вида закончено.

2.3 Определение функции $\eta = f(\xi)$, задающей звуковую характеристику $C^\pm$

Построим решение матричного уравнения (2.39) (см. [85; 86; 101; 102]). Рассмотрим нелинейное ДУ, соответствующее звуковой характеристике $C^\pm$

$$(c_0 f' - f)^2 - (c_0 f')^2 - c_0^2 = 0. \quad (2.40)$$

После раскрытия скобок в уравнении (2.40) и приведения подобных слагаемых получим следующее ДУ для неизвестной функции $f(\xi)$

$$f^2 - 2c_0 f f' - c_0^2 = 0. \quad (2.41)$$

Справедливо соотношение $2ff' = (f^2)'$, тогда (2.41) можно записать

$$f^2 - c_0 (f^2)' - c_0^2 = 0,$$

которое после замены $f^2 = y$ преобразуется к виду

$$c_0 y' - y + c_0^2 = 0. \quad (2.42)$$

При $c_0(\xi) \neq 0$ уравнение (2.42) можно привести к нормальному виду

$$y' - \frac{y}{c_0} + c_0 = 0. \quad (2.43)$$

Уравнение (2.43) – линейное неоднородное ДУ. Решение (2.43) строится методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Вначале построим решение однородного уравнения

$$y' - \frac{y}{c_0} = 0.$$

После разделения переменных

$$\frac{dy}{y} = \frac{d\xi}{c_0}, \quad (2.44)$$

где $c_0(\xi) = (\kappa\xi + 1)/(\kappa + 1)$ – скорость звука в ЦВ. Подставим выражение для $c_0(\xi)$ в уравнение (2.44), получим

$$\frac{dy}{y} = \frac{(\kappa + 1) d\xi}{\kappa\xi + 1} = \frac{(\kappa + 1) d(\kappa\xi + 1)}{\kappa} = \frac{(\kappa + 1) dc_0}{\kappa}.$$

Решение последнего уравнения

$$y(\xi) = C_1 [c_0(\xi)]^{(\kappa+1)/\kappa}, \quad C_1 = \text{const}. \quad (2.45)$$

Построим решение неоднородного уравнения (2.43), используя решение однородного уравнения (2.45), полагая константу C_1 произвольной неотрицательной функцией независимой переменной ξ , то есть $C_1 = C_1(\xi)$. Подставим выражение для $y(\xi)$ в исходное уравнение (2.42)

$$C_1' c_0^{1+1/\kappa} + C_1 \frac{\kappa + 1}{\kappa} c_0^{1/\kappa} c_0' - C_1 \frac{c_0^{(\kappa+1)/\kappa}}{c_0} + c_0 = 0. \quad (2.46)$$

С учетом того, что $c_0' = \kappa/(\kappa + 1)$, второе и третье слагаемые в уравнении (2.46) сокращаются. После сокращения оставшихся слагаемых на $c_0(\xi)$ окончательно получим ДУ для функции C_1

$$C_1' = -c_0^{-1/\kappa}. \quad (2.47)$$

Необходимо рассмотреть два случая: когда $\gamma = 3$ ($\varkappa = 1$) и когда $\gamma \neq 3$ ($\varkappa \neq 1$), так как в зависимости от значения $\varkappa$ решение (2.47) будет отличаться.

При $\gamma = 3$ ($\varkappa = 1$) уравнение (2.47) упрощается к виду

$$\frac{dC_1}{d\xi} = -\frac{2}{\xi + 1}, \quad C_1(\xi) = -2 \ln(\xi + 1) + C_2, \quad C_2 = \text{const}. \quad (2.48)$$

Подставим выражение (2.48) в (2.45), с учетом замены $y = f^2(\xi)$ получим выражение для характеристики

$$f(\xi) = \pm c_0 \sqrt{C_2 - 2 \cdot \ln(\xi + 1)}. \quad (2.49)$$

Для функции $f(\xi)$ область определения $-1 < \xi < 1$, при $\xi = -1$ скорость звука на характеристике AD принимает значение $c_0(-1) = 0$, что задает границу газа с вакуумом, при $\xi = 1$ скорость звука на характеристике AD принимает значение $c_0(1) = 1$, что задает границу газа с покоем. Из данных условий определим константу интегрирования C_2 .

Первое условие справедливо в точке с координатой $\xi = -1$. Найдем значение функции $f(\xi)$ в точке $\xi = -1$

$$f(-1) = \pm 0 \cdot \infty.$$

Для раскрытия неопределенности $[0 \cdot \infty]$ найдем предел функции $f(\xi)$ при $\xi \rightarrow -1$ по правилу Лопиталя

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow -1} f(\xi) &= \pm \lim_{\xi \rightarrow -1} \frac{(\xi + 1)}{2} \sqrt{C_2 - 2 \ln(\xi + 1)} = [0 \cdot \infty] = \\ &= \lim_{\xi \rightarrow -1} \left[\frac{\sqrt{C_2 - 2 \ln(\xi + 1)}}{\frac{2}{(\xi + 1)}} \right]^2 = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{\xi \rightarrow -1} \frac{-\frac{2}{\xi + 1}}{-\frac{2 \cdot 4}{(\xi + 1)^3}} = \frac{1}{4} \lim_{\xi \rightarrow -1} (\xi + 1)^2 = 0, \end{aligned}$$

отсюда $f(-1) = 0$, константа C_2 не определена.

Второе условие справедливо в точке с координатой $\xi = 1$, в которой характеристика $f(\xi)$ пересекается с косою стенкой $\eta = \xi \operatorname{tg} \alpha$. Значение константы C_2 определяется из уравнения

$$f(1) = \pm \sqrt{C_2 - 2 \ln 2} = \operatorname{tg} \alpha, \quad C_2 = \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \ln 2.$$

Подставляя выражение для C_2 в (2.49), получим окончательное выражение для характеристики $C^\pm$ при $\gamma = 3$ ($\varkappa = 1$)

$$f(\xi) = \pm c_0 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0}, \quad c_0(\xi) = (\xi + 1)/2.$$

Рассмотрим случай, когда $\gamma \neq 3$ ($\varkappa \neq 1$), тогда уравнение (2.47) имеет вид

$$\frac{dC_1}{d\xi} = -\frac{1}{c_0^{1/\varkappa}} = -\left(\frac{\varkappa\xi + 1}{\varkappa + 1}\right)^{-1/\varkappa}.$$

В результате интегрирования ДУ получим

$$\begin{aligned} C_1(\xi) &= C_2 - \frac{\varkappa + 1}{\varkappa} \frac{1}{1 - 1/\varkappa} \left(\frac{\varkappa\xi + 1}{\varkappa + 1}\right)^{1-1/\varkappa} = \\ &= C_2 + \frac{\varkappa + 1}{1 - \varkappa} \left(\frac{\varkappa\xi + 1}{\varkappa + 1}\right)^{1-1/\varkappa} = C_2 + \beta \left(\frac{\varkappa\xi + 1}{\varkappa + 1}\right)^{1-1/\varkappa}, \quad \beta = \frac{\varkappa + 1}{1 - \varkappa}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Подставим выражение (2.50) в (2.45), с учетом замены $y = f^2(\xi)$ получим выражение для характеристики

$$f(\xi) = \pm \sqrt{C_2 \left(\frac{\varkappa\xi + 1}{\varkappa + 1}\right)^{1+1/\varkappa} + \beta \left(\frac{\varkappa\xi + 1}{\varkappa + 1}\right)^2} = \pm c_0 \sqrt{\beta + C_2 c_0^{1/\varkappa-1}}. \quad (2.51)$$

Константу интегрирования C_2 в (2.51) определим из условий на границе с вакуумом $c_0 = 0$ и покоем $c_0 = 1$. Первое условие справедливо в точке с координатой $\xi = -1/\varkappa$, тогда значение функции $f(-1/\varkappa) = 0$ и константа C_2 не определена. Второе условие справедливо в точке с координатой $\xi = 1$, в которой характеристика $f(\xi)$ пересекается с косой стенкой $\eta = \xi \operatorname{tg} \alpha$ и значение константы C_2 определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\beta + C_2}, \quad C_2 = \operatorname{tg}^2 \alpha - \beta.$$

Подставим выражение для C_2 в формулу (2.51), получим окончательное выражение для звуковой характеристики $C^\pm$ при $\gamma \neq 3$ ($\varkappa \neq 1$):

$$f(\xi) = \pm c_0 \sqrt{\beta + c_0^{1/\varkappa-1} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}, \quad c_0(\xi) = (\varkappa\xi + 1)/(\varkappa + 1). \quad (2.52)$$

Случай, когда выполняется соотношение $\operatorname{tg}^2 \alpha = \beta$ при $\gamma \neq 3$ ($\varkappa \neq 1$), называется согласованным, тогда выражение (2.52) для звуковой характеристики принимает вид

$$f(\xi) = \pm c_0 \sqrt{\beta}. \quad (2.53)$$

С точностью до обозначения переменных, полученное выражение (2.52), задающее звуковую характеристику, распространяющуюся по ЦВ, совпало с полученными ранее результатами [39; 46; 48]

$$f(\xi) = \pm \begin{cases} c_0 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0}, & \text{если } \gamma = 3 \quad (\varkappa = 1), \\ c_0 \sqrt{\beta + c_0^{1/\varkappa-1} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}, & \text{если } \gamma \neq 3 \quad (\varkappa \neq 1). \end{cases} \quad (2.54)$$

В область интегрирования СУГД попадает звуковая характеристика C^+ , отсюда окончательное выражение для функции $f(\xi)$ в явном виде [82; 85; 86; 101; 102] равно

$$f(\xi) = \begin{cases} c_0 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0}, & \text{если } \gamma = 3 \quad (\kappa = 1), \\ c_0 \sqrt{\beta + c_0^{1/\kappa-1} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}, & \text{если } \gamma \neq 3 \quad (\kappa \neq 1), \end{cases} \quad (2.55)$$

и для согласованного случая

$$f(\xi) = c_0 \sqrt{\beta}. \quad (2.56)$$

Когда $\gamma = 3$, область определения функции $f(\xi)$ задается неравенством

$$c_0 \leq \exp(0.5 \operatorname{tg}^2 \alpha), \quad (2.57)$$

то есть максимальное значение c_0 ограничено конкретным значением α .

Область определения функции $f(\xi)$, если $\gamma \neq 3$, задается неравенством

$$\beta + c_0^{1/\kappa-1} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta) \geq 0,$$

которое справедливо для любых неотрицательных значений c_0 при $\operatorname{tg}^2 \alpha > \beta$. При $\operatorname{tg}^2 \alpha < \beta$ область определения функции $f(\xi)$ задается неравенством

$$c_0 \leq \left(\frac{\beta}{\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}. \quad (2.58)$$

На рис. 2.2 приведены графики функции $f(\xi)$ для различных значений α , когда $\gamma \neq 3$.

Зная выражение для функции $f(\xi)$ в явном виде, докажем, что замена (2.25) невырожденная, то есть справедливо неравенство (см. работу [85])

$$J_2 = \operatorname{tg} \alpha - f'_\xi \neq 0, \quad (2.59)$$

тогда наклон кривой не равен наклону звуковой характеристики, разделяющей ЦВ и ДВ.

Производную функции $f(\xi)$ можно выразить из уравнения (2.40)

$$f'(\xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{f}{c_0} - \frac{c_0}{f} \right). \quad (2.60)$$

Докажем неравенство (2.59) методом от противного. Пусть неравенство (2.59) неверно, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha - f'_\xi = 0.$$

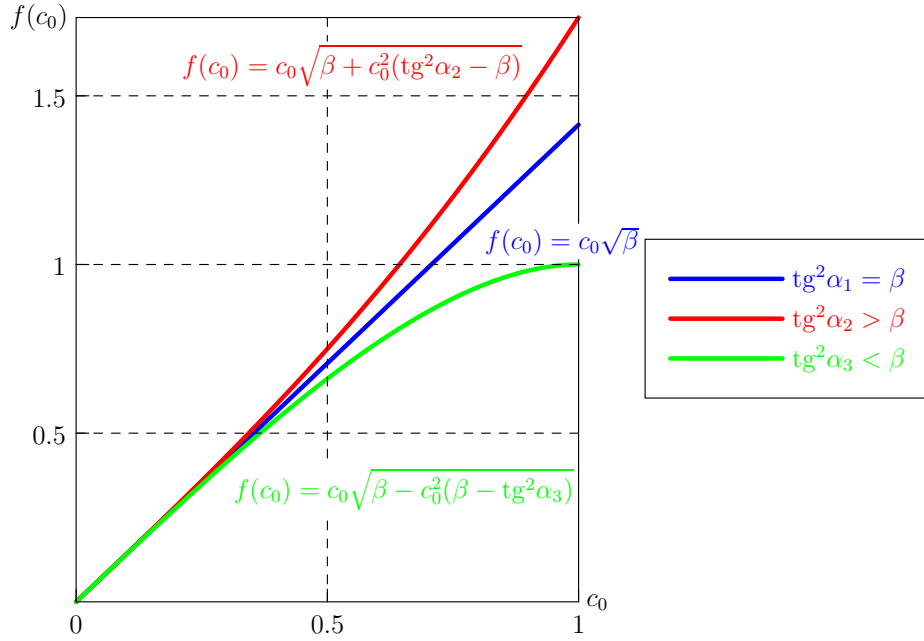


Рисунок 2.2 – Графики функции $f(\xi)$ для различных значений α

С учетом (2.60) получим

$$\frac{f^2 - 2c_0 \operatorname{tg} \alpha f - c_0^2}{c_0 f} = 0. \quad (2.61)$$

Знаменатель дроби (2.61) не равен нулю при $c_0 \neq 0$ и $f(\xi) \neq 0$ (рассматриваем нетривиальное решение (2.61)), отсюда получим квадратное уравнение для функции $f(\xi)$

$$f^2 - 2c_0 \operatorname{tg} \alpha f - c_0^2 = 0. \quad (2.62)$$

Решением (2.62) будет выражение для функции $f(\xi)$

$$f(\xi) = c_0 \left(\operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} \right). \quad (2.63)$$

Выражение (2.63) для функции $f(\xi)$ не совпадает с полученным ранее (2.55), следовательно, неравенство (2.59) выполняется и замена (2.25) невырожденная, что и требовалось доказать.

Определение уравнения звуковой характеристики C^+ , разделяющей течение типа ЦВ и течение типа ДВ, в явном виде закончено.

2.4 Теорема существования и единственности поставленной характеристической задачи Коши стандартного вида

Докажем аналог теоремы Ковалевской для задачи (2.38) (см. [85; 101; 102]). Система из задачи (2.38) на плоскости $\vartheta = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -\frac{c_0}{\varkappa} f'_\xi & c_0 f'_\xi - f & 0 \\ c_0 f'_\xi - f & -\varkappa c_0 f'_\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} -\frac{c_0}{\varkappa} \operatorname{tg} \alpha & c_0 \operatorname{tg} \alpha - f & -\frac{c_0}{\varkappa} f (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) \\ c_0 \operatorname{tg} \alpha - f & -\varkappa c_0 \operatorname{tg} \alpha & c_0 f (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) \\ c_0 f (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) & -\varkappa c_0 f (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) & -c_0 (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) (f^2 + c_0^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_{1,0\zeta} \\ w'_{2,0\zeta} \\ w'_{3,0\zeta} \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{c_0}{\varkappa} f' \operatorname{tg} \alpha + \frac{c_0}{\varkappa} f f'' + u'_0 f f' \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} (c_0 f' \operatorname{tg} \alpha - c_0 f f'' + u'_0 f f' - c'_0 c_0) \\ 0 & 0 & c_0 f f'' (c_0 - \varkappa) - u'_0 f f' (c_0 + \varkappa) - c'_0 c_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ w_{3,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.64)
\end{aligned}$$

Проверим необходимое условие разрешимости системы (2.64). Для этого распишем третье уравнение системы

$$\begin{aligned}
0 + c_0 f (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) (w'_{1,0\zeta} - \varkappa w'_{2,0\zeta}) - c_0 (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) (f^2 + c_0^2) w'_{3,0\zeta} + \\
+ [c_0 f f'' (c_0 - \varkappa) - u'_0 f f' (c_0 + \varkappa) - c'_0 c_0^2] w_{3,0} = 0. \quad (2.65)
\end{aligned}$$

С учетом явного вида $w_{1,0} = c_0$, $w_{2,0} = u_0$, $w_{3,0} = 0$ будем иметь

$$(w'_{1,0\zeta} - \varkappa w'_{2,0\zeta}) = \frac{1}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} (w'_{1,0\xi} - \varkappa w'_{2,0\xi}) = \frac{c'_0 - \varkappa u'_0}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} \equiv 0.$$

Для второго слагаемого

$$w'_{3,0\zeta} = w'_{3\zeta}|_{\vartheta=0} = -\frac{\varkappa}{c_0} v'_\zeta|_{\vartheta=0} = -\frac{\varkappa}{c_0} \frac{v_\xi|_{\vartheta=0}}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} = -\frac{\varkappa}{c_0} \frac{v'_0}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} \equiv 0.$$

Так как $w_3|_{\vartheta=0} = w_{3,0} = 0$, то последнее слагаемое уравнения (2.65) равно нулю, и уравнение (2.65) обращается в тождество – необходимое условие разрешимости выполняется.

Таким образом, для системы (2.64) вид матриц удовлетворяет условиям аналога теоремы Ковалевской [27; 50; 76]:

1. Матрица размерностью 3×3 при векторе производных $\mathbf{W}_\vartheta$ на плоскости $\vartheta = 0$ в левом верхнем углу имеет ненулевой минор размерностью 2×2

$$\begin{vmatrix} -c_0 f'_\xi / \varkappa & c_0 f'_\xi - f \\ c_0 f'_\xi - f & -\varkappa c_0 f'_\xi \end{vmatrix} = c_0^2 f_\xi'^2 - (c_0 f'_\xi - f)^2 \neq 0.$$

Остальные элементы матрицы равны нулю.

2. В матрице, стоящей перед вектором производных W_ζ , элемент из третьей строки и третьего столбца

$$-c_0 (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) (f^2 + c_0^2)$$

не равен 0, т.к. справедливо неравенство $f' - \operatorname{tg} \alpha \neq 0$.

Следовательно, получившаяся задача (2.38) является ХЗК стандартного вида [50]. Таким образом, для задачи (2.38) доказан аналог теоремы Ковалевской.

Теорема 2. *Поставленная задача (2.38) при найденной функции $f(\xi)$ является ХЗК стандартного вида, и поэтому у нее в некоторой окрестности точки $(\zeta = 0, \vartheta = 0)$ существует единственное локально-аналитическое решение, представимое в виде сходящегося ряда*

$$W(\zeta, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(\zeta) \frac{\vartheta^k}{k!}; \quad W_k(\zeta) = \left. \frac{\partial^k W}{\partial \vartheta^k} \right|_{\vartheta=0}. \quad (2.66)$$

2.5 Алгоритм построения решения рассматриваемой характеристической задачи Коши стандартного вида

Алгоритм построения решения задачи (2.38) основан на приведенном доказательстве теоремы и представляет из себя следующую последовательность действий.

Коэффициенты ряда (2.66) с номером ноль $w_{1,0}$, $w_{2,0}$, $w_{3,0}$ определяются из НУ. Для определения коэффициентов ряда с номером один в системе из задачи (2.38) полагается $\vartheta = 0$. Тогда из первых двух уравнений системы задачи (2.38) как из СЛАУ находятся в виде аналитических функций коэффициенты ряда (2.66) с номером один для двух первых искомых функций: $w_{1,1}$, $w_{2,1}$. Третье уравнение из системы задачи (2.38) при $\vartheta = 0$ становится **необходимым условием разрешимости** рассматриваемой ХЗК – дополнительным соотношением на коэффициенты $w_{1,0}$, $w_{2,0}$, $w_{3,0}$. В данной задаче эти необходимые условия выполняются автоматически, поскольку НУ в задаче (2.38) являются ее частным решением, что напрямую проверено предыдущими выкладками.

После этого третье уравнение из задачи (2.38) дифференцируется по ϑ и полагается $\vartheta = 0$. В полученном соотношении множители перед коэффициентами $w_{1,2}$, $w_{2,2}$, $w_{3,2}$ равны нулю. В оставшихся слагаемых величины $w_{1,1}$, $w_{2,1}$ и их производные по ζ известны, а неизвестным является коэффициент $w_{3,1}$

и его производная по ζ . Это соотношение рассматривается как обыкновенное дифференциальное уравнение для $w_{3,1}$ с производной этой искомой функции по переменной ζ (транспортное уравнение). Для однозначной разрешимости этого уравнения требуются два условия:

1. Коэффициент перед соответствующей производной $w_{3,1\zeta}$, то есть коэффициент $-c_0 (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) (f^2 + c_0^2)$, отличен от нуля при $\vartheta = \zeta = 0$, поскольку $(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) \neq 0$.
2. Для функции $w_{3,1}$ задано начальное условие при $\zeta = 0$.

Выше показано, что оба условия выполняются. НУ для транспортного уравнения получается следующим образом: краевое условие из задачи (2.38) дифференцируется по ϑ и в получившемся соотношении

$$w_{3\vartheta}|_{\zeta=0} = [g'(\vartheta) w_2 + g(\vartheta) w_{2\vartheta}]|_{\zeta=0}$$

полагается $\vartheta = 0$

$$w_{3,1}|_{\zeta=0} = [g'(0)w_{2,0} + g(0)w_{2,1}]_{\zeta=0}, \quad (2.67)$$

здесь $g(0)$ и $g'(0)$ – значения функции $g(\vartheta)$ (см. формулу (2.37)) и ее производной по ϑ при $\vartheta = 0$.

Поскольку коэффициенты $w_{2,0}$ и $w_{2,1}$ известны, а значит, известны и их значения при $\zeta = 0$, то последнее соотношение (2.67) и дает НУ для обыкновенного ДУ для коэффициента $w_{3,1}$, которое имеет единственное аналитическое решение.

Построение следующих коэффициентов ряда (2.66) производится следующим образом.

Первые два уравнения системы из задачи (2.38) дифференцируются k раз по ϑ , и полагается $\vartheta = 0$. Из этих двух получившихся соотношений, как из СЛАУ с отличным от нуля определителем, находятся коэффициенты $w_{1,k+1}$, $w_{2,k+1}$ в виде аналитических функций.

После этого третье уравнение системы из задачи (2.38) дифференцируется $(k+1)$ раз по ϑ и полагается $\vartheta = 0$. В получившемся соотношении коэффициенты перед величинами $w_{1,k+2}$, $w_{2,k+2}$, $w_{3,k+2}$ равны нулю, и это последнее соотношение становится обыкновенным ДУ для искомой функции $w_{3,k+1}$. Коэффициент перед соответствующей производной отличен от нуля, то есть функция $-c_0 (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) (f^2 + c_0^2)$ при $\zeta = 0$ отлична от нуля, поэтому при задании для этого обыкновенного ДУ НУ функция $w_{3,k+1}$ определится однозначно в виде аналитической функции. Требуемое НУ получится после дифференцирования $(k+1)$

раз по ϑ краевого условия из задачи (2.38) и после подстановки в получившееся соотношение значения $\vartheta = 0$. Все коэффициенты $w_{2,\ell}$ при $0 \leq \ell \leq k+1$ к этому моменту известны. Построение решения задачи (2.38) в виде ряда (2.66) в пространстве $\{\vartheta, \xi\}$ закончено.

Для построения решения задачи (2.38) в пространстве физических автомодельных переменных $\{\xi, \eta\}$ необходимо осуществлять обратное преобразование согласно заменам (2.22) и (2.25), что в общем (несогласованном) случае выполнить в явном виде затруднительно. Поэтому искомое двумерное течение будет строиться как решение задачи (2.24) в пространстве переменных $\{\xi, \vartheta\}$ в виде сходящегося ряда по степеням ϑ

$$U(\xi, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\xi) \frac{\vartheta^k}{k!}, \quad U_k(\xi) = \left. \frac{\partial^k U}{\partial \vartheta^k} \right|_{\vartheta=0}, \quad (2.68)$$

так как задачи (2.38) и (2.24) эквивалентны. Алгоритм построения решения задачи (2.24) в виде ряда (2.68) представляет из себя следующую последовательность действий.

Коэффициенты $u_1(\xi)$, $v_1(\xi)$ определяются при подстановке в систему задачи (2.24) значения $\vartheta = 0$, при этом первое уравнение системы задачи (2.24) рассматриваемой ХЗК тождественно равно нулю, так как удовлетворяет первому условию аналога теоремы Ковалевской $\det(\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A})|_{\substack{U=U_0 \\ \vartheta=0}} \equiv 0$.

Далее система задачи (2.24) дифференцируется по ϑ и полагается $\vartheta = 0$. Коэффициенты $u_2(\xi)$, $v_2(\xi)$ находятся из второго и третьего уравнения системы, как из СЛАУ. Выражения для $u_2(\xi)$, $v_2(\xi)$, зависящие от $u_0(\xi)$, $c_0(\xi)$, $u'_0(\xi)$, $c'_0(\xi)$, $u_1(\xi)$, $v_1(\xi)$, $u'_1(\xi)$, $v'_1(\xi)$, подставляются в первое уравнение системы, в полученном соотношении коэффициент при $c_2(\xi)$ тождественно равен нулю, так как $\det(\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A})|_{\substack{U=U_0 \\ \vartheta=0}} \equiv 0$. Данное соотношение рассматривается как обыкновенное ДУ для $c_1(\xi)$ — транспортное уравнение. НУ для транспортного уравнения задачи (2.24) строится из (2.67) (НУ ДУ для коэффициента $w_{3,1}$) с учетом того, что $v = -\frac{c_0(\xi)}{w_3}$ при подстановке в последнее выражение значения $\vartheta = 0$. Связь между $v_1(\xi)$ и $c_1(\xi)$ определена ранее, тогда функция $c_1(\xi)$ однозначно определяется из решения построенной задачи Коши.

Коэффициенты $c_n(\xi)$, $u_n(\xi)$, $v_n(\xi)$ ряда (2.68) находятся следующим образом. Система задачи (2.24) дифференцируется n раз по ϑ , и полагается $\vartheta = 0$. Из второго и третьего уравнения системы, как из СЛАУ, находятся коэффициенты $u_{n+1}(\xi)$, $v_{n+1}(\xi)$ и подставляются в первое уравнение системы. В получен-

ном соотношении коэффициент при $c_{n+1}(\xi)$ тождественно равен нулю, так как $\det(\mathbf{B} - f'_\xi \mathbf{A})|_{\substack{v=v_0 \\ \vartheta=0}} \equiv 0$, таким образом получаем ДУ для коэффициента $c_n(\xi)$. Коэффициенты $u_n(\xi)$, $v_n(\xi)$ получаем из выражений для $u_{n+1}(\xi)$, $v_{n+1}(\xi)$ в результате замены $n+1 \rightarrow n$ при $n \geq 2$. НУ полученного ДУ для $c_n(\xi)$ строится в результате дифференцирования n раз по ϑ краевого условия задачи (2.38) и далее полагается $\vartheta = 0$. К этому моменту известны все коэффициенты $w_{2,\ell}$ при $0 \leq \ell \leq n$. Выражение $v = -\frac{c_0(\xi)}{\varkappa} w_3$ также дифференцируется n раз по ϑ и полагается $\vartheta = 0$, в результате находим соотношение между v_n и $w_{3,n}$. Связь между $v_n(\xi)$ и $c_n(\xi)$ была определена ранее. Отсюда, НУ для функции $c_n(\xi)$ определяется однозначно, и функция $c_n(\xi)$ является единственным решением построенной задачи Коши.

Построение решения задачи (2.24) в виде ряда (2.68) в пространстве физических автомодельных переменных $\{\xi, \vartheta\}$ закончено.

2.6 Получение первых коэффициентов $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ ряда по степеням ϑ для искомых функций $u(\xi, \vartheta)$ и $v(\xi, \vartheta)$

В параграфе 2.5 показано, что решение задачи (2.24) в пространстве физических автомодельных переменных $\{\xi, \vartheta\}$ в соответствии с теоремой, доказанной в п. 2.4, строится в виде сходящегося ряда (2.68) по степеням ϑ . Из (2.68) при $\vartheta = 0$ следует

$$\begin{aligned} c|_{\vartheta=0} &= c_0, & c_\xi|_{\vartheta=0} &= c'_0, & c_\vartheta|_{\vartheta=0} &= c_1, \\ u|_{\vartheta=0} &= u_0, & u_\xi|_{\vartheta=0} &= u'_0, & u_\vartheta|_{\vartheta=0} &= u_1, \\ v|_{\vartheta=0} &= 0, & v_\xi|_{\vartheta=0} &= 0, & v_\vartheta|_{\vartheta=0} &= v_1. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Согласно алгоритму, изложенному в п. 2.5, построение решения задачи начинают с определения коэффициентов $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ [82; 85; 86; 101; 102]. С учетом (2.69) СУГД задачи (2.24) при $\vartheta = 0$ предстает в виде

$$\begin{cases} (c_0 f' - f) c_1 - \varkappa c_0 f' u_1 + \varkappa c_0 v_1 - c_0 c'_0 + \varkappa c_0 u'_0 = 0, \\ -\frac{c_0}{\varkappa} f' c_1 + (c_0 f' - f) u_1 + \frac{c_0}{\varkappa} c'_0 - c_0 u'_0 = 0, \\ \frac{c_0}{\varkappa} c_1 + (c_0 f' - f) v_1 = 0. \end{cases} \quad (2.70)$$

Так как $c'_0 = \varkappa u'_0$, то в первом и втором уравнении системы (2.70) сокращаются два последних слагаемых и система принимает вид

$$\begin{cases} (c_0 f' - f) c_1 - \varkappa c_0 f' u_1 + \varkappa c_0 v_1 = 0, \\ -\frac{c_0}{\varkappa} f' c_1 + (c_0 f' - f) u_1 = 0, \\ \frac{c_0}{\varkappa} c_1 + (c_0 f' - f) v_1 = 0. \end{cases} \quad (2.71)$$

В системе (2.71) функции $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ неизвестны. Значения c_0 и u_0 равны значениям скорости звука и скорости горизонтального движения частиц газа на характеристике $f(\xi)$ и совпадают с параметрами газа в ЦВ.

Во втором и третьем уравнениях системы (2.71) перенесем слагаемые, не содержащие неизвестных функций $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$, в правую часть и разделим их на $(c_0 f' - f)$, получим выражения для $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$, которые подставим в первое уравнение системы

$$\begin{cases} (c_0 f' - f) c_1 - \varkappa c_0 f' \frac{c_1}{\varkappa} \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} - \varkappa c_0 \frac{c_1}{\varkappa} \frac{c_0}{c_0 f' - f} = 0, \\ u_1 = \frac{c_1}{\varkappa} \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f}, \\ v_1 = -\frac{c_1}{\varkappa} \frac{c_0}{c_0 f' - f}. \end{cases} \quad (2.72)$$

В первом уравнении системы (2.72) выносим общий множитель $c_1(\xi)$ за скобку и получаем уравнение

$$\frac{c_1 \left[(c_0 f' - f)^2 - (c_0 f')^2 - c_0^2 \right]}{c_0 f' - f} = 0.$$

Числитель дроби тождественно равен нулю, так как совпадает с уравнением для $f(\xi)$, которое в нашей задаче считается выполненным. Поэтому последнее равенство выполняется при любом конечном значении $c_1(\xi)$, и поэтому это соотношение никаких дополнительных ограничений на $c_1(\xi)$ не накладывает.

Таким образом, решением системы (2.71) будут выражения для функций $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$, определенные через функцию $c_1(\xi)$

$$u_1 = \frac{c_1}{\varkappa} \cdot \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f}, \quad v_1 = -\frac{c_1}{\varkappa} \cdot \frac{c_0}{c_0 f' - f}. \quad (2.73)$$

Из выражений (2.73) для функций $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ можно получить соотношение, которое будет использоваться в дальнейшем

$$u_1 = -f' v_1. \quad (2.74)$$

Определение коэффициентов $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ ряда (2.68) закончено.

2.7 Задача Коши для нахождения коэффициента $c_1(\xi)$ ряда по степеням ϑ для искомой функции $c(\xi, \vartheta)$

Для нахождения коэффициента $c_1(\xi)$ ряда (2.68), в соответствии с алгоритмом построения решения задачи п. 2.5, необходимо систему (2.24) продифференцировать по переменной ϑ и приравнять $\vartheta = 0$. После дифференцирования по ϑ система (2.24) примет вид [82; 85; 86; 101; 102]

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\vartheta} c_{\xi} + (u - \xi) c_{\xi \vartheta} + \kappa c_{\vartheta} u_{\xi} + \kappa c u_{\xi \vartheta} + c_{\vartheta \vartheta} [v - \vartheta - f - (u - \xi) f'] + \\ \quad + (v_{\vartheta} - 1 - u_{\vartheta} f') c_{\vartheta} - \kappa c_{\vartheta} f' u_{\vartheta} - \kappa c f' u_{\vartheta \vartheta} + \kappa c_{\vartheta} v_{\vartheta} + \kappa c v_{\vartheta \vartheta} = 0, \\ \frac{c_{\vartheta}}{\kappa} c_{\xi} + \frac{c}{\kappa} c_{\xi \vartheta} + u_{\vartheta} u_{\xi} + (u - \xi) u_{\xi \vartheta} - \frac{c_{\vartheta}^2}{\kappa} f' - \frac{c}{\kappa} f' c_{\vartheta \vartheta} + \\ \quad + [v - \vartheta - f - (u - \xi) f'] u_{\vartheta \vartheta} + (v_{\vartheta} - 1 - u_{\vartheta} f') u_{\vartheta} = 0, \\ u_{\vartheta} v_{\xi} + (u - \xi) v_{\xi \vartheta} + \frac{c_{\vartheta}^2}{\kappa} + \frac{c}{\kappa} c_{\vartheta \vartheta} + (v - \vartheta - f - (u - \xi) f') v_{\vartheta \vartheta} + \\ \quad + (v_{\vartheta} - 1 - u_{\vartheta} f') v_{\vartheta} = 0. \end{array} \right. \quad (2.75)$$

В систему (2.75) подставим значение переменной $\vartheta = 0$. При этом в соответствии с (2.68) будут справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} c|_{\vartheta=0} &= c_0, \quad c_{\xi}|_{\vartheta=0} = c'_0, \quad c_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = c_1, \quad c_{\xi \vartheta}|_{\vartheta=0} = c'_1, \quad c_{\vartheta \vartheta}|_{\vartheta=0} = c_2, \\ u|_{\vartheta=0} &= u_0, \quad u_{\xi}|_{\vartheta=0} = u'_0, \quad u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = u_1, \quad u_{\xi \vartheta}|_{\vartheta=0} = u'_1, \quad u_{\vartheta \vartheta}|_{\vartheta=0} = u_2, \\ v|_{\vartheta=0} &= 0, \quad v_{\xi}|_{\vartheta=0} = 0, \quad v_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = v_1, \quad v_{\xi \vartheta}|_{\vartheta=0} = v'_1, \quad v_{\vartheta \vartheta}|_{\vartheta=0} = v_2. \end{aligned}$$

В результате система (2.75) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 c'_0 - c_0 c'_1 + \kappa c_1 u'_0 + \kappa c_0 u'_1 + (v_1 - 1 - u_1 f') c_1 + (c_0 f' - f) c_2 - \\ \quad - \kappa f' c_1 u_1 - \kappa f' c_0 u_2 + \kappa c_1 v_1 + \kappa c_0 v_2 = 0, \\ c_1 c'_0 + c_0 c'_1 + \kappa u_1 u'_0 - \kappa c_0 u'_1 - c_1^2 f' - c_0 f' c_2 + \kappa (c_0 f' - f) u_2 + \\ \quad + \kappa (v_1 - 1 - u_1 f') u_1 = 0, \\ -\kappa c_0 v'_1 + c_1^2 + c_0 c_2 + \kappa (v_1 - 1 - u_1 f') v_1 + \kappa (c_0 f' - f) v_2 = 0. \end{array} \right. \quad (2.76)$$

Из второго и третьего уравнения системы (2.76) выразим функции

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{1}{\kappa (c_0 f' - f)} \times \\ &\times (c_1 c'_0 + c_0 c'_1 + \kappa u_1 u'_0 - \kappa c_0 u'_1 - c_1^2 f' - c_0 f' c_2 + \kappa (v_1 - 1 - u_1 f') u_1), \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$v_2 = -\frac{1}{\kappa(c_0 f' - f)} [c_1^2 + c_0 c_2 + \kappa(v_1 - 1 - u_1 f') v_1 - \kappa c_0 v_1'] \quad (2.78)$$

и подставим выражения для $u_2(\xi)$ и $v_2(\xi)$ в первое уравнение системы (2.76), в нем сгруппируем слагаемые, содержащие коэффициент $c_2(\xi)$, в результате получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} & u_1 c_0' - c_0 c_1' + \kappa c_1 u_0' + \kappa c_0 u_1' + (v_1 - 1 - u_1 f') c_1 - \kappa f' c_1 u_1 + \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} \times \\ & \times [c_1 c_0' + c_0 c_1' + \kappa u_1 u_0' - \kappa c_0 u_1' - c_1^2 f' + \kappa(v_1 - 1 - u_1 f') u_1] + \kappa c_1 v_1 - \\ & - \frac{c_0}{c_0 f' - f} [c_1^2 + \kappa(v_1 - 1 - u_1 f') v_1 - \kappa c_0 v_1'] + c_2 \frac{[(c_0 f' - f)^2 - (c_0 f')^2 - c_0^2]}{c_0 f' - f} = 0. \end{aligned}$$

Множитель при коэффициенте $c_2(\xi)$ тождественно равен нулю, так как справедливо уравнение (2.40). В результате получаем ДУ относительно коэффициентов $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$

$$\begin{aligned} & u_1 c_0' - c_0 c_1' + \kappa c_1 u_0' + \kappa c_0 u_1' + (v_1 - 1 - u_1 f') c_1 - \kappa f' c_1 u_1 + \\ & + \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} [c_1 c_0' + c_0 c_1' + \kappa u_1 u_0' - \kappa c_0 u_1' - c_1^2 f' + \kappa(v_1 - 1 - u_1 f') u_1] + \\ & + \kappa c_1 v_1 - \frac{c_0}{c_0 f' - f} [c_1^2 + \kappa(v_1 - 1 - u_1 f') v_1 - \kappa c_0 v_1'] = 0, \quad (2.79) \end{aligned}$$

которое можно свести к ДУ относительно неизвестной функции $c_1(\xi)$, используя выражения (2.73) для функций $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$.

Сгруппируем множители при $(v_1 - 1 - u_1 f')$ в уравнении (2.79)

$$\begin{aligned} & (v_1 - 1 - u_1 f') \left[c_1 + \kappa u_1 \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} - \kappa v_1 \frac{c_0}{c_0 f' - f} \right] = \\ & = (v_1 - 1 - u_1 f') c_1 \left[1 + \left(\frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} \right)^2 + \left(\frac{c_0}{c_0 f' - f} \right)^2 \right] = \\ & = (v_1 - 1 - u_1 f') c_1 \left[1 + \frac{c_0^2 f'^2 + c_0^2}{(c_0 f' - f)^2} \right] = 2c_1 (v_1 - 1 - u_1 f'). \end{aligned}$$

С учетом последнего выражения перепишем (2.79)

$$\begin{aligned} & u_1 c_0' - c_0 c_1' + c_1 c_0' + \kappa c_0 u_1' + 2c_1 (v_1 - 1 - u_1 f') - \kappa f' c_1 u_1 + \kappa c_1 v_1 + \\ & + \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} [c_1 c_0' + c_0 c_1' + u_1 c_0' - \kappa c_0 u_1' - c_1^2 f'] - \frac{c_0}{c_0 f' - f} [c_1^2 - \kappa c_0 v_1'] = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

В (2.80) группируем множители при $c_1'(\xi)$

$$\begin{aligned}
& -c_0 c'_1 + \varkappa c_0 u'_1 + c'_1 \frac{c_0^2 f'}{c_0 f' - f} - \varkappa c_0 f' \frac{c_0 u'_1}{c_0 f' - f} + \varkappa c_0 \frac{c_0 v'_1}{c_0 f' - f} = \\
& = c'_1 c_0 \left[\frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} - 1 \right] + \varkappa c_0 \frac{c_0 v'_1}{c_0 f' - f} + \varkappa c_0 u'_1 \left[1 - \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} \right] = \\
& = c'_1 \frac{c_0 f}{c_0 f' - f} + \varkappa c_0 \frac{c_0 v'_1}{c_0 f' - f} - \varkappa c_0 u'_1 \frac{f}{c_0 f' - f} = \frac{c_0 (c'_1 f + \varkappa c_0 v'_1 - \varkappa f u'_1)}{c_0 f' - f}.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Подставим (2.81) в (2.80)

$$\begin{aligned}
& \frac{c_0}{c_0 f' - f} (c'_1 f + \varkappa c_0 v'_1 - \varkappa f u'_1) + (u_1 + c_1) c'_0 + 2c_1 (v_1 - 1 - u_1 f') + \\
& + \varkappa c_1 (v_1 - u_1 f') + \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} (c_1 + u_1) c'_0 - \frac{c_0 (f'^2 + 1)}{c_0 f' - f} c_1^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

С учетом наличия связи (2.74) между коэффициентами $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ перепишем (2.82)

$$\begin{aligned}
& \frac{c_0}{c_0 f' - f} (c'_1 f + \varkappa c_0 v'_1 - \varkappa f u'_1) + c'_0 (u_1 + c_1) \frac{2c_0 f' - f}{c_0 f' - f} - 2c_1 - \\
& - 2 \frac{\varkappa + 1}{\varkappa} \cdot \frac{c_0 (1 + f'^2)}{c_0 f' - f} c_1^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Упростим следующие слагаемые выражения (2.83)

$$\begin{aligned}
& c'_0 (u_1 + c_1) \frac{2c_0 f' - f}{c_0 f' - f} - 2c_1 = c'_0 (u_1 + c_1) \left(2 + \frac{f}{c_0 f' - f} \right) - 2c_1 = c'_0 \frac{c_1}{\varkappa} \frac{c'_0 f}{c_0 f' - f} \times \\
& \times \left(2 + \frac{f}{c_0 f' - f} \right) + c_1 \left(2c'_0 - 2 + \frac{c'_0 f}{c_0 f' - f} \right) = \frac{c_1}{\varkappa + 1} \left(1 + \frac{f}{c_0 f' - f} \right)^2 + \\
& + \frac{c_1}{\varkappa + 1} \left(1 + \frac{f}{c_0 f' - f} \right) + 2c_1 (c'_0 - 1) + c_1 \frac{c'_0 f}{c_0 f' - f} = \frac{c_1 f}{c_0 f' - f} \left[\frac{\varkappa + 3}{\varkappa + 1} + \frac{u'_0 f}{c_0 f' - f} \right].
\end{aligned}$$

Подставим получившееся выражение в уравнение (2.83) и сократим на общий множитель $\frac{c_0}{c_0 f' - f}$

$$c'_1 f + \varkappa c_0 v'_1 - \varkappa f u'_1 + c_1 \frac{f}{c_0} \left(\frac{\varkappa + 3}{\varkappa + 1} + \frac{1}{\varkappa + 1} \frac{f}{c_0 f' - f} \right) - 2 \frac{1 + f'^2}{c'_0} c_1^2 = 0. \tag{2.84}$$

Производные $u'_1(\xi)$ и $v'_1(\xi)$ равны

$$u'_1 = \frac{c'_1}{\varkappa} \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} + \frac{c_1}{\varkappa} \frac{c_0 f'^2 - c'_0 f f' - c_0 f f''}{(c_0 f' - f)^2},$$

$$v_1' = -\frac{c_1'}{\kappa} \frac{c_0}{c_0 f' - f} - \frac{c_1}{\kappa} \frac{c_0 f' - c_0' f - c_0^2 f''}{(c_0 f' - f)^2}.$$

Выражения для $u_1'(\xi)$ и $v_1'(\xi)$ подставим в $(c_1' f + \kappa c_0 v_1' - \kappa f u_1')$, после преобразований получим

$$\begin{aligned} [c_1' f + \kappa c_0 v_1' - \kappa f u_1'] &= c_1' f + c_0 \kappa \left(-\frac{c_1'}{\kappa} \frac{c_0}{c_0 f' - f} - \frac{c_1}{\kappa} \frac{c_0 f' - c_0' f - c_0^2 f''}{(c_0 f' - f)^2} \right) - \\ &- \kappa f \left[\frac{c_1'}{\kappa} \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} + \frac{c_1}{\kappa} \frac{f' (c_0 f' - c_0' f) - c_0 f f''}{(c_0 f' - f)^2} \right] = \left[f - \frac{c_0^2}{c_0 f' - f} - \frac{c_0 f f'}{c_0 f' - f} \right] c_1' + \\ &+ c_1 \left[c_0 \frac{c_0^2 f''}{(c_0 f' - f)^2} - c_0 \frac{c_0 f' - c_0' f}{(c_0 f' - f)^2} - f \frac{f' (c_0 f' - c_0' f)}{(c_0 f' - f)^2} + f \frac{c_0 f f''}{(c_0 f' - f)^2} \right] = \\ &= -c_1' \frac{c_0^2 + f^2}{c_0 f' - f} + c_1 \frac{c_0 f'' (c_0^2 + f^2) - (c_0 f' - c_0' f) (c_0 + f f')}{(c_0 f' - f)^2}. \quad (2.85) \end{aligned}$$

Подставляем выражения (2.85) в (2.80), получаем транспортное уравнение для неизвестной функции $c_1(\xi)$

$$\begin{aligned} c_1' \frac{c_0^2 + f^2}{c_0 f' - f} - c_1 \frac{f}{c_0} \left(\frac{\kappa + 3}{\kappa + 1} + \frac{1}{\kappa + 1} \frac{f}{c_0 f' - f} \right) - \\ - c_1 \cdot \frac{c_0 f'' (c_0^2 + f^2) - (c_0 f' - c_0' f) (c_0 + f f')}{(c_0 f' - f)^2} + \frac{2}{c_0'} c_1^2 \left(\frac{c_0 f' - f}{c_0} \right)^2 = 0. \quad (2.86) \end{aligned}$$

Из дифференциального уравнения (2.40) для $f(\xi)$ можно выразить производную функции $f'(\xi)$ через саму функцию $f(\xi)$

$$f' = \frac{1}{2} \left(\frac{f}{c_0} - \frac{c_0}{f} \right). \quad (2.87)$$

Несложно показать, что

$$\begin{aligned} c_0 f' &= \frac{f^2 - c_0^2}{2f}, \quad c_0 f' - f = -\frac{f^2 + c_0^2}{2f}, \quad \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} = \frac{c_0^2 - f^2}{f^2 + c_0^2}, \\ f'' &= \frac{1}{2} \left(\frac{f'}{c_0} - \frac{f c_0'}{c_0^2} - \frac{c_0'}{f} + \frac{c_0 f'}{f^2} \right) = \\ &= -\frac{c_0'}{2} \cdot \frac{f^2 + c_0^2}{c_0^2 f} + \frac{1}{4} \cdot \frac{f^2 - c_0^2}{c_0 f} \cdot \frac{f^2 + c_0^2}{c_0 f^2}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

С учетом (2.88) можно переписать транспортное уравнение (2.86) для рассматриваемой ХЗК

$$c_1' + c_1 \frac{c_0 f'' (c_0^2 + f^2) - (c_0 f' - c_0' f) (c_0 + f f')}{2f (c_0 f' - f)^2} - \frac{c_1}{2c_0} \left(\frac{2f^2}{c_0^2 + f^2} \frac{1}{\varkappa + 1} - \frac{\varkappa + 3}{\varkappa + 1} \right) - \frac{(c_0^2 + f^2)^2}{4c_0' c_0^2 f^3} c_1^2 = 0.$$

В полученном уравнении вычислим коэффициент при $c_1(\xi)$

$$\begin{aligned} \frac{c_0 f'' (c_0^2 + f^2) - (c_0 f' - c_0' f) (c_0 + f f')}{2f (c_0 f' - f)^2} &= \\ &= \frac{2c_0 f f''}{c_0^2 + f^2} - \frac{2f (c_0 f' - c_0' f) (c_0 + f f')}{(c_0^2 + f^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Первое слагаемое в выражении (2.89) с учетом значения $f''(\xi)$ равно

$$\begin{aligned} \frac{2c_0 f f''}{c_0^2 + f^2} &= \frac{2c_0 f}{c_0^2 + f^2} \left(\frac{f^2 - c_0^2}{4c_0 f} \frac{f^2 + c_0^2}{c_0 f^2} - \frac{c_0'}{2} \frac{f^2 + c_0^2}{c_0^2 f} \right) = \\ &= -\frac{1}{2c_0} \left(2c_0' + \frac{c_0^2 - f^2}{f^2} \right) = -\frac{1}{2c_0} \left(\frac{c_0^2}{f^2} - \frac{1}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Второе слагаемое в выражении (2.89) равно

$$-\frac{2f (c_0 f' - c_0' f) (c_0 + f f')}{(c_0^2 + f^2)^2} = -\frac{1}{2c_0} \frac{f^2/\beta - c_0^2}{c_0^2 + f^2},$$

отсюда коэффициент при $c_1(\xi)$ равен

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2c_0} \left[\frac{2f^2}{c_0^2 + f^2} \frac{1}{\varkappa + 1} - \frac{\varkappa + 3}{\varkappa + 1} + \frac{f^2 - \beta c_0^2}{\beta (c_0^2 + f^2)} - \frac{1}{\beta} + \frac{c_0^2}{f^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2c_0} \left[\frac{2f^2}{c_0^2 + f^2} \frac{1}{\varkappa + 1} - \frac{\varkappa + 3}{\varkappa + 1} + \frac{1 - \varkappa f^2 - \beta c_0^2}{1 + \varkappa c_0^2 + f^2} - \frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa} + \frac{c_0^2}{f^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2c_0} \left[\frac{c_0^2}{f^2} - \frac{4}{\varkappa + 1} + \frac{1}{\varkappa + 1} \frac{(3 - \varkappa)f^2 - (1 + \varkappa)c_0^2}{c_0^2 + f^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2c_0} \left[\frac{c_0^2}{f^2} - \frac{4}{\varkappa + 1} + \frac{1}{\varkappa + 1} \frac{(3 - \varkappa)f^2 - (1 + \varkappa)c_0^2 \pm (1 + \varkappa)f^2}{c_0^2 + f^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2c_0} \left[\frac{c_0^2}{f^2} - \frac{4}{\varkappa + 1} - 1 + \frac{4}{\varkappa + 1} \frac{f^2}{c_0^2 + f^2} \right] = -\frac{1}{2c_0} \left[\frac{c_0^2}{f^2} - 1 - \frac{4}{\varkappa + 1} \frac{c_0^2}{c_0^2 + f^2} \right]. \end{aligned}$$

В результате исходное транспортное уравнение (2.86) можно переписать в нормализованном виде [86; 99; 100]

$$c_1' - \frac{1}{2c_0} \left[\frac{c_0^2}{f^2} - 1 - \frac{4}{\varkappa + 1} \frac{c_0^2}{c_0^2 + f^2} \right] c_1 - \frac{\varkappa + 1}{\varkappa} \frac{(c_0^2 + f^2)^2}{4c_0^2 f^3} c_1^2 = 0. \quad (2.90)$$

Построим задачу Коши для нахождения коэффициента $c_1(\xi)$. Для этого необходимо построить уравнение НУ для транспортного уравнения (2.90). Продифференцируем краевое условие из задачи (2.38) по ϑ и в получившемся соотношении

$$w_{3,\vartheta}|_{\zeta=0} = [g'(\vartheta) w_2 + g(\vartheta) w_{2,\vartheta}]|_{\zeta=0}$$

полагается $\vartheta = 0$

$$w_{3,1}|_{\zeta=0} = g'_{\vartheta}(0) w_{2,0}|_{\zeta=0} + g(0) w_{2,1}|_{\zeta=0},$$

здесь $g(0)$ и $g'(0)$ – значения функции $g(\vartheta)$ и ее производной по ϑ при $\vartheta = 0$. Так как $w_{2,0}|_{\zeta=0} = u_0|_{\zeta=0} = 0$, тогда

$$w_{3,1}|_{\zeta=0} = g(0) w_{2,1}|_{\zeta=0}. \quad (2.91)$$

По определению $w_{3,1}|_{\zeta=0} = -\frac{\varkappa}{c_0} v_1 \Big|_{\zeta=0}$. Найдем $w_{2,1}|_{\zeta=0}$, для этого в систему из задачи (2.38) подставим значение $\vartheta = 0$. С учетом вида функций w_1, w_2, w_3 и $w'_{1\zeta}, w'_{2\zeta}, w'_{3\zeta}$ и $w'_{1\vartheta}, w'_{2\vartheta}, w'_{3\vartheta}$ при $\vartheta = 0$ запишем (2.38) в окончательном виде

$$\begin{cases} -\frac{c_0}{\varkappa} f' w_{1,1} + (c_0 f' - f) w_{2,1} = \frac{u'_0 f}{f' - \operatorname{tg} \alpha}, \\ (c_0 f' - f) w_{1,1} - \varkappa c_0 f' w_{2,1} = \frac{c'_0 f}{f' - \operatorname{tg} \alpha}. \end{cases} \quad (2.92)$$

Система (2.92) представляет собой СЛАУ, откуда найдем функции $w_{1,1}, w_{2,1}$

$$w_{1,1} = -\frac{c'_0}{f' - \operatorname{tg} \alpha}, \quad w_{2,1} = -\frac{u'_0}{f' - \operatorname{tg} \alpha}.$$

Подставим в (2.91) выражения для $w_{3,1}, w_{2,1}, g(0)$ и получим

$$v_1|_{\zeta=0} = -\frac{u'_0}{f' - \operatorname{tg} \alpha} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + f' \operatorname{tg} \alpha} \Big|_{\zeta=0}.$$

С учетом связи между функциями $c_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$, получим НУ для $c_1(\xi)$

$$c_1|_{\zeta=0} = \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} \cdot \frac{c_0 f' - f}{c_0 (f' - \operatorname{tg} \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + f' \operatorname{tg} \alpha} \Big|_{\zeta=0}. \quad (2.93)$$

В выражении (2.93) подставим выражение (2.87) для $f'(\xi)$ и в результате

$$c_1|_{\zeta=0} = -\frac{\varkappa}{\varkappa + 1} \cdot \frac{c_0^2 + f^2}{f^2 - c_0^2 - 2c_0 f \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{2c_0 f \operatorname{tg} \alpha}{2c_0 f + (f^2 - c_0^2) \operatorname{tg} \alpha} \Big|_{\zeta=0}. \quad (2.94)$$

При $\vartheta = 0$ и $\zeta = 0$ значение $\xi = 1$, откуда $c_0(\xi = 1) = 1$. При подстановке выражения $c_0(1)$ в (2.55) или (2.56), в зависимости от значений γ , получим одно значение функции $f(\xi)$ в точке $\xi = 1$, а именно $f(1) = \operatorname{tg} \alpha$. Окончательный вид уравнения НУ

$$c_1(1) = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}. \quad (2.95)$$

Таким образом, задача Коши для нахождения коэффициента $c_1(\xi)$ имеет вид [86; 99; 100]:

$$\begin{cases} c_1' - \frac{1}{2c_0} \left[\frac{c_0^2}{f^2} - 1 - \frac{4}{\kappa + 1} \frac{c_0^2}{c_0^2 + f^2} \right] c_1 - \frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{(c_0^2 + f^2)^2}{4c_0^2 f^3} c_1^2 = 0, \\ c_1(1) = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}. \end{cases} \quad (2.96)$$

Первое уравнение задачи (2.96) – ДУ Бернулли, решение которого можно выписать в квадратурах.

Построение задачи Коши для нахождения коэффициента $c_1(\xi)$ закончено.

2.8 Построение решения транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в согласованном случае

Далее рассмотрим случай, когда выполняется условие $\operatorname{tg}^2 \alpha = \beta$, тогда $f(\xi) = c_0 \sqrt{\beta}$. Подставим значение $f(\xi)$ в ДУ задачи (2.96), получим [82]

$$c_1' - \left[\frac{1}{\beta} - 1 - \frac{4}{\kappa + 1} \frac{1}{\beta + 1} \right] \cdot \frac{c_1}{2c_0} - \frac{(1 + \beta)^2}{4c_0' \beta \sqrt{\beta}} \cdot \frac{c_1^2}{c_0} = 0, \quad (2.97)$$

а НУ для (2.97) в согласованном случае

$$c_1(1) = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{\sqrt{\beta}}{\beta + 1} = \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}}. \quad (2.98)$$

Окончательно задача Коши для $c_1(\xi)$ в согласованном случае имеет вид

$$c_1' + \frac{1}{\kappa + 1} \cdot \frac{c_1}{c_0} - \frac{\sqrt{\beta}}{\kappa(\kappa + 1)} \cdot \frac{c_1^2}{c_0} = 0, \quad c_1(1) = \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}}. \quad (2.99)$$

Построение решения задачи (2.99) начинается со стандартной замены $c_1(\xi) = p(\xi) \cdot q(\xi)$ для уравнения Бернулли

$$p'q + pq' + \frac{1}{\kappa + 1} \cdot \frac{pq}{c_0} - \frac{\sqrt{\beta}}{\kappa(\kappa + 1)} \cdot \frac{(pq)^2}{c_0} = 0, \quad (2.100)$$

отсюда получим уравнение для нахождения функции $q(\xi)$

$$q' + \frac{1}{\varkappa + 1} \cdot \frac{q}{c_0} = 0,$$

решением которого является

$$q(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{\varkappa} \int \frac{dc_0}{c_0}\right) = c_0^{-1/\varkappa}.$$

Подставим выражение для $q(\xi)$ в (2.100), получим уравнение для нахождения $p(\xi)$

$$p' - \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa(\varkappa + 1)} \cdot \frac{p^2}{c_0^{1/\varkappa+1}} = 0.$$

После разделения переменных

$$\frac{dp}{p^2} = \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa(\varkappa + 1)} \frac{d\xi}{c_0^{1/\varkappa+1}} = \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa^2} \frac{dc_0}{c_0^{1/\varkappa+1}} \quad (2.101)$$

проинтегрируем (2.101), что дает выражение для $p(\xi)$

$$p(\xi) = \left(\tilde{C} + \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa} c_0^{-1/\varkappa}\right)^{-1},$$

отсюда $c_1(\xi)$ равно

$$c_1(\xi) = \left(\tilde{C} c_0^{1/\varkappa} + \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa}\right)^{-1}.$$

Константу интегрирования $\tilde{C}$ найдем из уравнения НУ

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} = \left(\tilde{C} + \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa}\right)^{-1}, \quad \tilde{C} = 0,$$

таким образом, в согласованном случае решение задачи (2.99) имеет вид

$$c_1 = \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}},$$

отсюда с учетом (2.73) функции u_1, v_1 равны

$$u_1 = \frac{c_1}{\varkappa} \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} = \frac{c_1}{\varkappa} \frac{c_0'}{c_0' - 1} = -c_1 = -\frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}}, \quad v_1 = -\frac{u_1}{f'} = \frac{c_1}{c_0' \sqrt{\beta}} = \frac{\varkappa + 1}{\beta}.$$

Непосредственной подстановкой коэффициентов c_1, u_1, v_1 в (2.68) получим решение задачи (2.24) в согласованном случае

$$c = c_0 + \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} (\eta - f), \quad u = u_0 - \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} (\eta - f), \quad v = \frac{\kappa + 1}{\beta} (\eta - f). \quad (2.102)$$

Если в этом решении выражение для u умножить на $-\kappa$ и полученное прибавить к c , то получится

$$\begin{aligned} c - \kappa u &= 1 + \kappa u_0 - \kappa u_0 + \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} (\eta - f) - \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} (\eta - f) \kappa = \\ &= 1 + \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} (\kappa + 1) (\eta - f) = 1 + \sqrt{\beta} \kappa v, \end{aligned}$$

откуда

$$c(u, v) = 1 + \kappa u + \kappa \sqrt{\beta} v. \quad (2.103)$$

Полученное равенство (2.103) есть точное решение В. А. Сучкова [39]. Непосредственной подстановкой $c_0(\xi), u_0(\xi)$ и $f(\xi)$ в систему (2.102) найдем выражения для $c(\xi, \eta), u(\xi, \eta)$ и $v(\xi, \eta)$.

Для скорости звука

$$\begin{aligned} c &= c_0 + \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} (\eta - f) = c_0 + \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \eta - \kappa c_0 = \\ &= (1 - \kappa) \frac{\kappa \xi + 1}{\kappa + 1} + \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \eta = \frac{1}{\beta} \left(1 + \kappa \xi + \kappa \sqrt{\beta} \eta \right). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Для горизонтальной компоненты скорости

$$\begin{aligned} u &= u_0 - \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} (\eta - f) = u_0 + \kappa c_0 - \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \eta = \\ &= \xi \left(1 + \frac{\kappa(\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right) - \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \eta - \frac{1}{\beta} = \left(1 - \frac{\kappa}{\beta} \right) \xi - \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \eta - \frac{1}{\beta}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Для вертикальной компоненты скорости

$$v = \frac{\kappa + 1}{\beta} (\eta - f) = \frac{\kappa + 1}{\beta} \eta - \frac{\kappa + 1}{\beta} \sqrt{\beta} c_0 = -\frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \xi + (1 - \kappa) \eta - \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \quad (2.106)$$

Окончательный вид частного решения (2.102) в переменных ξ, η [82]

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) &= \frac{1}{\beta} \left(1 + \kappa \xi + \kappa \sqrt{\beta} \eta \right), \\ u(\xi, \eta) &= \xi - c(\xi, \eta), \quad v(\xi, \eta) = \eta - \sqrt{\beta} c(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Выполним проверку решения (2.107) непосредственной подстановкой в систему (2.6). Для этого найдем $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ функций $c(\xi, \eta), u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)$

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{\kappa}{\beta} \xi_t + \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \eta_t = -\frac{\kappa x}{\beta t^2} - \frac{\kappa y}{\sqrt{\beta} t^2}, \\ c_x &= \frac{\kappa}{\beta} \xi_x + \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \eta_x = \frac{\kappa}{\beta} \frac{1}{t}, \quad c_y = \frac{\kappa}{\beta} \xi_y + \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \eta_y = \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \frac{1}{t}, \\ u_t &= \xi_t - c_t = -\left(1 - \frac{\kappa}{\beta}\right) \frac{x}{t^2} + \frac{\kappa y}{\sqrt{\beta} t^2}, \\ u_x &= \xi_x - c_x = \left(1 - \frac{\kappa}{\beta}\right) \frac{1}{t}, \quad u_y = \xi_y - c_y = -\frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \frac{1}{t}, \\ v_t &= \eta_t - \sqrt{\beta} c_t = \frac{\kappa x}{\sqrt{\beta} t^2} - (1 - \kappa) \frac{y}{t^2}, \\ v_x &= \eta_x - \sqrt{\beta} c_x = -\frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \frac{1}{t}, \quad v_y = \eta_y - \sqrt{\beta} c_y = (1 - \kappa) \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в первое уравнение системы (2.6)

$$-\frac{\kappa x}{\beta t^2} - \frac{\kappa y}{\sqrt{\beta} t^2} + u \frac{\kappa}{\beta} \frac{1}{t} + v \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \frac{1}{t} + \kappa c \left[\left(1 - \frac{\kappa}{\beta}\right) \frac{1}{t} + (1 - \kappa) \frac{1}{t} \right] = 0. \quad (2.108)$$

Сократим (2.108) на κ/t , подставим выражения для u и v из (2.107)

$$-\frac{\xi}{\beta} - \frac{\eta}{\sqrt{\beta}} + \frac{\xi}{\beta} - \frac{c}{\beta} + \frac{\eta}{\sqrt{\beta}} - c + 2c - \frac{\kappa}{\beta} c - \kappa c = 0. \quad (2.109)$$

После приведения подобных слагаемых в (2.109) получаем тождество

$$-\frac{1}{\beta} + 1 - \frac{\kappa}{\beta} - \kappa = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} - \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \equiv 0.$$

Для второго уравнения системы (2.6)

$$-\left(1 - \frac{\kappa}{\beta}\right) \frac{x}{t^2} + \frac{\kappa y}{\sqrt{\beta} t^2} + \left(1 - \frac{\kappa}{\beta}\right) \frac{u}{t} - \frac{\kappa v}{\sqrt{\beta} t} + \frac{c \kappa}{\beta} \frac{1}{t} = 0. \quad (2.110)$$

Сократим (2.110) на $1/t$, подставим выражения для u и v из (2.107)

$$-\xi \left(1 - \frac{\kappa}{\beta}\right) + \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \eta + \xi \left(1 - \frac{\kappa}{\beta}\right) - c \left(1 - \frac{\kappa}{\beta}\right) - \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \eta + \kappa c + \frac{c}{\beta} = 0.$$

После сокращения на c и приведения подобных слагаемых получим тождество

$$-1 + \frac{\kappa}{\beta} + \kappa + \frac{1}{\beta} = -(1 - \kappa) + \frac{\kappa + 1}{\beta} = -(1 - \kappa) + (1 - \kappa) \equiv 0.$$

Третье уравнение системы (2.6)

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \frac{x}{t^2} - (1 - \varkappa) \frac{y}{t^2} - \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \frac{u}{t} + (1 - \varkappa) \frac{v}{t} + \frac{c}{\varkappa \sqrt{\beta}} \frac{1}{t} = 0. \quad (2.111)$$

Сократим (2.111) на $1/t$ и подставим выражения для u и v из (2.107)

$$-\eta(1 - \varkappa) + \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \xi - \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} (\xi - c) + (1 - \varkappa) \left(\eta - \sqrt{\beta} c \right) + \frac{c}{\sqrt{\beta}} = 0. \quad (2.112)$$

В результате сокращения слагаемых в (2.112) получаем тождество

$$\varkappa - (1 - \varkappa) \beta + 1 = \varkappa + 1 - (1 - \varkappa) \frac{\varkappa + 1}{1 - \varkappa} \equiv 0.$$

Выполненная проверка показывает, что построенное частное решение (2.107) задачи (2.24) в согласованном случае не содержит коэффициентов ряда для $i \geq 2$.

Выражения (2.104), (2.105) и (2.106), пользуясь обратным преобразованием замены (2.7), можно записать в координатах (t, x, y) [82]

$$c(t, x, y) = \frac{1}{\beta} \left(1 + \varkappa \frac{x}{t} + \varkappa \sqrt{\beta} \frac{y}{t} \right), \quad (2.113)$$

$$u(t, x, y) = \left(1 - \frac{\varkappa}{\beta} \right) \frac{x}{t} - \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \frac{y}{t} - \frac{1}{\beta}, \quad (2.114)$$

$$v(t, x, y) = -\frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \frac{x}{t} + (1 - \varkappa) \frac{y}{t} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \quad (2.115)$$

Выражения (2.113), (2.114) и (2.115) для функций c , u и v есть автомодельное решение СУГД задачи (2.24) в пространстве физических переменных (t, x, y) для случая выполнения соотношения $\operatorname{tg}^2 \alpha = (\gamma + 1)/(3 - \gamma)$ между тангенсом угла наклона косой стенки α и показателем политропы газа γ .

Построение решения задачи (2.24) в пространстве физических переменных (t, x, y) в согласованном случае закончено.

2.9 Построение решения транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в несогласованном случае, когда $\gamma = 3$ ($\varkappa = 1$)

Построим решение задачи (2.96) в несогласованном случае, когда $\gamma = 3$ ($\varkappa = 1$), тогда функция $f(\xi)$, задающая звуковую характеристику AD , имеет вид

$$f(\xi) = c_0 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0}.$$

Запишем $f(\xi)$ в следующем виде

$$f(\xi) = c_0(\xi) R_1(\xi), \quad R_1(\xi) = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0},$$

тогда ДУ задачи (2.96) можно упростить

$$c_1' - \left[\frac{1}{R_1^2} - 1 - \frac{2}{R_1^2 + 1} \right] \cdot \frac{c_1}{2c_0} - \frac{(1 + R_1^2)^2}{2R_1^3} \cdot \frac{c_1^2}{c_0} = 0, \quad (2.116)$$

а НУ для (2.116)

$$c_1(1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}. \quad (2.117)$$

Уравнения (2.116), (2.117) – задача Коши для транспортного уравнения $c_1(\xi)$ в случае, когда $\varkappa = 1$ ($\gamma = 3$).

Запишем функцию $c_1(\xi)$ как произведение $c_1(\xi) = q_1(\xi)p_1(\xi)$ и подставим в ДУ (2.116)

$$p_1' q_1 + (q_1' - P_1(\xi) q_1) \cdot p_1 - Q_1(\xi) \cdot p_1^2 q_1^2 = 0, \quad (2.118)$$

где $P_1(\xi) = \frac{1}{2c_0} \left[\frac{1}{R_1^2} - 1 - \frac{2}{R_1^2 + 1} \right]$, а $Q_1(\xi) = \frac{(1 + R_1^2)^2}{2c_0 R_1^3}$.

Коэффициент при $p_1(\xi)$ в уравнении (2.118) зануляется, и значение $q_1(\xi)$ находится из решения ДУ

$$q_1' - P_1(\xi) q_1 = 0, \quad (2.119)$$

где решение (2.119)

$$q_1(\xi) = \exp \left(\int P_1(\xi) d\xi \right).$$

Найдем значение интеграла, стоящего в показателе экспоненты

$$\begin{aligned} \int P_1(\xi) d\xi &= - \int \frac{d\xi}{2c_0} + \int \frac{d\xi}{2c_0 R_1^2} - \int \frac{d\xi}{2c_0 (R_1^2 + 1)} = \left| \frac{1}{2} d\xi = dc_0 \right| = \\ &= - \int \frac{dc_0}{c_0} + \int \frac{dc_0}{c_0 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)} - \int \frac{2dc_0}{c_0 (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - 2 \ln c_0)}. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных

$$t = \ln c_0, \quad dt = \frac{dc_0}{c_0},$$

тогда

$$\int P_1(\xi) d\xi = -\ln c_0 + \int \frac{dt}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2t} - 2 \int \frac{dt}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - 2t} = \ln (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - 2t) - \ln c_0 - \ln \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2t} = \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - 2t}{c_0 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2t}} = \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - 2 \ln c_0}{c_0 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0}} = \ln \frac{R_1^2 + 1}{c_0 R_1},$$

отсюда

$$q_1(\xi) = \frac{R_1^2 + 1}{c_0 R_1}.$$

Зная $q_1(\xi)$, найдем $p_1(\xi)$

$$\frac{dp_1}{p_1^2} = Q_1(\xi) q_1(\xi) d\xi = \frac{(1 + R_1^2)^2}{2c_0 R_1^3} \frac{R_1^2 + 1}{c_0 R_1} d\xi, \quad (2.120)$$

отсюда

$$\tilde{C} - \frac{1}{p_1} = \int \frac{(1 + R_1^2)^3}{c_0^2 R_1^4} dc_0. \quad (2.121)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части выражения (2.121)

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 + R_1^2)^3}{c_0^2 R_1^4} dc_0 &= \int \frac{dc_0}{c_0^2 R_1^4} + 3 \int \frac{dc_0}{c_0^2 R_1^2} + 3 \int \frac{dc_0}{c_0^2} + \int \frac{R_1^2 dc_0}{c_0^2} = -\frac{3}{c_0} + \\ &+ \int \frac{dc_0}{c_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)^2} + 3 \int \frac{dc_0}{c_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)} + \int \frac{dc_0}{c_0^2} (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0) = \\ &= -\frac{3}{c_0} - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{c_0} + \int \frac{dc_0}{c_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)^2} + 3 \int \frac{dc_0}{c_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)} - 2 \int \frac{\ln c_0}{c_0^2} dc_0. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Найдем значение каждого интеграла в выражении (2.122). Первый интеграл берем по частям, здесь $dv = dc_0/c_0^2$, $v = -1/c_0$, а $u = \ln c_0$, $du = dc_0/c_0$, тогда

$$\int \frac{\ln c_0 dc_0}{c_0^2} = u \cdot v - \int v du = -\frac{1}{c_0} \ln c_0 + \int \frac{dc_0}{c_0^2} = -\frac{1}{c_0} (\ln c_0 + 1). \quad (2.123)$$

Второй интеграл также берем по частям, здесь $dv = dc_0/c_0^2$, $v = -1/c_0$, а $u = 1/(\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)$, $du = 2dc_0/c_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)^2$, в результате получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dc_0}{c_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)} &= u \cdot v - \int v du = \\ &= -\frac{1}{c_0 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)} + \int \frac{2dc_0}{c_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)^2}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Подставим (2.123) и (2.124) в (2.122), в результате получим

$$\int \frac{(1 + R_1^2)^3}{c_0^2 R_1^4} dc_0 = -\frac{3 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{c_0} - \frac{2}{c_0} (1 + \ln c_0) - \frac{3}{c_0 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)} + 7I_1(\xi),$$

здесь $I_1(\xi) = \int \frac{dc_0}{c_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)^2}$.

С учетом этого выражение $p_1(\xi)$ переписывается в следующем виде

$$p_1(\xi) = \left[\tilde{C} - \frac{1}{c_0} (2 \ln c_0 - \operatorname{tg}^2 \alpha - 1) + \frac{3}{c_0 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)} - 7I_1(\xi) \right]^{-1}. \quad (2.125)$$

Выражение для коэффициента $c_1(\xi)$ в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} c_1(\xi) &= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - 2 \ln c_0}{c_0 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0}} \times \\ &\times \left[\tilde{C} - \frac{1}{c_0} (2 \ln c_0 - \operatorname{tg}^2 \alpha - 1) + \frac{3}{c_0 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0)} - 7I_1(\xi) \right]^{-1} = \\ &= \frac{c_0^2 + f^2}{c_0 f} \left[\tilde{C} c_0 + 1 + \frac{f^2}{c_0^2} + \frac{3c_0^2}{f^2} - 7c_0 I_1(\xi) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Значение константы интегрирования $\tilde{C}$ определяется из НУ (2.117)

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{\tilde{C} + \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 + \frac{3}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - 7I_1(1)}, \quad \tilde{C} = 7I_1(1) + 1 - \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Окончательное выражение для $c_1(\xi)$ в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} c_1(\xi) &= \frac{c_0^2 + f^2}{c_0 f} \times \\ &\times \left[\left(1 - \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) c_0 + 1 + \frac{f^2}{c_0^2} + \frac{3c_0^2}{f^2} - 7c_0 (I_1(\xi) - I_1(1)) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Коэффициенты $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ равны

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= \frac{c_0^2 - f^2}{c_0 f} \times \\ &\times \left[\left(1 - \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) c_0 + 1 + \frac{f^2}{c_0^2} + \frac{3c_0^2}{f^2} - 7c_0 (I_1(\xi) - I_1(1)) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$v_1(\xi) = \frac{2}{\left(1 - \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) c_0 + 1 + \frac{f^2}{c_0^2} + \frac{3c_0^2}{f^2} - 7c_0 (I_1(\xi) - I_1(1))}. \quad (2.129)$$

Выражение $I_1(\xi) - I_1(1)$ равно значению интеграла с переменным верхним пределом

$$I_1(\xi) - I_1(1) = \int_1^\xi \frac{dc_0(\xi')}{(c_0(\xi'))^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0(\xi'))^2}. \quad (2.130)$$

Построение решения транспортного уравнения для $c_1(\xi)$ в несогласованном случае при $\gamma = 3$ ($\varkappa = 1$) закончено.

2.10 Построение решения транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в несогласованном случае, когда $\gamma \neq 3$ ($\varkappa \neq 1$)

Построим решение транспортного уравнения для $c_1(\xi)$ в несогласованном случае, когда $\gamma \neq 3$ ($\varkappa \neq 1$). Функция $f(\xi)$, задающая звуковую характеристику AD , имеет вид (см. п. 2.3)

$$f(\xi) = c_0 \sqrt{\beta + c_0^{1/\varkappa-1} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}.$$

Перепишем $f(\xi)$

$$f(\xi) = c_0(\xi)R(\xi), \quad R(\xi) = \sqrt{\beta + c_0^{1/\varkappa-1} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)},$$

тогда ДУ задачи (2.96) можно упростить до следующего вида [86]

$$c_1' - \left[\frac{1}{R^2} - 1 - \frac{4}{\varkappa + 1} \frac{1}{R^2 + 1} \right] \cdot \frac{c_1}{2c_0} - \frac{(1 + R^2)^2}{4c_0' R^3} \cdot \frac{c_1^2}{c_0} = 0, \quad (2.131)$$

где НУ для (2.131)

$$c_1(1) = \frac{2\varkappa}{\varkappa + 1} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}. \quad (2.132)$$

Система уравнений (2.131) и (2.132) – задача Коши для коэффициента $c_1(\xi)$ в несогласованном случае, когда $\varkappa \neq 1$ ($\gamma \neq 3$) [86].

Построим решение (2.131) и (2.132), для этого запишем функцию $c_1(\xi)$ как произведение $c_1(\xi) = q(\xi)p(\xi)$ и подставим в первое уравнение задачи (2.131)

$$p'q + (q' - P(\xi)q) \cdot p - Q(\xi) \cdot p^2 q^2 = 0, \quad (2.133)$$

$$P(\xi) = \frac{1}{2c_0} \left[\frac{1}{R^2} - 1 - \frac{4}{\varkappa + 1} \frac{1}{R^2 + 1} \right], \quad Q(\xi) = \frac{(1 + R^2)^2}{4c_0' c_0 R^3}.$$

Коэффициент при $p(\xi)$ в уравнении (2.133) зануляется, и функция $q(\xi)$ находится из решения ДУ

$$q' - P(\xi)q = 0, \quad q(\xi) = \exp \left(\int P(\xi) d\xi \right). \quad (2.134)$$

Найдем значение интеграла, стоящего в показателе экспоненты

$$\int P(\xi) d\xi = \frac{1}{2c_0'} \int \frac{dc_0}{c_0 \left(\beta + c_0^{1/\varkappa-1} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta) \right)} - \frac{1}{2c_0'} \int \frac{dc_0}{c_0} - \frac{2}{\varkappa} \int \frac{dc_0}{c_0 \left(\beta + 1 + c_0^{1/\varkappa-1} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta) \right)}. \quad (2.135)$$

В выражении (2.135) средний интеграл табличный, для того чтобы взять два оставшихся, необходимо сделать замену переменных

$$z = c_0^{1/\kappa}, \quad c_0 = z^\kappa, \quad dc_0 = \kappa z^{\kappa-1} dz, \quad (2.136)$$

в результате

$$\begin{aligned} \int P(\xi) d\xi &= \frac{\kappa+1}{2} \int \frac{z^{\kappa-2} dz}{\beta z^{\kappa-1} + \operatorname{tg}^2 \alpha - \beta} - \frac{\ln c_0}{2c_0'} - 2 \int \frac{z^{\kappa-2} dz}{(\beta+1)z^{\kappa-1} + \operatorname{tg}^2 \alpha - \beta} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(\beta z^{\kappa-1} + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)) - \frac{1}{2} \ln z^{\kappa+1} + \ln((\beta+1)z^{\kappa-1} + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)) = \\ &= \ln((\beta+1)z^{\kappa-1} + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)) - \frac{1}{2} \ln(\beta z^{2\kappa} + z^{\kappa+1}(\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)) = \\ &= \ln \left(\frac{c_0^{(\kappa-1)/\kappa} (\beta+1 + c_0^{(1-\kappa)/\kappa} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta))}{c_0 \sqrt{\beta + c_0^{(1-\kappa)/\kappa} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда $q(\xi)$ равно

$$q(\xi) = \frac{c_0^{(\kappa-1)/\kappa} (\beta+1 + c_0^{(1-\kappa)/\kappa} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta))}{c_0 \sqrt{\beta + c_0^{(1-\kappa)/\kappa} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}} = \frac{c_0^2 + f^2}{c_0^{(\kappa+1)/\kappa} f} = \frac{1+R^2}{c_0^{1/\kappa} R}. \quad (2.137)$$

Функция $p(\xi)$ – решение уравнения

$$\frac{dp}{p^2} = \frac{1}{c_0'} Q(c_0) q(c_0) dc_0, \quad \tilde{C} - \frac{1}{p} = \left(\frac{\kappa+1}{2\kappa} \right)^2 \int \frac{(1+R^2)^3}{c_0^{(\kappa+1)/\kappa} R^4} dc_0. \quad (2.138)$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части выражения (2.138)

$$\begin{aligned} \int \frac{(1+R^2)^3}{c_0^{(\kappa+1)/\kappa} R^4} dc_0 &= \int \frac{dc_0}{c_0^{(\kappa+1)/\kappa} R^4} + 3 \int \frac{dc_0}{c_0^{(\kappa+1)/\kappa} R^2} + 3 \int \frac{dc_0}{c_0^{(\kappa+1)/\kappa}} + \int \frac{R^2 dc_0}{c_0^{(\kappa+1)/\kappa}} = \\ &= (\beta+3) \int \frac{dc_0}{c_0^{1+1/\kappa}} + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta) \int \frac{dc_0}{c_0^2} + 3 \int \frac{dc_0}{c_0^{1+1/\kappa} (\beta + c_0^{1/\kappa-1} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta))} + \\ &\quad + \int \frac{dc_0}{c_0^{1+1/\kappa} (\beta + c_0^{1/\kappa-1} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta))^2}. \end{aligned}$$

После замены (2.136) интеграл переписывается

$$\begin{aligned} \int \frac{(1+R^2)^3}{c_0^{(\kappa+1)/\kappa} R^4} dc_0 &= -\frac{\kappa(\beta+3)}{c_0^{1/\kappa}} - \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}{c_0} + 3\kappa \int \frac{z^{\kappa-3} dz}{(z^{\kappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta))} + \\ &\quad + \kappa \int \frac{dz}{z^{4-2\kappa} (z^{\kappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta))^2}. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Последний интеграл в выражении (2.139) берется по частям

$$\begin{aligned} & \int \frac{z^{2\kappa-4} dz}{(z^{\kappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta))^2} = \frac{1}{\beta(\kappa-1)} \int \frac{z^{\kappa-2} d\beta z^{\kappa-1}}{(z^{\kappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta))^2} = \\ & = \frac{1}{\kappa+1} \left[-\frac{z^{\kappa-2}}{z^{\kappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)} + (\kappa-2) \int \frac{z^{\kappa-3} dz}{z^{\kappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)} \right]. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Значение интеграла (2.140) подставим в (2.139)

$$\begin{aligned} & \int \frac{(1+R^2)^3}{c_0^{(\kappa+1)/\kappa} R^4} dc_0 = -\frac{\kappa(\beta+3)}{c_0^{1/\kappa}} - \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}{c_0} + \\ & + \frac{\kappa}{\kappa+1} \cdot \frac{z^{\kappa-2}}{z^{\kappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)} + \frac{\kappa(2\kappa+5)}{\kappa+1} \int \frac{z^{\kappa-3} dz}{z^{\kappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Далее (2.141) подставим в (2.138), получим

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{C} - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{2\kappa}{\kappa+1} \right)^2 = \\ & = -\frac{1}{c_0^{1/\kappa}} \left(2\kappa - 1 + \frac{f^2}{c_0^2} - \frac{\kappa}{\kappa+1} \cdot \frac{c_0^2}{f^2} \right) + \frac{\kappa(2\kappa+5)}{\kappa+1} I(\xi), \end{aligned} \quad (2.142)$$

здесь $I(\xi) = \int \frac{dz}{z^2(\beta + z^{1-\kappa}(\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta))}$. Из (2.142) выразим функцию $p(\xi)$

$$\begin{aligned} & p(\xi) = c_0^{1/\kappa} \times \\ & \times \frac{1}{\tilde{C}c_0^{1/\kappa} + \left(\frac{\kappa+1}{2\kappa} \right)^2 \left(2\kappa - 1 + \frac{f^2}{c_0^2} - \frac{\kappa}{\kappa+1} \cdot \frac{c_0^2}{f^2} \right) - \frac{(\kappa+1)(2\kappa+5)}{4\kappa} c_0^{1/\kappa} I(\xi)}. \end{aligned} \quad (2.143)$$

С учетом (2.137) и (2.143) запишем функцию $c_1(\xi)$

$$\begin{aligned} & c_1(\xi) = \frac{c_0^2 + f^2}{c_0 f} \times \\ & \times \frac{1}{\tilde{C}c_0^{1/\kappa} + \left(\frac{\kappa+1}{2\kappa} \right)^2 \left(2\kappa - 1 + \frac{f^2}{c_0^2} - \frac{\kappa}{\kappa+1} \cdot \frac{c_0^2}{f^2} \right) - \frac{(\kappa+1)(2\kappa+5)}{4\kappa} c_0^{1/\kappa} I(\xi)}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Значение константы интегрирования $\tilde{C}$ найдем из НУ для $c_1(\xi)$ (2.144)

$$\begin{aligned} & \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha} \times \\ & \times \left[\tilde{C} + \left(\frac{\kappa+1}{2\kappa} \right)^2 \left(2\kappa - 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{\kappa}{\kappa+1} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) - \frac{(\kappa+1)(2\kappa+5)}{4\kappa} I(1) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.145)$$

в результате получим

$$\tilde{C} = \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{3}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{3}{2} - \varkappa + \frac{1}{2\varkappa} + \frac{2\varkappa + 5}{2} I(1) \right),$$

и подставим в (2.144), тогда окончательно получим выражение для $c_1(\xi)$ в рассматриваемом случае

$$c_1(\xi) = \frac{2\varkappa}{\varkappa + 1} \frac{c_0^2 + f^2}{c_0 f} M(\xi)^{-1}, \quad (2.146)$$

где $M(\xi)$ равно

$$\begin{aligned} M(\xi) = c_0^{1/\varkappa} & \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{3}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{3}{2} - \varkappa + \frac{1}{2\varkappa} \right) + \varkappa + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + \\ & + \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} \frac{f^2}{c_0^2} - \frac{1}{2} \frac{c_0^2}{f^2} - \frac{2\varkappa + 5}{2} c_0^{1/\varkappa} (I(\xi) - I(1)). \end{aligned}$$

Зная $c_1(\xi)$, найдем пару функций $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$

$$u_1(\xi) = \frac{2}{\varkappa + 1} \frac{c_0^2 - f^2}{c_0 f} M(\xi)^{-1}, \quad v_1(\xi) = \frac{4}{\varkappa + 1} M(\xi)^{-1}.$$

Построение решения транспортного уравнения для $c_1(\xi)$ в несогласованном случае при $\gamma \neq 3$ ($\varkappa \neq 1$) закончено.

2.11 Получение n -ых коэффициентов ряда $c_n(\xi)$, $u_n(\xi)$, $v_n(\xi)$ по степеням ϑ для искомых функций $c(\xi, \vartheta)$, $u(\xi, \vartheta)$, $v(\xi, \vartheta)$

Согласно алгоритму решения исходной НКЗ, описанному в п. 2.5, чтобы найти коэффициенты $u_n(\xi)$ и $v_n(\xi)$, необходимо систему (2.3) продифференцировать n раз по ϑ и подставить значение $\vartheta = 0$. Для нахождения коэффициента $c_n(\xi)$ систему (2.3) дифференцируют $n + 1$ раз по ϑ и задают $\vartheta = 0$. В данном разделе приводится построение задачи Коши для нахождения коэффициента $c_n(\xi)$.

Рассмотрим исходную СУГД, описывающую течение в области ДВ, в векторно-матричном виде в переменных ξ, ϑ (см. [103; 104])

$$[\mathbf{B} - f' \mathbf{A}] \mathbf{U}_\vartheta + \mathbf{A} \mathbf{U}_\xi = \mathbf{0}, \quad (2.147)$$

где матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ задаются выражениями (2.17), а $\mathbf{U} = (c, u, v)^T$.

В (2.147) матрицы $\mathbf{B}$, $[\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]$ запишем следующим образом

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \kappa c \\ 0 & b_{11} & 0 \\ c/\kappa & 0 & b_{11} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{B} - f'(\xi) \mathbf{A}] = \begin{pmatrix} a_{11} & -\kappa c f' & \kappa c \\ -c f'/\kappa & a_{11} & 0 \\ c/\kappa & 0 & a_{11} \end{pmatrix},$$

где $b_{11} = v - \vartheta - f$, $a_{11} = v - \vartheta - f - f'(u - \xi)$.

Подставим в матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $[\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]$ значения $\vartheta = 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$, где $\mathbf{U}_0 = (c_0, u_0, 0)^T$

$$\mathbf{A}|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \begin{pmatrix} u_0 - \xi & \kappa c_0 & 0 \\ c_0/\kappa & u_0 - \xi & 0 \\ 0 & 0 & u_0 - \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 & \kappa c_0 & 0 \\ c_0/\kappa & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix} - \xi \mathbf{E}. \quad (2.148)$$

Введем обозначение

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} u_0 & \kappa c_0 & 0 \\ c_0/\kappa & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix},$$

тогда (2.148) перепишем в виде

$$\mathbf{A}|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \mathbf{A}_0 - \xi \mathbf{E}. \quad (2.149)$$

Далее рассмотрим матрицу $\mathbf{B}$ при $\vartheta = 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$

$$\mathbf{B}|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \begin{pmatrix} -f & 0 & \kappa c_0 \\ 0 & -f & 0 \\ c_0/\kappa & 0 & -f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa c_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_0/\kappa & 0 & 0 \end{pmatrix} - f \mathbf{E}.$$

По аналогии с $\mathbf{A}_0$ введем обозначение

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & \kappa c_0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ c_0/\kappa & 0 & v_0 \end{pmatrix},$$

значение $v_0 = 0$, тогда

$$\mathbf{B}|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \mathbf{B}_0 - f \mathbf{E}. \quad (2.150)$$

С учетом (2.149) и (2.150) запишем матрицу $[\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]$ при $\vartheta = 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$

$$\begin{aligned} [\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} &= [\mathbf{B}_0 - f \mathbf{E} - f'(\mathbf{A}_0 - \xi \mathbf{E})] = \\ &= [\mathbf{B}_0 - f' \mathbf{A}_0] + (f' \xi - f) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Подставим (2.149), (2.150) и (2.151) в (2.147) при $\vartheta = 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$

$$[\mathbf{B}_0 - f' \mathbf{A}_0] \mathbf{U}_1 + (f' \xi - f) \mathbf{E} \cdot \mathbf{U}_1 + (\mathbf{A}_0 - \xi \mathbf{E}) \mathbf{U}'_0 = \mathbf{0}, \quad (2.152)$$

где $\mathbf{U}_1 = (c_1, u_1, v_1)^T$, $\mathbf{U}'_0 = (c'_0, u'_0, 0)^T$.

Далее для простоты записи будем писать

$$(\mathbf{A})_0 = \mathbf{A}_0 - \xi \mathbf{E}, \quad (\mathbf{B})_0 = \mathbf{B}_0 - f \mathbf{E},$$

отсюда

$$[\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]_0 = [(\mathbf{B})_0 - f'(\mathbf{A})_0] = [\mathbf{B}_0 - f' \mathbf{A}_0 + (f' \xi - f) \mathbf{E}],$$

тогда (2.152) будет иметь вид

$$[\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]_0 \mathbf{U}_1 + (\mathbf{A})_0 \mathbf{U}'_0 = \mathbf{0},$$

а его решением будут известные выражения (2.73).

Построим уравнение для нахождения коэффициента ряда $c_1(\xi)$. Для этого продифференцируем уравнение (2.147) по ϑ

$$[\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]_{\vartheta} \mathbf{U}_{\vartheta} + [\mathbf{B} - f' \mathbf{A}] \mathbf{U}_{\vartheta\vartheta} + \mathbf{A}_{\vartheta} \mathbf{U}_{\xi} + \mathbf{A} \mathbf{U}_{\xi\vartheta} = \mathbf{0}. \quad (2.153)$$

Вычислим $\mathbf{A}_{\vartheta}$, $\mathbf{B}_{\vartheta}$ и подставим в них значение $\vartheta = 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$

$$\mathbf{A}_{\vartheta} = \begin{pmatrix} u_{\vartheta} & \kappa c_{\vartheta} & 0 \\ c_{\vartheta}/\kappa & u_{\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & u_{\vartheta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\vartheta}|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} u_1 & \kappa c_1 & 0 \\ c_1/\kappa & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{\vartheta} = \begin{pmatrix} v_{\vartheta} - 1 & 0 & \kappa c_{\vartheta} \\ 0 & v_{\vartheta} - 1 & 0 \\ c_{\vartheta}/\kappa & 0 & v_{\vartheta} - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\vartheta}|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \begin{pmatrix} v_1 - 1 & 0 & \kappa c_1 \\ 0 & v_1 - 1 & 0 \\ c_1/\kappa & 0 & v_1 - 1 \end{pmatrix},$$

отсюда

$$\mathbf{B}_{\vartheta}|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{E}.$$

Запишем (2.153) с учетом $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_{\vartheta}$, $\mathbf{B}_{\vartheta}$ при $\vartheta = 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$

$$[\mathbf{B}_1 - \mathbf{E} - f' \mathbf{A}_1] \mathbf{U}_1 + [\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]_0 \mathbf{U}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{U}'_0 + (\mathbf{A})_0 \mathbf{U}'_1 = \mathbf{0}. \quad (2.154)$$

Уравнение (2.154) можно записать иначе

$$[\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]_0 \mathbf{U}_2 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{U}_1 + (\mathbf{A})_0 \mathbf{U}'_1 + \sum_{k=1}^1 \binom{k}{1} \left[[\mathbf{B}_k - f' \mathbf{A}_k] \mathbf{U}_{2-k} + \mathbf{A}_k \mathbf{U}'_{1-k} \right] = \mathbf{0}. \quad (2.155)$$

Система ДУ (2.155) для коэффициентов c_1 , u_1 и v_1 , записанная в векторно-матричной форме, далее используется для построения транспортного уравнения для нахождения коэффициента ряда $c_1(\xi)$. При этом выполняется тождество $\det [\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]_0 \equiv 0$.

Построим дифференциальное уравнение для нахождения коэффициента $c_n(\xi)$ ряда. Для этого n раз дифференцируем уравнение (2.147) по ϑ

$$([\mathbf{B} - f' \mathbf{A}] \mathbf{U}_\vartheta)_\vartheta^{(n)} + (\mathbf{A} \mathbf{U}_\xi)_\vartheta^{(n)} = \mathbf{0},$$

в результате получим

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \left[(\mathbf{B}_\vartheta^{(k)} - f'_\xi \mathbf{A}_\vartheta^{(k)}) \mathbf{U}_\vartheta^{(n+1-k)} + \mathbf{A}_\vartheta^{(k)} \mathbf{U}_{\vartheta\xi}^{(n-k)} \right] = \mathbf{0}. \quad (2.156)$$

Найдем матрицы $\mathbf{A}_\vartheta^{(k)}$, $\mathbf{B}_\vartheta^{(k)}$ при $\vartheta = 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$

$$\mathbf{A}_\vartheta^{(k)} = \begin{pmatrix} u_\vartheta^{(k)} & \varkappa c_\vartheta^{(k)} & 0 \\ c_\vartheta^{(k)}/\varkappa & u_\vartheta^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & u_\vartheta^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\vartheta^{(k)} \Big|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} u_k & \varkappa c_k & 0 \\ c_k/\varkappa & u_k & 0 \\ 0 & 0 & u_k \end{pmatrix}, \quad (2.157)$$

$$\mathbf{B}_\vartheta^{(k)} = \begin{pmatrix} v_\vartheta^{(k)} & 0 & \varkappa c_\vartheta^{(k)} \\ 0 & v_\vartheta^{(k)} & 0 \\ c_\vartheta^{(k)}/\varkappa & 0 & v_\vartheta^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_\vartheta^{(k)} \Big|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} v_k & 0 & \varkappa c_k \\ 0 & v_k & 0 \\ c_k/\varkappa & 0 & v_k \end{pmatrix}. \quad (2.158)$$

Выражения (2.157), (2.158) определены при $k \geq 0$. Векторы $\mathbf{U}_\vartheta^{(k)}$ и $\mathbf{U}_{\vartheta\xi}^{(k)}$ при $\vartheta = 0$ равны

$$\mathbf{U}_\vartheta^{(k)} \Big|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \mathbf{U}_k = (c_k, u_k, v_k)^T, \quad \mathbf{U}_{\vartheta\xi}^{(k)} \Big|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \mathbf{U}'_k = (c'_k, u'_k, v'_k)^T.$$

Из (2.156) получим

$$\begin{aligned} & [\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]_0 \mathbf{U}_{n+1} - n \mathbf{E} \cdot \mathbf{U}_n + (\mathbf{A})_0 \mathbf{U}'_n + \\ & + \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} [(\mathbf{B}_k - f'_\xi \mathbf{A}_k) \mathbf{U}_{n+1-k} + \mathbf{A}_k \mathbf{U}'_{n-k}] = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.159)$$

где $\det [\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]_0 \equiv 0$.

Запишем каждое уравнение системы (2.159) в явном виде. Первое уравнение системы (2.159)

$$\begin{aligned} & (c_0 f' - f) c_{n+1} - \varkappa c_0 f' u_{n+1} + \varkappa c_0 v_{n+1} - c_0 c'_n + \varkappa c_0 u'_n - n c_n + \\ & + \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \left[(v_k - f' u_k) c_{n+1-k} - \varkappa c_k f' u_{n+1-k} + \varkappa c_k v_{n+1-k} + u_k c'_{n-k} + \varkappa c_k u'_{n-k} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.160)$$

Второе уравнение системы (2.159)

$$-\frac{c_0}{\varkappa} f' c_{n+1} + (c_0 f' - f) u_{n+1} + \frac{c_0}{\varkappa} c'_n - c_0 u'_n - n u_n + \\ + \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \left[-\frac{c_k}{\varkappa} f' c_{n+1-k} + (v_k - f' u_k) u_{n+1-k} + \frac{c_k}{\varkappa} c'_{n-k} + u_k u'_{n-k} \right] = 0. \quad (2.161)$$

Третье уравнение системы (2.159)

$$\frac{c_0}{\varkappa} c_{n+1} + (c_0 f' - f) v_{n+1} - c_0 v'_n - n v_n + \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \left[\frac{c_k}{\varkappa} c_{n+1-k} + \right. \\ \left. + (v_k - f' u_k) v_{n+1-k} + u_k v'_{n-k} \right] = 0. \quad (2.162)$$

Из (2.161) и (2.162) выразим u_{n+1} , v_{n+1}

$$u_{n+1} = \frac{1}{c_0 f' - f} \left[\frac{c_0}{\varkappa} f' c_{n+1} - \frac{c_0}{\varkappa} c'_n + c_0 u'_n + n u_n - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \left[-\frac{c_k}{\varkappa} f' c_{n+1-k} + (v_k - f' u_k) u_{n+1-k} + \frac{c_k}{\varkappa} c'_{n-k} + u_k u'_{n-k} \right] \right], \quad (2.163)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{c_0 f' - f} \left[-\frac{c_0}{\varkappa} c_{n+1} + c_0 v'_n + n v_n - \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \left[\frac{c_k}{\varkappa} c_{n+1-k} + \right. \right. \\ \left. \left. + (v_k - f' u_k) v_{n+1-k} + u_k v'_{n-k} \right] \right]. \quad (2.164)$$

В выражениях (2.163) и (2.164) при замене $n + 1 \rightarrow n$ получим выражения для коэффициентов u_n , v_n . При $n = 0$ получим выражения для u_1 , v_1 (см. формулы (2.73)), а при $n = 1$ получим известные выражения для u_2 и v_2 (см. (2.77), (2.78)).

Подставим u_{n+1} , v_{n+1} в уравнение (2.160) и сгруппируем слагаемые, содержащие коэффициент c_{n+1} , в результате получим следующее уравнение

$$c_{n+1} \frac{[(c_0 f' - f)^2 - (c_0 f')^2 - c_0^2]}{c_0 f' - f} - \frac{\varkappa c_0 f'}{c_0 f' - f} \left[-\frac{c_0}{\varkappa} c'_n + c_0 u'_n + n u_n - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \left[-\frac{c_k}{\varkappa} f' c_{n+1-k} + (v_k - f' u_k) u_{n+1-k} + \frac{c_k}{\varkappa} c'_{n-k} + u_k u'_{n-k} \right] \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varkappa c_0}{c_0 f' - f} \left[c_0 v'_n + n v_n - \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \left[\frac{c_k}{\varkappa} c_{n+1-k} + (v_k - f' u_k) v_{n+1-k} + u_k v'_{n-k} \right] \right] - \\
& - c_0 c'_n + \varkappa c_0 u'_n - n c_n + \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \left[(v_k - f' u_k) c_{n+1-k} - \varkappa c_k f' u_{n+1-k} + \right. \\
& \quad \left. + \varkappa c_k v_{n+1-k} + u_k c'_{n-k} + \varkappa c_k u'_{n-k} \right] = 0. \quad (2.165)
\end{aligned}$$

Множитель при коэффициенте c_{n+1} тождественно равен нулю, так как справедливо уравнение $\det [\mathbf{B} - f' \mathbf{A}]_0 \equiv 0$.

В (2.165) сгруппируем подобные слагаемые, в результате приведем исходное уравнение для функции c_n к более простому виду относительно коэффициентов c_n , u_n и v_n , в котором коэффициенты c_k , u_k и v_k при $k < n$ известны

$$\begin{aligned}
& \left(f c'_n + \varkappa c_0 v'_n - \varkappa f u'_n \right) + n \left(\varkappa v_n - \varkappa f' u_n - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_n \right) - \quad (2.166) \\
& - \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \left[\left(v_k - f' u_k - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_k \right) \left(\varkappa v_{n+1-k} - \varkappa f' u_{n+1-k} - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_{n+1-k} \right) - \right. \\
& \left. - c'_{n-k} \left(f' c_k + u_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) - \varkappa u'_{n-k} \left(f' u_k + c_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) + \varkappa u_k v'_{n-k} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Сумму слагаемых по k от 1 до n в формуле (2.166) запишем следующим образом: члены суммы для $k = 1$ и $k = n$ выпишем отдельно, остальные члены ряда запишем в виде суммы по k от 2 до $(n - 1)$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \left[\left(v_k - f' u_k - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_k \right) \left(\varkappa v_{n+1-k} - \varkappa f' u_{n+1-k} - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_{n+1-k} \right) - \right. \\
& \quad \left. - c'_{n-k} \left(f' c_k + u_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) - \varkappa u'_{n-k} \left(f' u_k + c_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) + \varkappa u_k v'_{n-k} \right] = \\
& = n \left[\left(v_1 - f' u_1 - c_1 \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) \left(\varkappa v_n - \varkappa f' u_n - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_n \right) + \varkappa u_1 v'_{n-1} - \right. \\
& \quad \left. - c'_{n-1} \left(f' c_1 + u_1 \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) - \varkappa u'_{n-1} \left(f' u_1 + c_1 \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) \right] - c'_0 \left(f' c_n + u_n \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) + \\
& + \left(v_n - f' u_n - c_n \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) \left(\varkappa v_1 - \varkappa f' u_1 - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_1 \right) - c'_0 \left(f' u_n + c_n \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{n} \left[\left(v_k - f' u_k - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_k \right) \left(\varkappa v_{n+1-k} - \varkappa f' u_{n+1-k} - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_{n+1-k} \right) - \right. \\ \left. - c'_{n-k} \left(f' c_k + u_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) - \varkappa u'_{n-k} \left(f' u_k + c_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) + \varkappa u_k v'_{n-k} \right]. \quad (2.167)$$

Подставим в выражение (2.167) выражения для функций u_1, v_1 , в результате получим

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{n} \left[\left(v_k - f' u_k - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_k \right) \left(\varkappa v_{n+1-k} - \varkappa f' u_{n+1-k} - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_{n+1-k} \right) - \right. \\ \left. - c'_{n-k} \left(f' c_k + u_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) - \varkappa u'_{n-k} \left(f' u_k + c_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) + \varkappa u_k v'_{n-k} \right] = \\ = n c_1 \left[- \frac{c_0 f' - f}{c'_0 c_0} \left(\varkappa v_n - \varkappa f' u_n - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_n \right) - c'_{n-1} \frac{f'}{c'_0} u'_{n-1} \frac{c_0 f'^2 (\varkappa + 1) + \varkappa}{c_0 f' - f} + \right. \\ \left. + \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} v'_{n-1} \right] - 2 c_1 \frac{c_0 f' - f}{c_0} \left(v_n - f' u_n - c_n \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) - c'_0 \frac{2 c_0 f' - f}{c_0} (c_n + u_n) + \\ + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{n} \left[\left(v_k - f' u_k - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_k \right) \left(\varkappa v_{n+1-k} - \varkappa f' u_{n+1-k} - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_{n+1-k} \right) - \right. \\ \left. - c'_{n-k} \left(f' c_k + u_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) - \varkappa u'_{n-k} \left(f' u_k + c_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) + \varkappa u_k v'_{n-k} \right]. \quad (2.168)$$

Подставим выражение (2.168) в (2.166), после приведения подобных слагаемых получим следующее уравнение

$$\left(f c'_n + \varkappa c_0 v'_n - \varkappa f u'_n \right) + n \left(1 + \frac{c_1 c_0 f' - f}{c'_0 c_0} \right) \left(\varkappa v_n - \varkappa f' u_n - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_n \right) + \\ + 2 c_1 \frac{c_0 f' - f}{c_0} \left(v_n - f' u_n - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_n \right) + n c'_{n-1} \frac{f'}{c'_0} c_1 + n u'_{n-1} c_1 \frac{(\varkappa + 1) c_0 f'^2 + \varkappa}{c_0 f' - f} - \\ - n c_1 \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} v'_{n-1} + c'_0 \frac{2 c_0 f' - f}{c_0} (c_n + u_n) - \\ - \sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{n} \left[\left(v_k - f' u_k - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_k \right) \left(\varkappa v_{n+1-k} - \varkappa f' u_{n+1-k} - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_{n+1-k} \right) - \right. \\ \left. - c'_{n-k} \left(f' c_k + u_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) - \varkappa u'_{n-k} \left(f' u_k + c_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) + \varkappa u_k v'_{n-k} \right] = 0. \quad (2.169)$$

Перепишем выражения (2.163), (2.164) при $i = n$ следующим образом

$$u_n = \frac{c_n}{\varkappa} \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} + R_{n-1}, \quad v_n = -\frac{c_n}{\varkappa} \frac{c_0}{c_0 f' - f} + Q_{n-1},$$

где функции $R_{n-1}(\xi)$ и $Q_{n-1}(\xi)$ имеют вид

$$R_{n-1}(\xi) = \frac{1}{c_0 f' - f} \left[-\frac{c_0}{\varkappa} c'_{n-1} + c_0 u'_{n-1} + (n-1)u_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{n-1} \left(-\frac{c_k}{\varkappa} f' c_{n-k} + (v_k - f' u_k) u_{n-k} + u_k u'_{n-1-k} + \frac{c_k}{\varkappa} c'_{n-1-k} \right) \right], \quad (2.170)$$

$$Q_{n-1}(\xi) = \frac{1}{c_0 f' - f} \left[c_0 v'_{n-1} + (n-1)v_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{n-1} \left(\frac{c_k}{\varkappa} c_{n-k} + (v_k - f' u_k) v_{n-k} + u_k v'_{n-1-k} \right) \right]. \quad (2.171)$$

Отсюда u'_n и v'_n равны

$$u'_n = \frac{c'_n}{\varkappa} \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} + \frac{c_n}{\varkappa} \left(\frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} \right)' + R'_{n-1},$$

$$v'_n = -\frac{c'_n}{\varkappa} \frac{c_0}{c_0 f' - f} - \frac{c_n}{\varkappa} \left(\frac{c_0}{c_0 f' - f} \right)' + Q'_{n-1}.$$

С учетом выражений для u'_n, v'_n найдем, чему равно $f c'_n + \varkappa c_0 v'_n - \varkappa f u'_n$

$$\begin{aligned} f c'_n + \varkappa c_0 v'_n - \varkappa f u'_n &= c'_n \left(f - \frac{c_0^2}{c_0 f' - f} - \frac{c_0 f f'}{c_0 f' - f} \right) - \\ &- c_n \left[c_0 \left(\frac{c_0}{c_0 f' - f} \right)' + f \left(\frac{f}{c_0 f' - f} \right)' \right] + \varkappa \left(c_0 Q'_{n-1} - f R'_{n-1} \right) = \\ &= 2f c'_n - c_n \left[c_0 \left(\frac{c_0}{c_0 f' - f} \right)' + f \left(\frac{f}{c_0 f' - f} \right)' \right] + \varkappa \left(c_0 Q'_{n-1} - f R'_{n-1} \right). \end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых в (2.169) получим ДУ для коэффициента $c_n(\xi)$ при $n \geq 2$

$$c'_n - P_n(\xi) c_n + S_{n-1}(\xi) = 0, \quad (2.172)$$

где функции $P_n(\xi)$ и $S_{n-1}(\xi)$ задаются следующими выражениями

$$P_n(\xi) = \frac{c_0}{2} \left(\frac{2-n}{f^2} - \frac{n}{c_0^2} - \frac{4}{\varkappa+1} \frac{1}{c_0^2 + f^2} \right) + (n+1) c_1 \frac{(c_0^2 + f^2)^2}{4c_0' c_0^2 f^3}, \quad (2.173)$$

$$\begin{aligned}
S_{n-1}(\xi) = & \frac{1}{2f} \left[\varkappa (c_0 Q'_{n-1} - f R'_{n-1}) + (Q_{n-1} - f' R_{n-1}) \left[\varkappa n + c_1 \frac{c_0 f' - f}{c_0} (\varkappa n + n + 2) \right] + \right. \\
& + n c_1 \left(c'_{n-1} \frac{f'}{c'_0} + u'_{n-1} \frac{c_0 f'^2 (1 + \varkappa) + \varkappa c_0}{c_0 f' - f} - v'_{n-1} \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} \right) + \frac{c'_0}{c_0} (2c_0 f' - f) R_{n-1} - \\
& - \sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{n} \left[\left(v_k - f' u_k - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_k \right) \left(\varkappa v_{n+1-k} - \varkappa f' u_{n+1-k} - \frac{c_0 f' - f}{c_0} c_{n+1-k} \right) - \right. \\
& \left. - c'_{n-k} \left(f' c_k + u_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) - \varkappa u'_{n-k} \left(f' u_k + c_k \frac{c_0 f' - f}{c_0} \right) + \varkappa u_k v'_{n-k} \right] \left. \right]. \quad (2.174)
\end{aligned}$$

Для уравнения (2.172) построим НУ из ГУ задачи (2.38). Для этого выражение

$$w_3|_{\zeta=0} = g(\vartheta) w_2|_{\zeta=0}$$

дифференцируется n раз по ϑ

$$w_{3\vartheta}^{(n)}|_{\zeta=0} = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} g_{\vartheta}^{(k)} w_{2\vartheta}^{(n-k)}|_{\zeta=0}$$

и в получившемся соотношении полагается $\vartheta = 0$

$$w_{3,n}|_{\zeta=0} = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} g_{\vartheta}^{(k)}(0) w_{2,n-k}|_{\zeta=0}.$$

Так как $w_{2,0}|_{\zeta=0} = u_0|_{\xi=1} \equiv 0$, отсюда

$$w_{3,n}|_{\zeta=0} = \left[g(0) w_{2,n} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{n} g_{\vartheta}^{(k)}(0) w_{2,n-k} \right]_{\zeta=0}.$$

С учетом того, что $w_3 = -\varkappa v / c_0(\xi)$, тогда

$$w_{3,n} = -\frac{\varkappa}{c_0(\xi)} v_n = \frac{c_n}{c_0 f' - f} - \frac{\varkappa}{c_0} Q_{n-1},$$

в результате получим НУ ДУ для $c_n(\xi)$ при $\xi = 1$ ($\vartheta = 0, \zeta = 0$)

$$\begin{aligned}
c_n(1) = & \left[\varkappa \frac{c_0 f' - f}{c_0} Q_{n-1} + g(0) (c_0 f' - f) w_{2,n} + \right. \\
& \left. + (c_0 f' - f) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{n} g_{\vartheta}^{(k)}(0) w_{2,n-k} \right]_{\xi=1}, \quad (2.175)
\end{aligned}$$

где коэффициенты $w_{2,k}$, $k = \overline{1, n}$ определяются согласно алгоритму по п. 2.5.

Уравнение (2.172) совместно с НУ (2.175) – задача Коши для нахождения коэффициента $c_n(\xi)$ в несогласованном случае.

2.12 Построение решения для коэффициента $c_n(\xi)$. Анализ построенного решения

Построим решение задачи (2.172), (2.175) для произвольного $n \geq 2$. Решение (2.172) – сумма решений однородного и неоднородного ДУ

$$c_n(\xi) = \bar{c}_n(\xi) + \tilde{c}_n(\xi). \quad (2.176)$$

Найдем решение однородного ДУ

$$\bar{c}'_n - P_n(\xi) \bar{c}_n = 0, \quad \ln \bar{c}_n(\xi) = \int P_n(\xi) d\xi. \quad (2.177)$$

При $n = 2$ выражение (2.177) принимает вид

$$\ln \bar{c}_2 = -\frac{\varkappa + 1}{\varkappa} \ln c_0 - \frac{2}{\varkappa} \int \frac{c_0 dc_0}{c_0^2 + f^2} + \frac{3}{4} \int c_1(\xi) \frac{(c_0^2 + f^2)^2}{c_0' c_0^2 f^3} d\xi. \quad (2.178)$$

Найдем второе слагаемое в (2.178). С учетом замены (2.136) интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{2}{\varkappa} \int \frac{c_0 dc_0}{c_0^2 + f^2} &= 2 \int \frac{z^{\varkappa-2} dz}{z^{\varkappa-1} (\beta + 1) + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)} = \\ &= -\ln (z^{\varkappa-1} (\beta + 1) + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)). \end{aligned}$$

Решение однородного ДУ

$$\bar{c}_2(\xi) = \frac{\beta + 1 + c_0^{1/\varkappa-1} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}{c_0^{2/\varkappa}} \exp(J(\xi)), \quad J(\xi) = \int c_1(\xi) \frac{(c_0^2 + f^2)^2}{c_0' c_0^2 f^3} d\xi.$$

Построим решение (2.172) при $n = 2$ методом вариации произвольной постоянной

$$c_2(\xi) = \bar{c}_2(\xi) \cdot B(\xi), \quad B'_\xi = -S_1(\xi)/\bar{c}_2(\xi), \quad B(\xi) = \text{const} - \int_1^\xi \frac{S_1(\xi')}{\bar{c}_2(\xi')} d\xi'.$$

Константу интегрирования определяем из НУ (2.175) при $n = 2$, окончательно будем иметь

$$c_2(\xi) = \frac{c_2(1)}{\bar{c}_2(1)} \bar{c}_2(\xi) - \bar{c}_2(\xi) \int_1^\xi \frac{S_1(\xi')}{\bar{c}_2(\xi')} d\xi'. \quad (2.179)$$

Очевидно (из вида функции $\bar{c}_2(\xi)$), что при $c_0 \rightarrow 0$ решение однородного ДУ $\bar{c}_2 \rightarrow \infty$, а отсюда следует, что $c_2 \rightarrow \infty$ при $c_0 \rightarrow 0$.

Построим решение задачи (2.172), (2.175) при $n > 2$, тогда решение (2.177)

$$\ln \bar{c}_n = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \int \frac{c_0}{f^2} d\xi + \frac{n}{2} \int \frac{d\xi}{c_0} - \frac{2}{\pi} \int \frac{c_0 dc_0}{c_0^2 + f^2} + \frac{n+1}{3} J(\xi). \quad (2.180)$$

В результате интегрирования (2.180) получим решение (2.177) при $n > 2$

$$\bar{c}_n(\xi) = (c_0^2 + f^2) f^{n-2} \exp \left(\frac{n+1}{3} J(\xi) \right). \quad (2.181)$$

По аналогии со случаем $n = 2$ получим решение (2.172) при $n > 2$

$$c_n(\xi) = \frac{c_n(1)}{\bar{c}_n(1)} \bar{c}_n(\xi) - \bar{c}_n(\xi) \int_1^\xi \frac{S_{n-1}(\xi')}{\bar{c}_n(\xi')} d\xi'. \quad (2.182)$$

При $c_0 \rightarrow 0$ функция $J(\xi) \rightarrow \infty$, следовательно

$$\lim_{c_0 \rightarrow 0} \bar{c}_n(\xi) = \infty,$$

так как степенная функция растет медленнее экспоненты. Таким образом, при $c_0 \rightarrow 0$ функция $c_n \rightarrow \infty$.

В результате решения задачи (2.172), (2.175) для коэффициента $c_n(\xi)$ при $n \geq 2$ и анализа полученного решения установлено

$$\lim_{c_0 \rightarrow 0} c_n(\xi) = \infty, \quad (2.183)$$

что противоречит физическому смыслу. Это означает, что окрестность точки D не попадает в область сходимости ряда (2.68) для функции $c(\xi, \vartheta)$. Найдем область сходимости ряда (2.68) из признака Даламбера для функции $c(\xi, \vartheta)$, используя решение (2.182)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(\xi) \vartheta^{n+1} \cdot n!}{c_n(\xi) \vartheta^n \cdot (n+1)!} \right| < 1, \quad \vartheta < \left| (n+1) \frac{c_n(\xi)}{c_{n+1}(\xi)} \right|. \quad (2.184)$$

Подставим в (2.184) выражение для $c_n(\xi)$, получим неравенство, задающее искомую область сходимости ряда (2.68) для функции $c(\xi, \vartheta)$

$$\vartheta < \left| (n+1) f(\xi) \exp \left(-\frac{1}{3} J(\xi) \right) \frac{c_n(1)/\bar{c}_n(1) - \int_1^\xi \frac{S_{n-1}(\xi')}{\bar{c}_n(\xi')} d\xi'}{c_{n+1}(1)/\bar{c}_{n+1}(1) - \int_1^\xi \frac{S_n(\xi')}{\bar{c}_{n+1}(\xi')} d\xi'} \right|. \quad (2.185)$$

Построение решения исходной НКЗ (2.24) в виде ряда (2.68), описывающей разлет газа в вакуум на косой стенке в пространстве физических автомодельных переменных ξ, ϑ , закончено.

2.13 Выводы по главе

В данной главе выполнено математическое исследование задачи о разлете политропного газа в вакуум на косой стенке в общем несогласованном случае, при произвольном значении угла наклона косой стенки α ($0 < \alpha < \pi/2$), не связанным со значением γ .

Постановка задачи предполагает переход от исходной СУГД, описывающей течение газа в области разрежения ДВ, к ХЗК стандартного вида в пространстве специальных переменных $\vartheta = \eta - f(\xi)$ и $\zeta = \eta - \xi \operatorname{tg} \alpha$, где $\xi = x/t$, $\eta = y/t$ – физические автомодельные переменные.

Для поставленной НКЗ приведено доказательство теоремы существования и единственности локально-аналитического решения в виде ряда по степеням ϑ . Алгоритм построения коэффициентов степенного ряда следует из доказательства теоремы.

Построена задача Коши для коэффициента $c_1(\xi)$, и найдено ее решение в явном виде для согласованного случая, в несогласованном случае решение для $c_1(\xi)$ выписано в аналитическом виде для различных значений показателя политропы γ при произвольном $0 < \alpha < \pi/2$.

Построена система ДУ и уравнения НУ для нахождения коэффициента $c_n(\xi)$ при $n \geq 2$ рассматриваемой задачи в несогласованном случае. Далее построено решение данной задачи Коши для коэффициента $c_n(\xi)$ при $n \geq 2$ в аналитическом виде, и исследовано поведение функции $c_n(\xi)$ при $c_0 \rightarrow 0$. Установлено, что окрестность точки D не попадает в область сходимости ряда (2.68) для функции $c(\xi, \vartheta)$. По признаку Даламбера построена область сходимости, в которой рассматриваемый ряд сходится абсолютно.

Таким образом, результатом настоящей главы является законченное построение локально-аналитического решения рассматриваемой НКЗ в общем несогласованном случае при произвольном показателе политропы газа γ и угле наклона косой стенки $0 < \alpha < \pi/2$. Полученные результаты были опубликованы в ряде статей [82; 85; 86].

ГЛАВА 3. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОСТРОЕННОГО РЕШЕНИЯ ИСХОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

3.1 Результаты газодинамического анализа свойств течений разрежения/сжатия газа, описываемых решением рассматриваемой начально-краевой задачи в согласованном случае

Исследуем свойства построенного автомодельного решения СУГД (2.113)–(2.115) задачи (2.24) в пространстве физических переменных (t, x, y) в согласованном случае.

Область течения типа ДВ ограничена следующими кривыми:

1. Косая стенка AE , в согласованном случае задаваемая уравнением

$$y = x \operatorname{tg} \alpha = x \sqrt{\beta};$$

2. Звуковая характеристика AD , отделяющая область течения типа ЦВ от области течения типа ДВ, задаваемая в согласованном случае уравнением

$$f(\xi) = c_0 \sqrt{\beta}, \quad y = \frac{\kappa \sqrt{\beta}}{\kappa + 1} x + \frac{\sqrt{\beta}}{\kappa + 1} t;$$

3. Граница DE области течения ДВ с вакуумом, задаваемая уравнением

$$c = 0, \quad \frac{1}{\beta} \left(1 + \kappa \frac{x}{t} + \kappa \sqrt{\beta} \frac{y}{t} \right) = 0. \quad (3.1)$$

После преобразования (3.1) получим

$$\sqrt{\beta} y + x = -\frac{t}{\kappa}. \quad (3.2)$$

Из уравнений, ограничивающих область ДВ, видно, что кривые AE , AD и DE – суть прямые линии.

Граница с вакуумом DE , задаваемая уравнением (3.2), перпендикулярна косоугольной стенке AE . Это легко показать, вычислив скалярное произведение векторов, коллинеарных направлениям каждой прямой

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (-\sqrt{\beta}, 1) \cdot (1, \sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta} \equiv 0,$$

где $\mathbf{v}_1 = (-\sqrt{\beta}, 1)$ – вектор коллинеарный косоугольной стенке AE , $\mathbf{v}_2 = (1, \sqrt{\beta})$ – вектор коллинеарный границе с вакуумом DE .

Границы ЦВ с вакуумом CD и покоем AB в переменных (t, x, y) задаются следующими уравнениями [46; 48; 82]

$$CD : x = -\frac{t}{\varkappa}, \quad AB : x = t. \quad (3.3)$$

Видно, что границы ЦВ с вакуумом CD и с покоем AB – вертикальные прямые.

Значения газодинамических параметров $c(t, x, y)$, $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$ вдоль косой стенки AE равны

$$c(t, x) = \frac{1}{\beta} + \frac{2\varkappa}{1 + \varkappa t} \frac{x}{t}, \quad u(t, x) = \frac{1}{\beta} \frac{x}{t} - \frac{1}{\beta}, \quad v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{x}{t} - \frac{1}{\sqrt{\beta}},$$

и их значения вдоль границы ДВ с вакуумом DE

$$c = 0, \quad u(t, x) = \frac{x}{t}, \quad v(t, y) = \frac{y}{t}.$$

Найдем координаты точки $D(x_D, y_D)$ – пересечение прямых DE и CD . Координата x_D совпадает с x -координатой границы CD , а координата y_D определяется из уравнения границы DE при $x = x_D$

$$x_D = -\frac{t}{\varkappa}, \quad y_D = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(-x_D - \frac{t}{\varkappa} \right) = 0.$$

Найдем координаты точки $E(x_E, y_E)$ – пересечение прямых DE и AE . Координата x_E определяется из решения уравнения

$$x_E \sqrt{\beta} = -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(x_E + \frac{t}{\varkappa} \right),$$

отсюда x_E и, соответственно, y_E равно

$$x_E = -\frac{1 + \varkappa t}{\beta} \frac{t}{2\varkappa}, \quad y_E = x_E \sqrt{\beta} = -\frac{1 + \varkappa t}{\sqrt{\beta}} \frac{t}{2\varkappa}.$$

Проверим выполнение условия непротекания газа на косой стенке AE для полученного решения в согласованном случае

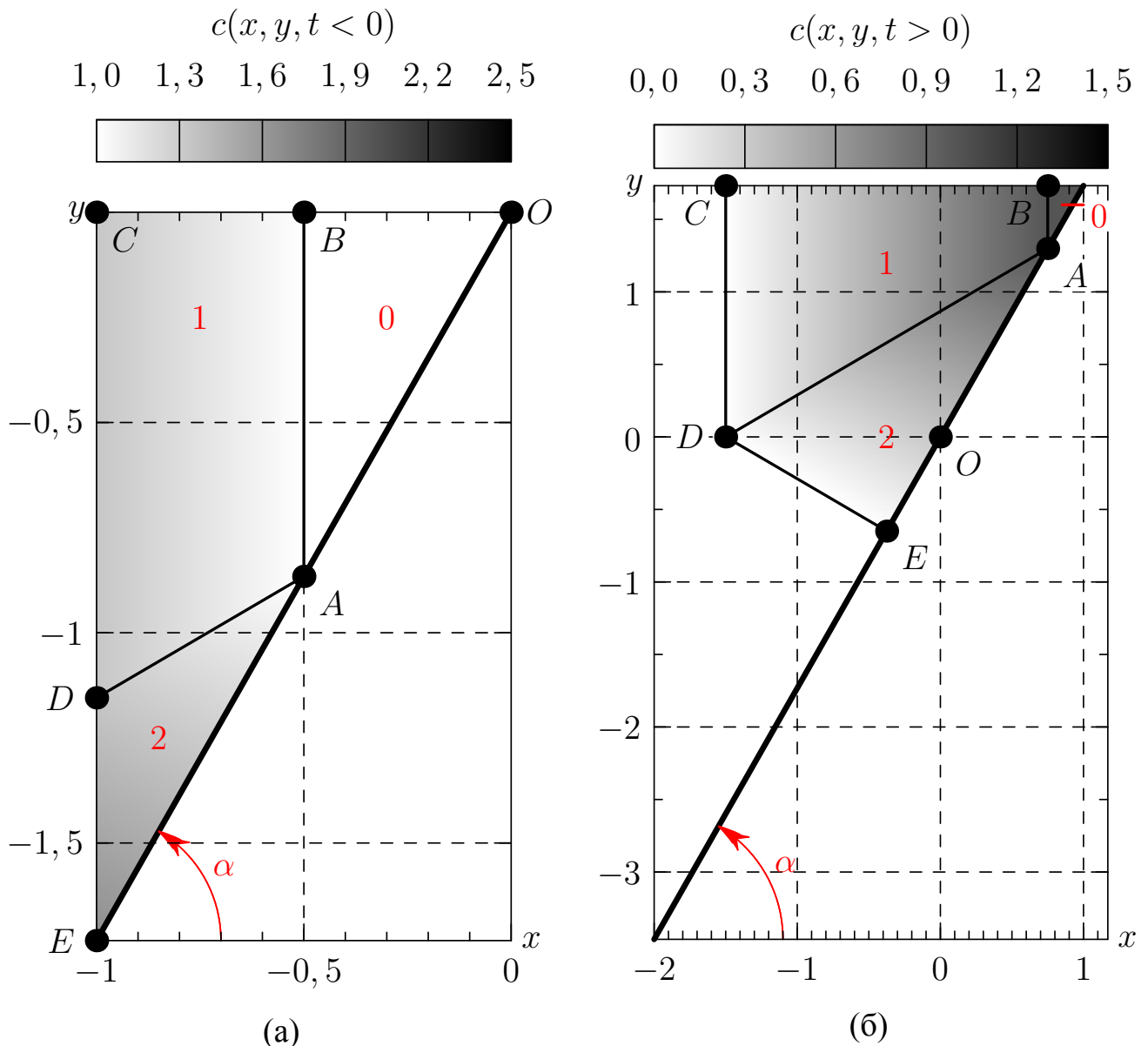
$$v|_{AE} = u \operatorname{tg} \alpha|_{AE}, \quad v|_{y=\sqrt{\beta}x} = u \sqrt{\beta} \Big|_{y=\sqrt{\beta}x} \quad (3.4)$$

Подставим в (3.4) найденные ранее значения функций u и v на косой стенке AE

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{x}{t} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\beta} \left(\frac{1}{\beta} \frac{x}{t} - \frac{1}{\beta} \right), \quad (3.5)$$

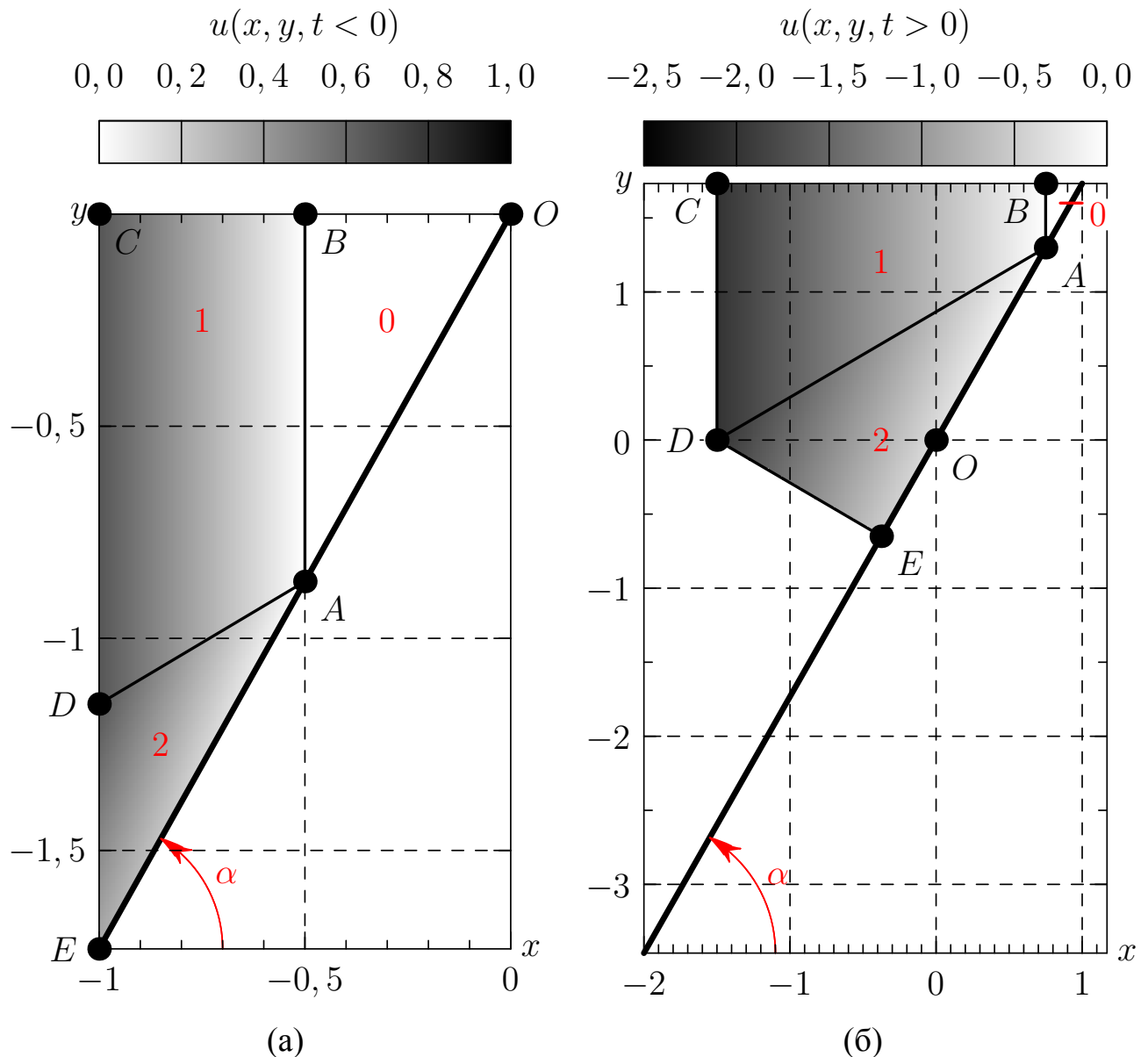
в результате получаем тождество. Следовательно, условие непротекания газа на косой стенке (3.4) для точного решения В. А. Сучкова выполняется автоматически.

Выполненный анализ свойств построенного решения позволяет построить графики найденных функций $c(t, x, y)$, $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ точного решения В. А. Сучкова (2.113)–(2.115) для момента времени, отвечающего сжатию газа поршнем $t < 0$ в области сжатия и покоя, и для момента времени, отвечающего истечению газа в вакуум $t > 0$ в области разрежения и покоя (см. рис. 3.1–3.3). Обозначения на рис. 3.1–3.3 аналогичны обозначениям на рис. 2.1.



0 – область покоя; 1 – область ЦВ; 2 – область ДВ

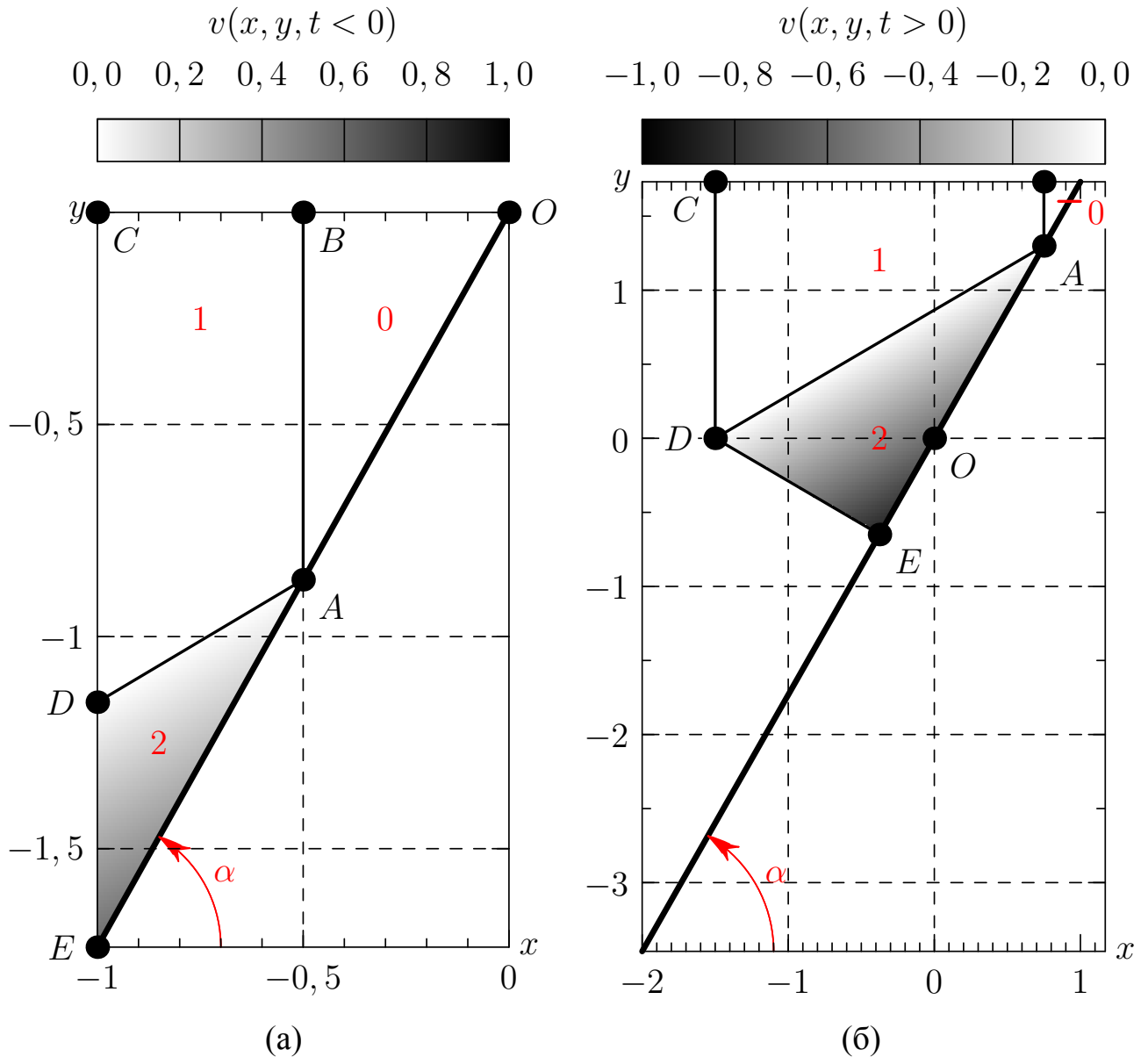
Рисунок 3.1 – График функции $c(t, x, y)$ при $t < 0$ (а) и $t > 0$ (б)



0 – область покоя; 1 – область ЦВ; 2 – область ДВ
Рисунок 3.2 – График функции $u(t, x, y)$ при $t < 0$ (а) и $t > 0$ (б)

Расчет значений функций $c(t, x, y)$, $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$ для газа (водород), приведенных на рисунках 3.1–3.3, выполнен численно с использованием кода на языке MATLAB [87].

Газодинамический анализ параметров течения газа в области ДВ, описываемого решением транспортного уравнения для $c_1(\xi)$ в согласованном случае (двойная волна Сучкова), закончен.



0 – область покоя; 1 – область ЦВ; 2 – область ДВ

Рисунок 3.3 – График функции $v(t, x, y)$ при $t < 0$ (а) и при $t > 0$ (б)

3.2 Квазисогласованное приближение

В несогласованном случае, когда условие согласования не выполняется

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \neq \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma}, \quad (3.6)$$

решение исходной НКЗ представляется в виде ряда по степеням ϑ

$$c(\xi, \vartheta) = c_0(\xi) + c_1(\xi)\vartheta + c_2(\xi)\frac{\vartheta^2}{2} + \dots, \quad (3.7)$$

$$u(\xi, \vartheta) = u_0(\xi) + u_1(\xi)\vartheta + u_2(\xi)\frac{\vartheta^2}{2} + \dots, \quad v(\xi, \vartheta) = v_1(\xi)\vartheta + v_2(\xi)\frac{\vartheta^2}{2} + \dots$$

Для описания всех газодинамических свойств течения разрежения в области ДВ необходимо для заданных значений α и γ найти явные выражения для коэффициентов $c_n(\xi)$, $u_n(\xi)$ и $v_n(\xi)$, где $n \geq 1$.

Далее будет показано, что построить решение задачи (2.96) в явном виде можно только для определенного набора значений γ при произвольном α . Для последующих коэффициентов $c_n(\xi)$ при $n \geq 2$ решение соответствующих ДУ (2.172) для НУ (2.175) можно построить только численно.

Для анализа газодинамических свойств течения разрежения в области ДВ при истечении газа в вакуум на косой стенке рассмотрим квазисогласованное приближение, когда выполняется неравенство (3.6), но коэффициенты $c_n(\xi)$, $u_n(\xi)$ и $v_n(\xi)$ рядов (3.7) при $n \geq 2$ равны нулю. Тогда, ряды (3.7) для функций $c(\xi, \vartheta)$, $u(\xi, \vartheta)$ и $v(\xi, \vartheta)$ можно записать в следующем виде

$$c(\xi, \vartheta) = c_0(\xi) + c_1(\xi)\vartheta, \quad u(\xi, \vartheta) = u_0(\xi) + u_1(\xi)\vartheta, \quad v(\xi, \vartheta) = v_1(\xi)\vartheta. \quad (3.8)$$

Одно из отличий квазисогласованного приближения от течения в согласованном случае заключается в следующем, а именно, запишем функцию скорости звука (решение (3.8)) в координатах u , v . Для этого выражение для u умножим на $\varkappa$ и вычтем из c

$$c - \varkappa u = 1 + \varkappa u_0 + c_1\vartheta - \varkappa u_0 - \varkappa u_1\vartheta = 1 + (c_1 - \varkappa u_1)\vartheta. \quad (3.9)$$

Найдем $(c_1 - \varkappa u_1)$

$$c_1 - \varkappa u_1 = c_1 - c_1 \frac{c_0 f'}{c_0 f' - f} = -c_1 \frac{f}{c_0 f' - f} = \varkappa \frac{f}{c_0} v_1. \quad (3.10)$$

Подставим (3.10) в (3.9), получим

$$c = 1 + \varkappa u + \varkappa \frac{f}{c_0} v, \quad (3.11)$$

где $f(\xi)$ определяется из выражения (2.55) для различных значений γ и α . Из сравнения формул (2.103) и (3.11) видно, что в согласованном случае поверхность функции $c(\xi, \vartheta)$ есть плоскость в переменных u , v , а в квазисогласованном приближении – это криволинейная поверхность, так как коэффициент при переменной v есть функция независимой переменной ξ .

Далее рассмотрим свойства течения разрежения области ДВ в квазисогласованном приближении, как в п. 3.1 для согласованного случая, а именно определение границ области течения разрежения ДВ и построение графиков функций $c(t, x, y)$, $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$.

3.3 Анализ свойств течений разрежения в квазисогласованном приближении

3.3.1 Построение решения транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в частном несогласованном случае для значений γ , допускающих интегрирование $I(\xi)$ в элементарных функциях

Рассмотрим интеграл $I(\xi)$

$$I(\xi) = \int \frac{dz}{z^2 (\beta + z^{1-\kappa} (\text{tg}^2 \alpha - \beta))}, \quad z = (c_0(\xi))^{1/\kappa}. \quad (3.12)$$

Будем считать, что $\kappa = \frac{m}{n}$, где $n, m \in \mathbb{N}$, тогда $m = k \cdot n + l$, откуда

$$1 - \kappa = \frac{n - k \cdot n - l}{n} = (1 - k) - \frac{l}{n}, \quad k, l \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Подставим (3.13) в (3.12) и введем замену $z = t^n$, тогда $dz = nt^{n-1}dt$, откуда $I(\xi)$ имеет вид

$$I(t) = n \int \frac{dt}{t^{n+1} (\beta + t^{n(1-k)-l} (\text{tg}^2 \alpha - \beta))}. \quad (3.14)$$

Дробь стоящая под знаком интеграла (3.14) раскладывается на сумму элементарных дробей, когда $n+1 : n(1-k)-l$, то есть $p = \frac{n+1}{n(1-k)-l}$, где $p \in \mathbb{N}$.

Из последнего выражения $l = n(1-k) - \frac{n+1}{p}$, откуда

$$I(t) = n \int \frac{dt}{t^{n+1} (\beta + t^{(n+1)/p} (\text{tg}^2 \alpha - \beta))}. \quad (3.15)$$

Разложение дроби, стоящей под знаком интеграла (3.15), на сумму простейших дробей при $\text{tg}^2 \alpha > \beta$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^{n+1} (\beta + t^{(n+1)/p} (\text{tg}^2 \alpha - \beta))} &= \frac{1}{\beta} \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(\text{tg}^2 \alpha - \beta)^r}{\beta^r} \cdot \frac{(-1)^r}{t^{\frac{p-r}{p}(n+1)}} + \\ &+ \left(\frac{\text{tg}^2 \alpha - \beta}{\beta} \right)^p \cdot \frac{(-1)^p}{\beta + t^{(n+1)/p} (\text{tg}^2 \alpha - \beta)}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

при $\text{tg}^2 \alpha < \beta$

$$\frac{1}{t^{n+1} (\beta - t^{(n+1)/p} (\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha))} = \frac{1}{\beta} \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)^r}{\beta^r} \cdot \frac{1}{t^{\frac{p-r}{p}(n+1)}} +$$

$$+ \left(\frac{\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\beta} \right)^p \cdot \frac{1}{\beta - t^{(n+1)/p} (\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)}. \quad (3.17)$$

Подставим (3.16) и (3.17) в (3.15)

$$I(t) = \frac{n}{\beta} \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)^r}{\beta^r} \int \frac{dt}{t^{\frac{p-r}{p}(n+1)}} +$$

$$+ (-1)^p n \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta}{\beta} \right)^p \int \frac{dt}{\beta + t^{(n+1)/p} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha > \beta, \quad (3.18)$$

$$I(t) = \frac{n}{\beta} \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)^r}{\beta^r} \int \frac{dt}{t^{\frac{p-r}{p}(n+1)}} +$$

$$+ n \left(\frac{\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\beta} \right)^p \int \frac{dt}{\beta - t^{(n+1)/p} (\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)}, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha < \beta. \quad (3.19)$$

Согласно [80] последняя дробь в выражениях (3.18) и (3.19) интегрируется в элементарных функциях, когда n, p являются корнями следующих диофантовых уравнений:

$$(n+1)/p = 1, \quad (n+1)/p = 2, \quad (n+1)/p = 3, \quad (n+1)/p = 4.$$

Будем рассматривать следующие значения γ :

1. $\gamma = 5/3$ (водород), отсюда $(n+1)/p = 2$ и $n = 3, p = 2$;
2. $\gamma = 2$ (мелкая вода), отсюда $(n+1)/p = 1$ и $n = 2, p = 3$;
3. $\gamma = 5/2$ (между мелкой водой и продуктами взрыва), отсюда $(n+1)/p = 1$ и $n = 4, p = 5$.

Если $(n+1)/p = 1$, тогда при любом значении α

$$I(t) = \frac{n}{\beta} \sum_{r=0}^{p-2} \frac{(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)^r}{\beta^r} \frac{t^{1-p+r}}{1-p+r} -$$

$$- \frac{n (\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)^{p-1}}{\beta \beta^{p-1}} \ln \left(\frac{\beta + t (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}{t} \right). \quad (3.20)$$

Если $(n+1)/p = 2$, тогда при $\operatorname{tg}^2 \alpha > \beta$

$$I(t) = \frac{n}{\beta} \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)^r}{\beta^r} \frac{t^{1-2(p-r)}}{1-2(p-r)} +$$

$$+ (-1)^p \frac{n}{\beta} \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)^{p-1/2}}{\beta^{p-1/2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{\beta/(\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)}}, \quad (3.21)$$

при $\operatorname{tg}^2 \alpha < \beta$

$$I(t) = \frac{n}{\beta} \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)^r}{\beta^r} \frac{t^{1-2(p-r)}}{1-2(p-r)} +$$

$$+ \frac{n}{2\beta} \frac{(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)^p}{\beta^p} \sqrt{\frac{\beta}{\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha}} \ln \frac{t + \sqrt{\beta/(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)}}{t - \sqrt{\beta/(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)}}. \quad (3.22)$$

Для определения $I(\xi)$ выполняется обратная замена по формуле

$$t = [c_0(\xi)]^{\frac{p}{n(p-1)-1}}.$$

В случае, когда $\gamma = 5/3$ (водород), то $n = 3$, $p = 2$, откуда вид интеграла $I(\xi)$ в результате подстановки в формулу (3.21) при $\operatorname{tg}^2 \alpha > \beta$ имеет вид

$$I(\xi) = -\frac{1}{2c_0^3} + \frac{3(\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)}{4c_0} + \frac{3(\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)^{3/2}}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{c_0}{\sqrt{2/(\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)}},$$

при этом

$$I(1) = -\frac{1}{2} + \frac{3(\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)}{4} + \frac{3(\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)^{3/2}}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2/(\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)}}.$$

Интеграл $I(\xi)$ в результате подстановки в формулу (3.22) при $\operatorname{tg}^2 \alpha < \beta$ имеет вид

$$I(\xi) = -\frac{1}{2c_0^3} - \frac{3(2 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{4c_0} + \frac{3(2 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^{3/2}}{8\sqrt{2}} \ln \frac{c_0 + \sqrt{\beta/(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)}}{c_0 - \sqrt{\beta/(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)}},$$

при этом

$$I(1) = -\frac{1}{2} - \frac{3(2 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{4} + \frac{3(2 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^{3/2}}{8\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{\beta/(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)}}{1 - \sqrt{\beta/(\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)}}.$$

Подставим выражение для $I(\xi)$ и $I(1)$ в (2.146), получим выражение для функции $c_1(\xi)$ в явном виде при $\gamma = 5/3$ ($\varkappa = 1/3$)

$$c_1(\xi) = \frac{3 + c_0^2(\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)}{\sqrt{2 + c_0^2(\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)}} \cdot \frac{1}{2M(\xi)|_{\varkappa=1/3}}, \quad (3.23)$$

где выражение $2M(\xi)|_{\varkappa=1/3}$ при $\operatorname{tg}^2 \alpha > \beta$ равно

$$\begin{aligned} 2M(\xi)|_{\varkappa=1/3} = & -6c_0^3 + 2,25c_0^3 \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{3c_0^3}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 9\frac{1}{2} - \frac{1}{4}c_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2) + \\ & + \frac{17\sqrt{2}}{8}c_0^3 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)} - \frac{1}{2 + c_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)} - \\ & - \frac{17\sqrt{2}}{8}c_0^3 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)^{3/2} \operatorname{arctg} \frac{c_0}{\sqrt{2/(\operatorname{tg}^2 \alpha - 2)}}, \end{aligned}$$

а при $\operatorname{tg}^2 \alpha < \beta$

$$\begin{aligned} M(\xi)|_{\varkappa=1/3} = & c_0^3 \left(\frac{8}{3} - \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{3}{2\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) - \frac{2}{3} - \frac{1}{2(2 - c_0^2 (2 - \operatorname{tg}^2 \alpha))} + \\ & + 2(2 - c_0^2 (2 - \operatorname{tg}^2 \alpha)) + \frac{17}{6}c_0^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_0^3} - 1 \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{2 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2} \right) \left(\frac{1}{c_0} - 1 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} \left(\frac{2 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2} \right)^{3/2} \ln \frac{(c_0 + \sqrt{2/(2 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}) (1 - \sqrt{2/(2 - \operatorname{tg}^2 \alpha)})}{(c_0 - \sqrt{2/(2 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}) (1 + \sqrt{2/(2 - \operatorname{tg}^2 \alpha)})} \right]. \end{aligned}$$

Из выражения для $c_1(\xi)$ легко найти $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ в явном виде

$$u_1(\xi) = \frac{c_0^2 - f^2}{c_0 f} \frac{3}{2M(\xi)|_{\varkappa=1/3}}, \quad v_1(\xi) = \frac{6}{2M(\xi)|_{\varkappa=1/3}}.$$

Рассмотрим случай, когда значение $\gamma = 2$, $\varkappa = 1/2$ и $n = 2$, $p = 3$, откуда интеграл $I(\xi)$ в результате подстановки в формулу (3.20) при любых значениях α имеет вид

$$I(\xi) = -\frac{1}{3c_0^2} + \frac{2(\operatorname{tg}^2 \alpha - 3)}{9c_0} - \frac{2(\operatorname{tg}^2 \alpha - 3)^2}{27} \ln \left(\frac{3}{c_0} + \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \right),$$

при этом

$$I(1) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}(\operatorname{tg}^2 \alpha - 3) - \frac{2(\operatorname{tg}^2 \alpha - 3)^2}{27} \ln(\operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Подставим выражение для $I(\xi)$ и $I(1)$ в (2.146), получим выражение для функции $c_1(\xi)$ в явном виде при $\gamma = 2$ ($\varkappa = 1/2$)

$$c_1(\xi) = \frac{4 + c_0(\operatorname{tg}^2 \alpha - 3)}{\sqrt{3 + c_0(\operatorname{tg}^2 \alpha - 3)}} \cdot \frac{2}{3M(\xi)|_{\varkappa=1/2}}, \quad (3.24)$$

где выражение $M(\xi)|_{\varkappa=1/2}$ равно

$$M(\xi)|_{\varkappa=1/2} = \frac{3}{2} (3 + c_0 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 3)) - \frac{1}{2(3 + c_0 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 3))} + 1 - \frac{2}{3} c_0 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 3) + \\ + c_0^2 \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha - 3)^2}{6 \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2}{9} c_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 3)^2 \ln \left(\frac{3 + c_0 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 3)}{c_0 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right).$$

Выражения для $u_1(\xi)$, $v_1(\xi)$ получаются из $c_1(\xi)$ аналогично, как в предыдущем случае.

Рассмотрим случай, когда значение $\gamma = 5/2$, $\varkappa = 3/4$ и $n = 4$, $p = 5$, отсюда интеграл $I(\xi)$ в результате подстановки в формулу (3.20) при любых значениях α имеет вид

$$I(\xi) = \frac{4}{7} \sum_{r=0}^3 \left(\frac{7 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{7} \right)^r \frac{1}{(r-4)c_0^{(4-r)/3}} - \\ - \frac{4}{7} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 7}{7} \right)^4 \ln \left(\frac{7 + c_0^{1/3} (\operatorname{tg}^2 \alpha - 7)}{c_0^{1/3}} \right),$$

при этом

$$I(1) = \frac{4}{7} \sum_{r=0}^3 \left(\frac{7 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{7} \right)^r \frac{1}{(r-4)} - \frac{4}{7} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 7}{7} \right)^4 \ln (\operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Подставим выражение для $I(\xi)$ и $I(1)$ в (2.146), получим выражение для функции $c_1(\xi)$ в явном виде при $\gamma = 5/2$ ($\varkappa = 3/4$)

$$c_1(\xi) = \frac{8 + c_0^{1/3} (\operatorname{tg}^2 \alpha - 7)}{\sqrt{7 + c_0^{1/3} (\operatorname{tg}^2 \alpha - 7)}} \cdot \frac{6}{7M(\xi)|_{\varkappa=3/4}}, \quad (3.25)$$

где выражение $M(\xi)|_{\varkappa=3/4}$ равно

$$M(\xi)|_{\varkappa=3/4} = c_0^{4/3} \left(\frac{17}{12} - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{3}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) + \frac{7}{12} + \frac{7}{6} (7 + c_0^{1/3} (\operatorname{tg}^2 \alpha - 7)) - \\ - \frac{1}{2(7 + c_0^{1/3} (\operatorname{tg}^2 \alpha - 7))} - \frac{13}{7} c_0^{4/3} \sum_{r=0}^3 \left(\frac{7 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{7} \right)^r \frac{1}{r-4} \left(\frac{1}{c_0^{(4-r)/3}} - 1 \right) + \\ + \frac{13}{7} c_0^{4/3} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 7}{7} \right)^4 \ln \left(\frac{7 + c_0^{1/3} (\operatorname{tg}^2 \alpha - 7)}{c_0^{1/3} \operatorname{tg}^2 \alpha} \right).$$

Выражения для $u_1(\xi)$, $v_1(\xi)$ получаются из $c_1(\xi)$ аналогично, как в двух предыдущих случаях.

3.3.2 Определение области течения двойной волны разряжения в квазисогласованном приближении в зависимости от значения угла наклона косой стенки α и показателя политропы γ

Область течения газа типа ДВ в квазисогласованном приближении при его разлете в вакуум на косой стенке ограничена тремя кривыми:

1. Косой стенкой AE , задаваемой уравнением $\eta = \xi \operatorname{tg} \alpha$;
2. Звуковой характеристикой AD , задаваемой уравнением (2.55);
3. Границей газ-вакуум DE определяемой из решения уравнения

$$c = 0, \quad \eta = f(\xi) - \frac{c_0(\xi)}{c_1(\xi)}. \quad (3.26)$$

На рис. 3.4 построена конфигурация течения в области ДВ (графики границ AD , DE , AE) в координатах ξ , η для трех значений $\gamma = 5/3, 2, 5/2$ и $\alpha = \pi/6, \alpha_s, 5\pi/12$, для которых найдены выражения $c_1(\xi)$ в явном виде. Здесь $\alpha_s = \operatorname{arctg} \sqrt{\beta}$ – угол наклона косой стенки в согласованном случае.

Из рис. 3.4 видно, что при $\alpha > \alpha_s$ звуковая характеристика A_3D выгнута в направлении косой стенки A_3E_3 и проходит выше положения границы A_2D в согласованном случае. При $\alpha < \alpha_s$ характеристика A_1D выпукла в направлении области течения ЦВ и проходит ниже положения границы A_2D в согласованном случае.

В окрестности точки D обе кривые A_1D , A_3D стремятся к прямой A_2D , через которую стыкуются области течения ЦВ и ДВ в согласованном случае. Это легко показать, если рассмотреть значение функции $f(c_0)$ при $c_0 \rightarrow 0$, тогда $\beta \gg c_0$, откуда

$$f(\xi) = c_0(\xi) \sqrt{\beta + (c_0(\xi))^{1/\kappa-1} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)} \approx c_0(\xi) \sqrt{\beta}.$$

Последнее выражение совпадает с уравнением звуковой характеристики (2.56) в согласованном случае.

Граница газ-вакуум DE при $\alpha \neq \alpha_s$ в окрестности точки D также стремится к прямой $DE \perp AE$ в согласованном случае (см. рис. 3.4).

Покажем это для случая, когда $\gamma = 5/3$ ($\kappa = 1/3$) и $\alpha = \pi/6$ (см. рис. 3.4а). Выражение для $c_1(\xi)$ имеет вид

$$c_1(\xi) = \frac{9 - 5c_0^2}{2\sqrt{3}\sqrt{6 - 5c_0^2}} \cdot \frac{1}{M(\xi)}, \quad (3.27)$$

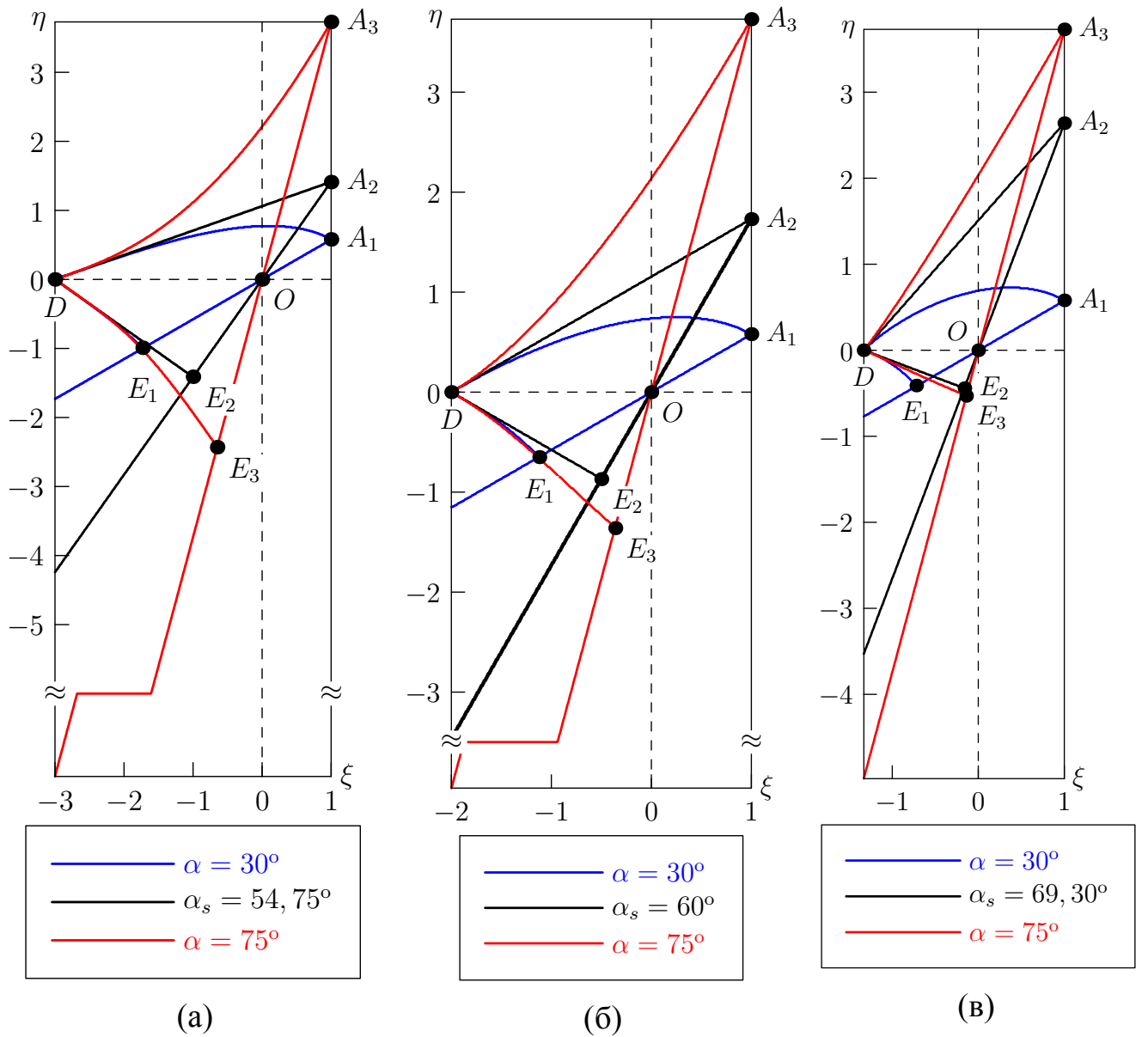


Рисунок 3.4 – Конфигурация течения в области ДВ при $\gamma = 5/3$ (а), $\gamma = 2$ (б), $\gamma = 5/2$ (в) и $\alpha = \pi/6$, $\alpha_s, 5\pi/12$

где $M(\xi) = 4,75 + 0,2083c_0^2 + 1,875c_0^3 - \frac{3}{12 - 10c_0^2} - 1,6165c_0^3 \ln \frac{0,0455(c_0 + 1,0954)}{1,0954 - c_0}$.

Подставим в (3.27) выражение (3.26), получим

$$\eta = f(\xi) \left(1 - \frac{6M(c_0(\xi))}{9 - 5c_0^2(\xi)} \right).$$

В области разрежения значение $c_0(\xi)$ изменяется в диапазоне $0 \leq c_0 \leq 1$.
Найдем предел отношения $\frac{6M(c_0)}{9 - 5c_0^2}$ при $c_0 \rightarrow 0$ (окрестность точки D)

$$\lim_{c_0 \rightarrow 0} \frac{6M(c_0)}{9 - 5c_0^2} = \frac{6M(0)}{9} = 3 = \frac{1}{\varkappa}.$$

При $\varkappa = 1/3$ и $\alpha = \pi/6$ функция $f(\xi) = c_0 \sqrt{(6 - 5c_0^2)/3}$ – звуковая характеристика AD . В окрестности точки D при $c_0 \rightarrow 0$ функция $f(\xi)$ принимает вид

$$f(\xi) \approx c_0(\xi) \sqrt{2} = c_0(\xi) \sqrt{\beta}, \quad \beta = 2,$$

таким образом, в окрестности точки D уравнение границы газ–вакуум

$$\eta = f(\xi) \left(1 - \frac{6M(c_0(\xi))}{9 - 5c_0^2(\xi)} \right) \approx c_0 \sqrt{\beta} \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \right),$$

последнее выражение совпадает с уравнением границы газ-вакуум в согласованном случае (см. формулу (3.2)). Следовательно, в квазисогласованном приближении в окрестности точки D граница газ-вакуум стремится к прямой $DE \perp AE$ в согласованном случае.

Полученные конфигурации течений политропного газа в области ДВ в квазисогласованном приближении совпадают с результатами численных расчетов течений в области ДВ при $\gamma = 2$ и $\alpha = \pi/6, \pi/4, \pi/3$, приведенными в работе [81].

3.3.3 Графики функций $c(\xi, \eta)$, $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ в квазисогласованном приближении

Выполненный анализ решения (3.23), (3.24) и (3.25) транспортного уравнения для $c_1(\xi)$ при различных значениях α и γ позволяет построить графики функций $c(\xi, \eta)$, $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ в квазисогласованном приближении.

На рис. 3.5, 3.6 приведены графики функций $c(\xi, \eta)$, $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете газа с $\gamma = 5/3$ (водород) в вакуум на кривой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = \pi/6 < \alpha_s$ и $\alpha = 5\pi/12 > \alpha_s$ соответственно.

На рис. 3.7, 3.8 приведены графики функций $c(\xi, \eta)$, $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете газа с $\gamma = 2$ в вакуум на кривой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = \pi/6 < \alpha_s$ и $\alpha = 5\pi/12 > \alpha_s$ соответственно.

На рис. 3.9, 3.10 приведены графики функций $c(\xi, \eta)$, $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете газа с $\gamma = 5/2$ в вакуум на кривой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = \pi/6 < \alpha_s$ и $\alpha = 5\pi/12 > \alpha_s$ соответственно.

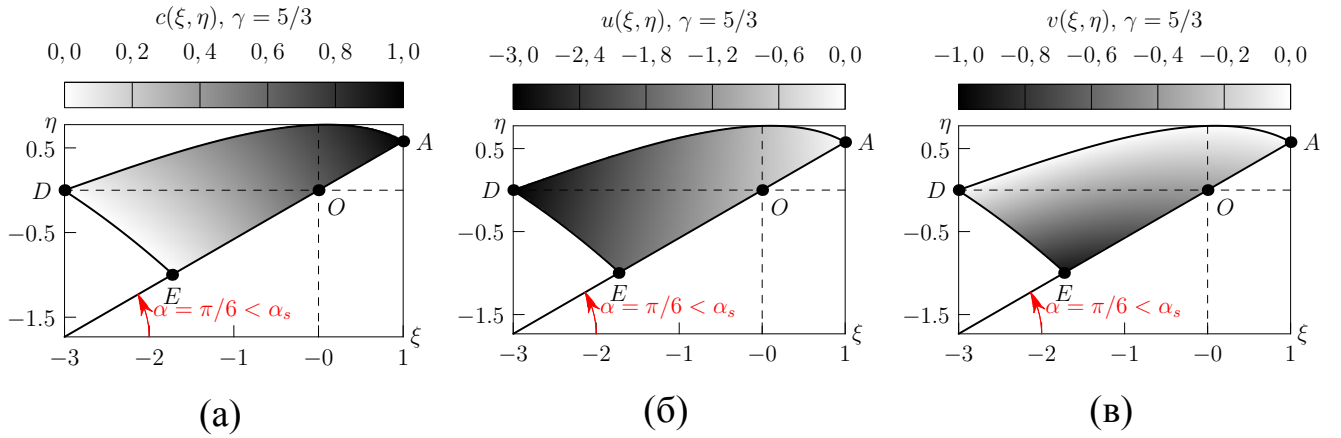


Рисунок 3.5 – Графики функций $c(\xi, \eta)$ (а), $u(\xi, \eta)$ (б), $v(\xi, \eta)$ (в) в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете водорода в вакуум на косой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = \pi/6 < \alpha_s$

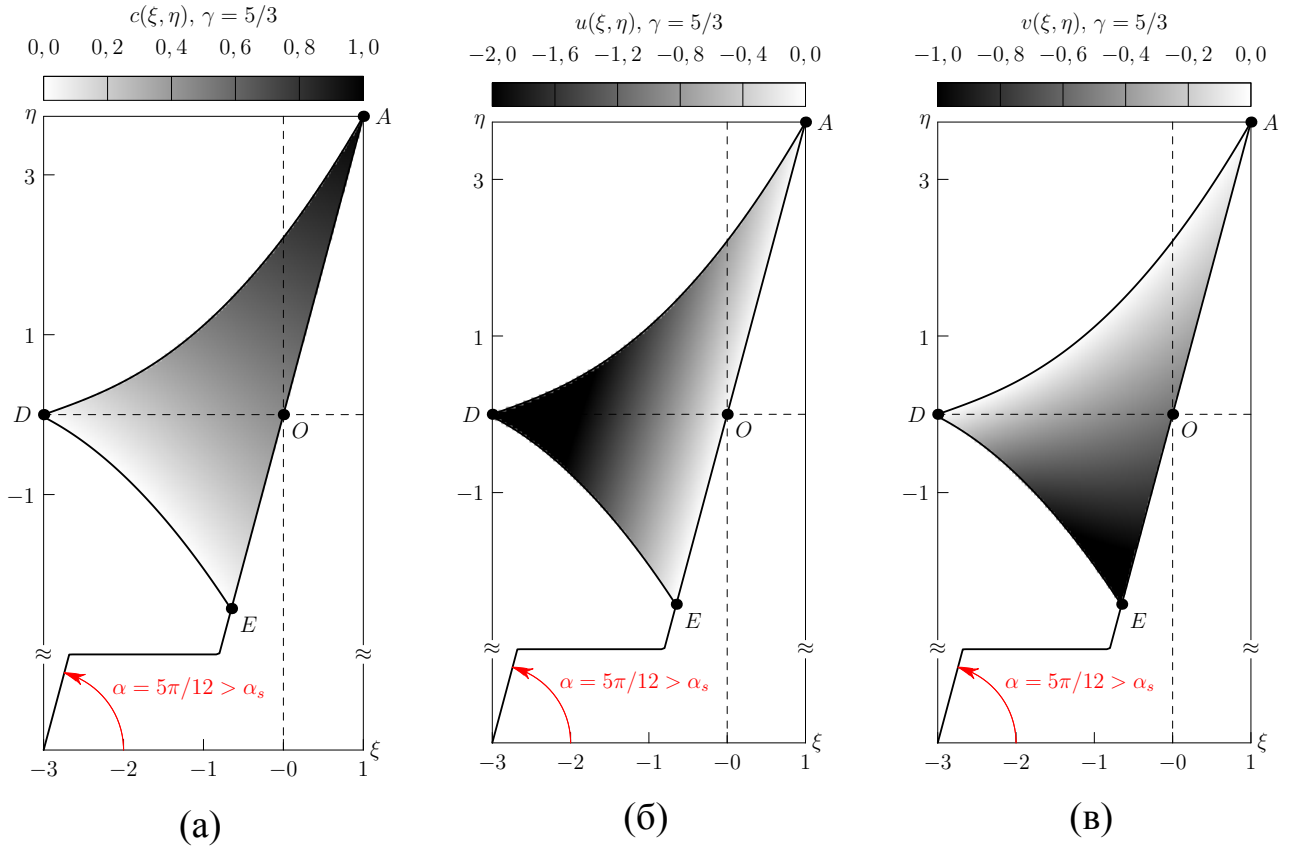


Рисунок 3.6 – Графики функций $c(\xi, \eta)$ (а), $u(\xi, \eta)$ (б), $v(\xi, \eta)$ (в) в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете водорода в вакуум на косой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = 5\pi/12 > \alpha_s$

Расчет значений функций $c(\xi, \eta)$, $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ политропного газа, разлетающегося в вакуум на косой стенке, для различных значений γ , α выполнен численно с использованием кода на языке MATLAB [88].

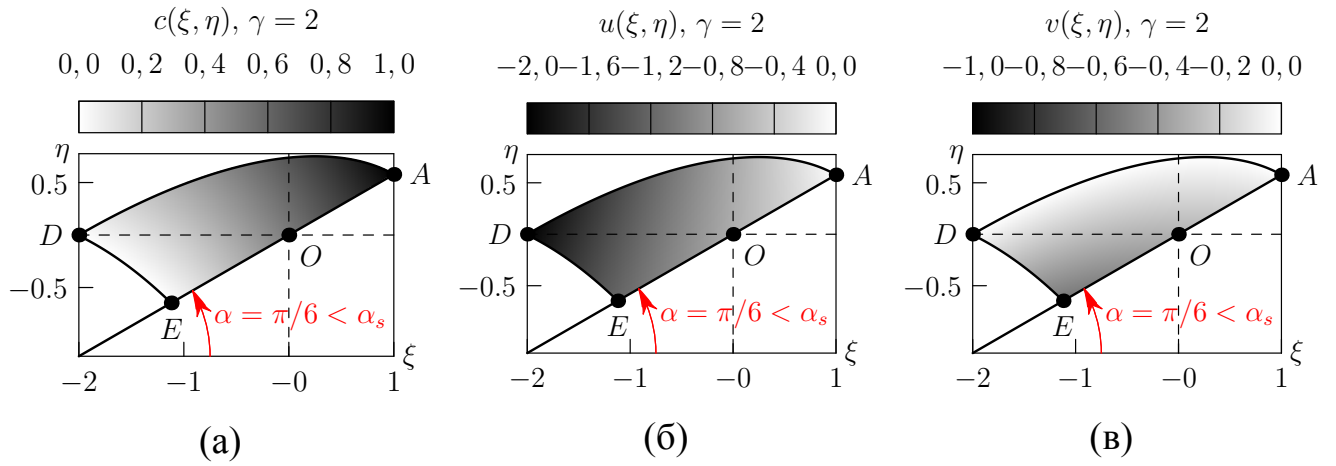


Рисунок 3.7 – Графики функций $c(\xi, \eta)$ (а), $u(\xi, \eta)$ (б), $v(\xi, \eta)$ (в) в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете газа с $\gamma = 2$ в вакуум на косой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = \pi/6 < \alpha_s$

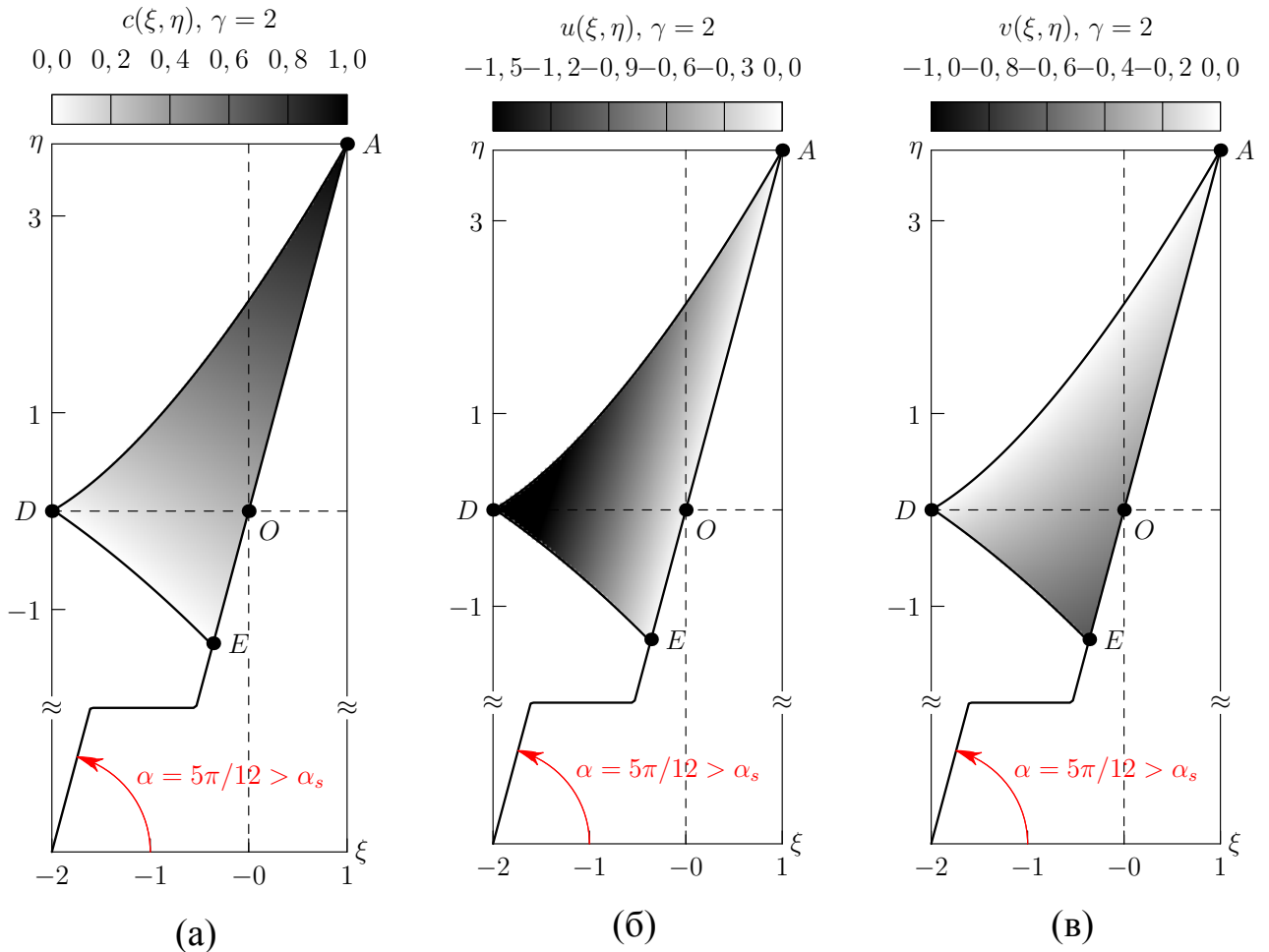


Рисунок 3.8 – Графики функций $c(\xi, \eta)$ (а), $u(\xi, \eta)$ (б), $v(\xi, \eta)$ (в) в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете газа с $\gamma = 2$ в вакуум на косой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = 5\pi/12 > \alpha_s$

Выполним проверку условия непротекания газа на косой стенке в квазисогласованном приближении. Запишем выражения для функций u, v

$$u = u_0(\xi) + u_1(\xi) (\xi \tan \alpha - f(\xi)), \quad v = v_1(\xi) (\xi \tan \alpha - f(\xi)). \quad (3.28)$$

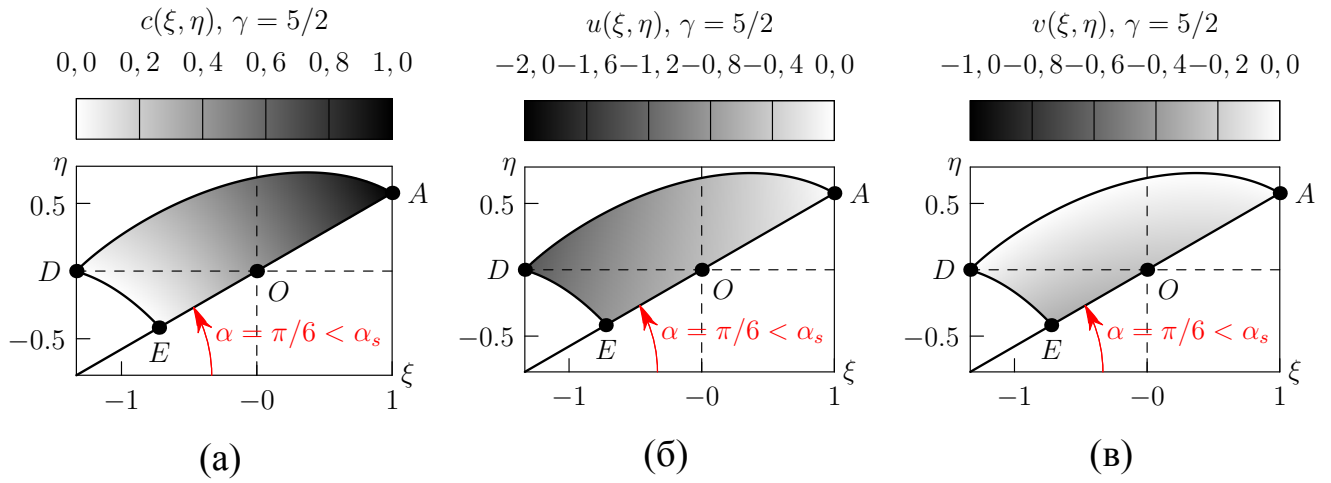


Рисунок 3.9 – Графики функций $c(\xi, \eta)$ (а), $u(\xi, \eta)$ (б), $v(\xi, \eta)$ (в) в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете газа с $\gamma = 5/2$ в вакуум на косой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = \pi/6 < \alpha_s$

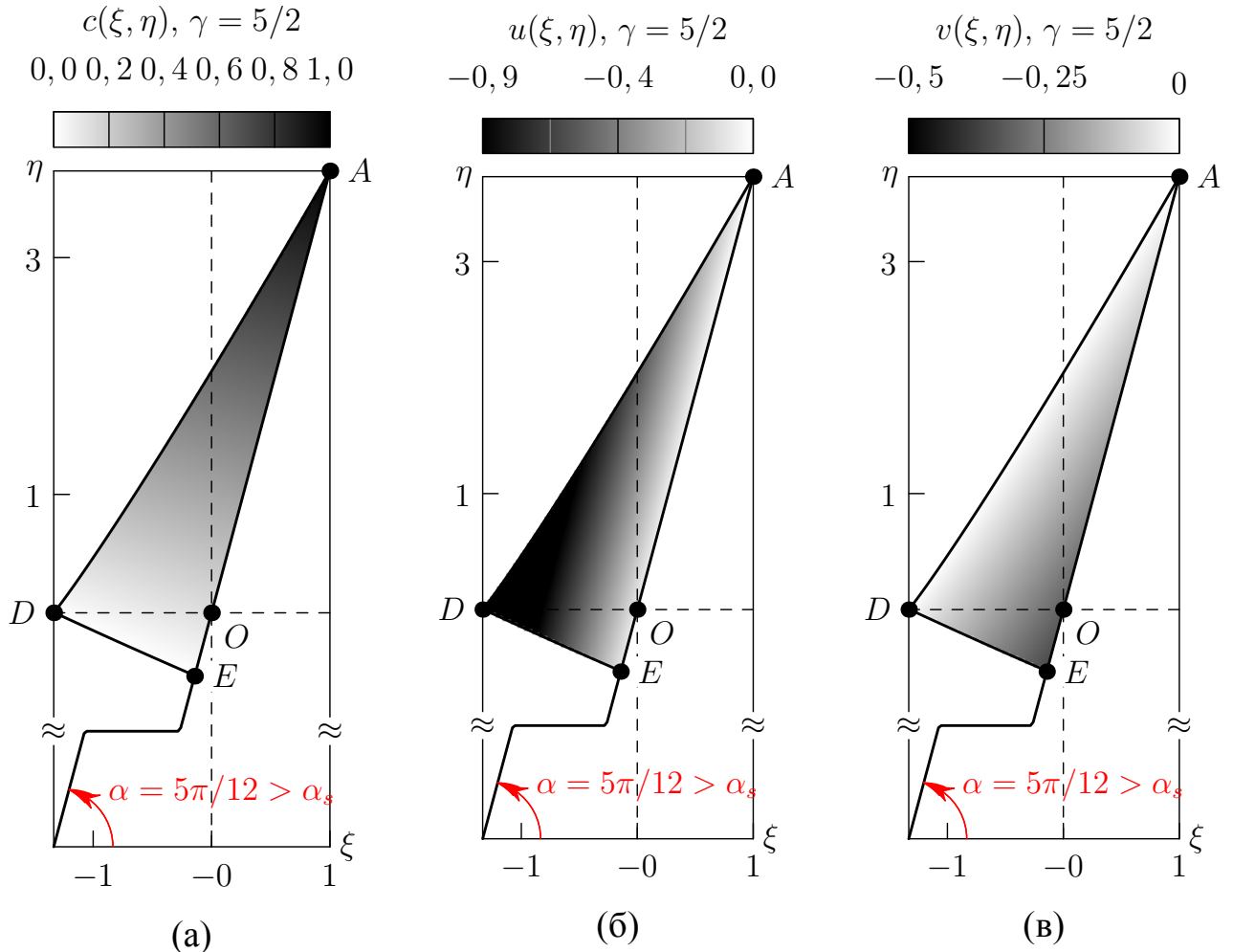


Рисунок 3.10 – Графики функций $c(\xi, \eta)$ (а), $u(\xi, \eta)$ (б), $v(\xi, \eta)$ (в) в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете газа с $\gamma = 5/2$ в вакуум на косой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = 5\pi/12 > \alpha_s$

Условие непротекания на косой стенке имеет вид

$$v|_{\eta=\xi \operatorname{tg} \alpha} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\eta=\xi \operatorname{tg} \alpha}, \quad (3.29)$$

при этом выполняется соотношение $u_1 = -f'v_1$. С учетом последнего, подставим выражения (3.28) для функций u, v в условие непротекания, будем иметь

$$v_1 (\xi \operatorname{tg} \alpha - f(\xi)) = u_0 - v_1 f' (\xi \operatorname{tg} \alpha - f(\xi)), \quad (3.30)$$

отсюда

$$v_1 = \frac{u_0}{(\xi \operatorname{tg} \alpha - f(\xi)) (1 + f')} \neq \frac{4}{\varkappa + 1} \frac{1}{M(\xi)}. \quad (3.31)$$

Из неравенства (3.31) следует, что в квазисогласованном приближении на косой стенке условие непротекания не выполняется.

3.4 Анализ свойств течений сжатия в квазисогласованном приближении. Описание градиентной катастрофы при различных значениях α и γ

В п. 3.3 приведен газодинамический анализ течения разрежения в области ДВ в квазисогласованном приближении, когда момент начала движения газа положительный $t_0 > 0$. Построенное решение, описывающее разлет газа в вакуум на косой стенке, можно использовать для описания течения сжатия замкнутого двумерного объема газа, одна из стенок которого имеет наклон α по отношению к направлению движения воздействующего на мишень поршня. В этом случае необходимо в решении исходной НКЗ в квазисогласованном приближении (3.8) задать момент начала движения поршня отрицательным, то есть $t_0 < 0$.

При интерпретации решения на сжатие, как и в ситуации истечения газа в вакуум, рассматривается два случая, когда $\operatorname{tg}^2 \alpha < \beta$ ($\alpha < \alpha_s$) и $\operatorname{tg}^2 \alpha > \beta$ ($\alpha > \alpha_s$). Далее будет показано, что в обоих случаях решение $c_1(\xi)$ содержит особенность, что приводит в течении газа к градиентной катастрофе [105; 106].

Рассмотрим область ДВ течения сжатия двумерного объема, когда справедливо неравенство $\operatorname{tg}^2 \alpha < \beta$ ($\alpha < \alpha_s$). В этом случае уравнение звуковой характеристики AD , задаваемое выражением (2.55) для функции $f(\xi)$ при $\gamma \neq 3$ ($\varkappa \neq 1$), можно записать

$$f(c_0(\xi)) = c_0 \sqrt{\beta - c_0^{1/\varkappa-1} (\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha)}. \quad (3.32)$$

Найдем область определения (3.32)

$$\beta - c_0^{1/\kappa-1} (\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha) \geq 0, \quad c_0 \leq \left(\frac{\beta}{\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}. \quad (3.33)$$

При разлете газа в вакуум $0 \leq c_0 \leq 1$, откуда неравенство (3.33) выполняется для всех $\xi \in [-1/\kappa, 1]$. При сжатии газа $c_0 \geq 1$, тогда в точке

$$c_0^* = \left(\frac{\beta}{\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}, \quad \xi_* = \frac{\kappa+1}{\kappa} \left(\frac{\beta}{\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} - \frac{1}{\kappa} \quad (3.34)$$

значение функции $f(c_0^*(\xi_*)) \equiv 0$.

Выражение для $c_1(\xi)$ в общем несогласованном случае при $\gamma \neq 3$ ($\kappa \neq 1$) равно

$$c_1(\xi) = \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{c_0^2 + f^2}{c_0 f(c_0(\xi))} \frac{1}{M(c_0(\xi))},$$

то есть знаменатель дроби принимает значение, равное нулю, когда $f(c_0(\xi)) = 0$, либо когда $M(c_0(\xi)) = 0$. Отсюда, критическое значение скорости звука определяется из следующего условия

$$c_0^* = \min \left\{ \left(\frac{\beta}{\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}, \quad M(c_0(\xi)) = 0 \right\}. \quad (3.35)$$

При $c_0 \rightarrow c_0^*$ значение функции $c_1 \rightarrow \infty$, то есть в точке с координатой $c_0 = c_0^*$ существует особенность построенного решения. Так как по определению $c_1(\xi) = \left. \frac{\partial c}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0}$, то

$$\lim_{c_0 \rightarrow c_0^*} c_1(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_*} \left. \frac{\partial c}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0} = \infty, \quad (3.36)$$

то есть наступает градиентная катастрофа.

Рассмотрим квазисогласованный режим течения сжатия газа вида ДВ в ограниченном объеме, когда $\operatorname{tg}^2 \alpha > \beta$ ($\alpha > \alpha_s$). В этом случае знаменатель дроби в выражении для $c_1(\xi)$ равен нулю, только если $M(c_0(\xi)) = 0$, так как произведение $c_0(\xi)f(\xi) > 0$ при любых $c_0 > 0$.

Для определения значения c_0^* по формуле (3.35) для найденных в явном виде выражений $M(\xi)$ при $\gamma = 5/3, 2, 5/2$ и произвольном значении $0 < \alpha < \pi/2$ строилось решение уравнения $M(c_0(\xi)) = 0$ численным методом секущих. На рис. 3.11 для иллюстрации приведен график функции $M_1(c_0(\xi)) = M(c_0(\xi))|_{\substack{\alpha=\pi/3 \\ \gamma=5/3}}$.

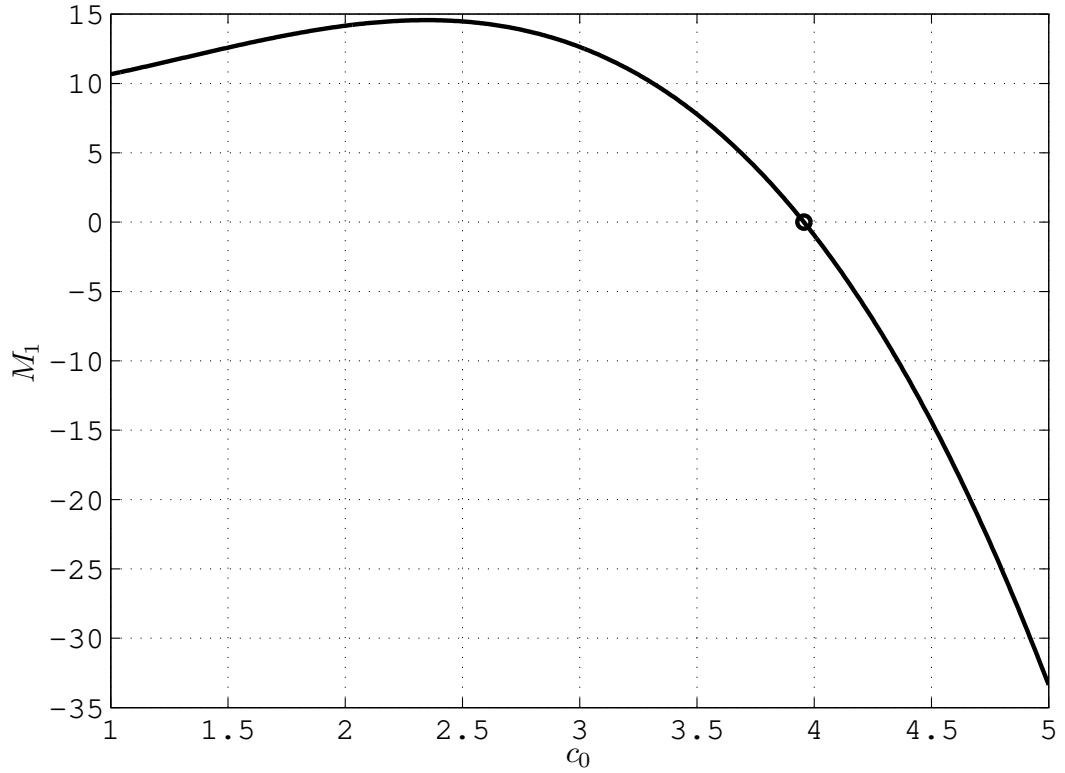


Рисунок 3.11 – График функции $M_1(c_0)$ при $1 \leq c_0 \leq 5$

На рис. 3.12 представлены графики зависимости $c_0^*(\alpha)$ для $\gamma = 5/3$ (см. рис. 3.12а), $\gamma = 2$ (см. рис. 3.12б) и $\gamma = 5/2$ (см. рис. 3.12в).

Каждый из графиков $c_0^*(\alpha)$ для различных значений γ имеет свою вертикальную асимптоту в точке $\alpha_s(\gamma)$ (на рисунках показано в виде прямых, задаваемых уравнениями $\alpha = \alpha_1^s$, $\alpha = \alpha_2^s$, $\alpha = \alpha_3^s$), соответствующую точке коллапса газа $t_* = 0$, $x_* = 0$ в согласованном случае.

Найдем момент времени, когда граница сильного разрыва в области двумерного течения пересекает границу поршня, сжимающего газ в области ЦВ. Закон движения поршня в области ЦВ задается формулой [46; 48]

$$x_p(t) = \left(x_0 + \frac{t_0}{\varkappa}\right) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/(\varkappa+1)} - \frac{t}{\varkappa}.$$

При $t_0 = -1$, $x_0 = -1$, $\varkappa = 1/3$

$$x_p = -4(-t)^{\frac{3}{4}} - 3t, \quad \xi_p = -4 \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{(-1)^{\frac{3}{4}}} - 3.$$

Из равенства $\xi_p = \xi_*$ получим выражение для t_*

$$t_* = - \left(\frac{4}{\xi_* + 3} \right)^4 = \begin{cases} -0.772144, & \text{если } \alpha = \pi/6 < \alpha_s, \\ -0.004081, & \text{если } \alpha = \pi/3 > \alpha_s. \end{cases}$$

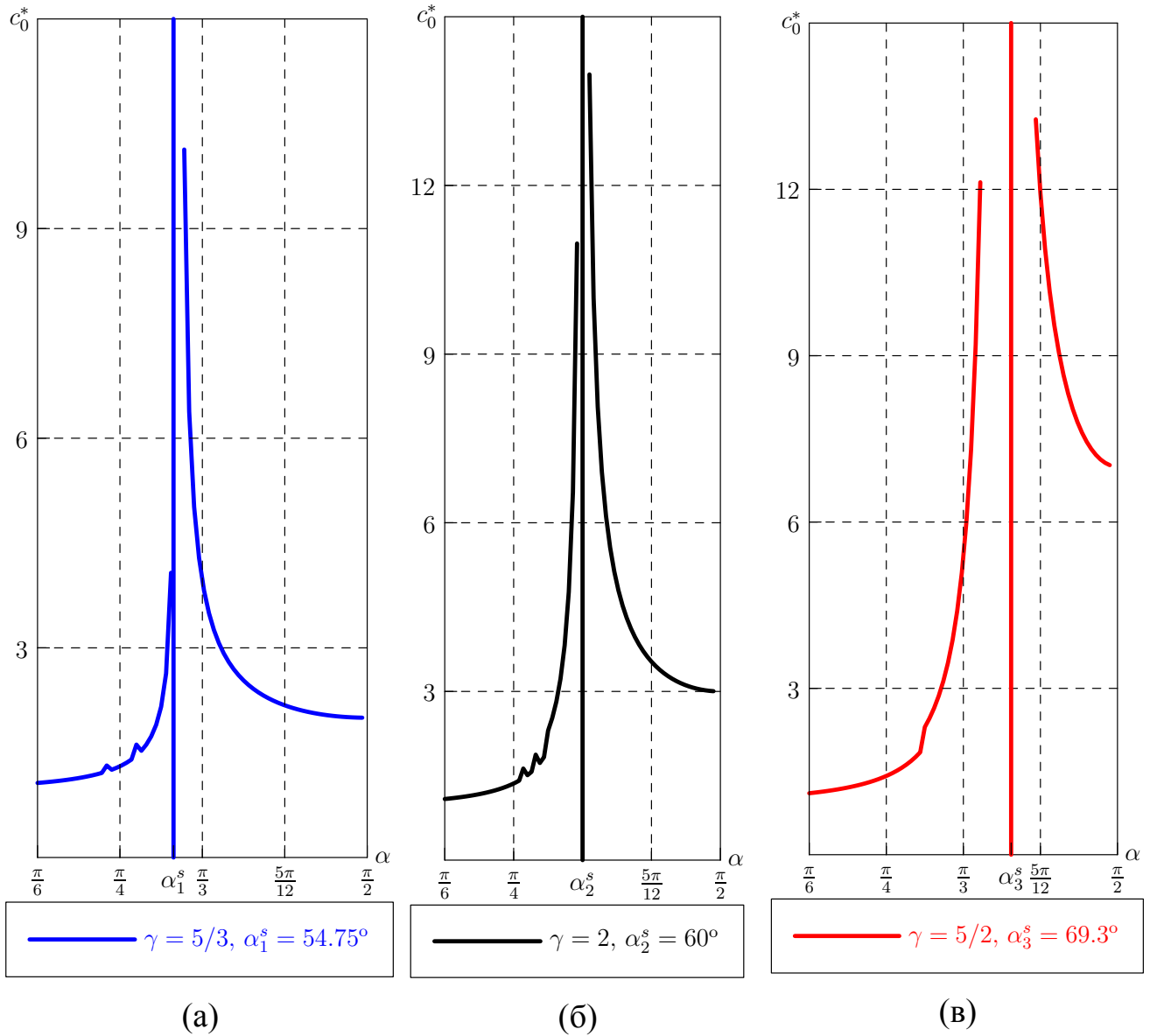


Рисунок 3.12 – Значение c_0^* в зависимости от значений γ и α

На рис. 3.13 в качестве иллюстрации приведено распределение скорости звука в ДВ при $t_* < 0$, когда показатель политропы равен $\gamma = 5/3$ (водород), а значение угла наклона косой стенки $\alpha = \pi/6 < \alpha_s$ (рис. 3.13а), что соответствует замкнутому объему, представляющему собой в поперечном сечении правильный шестиугольник, и $\alpha = \pi/3 > \alpha_s$ (рис. 3.13б), что соответствует замкнутому объему, представляющему собой в поперечном сечении правильный треугольник.

В газодинамическом смысле возникновение градиентной катастрофы означает, что при безударном сжатии замкнутого объема функция $c(\xi, \vartheta)$ в точке ξ_* испытывает сильный разрыв (ступенька), что приводит к изменению структуры течения в области ДВ и образованию УВ.

Увеличение количества граней мишени (правильный n -угольник в поперечном сечении) приведет к тому, что значение угла α будет уменьшаться и

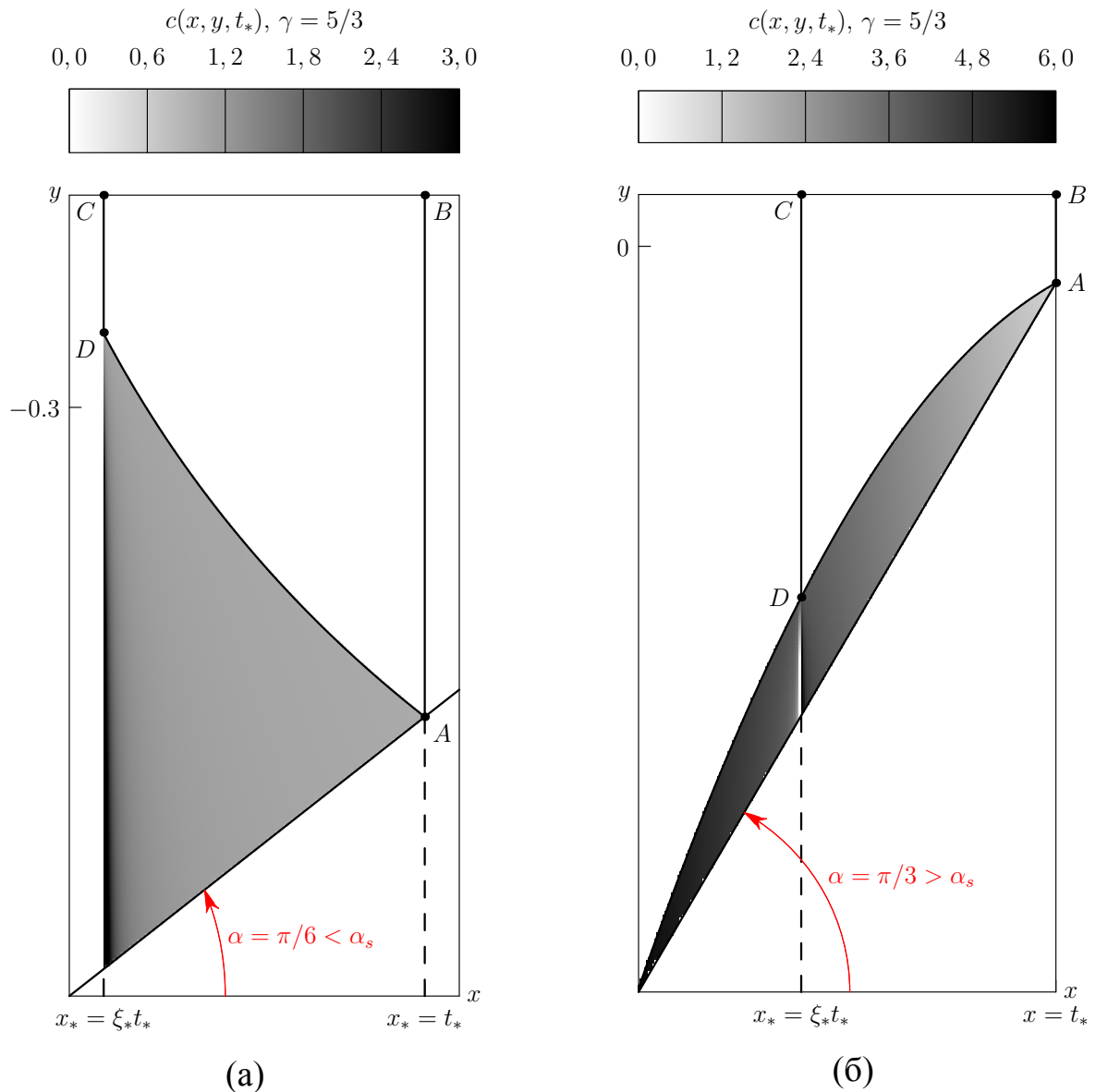


Рисунок 3.13 – Поверхность функции $c(x, y, t_* < 0)$ в области ДВ в квазисогласованном приближении при $\gamma = 5/3$ и $\alpha = \pi/6 < \alpha_s$ (а), $\alpha = \pi/3 > \alpha_s$ (б)

безударное сжатие раньше (значение c_0^* уменьшается) переходит в УВ. То есть, когда поверхность мишени стремится к цилиндру (сфере), режим течения сжатия не зависит от внешнего воздействия и всегда представляет из себя сходящуюся УВ.

3.5 Выводы по главе

В данной главе выполнен газодинамический анализ течений разрежения и сжатия в области ДВ, которые описываются автомодельным решением задачи об истечении газа в вакуум на косой стенке в согласованном и общем несо-

гласованном случае, при произвольном значении угла наклона косой стенки α ($0 < \alpha < \pi/2$), не связанном со значением политропы γ .

Газодинамический анализ предполагал решение следующих задач:

1. Определение конфигурации течения газа в области ДВ при разлете газа в вакуум с косой стенки ($t_0 > 0$) и при сжатии специального призматического объема ($t_0 < 0$);
2. Построение графиков функций газодинамических параметров $c(t, x, y)$, $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$ течения разрежения и сжатия в области ДВ;
3. Определение особенностей решения исходной НКЗ в квазисогласованном приближении в интерпретации на сжатие. Описание градиентной катастрофы при различных значениях α и γ .

Конфигурация течения газа в области ДВ задается тремя кривыми: косой стенкой AE , звуковой характеристикой AD и свободной границей газа с вакуумом DE .

В согласованном случае границы AE , AD и DE – суть прямые линии, причем $DE \perp AE$. В несогласованном случае в зависимости от значения α звуковая характеристика AD выгнута ($\text{tg}^2 \alpha > \beta$) или выпукла ($\text{tg}^2 \alpha < \beta$) в направлении AE и в окрестности точки D стремится к положению AD в согласованном случае. Граница газ-вакуум DE в несогласованном случае при $\alpha \neq \alpha_s$ ($\text{tg}^2 \alpha \neq \beta$) в окрестности точки D также стремится к прямой $DE \perp AE$ в согласованном случае.

При интерпретации решения на сжатие в квазисогласованном приближении показано, что при $\text{tg}^2 \alpha > \beta$ и $\text{tg}^2 \alpha < \beta$ решение $c_1(\xi)$ содержит особенность, что приводит в течении газа к градиентной катастрофе. В газодинамическом смысле это означает, что при БСС замкнутого объема в течении до момента коллапса ($t_* = 0$) возникает сильный разрыв (ступенька), что приводит к изменению структуры течения в области ДВ и образованию УВ.

Увеличение количества граней мишени (правильный n -угольник в поперечном сечении, $n \gg 1$) приводит к уменьшению значения угла α , и течение БСС раньше переходит в УВ. Таким образом, когда поверхность мишени стремится к цилиндру (сфере), режим течения сжатия не зависит от внешнего воздействия и всегда представляет собой сходящуюся УВ.

Полученные результаты были опубликованы в ряде работ [107; 108].

ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИЛЬНОГО БЕЗУДАРНОГО СЖАТИЯ МИШЕНИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОСТРОЕННОГО АВТОМОДЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В настоящей главе построено математическое описание БСС мишени с использованием найденного автомодельного решения НКЗ об истечении газа с косой стенки (см. главу 2), построены законы движения сжимающих поршней, приведены результаты численного моделирования двух способов газодинамического воздействия на мишень, предлагаемых в физических экспериментах и соответствующих двум видам краевого условия на поршне. Первый способ воздействия – сжатие газа движением непроницаемого поршня. Второй способ воздействия – сжатие газа заданным внешним давлением.

При описании воздействия на мишень различными сжимающими поршнями исследовано распределение давления в области течения ЦВ и ДВ, в том числе вдоль поверхности поршня, сжимающего газ в области ДВ. Во всех рассматриваемых случаях воздействия сжимающих поршней на мишень исследованы интегральные характеристики течения сжатия в области ЦВ и ДВ:

1. определен энергетический вклад отдельных участков поршней в сжатие газа в области ЦВ и ДВ;
2. определены массы газа, сжатые до разных значений давления различными участками сжимающих поршней.

Оценка мощности энерговложения A_r в мишень (область течения сжатия ЦВ, ДВ и область покоя) выполнялась по формуле

$$A_r = \frac{1}{\Delta t} \int_{V_1}^{V_2} p dV, \quad (4.1)$$

где Δt – время, за которое в мишень вкладывается энергия, затрачиваемая на изменение ее объема от V_1 до V_2 ; p – распределение давления в мишени.

Расчет массы сжимаемого в моменты времени $t_0 < t < 0$ газа выполнялся для областей, задаваемых следующими неравенствами

$$A_p : \frac{3}{4}p_{max} \leq p \leq p_{max}, \quad B_p : \frac{2}{3}p_{max} \leq p \leq p_{max}, \quad C_p : \frac{1}{2}p_{max} \leq p \leq p_{max}, \quad (4.2)$$

где p_{max} – максимальное значение давления в ДВ в момент времени $t_0 < t < 0$.

На основании моделирования БСС мишени даны рекомендации по мишеням для УТС.

4.1 Математическая постановка задачи о сильном безударном сжатии поршнем специального призматического объема газа

Пусть в начальный момент времени $t_0 = -1$ политропный газ покоится в области отмеченной цифрой 0 на рис. 4.1а и ограниченной четырьмя прямыми непроницаемыми стенками, задаваемыми уравнениями

1. $x = 0$ при $y \geq 0$;
2. $y = y_* > 0$ при $x_0 \leq x \leq 0$, где $x_0 = t_0$;
3. $x = x_0$ при $x_0 \operatorname{tg} \alpha \leq y \leq y_*$;
4. $y = x \operatorname{tg} \alpha$ при $x_0 \leq x \leq 0$.

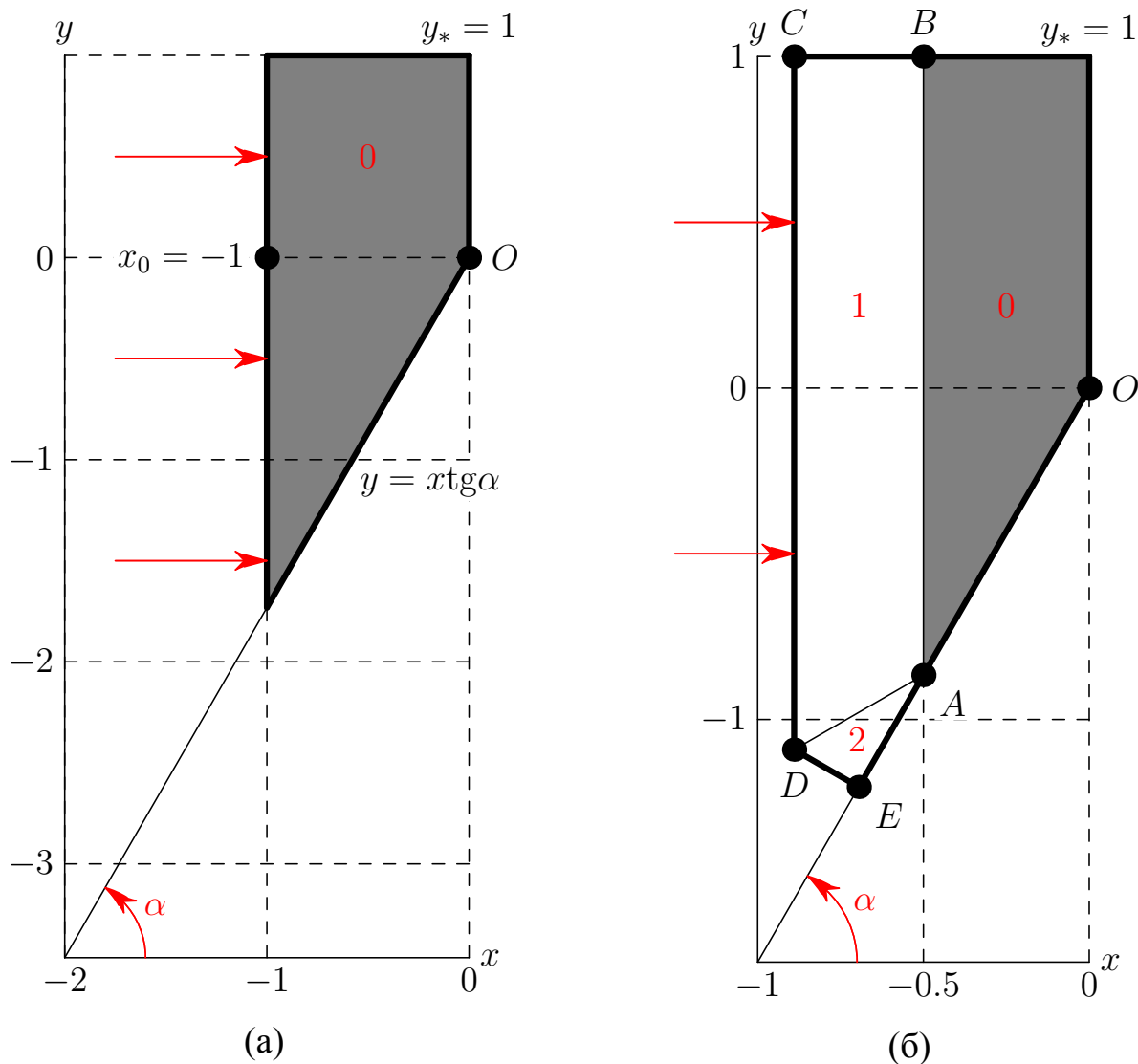
Значение $y_* = \text{const}$ определяет массу сжимаемого газа. Скорость звука покоящегося газа равна единице. В момент времени $t_0 = -1$ поршень (вертикальная стенка $x = x_0$) начинает плавно вдвигаться в газ так, чтобы сжатие газа происходило безударно и в момент времени $t = 0$ весь газ был сжат до бесконечной плотности на прямой $x = 0$ при $y \geq 0$.

В общем случае течение сжатия, возникающее в результате воздействия поршня на специальный призматический объем, имеет сложный характер и состоит из трех областей, стыкующихся друг с другом через слабые разрывы:

1. Область течения типа ДВ, отмеченная на рис. 4.1б цифрой 2, ограничена поршнем DE и косой стенкой AE ;
2. Область течения типа ЦВ, отмеченная на рис. 4.1б цифрой 1, стыкуется с ДВ через звуковую характеристику AD , задаваемую уравнением $v = 0$, а слева ограничена поршнем CD ;
3. Область покоя, отмеченная на рис. 4.1б цифрой 0, стыкуется с ЦВ через слабый разрыв AB , задаваемый уравнением $u = 0$, ограничена непроницаемыми стенками AE , прямой CB и вертикальной прямой, задаваемой уравнением $x = 0$.

Максимальная пространственная размерность течения сжатия специального призматического объема равна двум. Участок CD поршня CDE сжимает газ в области ЦВ, участок DE поршня CDE сжимает газ в области ДВ. Далее, если это не оговорено отдельно, термины поршень и закон движения поршня относятся к участку DE поршня CDE , сжимающего газ в области ДВ.

В постановке задачи о неограниченном сжатии газа, находящегося в замкнутом призматическом объеме, необходимо, кроме описания самого течения, построить закон движения поршня, сжимающего газ безударным способом. За-



0 – покоящийся газ; 1 – область течения ЦВ; 2 – область течения ДВ

Рисунок 4.1 – (а) Начальная конфигурация в момент $t_0 = -1$. (б) Конфигурация течения в момент $t_0 < t < 0$

кон движения поршня определяется из решения ХЗК стандартного вида, когда на поршне задается конкретное краевое условие: условие непротекания или заданное значение давления. Из единственного решения такой ХЗК стандартного вида однозначно определяется закон движения поршня и значения газодинамических параметров на нем.

Если в системе (2.6) сделать замену $t' = -t$, то вид системы не изменится. Следовательно, решение задачи (2.24), описывающее при $t > 0$ истечение газа в вакуум на косой стенке, при $t < 0$ будет описывать сжатие газа, находящегося в замкнутом призматическом объеме. Применим построенное автомодельное решение о разлете газа в вакуум на косой стенке к описанию БСС газа, находящегося в специальном призматическом объеме [83; 93; 109].

Рассмотрим исходную СУГД, описывающую течение сжатия в области ДВ, в переменных t, x, y

$$\begin{cases} c_t + uc_x + vc_y + \kappa c(u_x + v_y) = 0, \\ u_t + uu_x + vv_y + \frac{c}{\kappa}c_x = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \frac{c}{\kappa}c_y = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

здесь интервал изменения параметра $t \in [-t_0, 0]$, $t_0 > 0$.

Область течения типа ДВ ограничена звуковой характеристикой AD , через которую течение ДВ стыкуется с течением типа ЦВ, и косой стенкой AE . Уравнение C^+ в координатах (ϑ, ζ) задается уравнением $\vartheta = 0$ в переменных (ξ, η) : $\eta = f(\xi)$, где $f(\xi)$ известная функция переменной ξ . Уравнение косой стенки в координатах (ϑ, ζ) задается уравнением $\zeta = 0$ в переменных (ξ, η) : $\eta = \xi \operatorname{tg} \alpha$. На звуковой характеристике C^+ задаются НУ для системы (4.3)

$$c|_{AD} = c_0, \quad u|_{AD} = u_0, \quad v|_{AD} = 0, \quad (4.4)$$

соответствующие параметрам течения в ЦВ.

На косой стенке AE задаются условия непротекания

$$v|_{AE} = u \operatorname{tg} \alpha|_{AE}. \quad (4.5)$$

Если сжатие специального призматического объема реализуется непроницаемым поршнем, поверхность которого задается уравнением $\varphi(x_p(t), y_p(t)) = 0$, выполняется условие непротекания

$$u|_{\varphi(x_p(t), y_p(t))=0} = x'_p(t), \quad v|_{\varphi(x_p(t), y_p(t))=0} = y'_p(t). \quad (4.6)$$

Теорема 3. Задача (4.3)–(4.6) является ХЗК стандартного вида, у которой при условии аналитичности функции $\varphi(x_p(t), y_p(t)) = 0$ существует единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки $M_0(t = 0, \varphi(x_p(0), y_p(0)) = 0)$.

Если в системе (4.3) сделать замену $t' = t + t_0$, отсюда $0 \leq t' \leq t_0$ и вид системы не изменится, при этом задача (4.3)–(4.5) описывает разлет газа в вакуум на косой стенке. Для задачи (4.3)–(4.5) в случае разлета газа в вакуум в соответствии с теоремой 2 из п. 2.4 существует единственное автомодельное решение, представимое в виде ряда по степеням ϑ . Тогда задачу (4.3)–(4.6) можно интерпретировать следующим образом: непроницаемый поршень, задаваемый уравнением

$\varphi(x_p(t), y_p(t)) = 0$, движется по фоновому течению, задаваемому решением задачи (4.3)–(4.5) для случая разлета газа в вакуум на косой стенке, когда $-t_0 \leq t \leq 0$. Закон движения непроницаемого поршня определяется из решения системы (4.6).

Если сжатие специального призматического объема реализуется проницаемым поршнем, на котором задано значение давления $\bar{p}(t)$ или скорости звука $\bar{c}(t)$, тогда краевое условие на поршне можно записать следующим образом

$$c|_{\varphi(x_p(t), y_p(t))=0} = \bar{c}(t), \quad (4.7)$$

при этом в точке $t = 0$ выполняется соотношение

$$c|_{\varphi(x_p(0), y_p(0))=0} = \bar{c}(0). \quad (4.8)$$

Теорема 4. *Задача (4.3)–(4.5), (4.7) является ХЗК стандартного вида, у которой при условии аналитичности функций c_0 , u_0 , $\bar{c}$, $\varphi(x_p(t), y_p(t)) = 0$ существует единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки $M_0 = (t = 0, \varphi(x_p(0), y_p(0)) = 0)$.*

Для построения решения задачи (4.3)–(4.5), (4.7), как и ранее, можно воспользоваться интерпретацией построенного решения задачи (4.3)–(4.5), описывающей разлет газа в вакуум на косой стенке, когда $-t_0 \leq t \leq 0$. В этом случае проницаемый поршень двигается по известному фоновому течению, и закон его движения определяется из решения уравнения (4.7).

4.2 Математическое описание сильного сжатия непроницаемым поршнем специального призматического объема

4.2.1 Задача Коши для построения закона движения непроницаемого поршня в области центрированной и двойной волны

Найдем закон движения непроницаемого поршня, задаваемого уравнением $\varphi(x(t), y(t)) = 0$, в области течения ЦВ и ДВ, как решение системы (4.6)

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v(t, x, y), \quad (4.9)$$

где $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$ – построенное автомодельное решение задачи (2.24) в согласованном случае для ДВ, задаваемое формулами (2.114), (2.115), и решение (2.12) задачи (2.11) для простой ЦВ.

Из анализа СУГД (2.6), приведенного в разделе 2.1, следует, что при разлете газа в вакуум и сжатии призматического объема газа, заполняющего клиновидную полость с углом при основании α , возникают две области течения: ЦВ и ДВ. Таким образом, поршень, сжимающий газ в призматическом объеме, будет состоять из двух частей, соответствующих своей области течения и стыкующихся друг с другом на звуковой характеристике, задаваемой уравнением $\eta = f(\xi)$.

Рассмотрим область одномерного течения типа ЦВ. В этом случае система (4.9) сокращается до одного уравнения, где $u(t, x, y)$ – скорость горизонтального движения газа в ЦВ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\kappa + 1} \frac{x}{t} - \frac{1}{\kappa + 1}. \quad (4.10)$$

Решение уравнения (4.10) для начальных условий $x(t_0) = x_0$ дает закон движения поршня для случая плоско-симметричного течения газа и приведено в работах [46; 48]

$$x_p(t) = x_* - \left(x_* - x_0 + \frac{t_* - t_0}{\kappa} \right) \cdot \left(\frac{t_* - t}{t_* - t_0} \right)^{\frac{1}{\kappa+1}} + \frac{t_* - t}{\kappa}, \quad (4.11)$$

где (t_*, x_*) – точка коллапса ЦВ в двумерном пространстве-времени, (t_0, x_0) – точка, из которой поршень начинает движение. Из выражения (4.11) очевидно, что поверхность поршня, сжимающего газ в области ЦВ, – вертикальная прямая.

В случае, когда точка коллапса ЦВ совпадает с началом координат, а точка, из которой начинает двигаться поршень, имеет координаты $(-t_0, -x_0)$, тогда закон движения непроницаемого поршня в области ЦВ принимает вид

$$x_p(t) = \left(x_0 + \frac{t_0}{\kappa} \right) \cdot \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{\kappa+1}} - \frac{t}{\kappa}. \quad (4.12)$$

В области двойной волны СОДУ (4.9) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(1 - \frac{\kappa}{\beta} \right) \cdot \frac{x}{t} - \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{y}{t} - \frac{1}{\beta}, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{x}{t} + (1 - \kappa) \cdot \frac{y}{t} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Начальные данные для (4.13)

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (4.14)$$

Для нахождения интегралов системы (4.13) для условий (4.14) умножим первое уравнение на константу a и прибавим ко второму уравнению системы

$$\frac{d}{dt}(ax + y) = \frac{1}{t} \left[\left(a \left[1 - \frac{\kappa}{\beta} \right] - \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \right) x + \left(1 - \kappa - a \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \right) y \right] - \frac{a}{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \quad (4.15)$$

Для того, чтобы выражение $\left(a \left[1 - \frac{\kappa}{\beta} \right] - \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \right) x + \left(1 - \kappa - a \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} \right) y$ было кратно выражению $ax + y$, необходимо выполнение следующего условия

$$\frac{a \left(1 - \frac{\kappa}{\beta} \right) - \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}}}{1 - \kappa - a \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}}} = a. \quad (4.16)$$

После преобразования (4.16) получим квадратное уравнение

$$a^2 + \frac{\beta - 1}{\sqrt{\beta}} a - 1 = 0, \quad a_1 = -\sqrt{\beta}, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

Для случая $a_1 = -\sqrt{\beta}$ вид ДУ (4.15)

$$\frac{d}{dt} \left(-\sqrt{\beta} \cdot x + y \right) = \frac{-\sqrt{\beta} \cdot x + y}{t},$$

отсюда первый интеграл системы (4.13)

$$-\sqrt{\beta} \cdot x + y = C_1 \cdot t, \quad C_1 = \text{const}. \quad (4.17)$$

Когда $a_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$, тогда вид ДУ (4.15)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x}{\sqrt{\beta}} + y \right) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{x}{\sqrt{\beta}} + y \right) \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right). \quad (4.18)$$

Построим решение уравнения (4.18) методом вариации произвольной постоянной. Решение однородной части (4.18) следующее

$$\frac{x}{\sqrt{\beta}} + y = C_2 t^{1/\beta}. \quad (4.19)$$

Найдем константу интегрирования C_2 , полагая ее произвольной неотрицательной функцией от времени, то есть $C_2 = C_2(t)$. Подставим решение однородного уравнения (4.19) в исходное неоднородное уравнение (4.18), получим ДУ для функции $C_2(t)$

$$C_2' = -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) t^{-1/\beta}, \quad C_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{t^{-1/\beta+1}}{1 - \frac{1}{\beta}} + C_2.$$

Решением ДУ (4.18) будет второй интеграл системы (4.13)

$$x + \sqrt{\beta}y = C_2 t^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}} - \frac{t}{\kappa}, \quad C_2 = \text{const}. \quad (4.20)$$

Константы C_1 и C_2 в формулах (4.17), (4.20) определяются из НУ (4.14)

$$C_1 = \frac{y_0}{t_0} - \sqrt{\beta} \frac{x_0}{t_0}, \quad C_2 = \left(x_0 + \sqrt{\beta}y_0 + \frac{t_0}{\kappa} \right) t_0^{-\frac{1-\kappa}{1+\kappa}}.$$

С учетом значений констант C_1 и C_2 перепишем выражения (4.17), (4.20)

$$y - \sqrt{\beta}x = \left(y_0 - \sqrt{\beta}x_0 \right) \left(\frac{t}{t_0} \right). \quad (4.21)$$

$$x + \sqrt{\beta} \cdot y + \frac{t}{\kappa} = \left(x_0 + \sqrt{\beta}y_0 + \frac{t_0}{\kappa} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}}. \quad (4.22)$$

Видно, что прямая, заданная формулой (4.21), лежит на косо́й стенке и с течением времени движется по ней. В свою очередь, прямая, заданная формулой (4.22), есть прямая, которая с течением времени изменяет свое положение, но все время перпендикулярна косо́й стенке, при этом в момент времени $t = t_0$ она проходит через точку (x_0, y_0) .

Из выражений (4.21) и (4.22) можно получить в явном виде выражения для функций $x(t)$ и $y(t)$. Для этого необходимо выражение (4.21) умножить на $-\sqrt{\beta}$ и прибавить к выражению (4.22). Получим выражение для функции $x(t)$

$$x(t) = \frac{\left(x_0 + \sqrt{\beta}y_0 + \frac{t_0}{\kappa} \right)}{1 + \beta} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}} - \frac{1 + \sqrt{\beta}\kappa \left(\frac{y_0}{t_0} - \sqrt{\beta} \frac{x_0}{t_0} \right)}{\kappa(1 + \beta)} t. \quad (4.23)$$

Выражение (4.23) подставим в формулу (4.22) и получим выражение для функции $y(t)$

$$y(t) = \frac{\left(x_0 + \sqrt{\beta}y_0 + \frac{t_0}{\kappa} \right) \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}} + \frac{\kappa \left(\frac{y_0}{t_0} - \sqrt{\beta} \frac{x_0}{t_0} \right) - \sqrt{\beta}}{\kappa(1 + \beta)} t. \quad (4.24)$$

Выражения (4.23) и (4.24) задают закон движения точек поверхности непроницаемого поршня $\varphi(x(t), y(t)) = 0$ во времени.

Поверхность непроницаемого поршня CDE (см. рис. 4.1), сжимающего газ в области ЦВ и ДВ, с помощью формул (4.12), (4.23) и (4.24) задана параметрически. Точка D разделяет поршень на две части CD и DE , каждая из которых сжимает газ в области ЦВ и ДВ соответственно. Координаты точки D равны:

$$x_D = \left(x_0 + \frac{t_0}{\kappa} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{\kappa+1}} - \frac{t}{\kappa}, \quad (4.25)$$

$$y_D = \frac{\kappa\sqrt{\beta}}{1+\kappa}x_D + \frac{\sqrt{\beta}}{1+\kappa}t = \frac{\kappa\sqrt{\beta}}{1+\kappa}\left(x_0 + \frac{t_0}{\kappa}\right)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{\kappa+1}}. \quad (4.26)$$

Значение y_D увеличивается с течением времени, то есть точка D по закону (4.25) и (4.26) движется вверх по поверхности поршня CD , сжимающего газ в области ЦВ, тем самым количество точек поршня CD уменьшается, а количество точек поршня DE увеличивается.

4.2.2 Алгоритм построения поверхности непроницаемого поршня, сжимающего газ в области централизованной и двойной волны

Используя формулы (4.12), (4.23)–(4.26), можно численно построить поверхность непроницаемого поршня в области сжатия ЦВ и ДВ. Для этого необходимо дискретизировать поверхность начальной конфигурации поршня, ось времени, и, как следствие, формулы (4.12), (4.23)–(4.26). Выполним процедуру дискретизации. Введем обозначения:

1. $t_{0\varepsilon} = t_0 + \varepsilon$ – момент времени, когда начинается сжатие мишени (в расчете значение $\varepsilon = 0,1$);
2. $x_{0\varepsilon}^p = x^p(t_{0\varepsilon})$ – положение поршня CD в области ЦВ в момент времени $t_{0\varepsilon}$, рассчитываемое по формуле (4.12).

Вначале дискретизируем поверхность поршня, заданную в момент времени $t_{0\varepsilon}$ как набор m точек, при этом участок DE поршня CDE перпендикулярен косоугольной стенке AE , а участок CD поршня CDE совпадает с положением поршня в области ЦВ (начальная конфигурация поршня CDE , приведенная на рис. 4.1б). Тогда m_1 – начальное количество точек лежащих на прямой DE , m_2 – начальное количество точек, лежащих на прямой CD , при этом $m = m_1 + m_2$.

Найдем координаты m_2 точек поверхности поршня CD в области ЦВ. Для каждой из m_2 точек поверхности поршня CD координата по оси Ox задается значением $x_{0\varepsilon}^p$. Значение координаты m_2 точек поверхности поршня CD по оси Oy изменяется от $y_{0\varepsilon}^p = \frac{\sqrt{\beta}}{\kappa+1}(\kappa x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon})$ до $y_* = 1$. Разобьем интервал $y_* - y_{0\varepsilon}^p$ на m_2 равных частей, тогда $\Delta y = \frac{1 - y_{0\varepsilon}^p}{m_2}$. Отсюда y -координата j -ой точки на поверхности поршня CD задается формулой

$$y_j = y_{0\varepsilon}^p + \Delta y (j - m_1) = y_{0\varepsilon}^p + \frac{1 - y_{0\varepsilon}^p}{m_2} (j - m_1),$$

тогда можно определить координаты m_2 точек поверхности непроницаемого поршня CD в области ЦВ в начальный момент времени

$$M_j = \left\{ x_{0\varepsilon}^p, \frac{\varkappa x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}}{\sqrt{\beta}(1-\varkappa)} + \left(1 - \frac{\varkappa x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}}{\sqrt{\beta}(1-\varkappa)} \right) \frac{j - m_1}{m_2} \right\}, j = \overline{(m_1 + 1), m}. \quad (4.27)$$

Найдем координаты m_1 точек поверхности поршня DE в области ДВ. Уравнение, задающее поверхность поршня DE как прямую, перпендикулярную косою стенке в момент времени $t_{0\varepsilon}$, имеет вид

$$y = -\frac{x}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa + 1} (x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}). \quad (4.28)$$

Найдем x -координату точки E из уравнения пересечения прямой (4.28) с косою стенкой

$$\sqrt{\beta}x_E = -\frac{x_E}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa + 1} (x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}), \quad x_E = \frac{1}{2} (x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}).$$

Зная значение интервала между точками D и E , разобьем его на m_1 равных промежутков, координаты границ которых будут задавать x -координаты точек поверхности поршня DE . Для нахождения y -координаты точек поверхности поршня DE необходимо вычислить их, используя уравнение (4.28).

Отсюда можно определить координаты m_1 точек поверхности непроницаемого поршня DE в области ДВ в начальный момент времени

$$M_j = \left\{ x_E + j \frac{x_{0\varepsilon}^p - t_{0\varepsilon}}{2m_1}, x_E \sqrt{\beta} - j \frac{x_{0\varepsilon}^p - t_{0\varepsilon}}{2\sqrt{\beta}m_1} \right\}, \quad j = \overline{1, m_1}. \quad (4.29)$$

Дискретизируем ось времени

$$t : t_i = t_0 \frac{n-1}{n} i, \quad (4.30)$$

где n – число интервалов разбиения промежутка времени от t_0 до 0, тогда для моментов времени $t_i \geq t_{0\varepsilon}$ формулы (4.12), (4.23) и (4.24) переписываются в следующем виде:

1. в области течения типа ЦВ, когда $y_{i,j} \geq y_{D,i}$ и $x_{i,j}^p = x_{i,j} = x_{D,i}$

$$x_{i,j}^p = (x_{i-1,j}^p + t_{i-1}/\varkappa) \left(\frac{t_i}{t_{i-1}} \right)^{1/(\varkappa+1)} - t_i/\varkappa, \quad (4.31)$$

2. в области течения типа ДВ, когда $y_{i,j} < y_{D,i}$ и $x_{i,j} < x_{D,i}$

$$x_{i,j} = \frac{x_{i-1,j} + \sqrt{\beta}y_{i-1,j} + t_{i-1}/\varkappa}{1 + \beta} \left(\frac{t_i}{t_{i-1}} \right)^{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}} - \frac{1 + \sqrt{\beta}\varkappa (y_{i-1,j}/t_{i-1} - \sqrt{\beta}x_{i-1,j}/t_{i-1})}{1 + \beta} \frac{t_i}{\varkappa}, \quad (4.32)$$

$$y_{i,j} = \frac{(x_{i-1,j} + \sqrt{\beta}y_{i-1,j} + t_{i-1}/\varkappa) \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \left(\frac{t_i}{t_{i-1}} \right)^{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}} + \frac{\varkappa (y_{i-1,j}/t_{i-1} - \sqrt{\beta}x_{i-1,j}/t_{i-1}) - \sqrt{\beta} t_i}{1 + \beta} \frac{t_i}{\varkappa}, \quad (4.33)$$

здесь $x_j(t_i) = x_{i,j}$, $y_j(t_i) = y_{i,j}$, индекс j задает очередную точку на поверхности поршня CDE , индекс i принимает значения от 1 до n , а индекс j – от 1 до m .

Координаты точки D и определяются выражениями

$$x_{D,i} = \left(x_{D,i-1} + \frac{t_{i-1}}{\varkappa} \right) \left(\frac{t_i}{t_{i-1}} \right)^{\frac{1}{\varkappa+1}} - \frac{t_i}{\varkappa}, \quad y_{D,i} = \frac{\sqrt{\beta}}{1 + \varkappa} (\varkappa x_{D,i} + t_i), \quad (4.34)$$

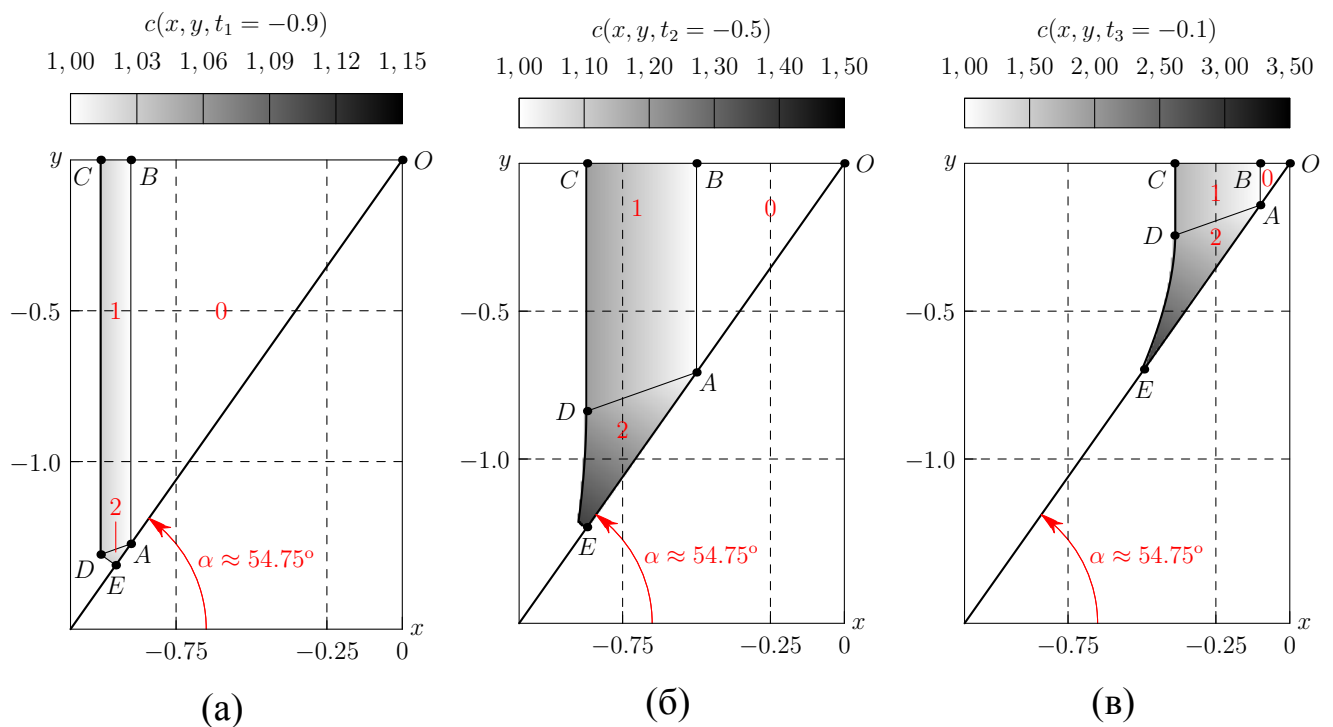
$$x_{D,1} = x^p (\varepsilon - 1), \quad y_{D,1} = \frac{\sqrt{\beta}}{1 + \varkappa} (\varkappa x^p + 1) (\varepsilon - 1).$$

Координаты точек исходной поверхности поршня CDE , задаваемые формулами (4.29) и (4.27), используются для определения координат точек поверхности непроницаемого поршня в последующие моменты времени $t > t_{0\varepsilon}$ по формулам (4.31)–(4.33).

4.2.3 Результаты моделирования сжатия призматического объема непроницаемым поршнем в согласованном случае

В настоящем разделе приводятся результаты моделирования сжатия мишени, приведенной на рис. 4.1а, непроницаемым поршнем. Алгоритм расчета поверхности непроницаемого поршня описан в п. 4.2.2, программная реализация выполнена на языке MATLAB [89].

На рис. 4.2 приведены результаты расчета положения поршня CDE от времени и функции $c(t, x, y)$ в области сжатия ЦВ и ДВ для начальной конфигурации непроницаемого поршня, перпендикулярного косоугольной стенке в области ДВ (см. рис. 4.1б).



0 – область покоя; 1 – область течения в виде ЦВ; 2 – область течения в виде ДВ
 Рисунок 4.2 – Пространственно-временное распределение функции $c(t, x, y)$ в призматическом объеме при его сжатии непроницаемым поршнем CDE в момент времени $t_1 = -0,9$ (а), $t_2 = -0,5$ (б) и $t_3 = -0,1$ (в)

Из рис. 4.2 видно, что характеристика AD , разделяющая ЦВ и ДВ, движется вверх по одномерному течению, и поэтому газ, пересекая эту характеристику, попадает из области ЦВ в область ДВ. Это добавляет точки в расчет по формулам (4.32), (4.33), удаляя их из расчета по формуле (4.31). Расчеты показывают, что точки поверхности непроницаемого поршня, которые в начальный момент времени находились в области сжатия ДВ, сохраняют свою исходную ориентацию относительно косой стенки (лежат на прямой, перпендикулярной косой стенке, см. рис. 4.2а,б) и двигаются по направлению к ней. Движение точек поверхности поршня, которые в результате сжатия перешли из области течения ЦВ в область ДВ, уже не определяется начальной при $t_{0\epsilon}$ конфигурацией сжимающего поршня, а определяется только газодинамическими параметрами течения ДВ. Видно, что с течением времени эта, как бы новая, часть поверхности сжимающего непроницаемого поршня начинает выгибаться в сторону косой стенки, фактически касаясь ее в своей крайней точке. Начальная конфигурация сжимающего непроницаемого поршня фактически пропадает. В области, где поршень касается косой стенки, возникает область повышенного давления – локальная кумуляция газа (рис. 4.2в).

Для оценки характера кумуляции газа в области сжатия ДВ выполнен расчет масс газа для интервалов давления A_p , B_p и C_p , задаваемых неравенствами (4.2). Для этого вводится величина $\delta m(t)$, которая задается как отношение массы газа в области ДВ, задаваемой неравенствами A_p , B_p и C_p , к массе газа в области ДВ или во всей области сжатия. То есть, например, для интервала давления A_p и области ДВ будем иметь выражение

$$\delta m(t) = \frac{1}{m_{ADE}(t)} \int_{V_{A_p}} \rho dV.$$

Результат расчета $\delta m(t)$ для областей A_p , B_p и C_p приведен на рис. 4.3 для рассматриваемого исходного наклона сжимающего поршня DE к косой стенке. На рис. 4.3в приведен график зависимости от времени мощности энерговложения в мишень, определяемого по формуле (4.1).

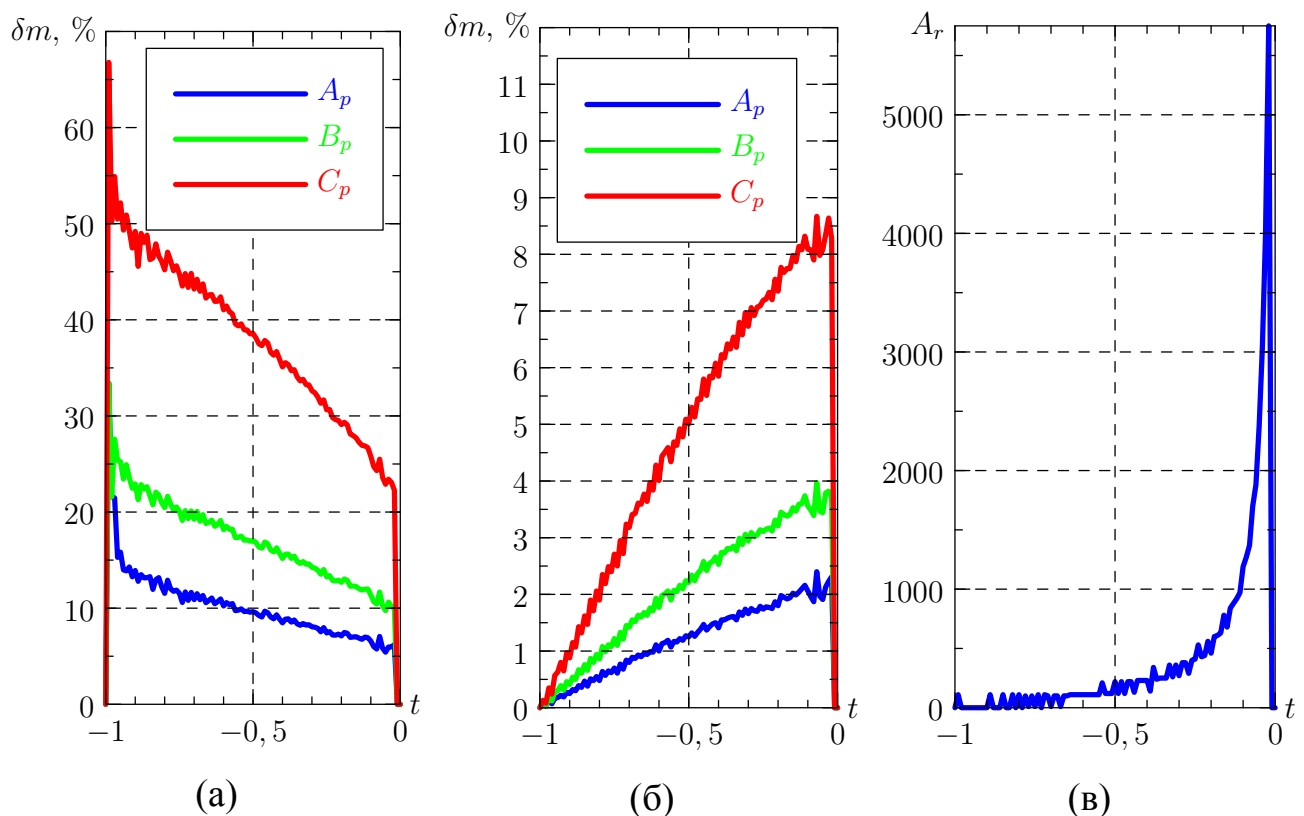


Рисунок 4.3 – Значение $\delta m(t)$ для интервалов давлений A_p , B_p , C_p в области ДВ (а) и в области ЦВ и ДВ (б). (в) Мощность энерговложения в мишень – $A_r(t)$

При приближении к моменту коллапса минимальная граница интервалов давления A_p , B_p и C_p сдвигается к точке E из-за роста давления в области сильной кумуляции и выгибания поверхности поршня DE к косой стенке. Область пространства, занимаемого газом из интервалов давления A_p , B_p и C_p , уменьшается. При этом газ из области ЦВ перетекает в область ДВ, что обусловлено движением

характеристики AD по основному (одномерному) течению. Как следствие, масса газа в области ДВ растет, что приводит к снижению значения $\delta m(t)$ с течением времени в области ДВ (см. рис. 4.3а).

Масса сильно сжатого газа для всей области сжатия ЦВ и ДВ невелика и составляет не более 10 % от общей массы сжимаемого газа. На рис. 4.3б видно, что с течением времени значение $\delta m(t)$ растет, что связано с перетоком газа из области ЦВ в область ДВ.

Функция $A_r(t)$ зависимости мощности энерговложения в мишень от времени (см. рис. 4.3в) на промежутке времени от t_0 до $0,1 t_0$ – линейная функция времени, максимум которой не превосходит 10 % от A_r^{max} . На интервале времени от $0,1 t_0$ до 0 наблюдается резкое возрастание мощности энерговложения в мишень (значение $A_r(t)$ изменяется от $0,1 A_r^{max}$ до A_r^{max}). Из анализа характера значений мощности энерговложения в мишень качественно сжатие можно разделить на два этапа: медленное сжатие газа при $t_0 < t < 0,1 t_0$ и последующий резкий удар при $0,1 t_0 < t < 0$.

4.2.4 Параметры локальной кумуляции в области двойной волны в зависимости от начального положения непроницаемого поршня относительно косой стенки

Начальная конфигурация поршня DE в момент времени $t_{0\varepsilon}$ может быть произвольной. На рис. 4.4 приведены способы задания начального положения непроницаемого поршня DE в области ДВ для определения степени кумуляции газа при приближении к моменту коллапса:

1. поршень DE в момент времени $t_{0\varepsilon}$ перпендикулярен косой стенке – конфигурация (а);
2. поршень DE в момент времени $t_{0\varepsilon}$ является продолжением линии CD – конфигурация (б);
3. поршень DE в момент времени $t_{0\varepsilon}$ наклонен под острым углом к косой стенке – конфигурация (в).

Случай (а) был рассмотрен ранее. Рассмотрим начальную конфигурацию (б) поршня CDE . Участок DE в момент времени $t_{0\varepsilon}$ является продолжением линии CD (см. рис. 4.4б). Очевидно, что в этом случае координата по оси Ox поршня в области ДВ совпадает с координатой поршня в области ЦВ и определяется

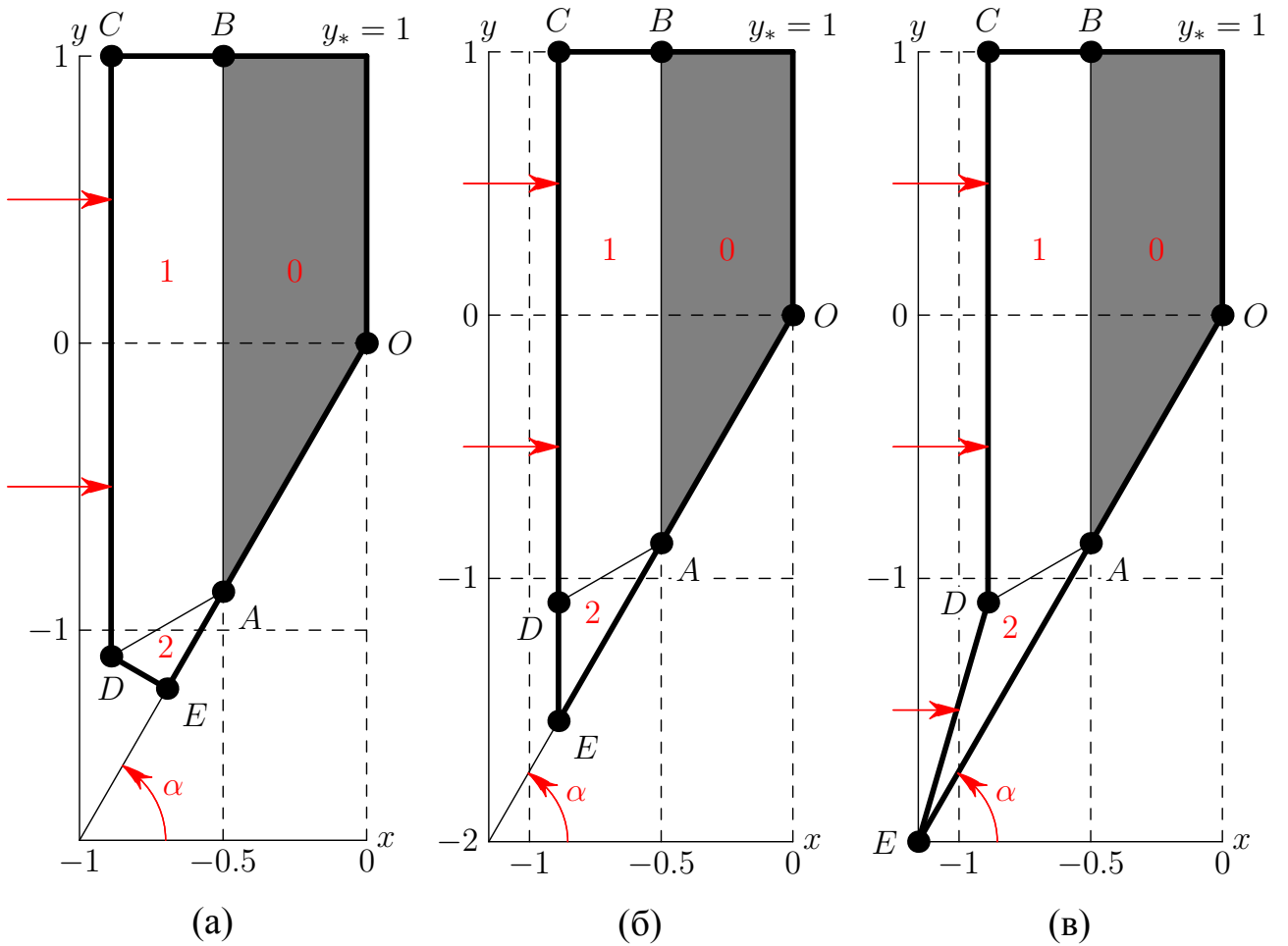


Рисунок 4.4 – Способы задания исходного положения непроницаемого поршня в области ДВ относительно косой стенки в момент времени $t_{0\varepsilon}$: поршень DE перпендикулярен косой стенке (а), является продолжением линии CD (б), наклонен под острым углом к косой стенке (в)

формулой (4.12). Координата по оси Oy изменяется в диапазоне от $x_p\sqrt{\beta}$ до 1. Отсюда m точек поверхности поршня CDE в момент времени $t_{0\varepsilon}$ задаются следующим образом

$$M_j = \left\{ x_{0\varepsilon}^p, \sqrt{\beta}x_{0\varepsilon}^p + \frac{1 - \sqrt{\beta}x_{0\varepsilon}^p}{m}j \right\}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим начальную конфигурацию (в) поршня CDE . Участок DE в момент времени $t_{0\varepsilon}$ наклонен под острым углом к косой стенке (см. рис. 4.4в). Уравнение прямой, описывающей поверхность поршня DE , наклоненного к косой стенке под острым углом, определяется из условия

$$u_p = u, \quad (4.35)$$

где u_p – скорость движения поршня CD в области ЦВ, u – скорость горизонтального движения частиц газа в области ДВ (см. формулу (2.114)).

Построим уравнение прямой поршня DE . Вначале найдем u_p , для этого подставим выражение (4.12) (x_p -координату поршня CD) в выражение для скорости газа в ЦВ

$$u_p = \frac{x_p/t - 1}{\varkappa + 1} = \frac{1}{\varkappa + 1} \left(\frac{x_0}{t_0} + \frac{1}{\varkappa} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa+1}} - \frac{1}{\varkappa}. \quad (4.36)$$

Далее подставим выражения (2.114) и (4.36) в (4.35), и найдем уравнение прямой, задающей поверхность поршня DE

$$\left(1 - \frac{\varkappa}{\beta} \right) \frac{x}{t} - \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \frac{y}{t} = \frac{1}{\varkappa + 1} \left(\frac{x_0}{t_0} + \frac{1}{\varkappa} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa+1}} - \frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\beta},$$

После упрощения последнего выражения, получим требуемое уравнение поршня DE

$$\left(1 - \frac{\varkappa}{\beta} \right) x - \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} y = \frac{1}{\varkappa + 1} \left(x_0 + \frac{t_0}{\varkappa} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{\varkappa+1}} - \left(1 - \frac{\varkappa}{\beta} \right) \frac{t}{\varkappa}, \quad (4.37)$$

Дискретизируем поверхность поршня CDE . Найдем координаты точки E из пересечения поршня DE , задаваемого уравнением (4.37), и косой стенки

$$\left(1 - \frac{\varkappa}{\beta} \right) x_E - \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} x_E \sqrt{\beta} - \frac{t_{0\varepsilon}}{\beta} = \frac{1}{\varkappa + 1} x_{0\varepsilon}^p - \frac{t_{0\varepsilon}}{\varkappa + 1}, \quad x_E = \frac{1}{1 - \varkappa} x_{0\varepsilon}^p - \frac{\varkappa}{1 - \varkappa} t_{0\varepsilon}.$$

Вычислим расстояние между точками D и E по оси Ox

$$\Delta x = x_{0\varepsilon}^p - x_E = x_{0\varepsilon}^p - \frac{1}{1 - \varkappa} x_{0\varepsilon}^p - \frac{\varkappa}{1 - \varkappa} t_{0\varepsilon} = \frac{\varkappa}{1 - \varkappa} (t_{0\varepsilon} - x_{0\varepsilon}^p). \quad (4.38)$$

Из (4.38) можно построить x_j -координату точек поверхности поршня DE

$$x_j = x_E + \frac{\Delta x}{m_1} j = \frac{\varkappa}{1 - \varkappa} \left(\frac{x_{0\varepsilon}^p}{\varkappa} - t_{0\varepsilon} + \frac{t_{0\varepsilon} - x_{0\varepsilon}^p}{m_1} j \right). \quad (4.39)$$

Значение y_j найдем, подставив x_j в уравнение (4.37)

$$y_j = \left(1 - \frac{\varkappa}{\beta} \right) \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa} x_j + \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa + 1} t_{0\varepsilon} - \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa (\varkappa + 1)} x_{0\varepsilon}^p. \quad (4.40)$$

Отсюда дискретизированная поверхность поршня DE в области ДВ задается выражением

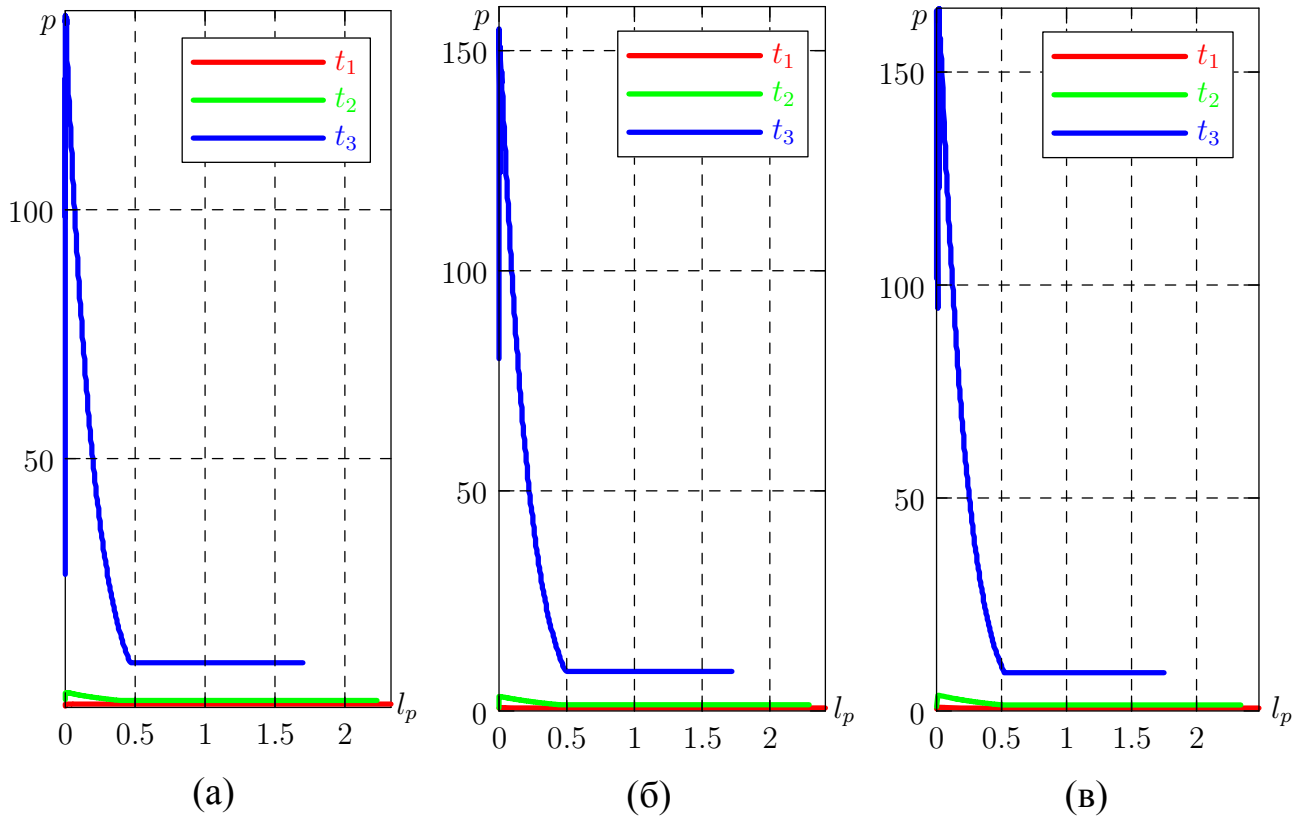
$$M_j = \{x_j, y_j\}, \quad j = \overline{1, m_1},$$

где x_j и y_j вычисляются по формулам (4.39) и (4.40) соответственно.

Для поршня CD в области ЦВ

$$M_j = \left\{ x_{0\varepsilon}^p, \frac{\varkappa x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}}{\sqrt{\beta}(1 - \varkappa)} + \left(1 - \frac{\varkappa x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}}{\sqrt{\beta}(1 - \varkappa)} \right) \frac{j - m_1}{m_2} \right\}, \quad j = \overline{(m_1 + 1), m}.$$

На рис. 4.5 приведены результаты расчета функции $p(t)$ вдоль поверхности непроницаемого поршня CDE в моменты времени $t_1 = -0,9$, $t_2 = -0,5$ и $t_3 = -0,1$ для трех рассмотренных начальных конфигураций непроницаемого поршня. На рис. 4.5 горизонтальные участки графиков соответствуют плоскому поршню CD .



l_p – расстояние вдоль поршня CDE

Рисунок 4.5 – График функции $p(t)$ в моменты времени $t_1 = -0,9$, $t_2 = -0,5$ и $t_3 = -0,1$ вдоль поршня CDE в области ЦВ и ДВ для различного исходного положения поршня CDE в момент времени $t_{0\varepsilon}$: поршень DE перпендикулярен косо́й стенке (а), является продолжением линии CD (б), наклонен под острым углом к косо́й стенке (в)

Из графиков на рис. 4.5 видно, что при приближении к коллапсу давление газа в области сильной кумуляции превосходит давление газа в области ЦВ более чем на порядок. При этом от начального положения линии DE в области ДВ зависит степень кумуляции давления газа при приближении к коллапсу. При

смещении положения линии DE влево относительно перпендикуляра к косо́й стенке давление газа в основании угла между косо́й стенкой и непроницаемым поршнем увеличивается, несмотря на то, что в конце движения поршня исходная конфигурация полностью утрачивается. При приближении к коллапсу значение максимума давления вдоль поршня DE для случая начальной конфигурации поршня, когда линия DE наклонена к косо́й стенке под острым углом, наибольшее из трех рассматриваемых случаев (см. рис. 4.5в).

4.3 Математическое описание сильного сжатия проницаемым поршнем специального призматического объема

4.3.1 Задача Коши для построения закона движения проницаемого поршня в области центрированной и двойной волны

В п. 4.1 и работе [50, с. 184—187] рассматривалась постановка задачи о плавном движении проницаемого поршня по фоновому течению при заданном давлении на поршне (НКЗ (4.3)–(4.5), (4.7)). В этом случае не предполагается выполнение на поршне условия непротекания. В качестве краевого условия для такой ХЗК на поршне задается давление или значение скорости звука – уравнение (4.7). Из единственного решения такой ХЗК стандартного вида однозначно определяется закон движения проницаемого поршня и значения газодинамических параметров на нем.

Вместо решения задачи (4.3)–(4.5), (4.7) воспользуемся интерпретацией построенного решения задачи (4.3)–(4.5), описывающей разлет политропного газа в вакуум на косо́й стенке при $-t_0 \leq t \leq 0$. Тогда уравнение поверхности проницаемого поршня строится как решение уравнения (4.7), где $c(t, x, y)$ – автомодельное решение В. А. Сучкова для согласованного случая.

Найдем уравнение проницаемого поршня DE как решение уравнения (4.7). Пусть в момент времени $-t_0 \leq t \leq 0$ значение скорости звука на поверхности поршня DE постоянно и равно $\bar{c} = \text{const}$, тогда

$$\bar{c} = \frac{1}{\beta} \left(1 + \kappa \frac{x}{t} + \kappa \sqrt{\beta} \frac{y}{t} \right). \quad (4.41)$$

После преобразования (4.41) получим уравнение поверхности DE

$$y + \frac{1}{\sqrt{\beta}} x = \frac{\bar{c}}{\sqrt{\beta}} \frac{t}{\kappa} - \frac{t}{\kappa \sqrt{\beta}}. \quad (4.42)$$

Константа $\bar{c}$ определяется из значения функции $c_0(t, x)$ на характеристике AD в точке D . Значение c_0 на характеристике AD равно

$$c_0 = \frac{\kappa}{\kappa + 1} \frac{x}{t} + \frac{1}{\kappa + 1},$$

x -координата точки D равна

$$x_D = \left(x_0 + \frac{t_0}{\kappa} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{\kappa+1}} - \frac{t}{\kappa}.$$

Подставим x_D в формулу для $c_0(t, x)$ и в результате получим

$$\bar{c} = c_0(t, x_D) = \frac{\kappa}{\kappa + 1} \left(\frac{x_0}{t_0} + \frac{1}{\kappa} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\frac{\kappa}{\kappa+1}}. \quad (4.43)$$

Подставим значение константы $\bar{c}$ в формулу (4.42) и окончательно получим выражение для поверхности проницаемого поршня DE в момент времени $t_0 < t < 0$:

$$y = \frac{\sqrt{\beta}}{\kappa + 1} \left(x_0 + \frac{t_0}{\kappa} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{\kappa+1}} - \frac{x}{\sqrt{\beta}} - \frac{t}{\kappa\sqrt{\beta}}. \quad (4.44)$$

Из (4.43) видно, что значение скорости звука $\bar{c}$ вдоль прямой DE не зависит от x, y , то есть в каждый фиксированный момент времени оно постоянно и свое. Таким образом, поверхность проницаемого поршня в области ДВ, задаваемая выражением (4.44), является поверхностью постоянного давления. Построенное решение задачи (4.3)–(4.5) в интерпретации сжатия описывает второй способ воздействия на мишень одинаковым со всех сторон давлением.

В момент времени t_0 поршень DE проходит через точку с координатами (x_0, y_0) , найдем значение y_0 . Перепишем (4.44) в следующем виде

$$x + \sqrt{\beta}y + \frac{t}{\kappa} = \frac{\beta}{\kappa + 1} \left(x_0 + \frac{t_0}{\kappa} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{\kappa+1}}. \quad (4.45)$$

Подставим в (4.45) значение $t = t_0$

$$x_0 + \sqrt{\beta}y_0 + \frac{t_0}{\kappa} = \frac{\beta}{\kappa + 1} \left(x_0 + \frac{t_0}{\kappa} \right),$$

отсюда (4.45) можно переписать в виде

$$x + \sqrt{\beta}y = \left(x_0 + \sqrt{\beta}y_0 + \frac{t_0}{\kappa} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{\kappa+1}} - \frac{t}{\kappa}. \quad (4.46)$$

Найдем закон движения поршня DE , заданного уравнением (4.46) в области ДВ. Ранее был построен закон движения точек поверхности непроницаемого поршня в области ДВ (см. формулы (4.23) и (4.24)) как решение СОДУ типа (4.9). Было показано, что уравнения типа (4.21) и (4.22) являются интегралами движения такой системы. Тогда, по аналогии со случаем закона движения непроницаемого поршня, интегралами движения СОДУ, описывающей движение точек поверхности проницаемого поршня DE , заданного уравнением (4.46), будут следующие выражения

$$\begin{cases} y - \sqrt{\beta} x = (y_0 - \sqrt{\beta} x_0) \left(\frac{t}{t_0} \right), \\ x + \sqrt{\beta} y = \left(x_0 + \sqrt{\beta} y_0 + \frac{t_0}{\varkappa} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{\varkappa+1}} - \frac{t}{\varkappa}. \end{cases} \quad (4.47)$$

Из выражений (4.47) можно в явном виде получить выражения для $x(t)$ и $y(t)$. Для этого необходимо уравнение косой стенки умножить на $-\sqrt{\beta}$ и прибавить к уравнению поршня DE , получим выражение для $x(t)$

$$x(t) = \frac{x_0 + \sqrt{\beta} y_0 + t_0/\varkappa}{1 + \beta} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{1+\varkappa}} - \frac{1 + \sqrt{\beta} \varkappa (y_0/t_0 - \sqrt{\beta} x_0/t_0)}{1 + \beta} \frac{t}{\varkappa}. \quad (4.48)$$

Далее выражение для $x(t)$ подставим в выражение, описывающее закон движения поверхности поршня DE , и получим выражение для $y(t)$

$$y(t) = \frac{(x_0 + \sqrt{\beta} y_0 + t_0/\varkappa) \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{1+\varkappa}} + \frac{\varkappa (y_0/t_0 - \sqrt{\beta} x_0/t_0) - \sqrt{\beta} t}{1 + \beta} \frac{t}{\varkappa}. \quad (4.49)$$

Покажем, что поршень DE перпендикулярен косой стенке AE . Вектор, коллинеарный направлению косой стенки, имеет координаты $\mathbf{v}_1 = (-\sqrt{\beta}, 1)$, а вектор, коллинеарный поршню DE , имеет координаты $\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{\beta}}, 1 \right)$. Скалярное произведение векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ будет равно

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = -\sqrt{\beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} + 1 = 0,$$

отсюда следует, что $DE \perp AE$.

4.3.2 Алгоритм построения поверхности проницаемого поршня, сжимающего газ в области централизованной и двойной волны

Алгоритм построения поверхности проницаемого поршня постоянного давления в области ЦВ и ДВ с течением времени повторяет алгоритм построения поверхности поршня для первого способа воздействия на мишень.

Дискретизируем поверхность поршня CDE в момент времени $t_{0\varepsilon}$, при этом участок DE – проницаемый поршень:

1. для поршня DE в области ДВС, когда $j = \overline{1, m_1}$

$$M_j = \left\{ x_j = \frac{m_1 (x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}) + (x_{0\varepsilon}^p - t_{0\varepsilon}) j}{2m_1}, \frac{x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}}{\sqrt{\beta} (1 - \varkappa)} - \frac{x_j}{\sqrt{\beta}} \right\}; \quad (4.50)$$

2. для поршня CD в области ЦВ, когда $j = \overline{(m_1 + 1), m}$

$$M_j = \left\{ x_{0\varepsilon}^p, \frac{\varkappa x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}}{\sqrt{\beta} (1 - \varkappa)} + \left(1 - \frac{\varkappa x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}}{\sqrt{\beta} (1 - \varkappa)} \right) \frac{j - m_1}{m_2} \right\}. \quad (4.51)$$

С помощью формул (4.50) и (4.51) поверхность поршня CDE в момент времени $t_{0\varepsilon}$ задана набором из $m = m_1 + m_2$ точек, где m_1 – количество точек поршня DE , m_2 – количество точек поршня CD . Шкала времени дискретизирована по формуле (4.30).

Координаты точек поверхности поршня CD в области течения сжатия ЦВ во времени вычисляются по дискретизированной формуле (4.12), когда $y_{i,j} \geq y_{D,i}$ и $x_{i,j}^p = x_{i,j} = x_{D,i}$, а координаты поверхности поршня DE в области течения сжатия ДВ во времени вычисляются по дискретизированным формулам (4.48), (4.49), когда $y_{i,j} < y_{D,i}$ и $x_{i,j} < x_{D,i}$. Расчет $x_{D,i}$ и $y_{D,i}$ выполняется по формулам (4.34). Координаты $(x_{i,j}, y_{i,j})$

$$x_{i,j} = \frac{x_{i-1,j} + \sqrt{\beta} y_{i-1,j} + t_{i-1}/\varkappa}{1 + \beta} \left(\frac{t_i}{t_{i-1}} \right)^{\frac{1}{1+\varkappa}} - \frac{1 + \sqrt{\beta} \varkappa (y_{i-1,j}/t_{i-1} - \sqrt{\beta} x_{i-1,j}/t_{i-1})}{1 + \beta} \frac{t_i}{\varkappa}, \quad (4.52)$$

$$y_{i,j} = \frac{(x_{i-1,j} + \sqrt{\beta} y_{i-1,j} + t_{i-1}/\varkappa) \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \left(\frac{t_i}{t_{i-1}} \right)^{\frac{1}{1+\varkappa}} + \frac{\varkappa (y_{i-1,j}/t_{i-1} - \sqrt{\beta} x_{i-1,j}/t_{i-1}) - \sqrt{\beta} t_i}{1 + \beta} \frac{t_i}{\varkappa}. \quad (4.53)$$

При переходе частиц газа из области течения ЦВ в область течения ДВ за счет движения характеристики AD точки поверхности поршня CDE исключаются из расчета по формуле (4.12) и добавляются в расчет по формулам (4.52) и (4.53).

4.3.3 Результаты моделирования сжатия мишени проницаемым поршнем в области двойной волны

В настоящем разделе приводятся результаты моделирования сжатия мишени проницаемым поршнем. Алгоритм расчета поверхности проницаемого поршня описан в п. 4.3.2, программная реализация выполнена на языке MATLAB [89].

На рис. 4.6 приведены результаты расчета функции $c(x, y, t)$ в области течения сжатия ЦВ и ДВ для поршня CDE (поршень DE в области течения сжатия ДВ проницаем) в моменты времени $t_1 = -0,9$, $t_2 = -0,5$ и $t_3 = -0,1$, точки поверхности которого в области ДВ движутся по закону (4.52) и (4.53).

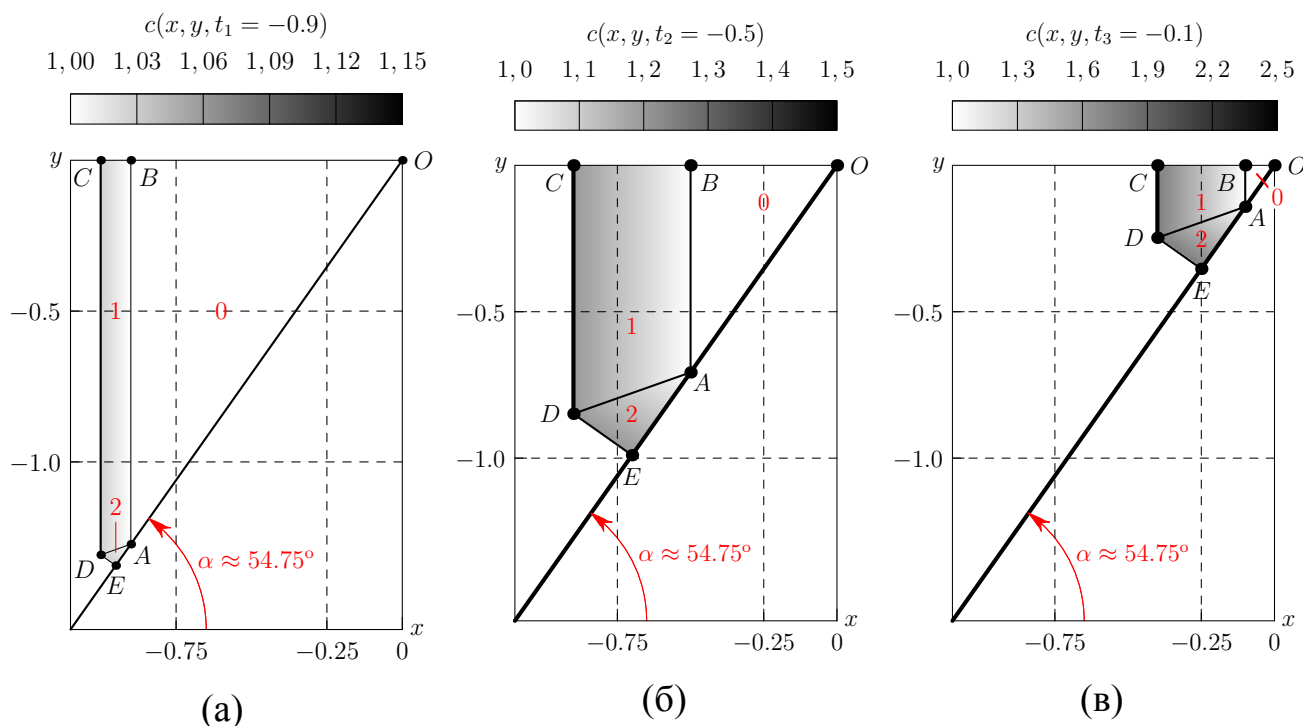


Рисунок 4.6 – Распределение скорости звука $c(x, y, t)$ в призматическом объеме при его сжатии поршнем CDE (поршень DE – проницаем) в момент времени $t_1 = -0,9$ (а), $t_2 = -0,5$ (б) и $t_3 = -0,1$ (в)

Видно, что проницаемый поршень DE все время перпендикулярен кривой. Газ из области ЦВ с течением времени перетекает в область ДВС, но при

этом области локальной сильной кумуляции не наблюдается, потому что часть газа покидает область сжатия через проницаемый поршень.

На рис. 4.7 приведены результаты расчета функции $p(t)$ вдоль поверхности поршня CDE в моменты времени $t_1 = -0,9$, $t_2 = -0,5$ и $t_3 = -0,1$.

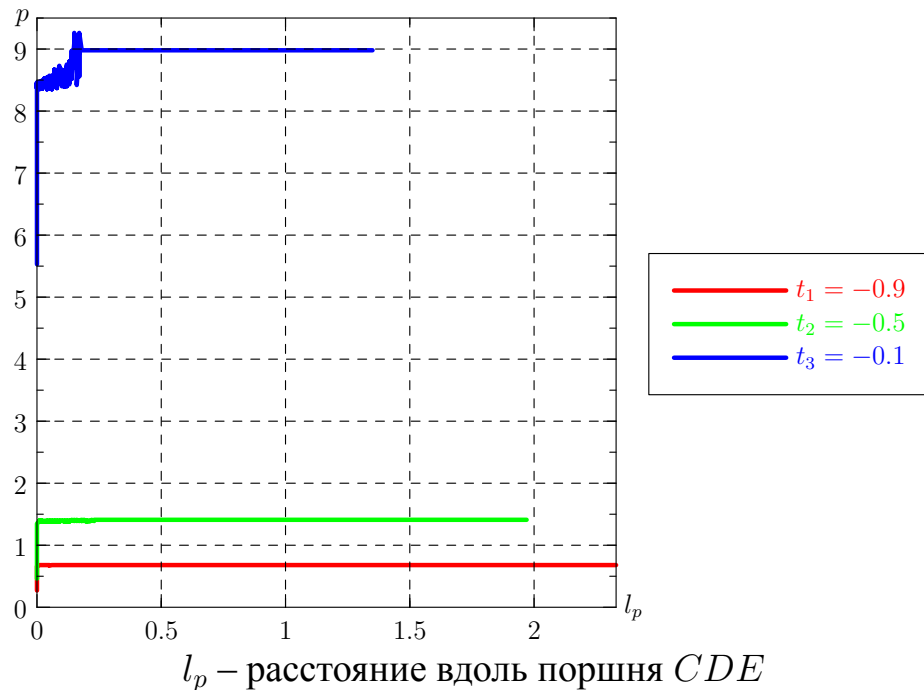


Рисунок 4.7 – Распределение давления газа вдоль поршня CDE в области ЦВ и ДВ в моменты времени $t_1 = -0,9$, $t_2 = -0,5$, $t_3 = -0,1$

Видно, что давление газа на поршне в области ДВС совпадает с давлением газа на поршне в ЦВ для любого момента времени $t_0 < t < 0$.

На рис. 4.8 приведены интегральные характеристики сжатия (значения $\delta m(t)$ в интервалах давлений A_p , B_p , C_p для области течения ДВ, ЦВ и ДВ, значение $A_r(t)$ – мощности энерговложения в мишень) течения типа ЦВ и ДВ поршнем CDE , часть которого DE в области течения сжатия ДВС проницаемая.

На рис. 4.8а видно, что изменение с течением времени значения $\delta m(t)$ носит качественно иной характер, чем для предыдущего способа воздействия на мишень. Так как давление на поршне CDE для областей ЦВ и ДВ совпадает, при приближении к моменту коллапса минимальная граница интервалов давления A_p , B_p и C_p сдвигается к точке E таким образом, что площади областей пространства, занимаемого газом из интервалов давления A_p , B_p и C_p , по отношению к площади области ДВ остаются неизменными. Поэтому на рис. 4.8а значения $\delta m(t)$ в области ДВ для интервалов давлений A_p , B_p , C_p постоянны и свои.

Рост значения $\delta m(t)$ на рис. 4.8б связан с перетоком газа из области течения ЦВ в область течения ДВ. Значение $\delta m(t)$ на графике меньше по сравнению с предыдущим способом воздействия на мишень (см. рис. 4.3в) и не превышает 7 % от общей массы сжимаемого газа, т.к. часть газа покидает область сжатия через проницаемый поршень DE .

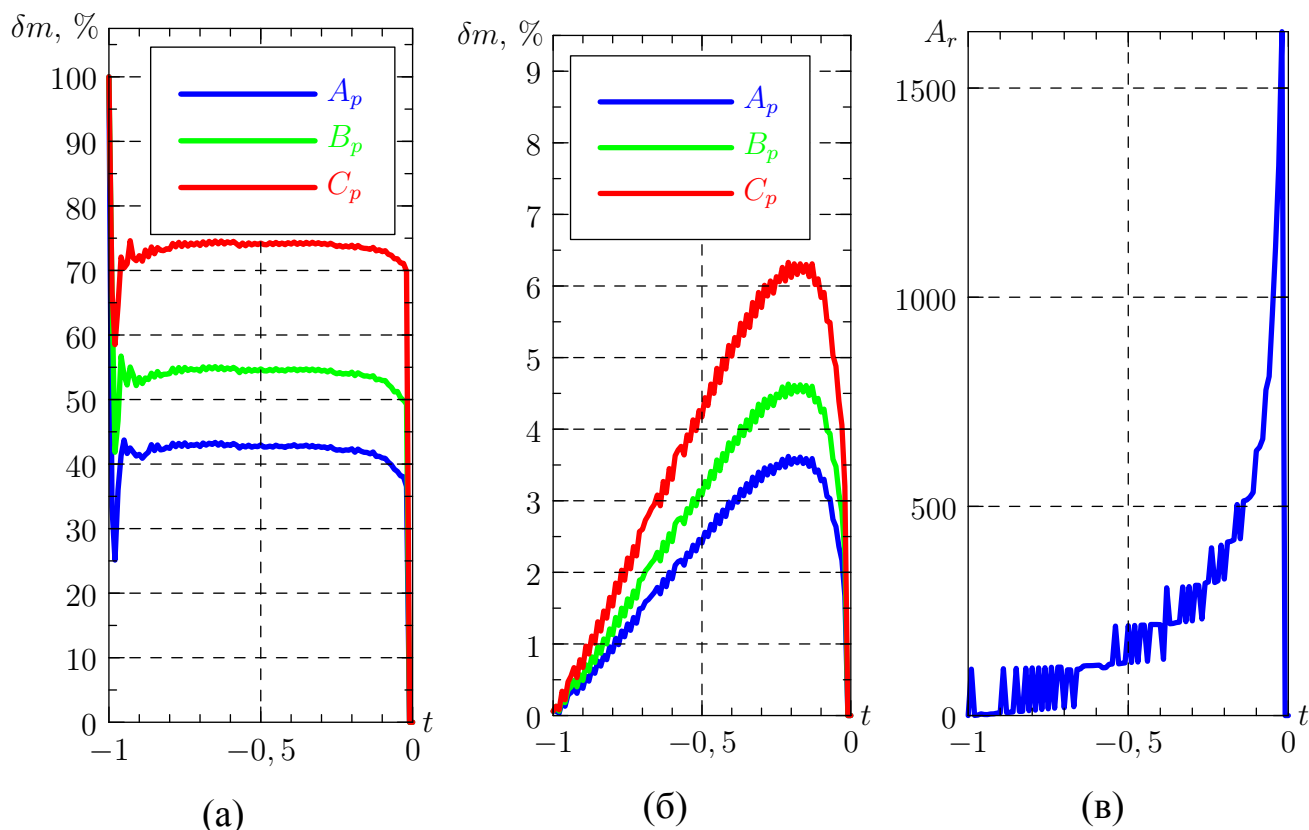


Рисунок 4.8 – Значение $\delta m(t)$ для интервалов давлений A_p , B_p , C_p в области ДВ (а) и области ЦВ и ДВ (б). (в) Мощность энерговложения в мишень – $A_r(t)$

Из сравнения графиков функции $A_r(t)$, приведенных на рис. 4.3в и 4.8в, видно, что качественно процессы сжатия для обоих способов воздействия на мишень подобны друг другу и разделяются на два этапа: медленное сжатие и последующий резкий удар. При этом для варианта воздействия на мишень проницаемым поршнем с заданным давлением значение A_r^{max} меньше A_r^{max} для непроницаемого поршня приблизительно в пять раз.

4.4 Рекомендации по мишеням для управляемого термоядерного синтеза на основании построенных решений соответствующих начально-краевых задач

На основании результатов моделирования БСС двумерной мишени, одна из четырех стенок которой имеет наклон α к горизонтали, бóльших параметров кумуляции газа можно достичь при воздействии на мишень непроницаемым поршнем.

В таблице 1 для сравнения приведены параметры кумуляции газа для двух вариантов воздействия на мишень в момент времени $t = -0,1$.

Таблица 1 – Параметры кумуляции газа для двух вариантов воздействия на мишень при $t = -0,1$

Тип поршня	$\bar{p}(t = -0,1)/\bar{p}(0)$	$A_r(t = -0,1)$
Непроницаемый поршень	154,95	1190,13
Проницаемый поршень	8,98	620,30

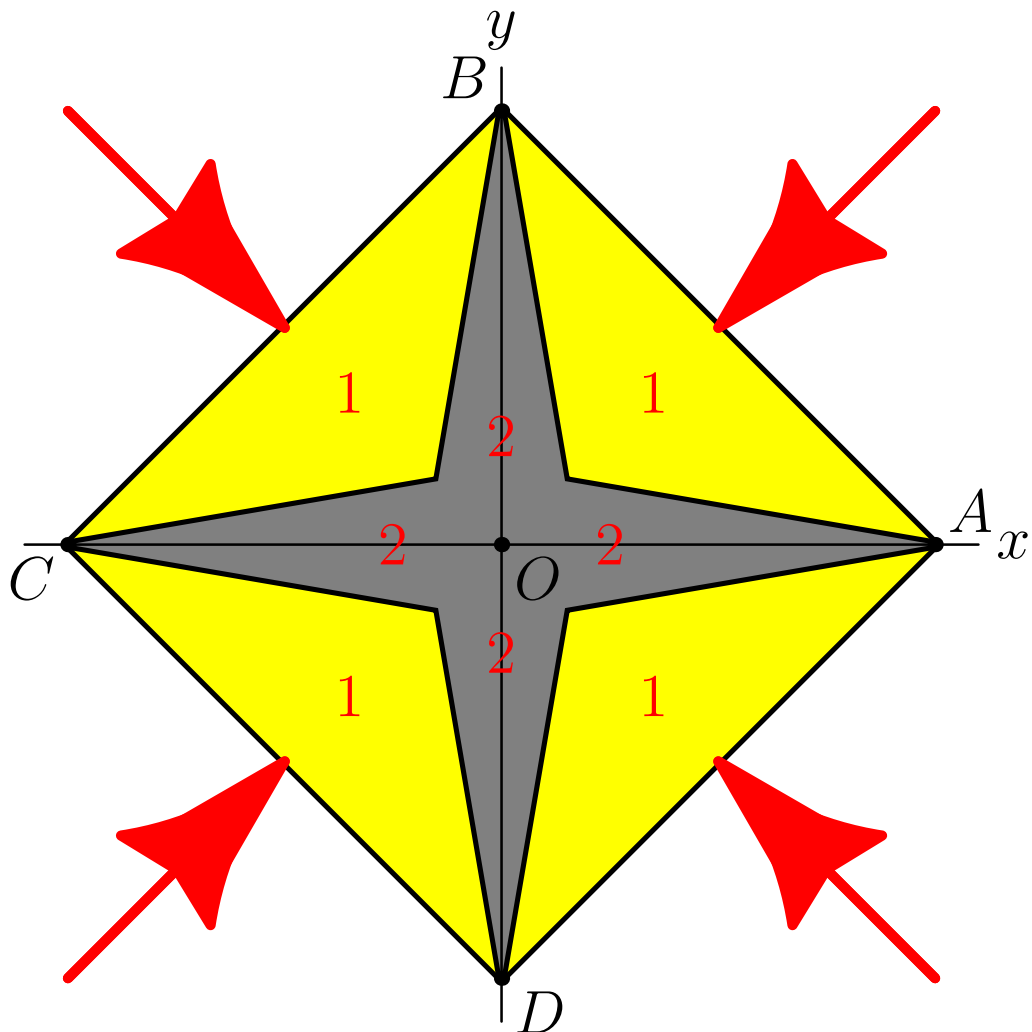
В таблице 1 значение $A_r(t = -0,1)$ – мощность энерговложения в мишень (закон воздействия) в момент времени $t = -0,1$ рассчитывалась по формуле (4.1), а значение $\bar{p}(t = -0,1)/\bar{p}(0)$ – отношение среднего значения давления на поршне DE в момент времени $t = -0,1$ к среднему значению давления на поршне в начале сжатия (степень кумуляции).

Из таблицы 1 видно, что степень кумуляции газа при сжатии мишени непроницаемым поршнем в 17,2 раз больше, чем при сжатии газа заданным давлением, при этом мощность энерговложения для двух способов воздействия отличается в 1,92 раза, таким образом, сильное безударное сжатие мишени непроницаемым поршнем энергетически более выгодно приблизительно в 8,95 раз, т.е. почти на порядок.

При безударном сжатии непроницаемым поршнем DT смеси ($\gamma = 5/3$), находящейся внутри объема газа с косой стенкой, для зажигания термоядерных реакций угол наклона косой стенки должен составлять $\alpha = \arctg \sqrt{2} \approx 54,75^\circ$ (согласованный режим течения в области ДВ).

Отсюда, рекомендуемая конфигурация мишени (поперечное сечение), когда реализуется режим БСС, должна иметь вид, приведенный на рис. 4.9. Для обеспечения симметрии воздействия мишень для УТС должна состоять из четырех

треугольных сегментов с двумя углами при основании $\frac{\pi}{2} - 54,75^\circ = 35,25^\circ$ (показано на рис. 4.9 желтым цветом) и твердого сердечника (показано на рис. 4.9 серым цветом).



1 – сжимаемый газ; 2 – твердый сердечник

Рисунок 4.9 – Рекомендуемая мишень для реализации БСС при УТС

На рис. 4.9 границы AB , BC , CD , AD – границы непроницаемого поршня, направление внешнего воздействия на непроницаемый поршень, которое осуществляется по закону $A_r(t)$ (см. рис. 4.3в), показано красными стрелками. Характер течения в области сжатия течения типа ЦВ, ДВ и покоя в каждом из треугольных сегментов соответствует изображению на рис. 4.2.

4.5 Выводы по главе

В настоящей главе решение исходной НКЗ в согласованном случае применено к описанию сжатия призматического объема с косой стенкой (мишень для

УТС). Сжатие мишени реализуется двумя способами: движение непроницаемого поршня; воздействие заданным давлением. В обоих случаях описание течения сжатия строилось на основе интерпретации: поршень, задаваемый уравнением $\varphi(x_p(t), y_p(t)) = 0$, движется по фоновому течению, задаваемому решением Сучкова В. А., когда $-t_0 \leq t \leq 0$. Закон движения поршня $x_p(t), y_p(t)$ восстанавливался из краевого условия соответствующей ХЗК стандартного вида.

Основные физические выводы следующие из моделирования:

1. При сжатии мишени непроницаемым поршнем происходит переток газа из области течения ЦВ в область течения ДВ. Происходит выгибание поверхности поршня DE в направлении косой стенки. В угле между непроницаемым поршнем и косой стенкой наблюдается область повышенного давления – локальная кумуляция газа, где сосредоточено около 10 % массы сжимаемого газа. Степень локальной кумуляции зависит от начальной конфигурации поршня в области ДВ. Чем острее угол наклона поршня к косой стенке, тем степень кумуляции выше;
2. При сжатии мишени проницаемым поршнем поверхность поршня DE в области ДВ всегда перпендикулярна косой стенке, давление на нем всегда постоянно, не зависит от координат x, y и равно давлению на поршне CD , сжимающего газ в области ЦВ. Нет областей с большой кумуляцией, газ перетекающий из области ЦВ в область ДВ частично покидает область сжатия через проницаемую стенку поршня.
3. Для обоих вариантов газодинамического воздействия на мишень построена зависимость мощности энерговложения от времени $A_r(t)$. При этом для варианта воздействия на мишень заданным давлением максимальное значение A_r^{max} меньше чем для воздействия непроницаемым поршнем приблизительно в пять раз. Показано, что сжатие мишени непроницаемым поршнем энергетически более выгодно приблизительно на порядок.

В заключении главы дана рекомендация по конфигурации мишени для УТС, реализующей режим течения безударного сжатия, представляющей в поперечном сечении квадрат, состоящий из четырех треугольных сегментов с топливом (DT смесь) с углами у основания $35,25^\circ$, и твердым несжимаемым сердечником. Полученные результаты были опубликованы в ряде статей и докладов на конференциях [83; 91; 92; 97; 109].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования:

1. Поставлена НКЗ о разлете политропного газа в вакуум на косой стенке при $t > 0$ в виде ХЗК стандартного вида для СУГД, решение которой строится в виде степенного ряда по ϑ – известная функция автомодельных переменных $\xi = x/t, \eta = y/t$.
2. Доказана теорема существования и единственности локально-аналитического решения НКЗ для СУГД, решение которой описывает истечения газа в вакуум с косой стенки при $t > 0$.
3. На основании доказанной теоремы предложен алгоритм нахождения неизвестных коэффициентов $c_n(\xi), u_n(\xi), v_n(\xi)$ разложения в степенной ряд газодинамических параметров рассматриваемого двумерного течения как решения соответствующих дифференциальных уравнений для коэффициентов $c_n(\xi)$ при $n \geq 1$, коэффициенты $u_n(\xi), v_n(\xi)$ находятся как решение СЛАУ.
4. Построено в аналитическом виде локально-аналитическое решение исходной начально-краевой ХЗК стандартного вида для СУГД, описывающей при $t > 0$ разлет политропного газа в вакуум на косой стенке в общем несогласованном случае, когда нет алгебраической связи между показателем политропы γ и углом наклона косой стенки. Определена область сходимости построенного решения.
5. Построено множество алгебраических уравнений относительно показателя политропы γ , решение которых (значения γ) определяют вид соответствующего транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$, который позволяет проинтегрировать его в явном виде для любых значений $0 < \alpha < \pi/2$. Построены решения транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в явном виде для значений $\gamma = 5/3, \gamma = 2, \gamma = 5/2$.
6. Выполнен газодинамический анализ решения задачи в согласованном случае. Определены конфигурация течения ДВ (все границы области ДВ – суть прямые линии), построено распределение значений газодинамических параметров внутри области ДВ как функции независимых переменных $\xi = x/t, \eta = y/t$. Показано, что для решения В. А. Сучкова

условие непротекания газа на косой стенке выполняется автоматически, а свободная граница газа с вакуумом перпендикулярна косой стенке.

7. Для анализа течения типа ДВ в несогласованном случае предложено квазисогласованное приближение, когда условие согласования не выполняется, но коэффициенты $c_n(\xi)$, $u_n(\xi)$, $v_n(\xi)$ рядов газодинамических параметров при $n \geq 2$ равны нулю. Данное приближение было записано для тех значений γ ($\gamma = 5/3, 2, 5/2$), для которых решение транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ было построено в явном виде. Данный подход позволяет полностью исследовать характер течения в области ДВ.
8. Конфигурация течения газа в области ДВ задается тремя кривыми: косой стенкой AE , звуковой характеристикой AD , отделяющей область течения ДВ от плоского течения, и свободной границей газа с вакуумом – DE . В несогласованном случае в зависимости от значения α звуковая характеристика AD выгнута ($\operatorname{tg}^2 \alpha > \beta$) или выпукла ($\operatorname{tg}^2 \alpha < \beta$) в направлении AE и в окрестности точки D стремится к положению AD в согласованном случае. Граница газ-вакуум DE в несогласованном случае при $\operatorname{tg}^2 \alpha \neq \beta$ в окрестности точки D также стремится к прямой $DE \perp AE$ в согласованном случае.
9. В интерпретации решения на сжатие в квазисогласованном приближении для различных значений γ и α показано, что при $\operatorname{tg}^2 \alpha > \beta$ и $\operatorname{tg}^2 \alpha < \beta$ решение транспортного уравнения для $c_1(\xi)$ содержит особенность, что приводит в течении газа к градиентной катастрофе. Построена зависимость $c_0^*(\alpha)$ для различных значений γ – критерий возникновения в течении ДВ градиентной катастрофы. Согласованному режиму течения отвечает ситуация, когда $c_0^* \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow \alpha_s$.
10. Градиентная катастрофа вызвана «несогласованным» перетеканием газа из области ДВ в область простой волны из-за большего значения скорости звука газа в области ДВ, чем в области ЦВ. В согласованном случае на звуковой характеристике происходит непрерывная состыковка течений газа, т.к. $c_1(\xi) = \frac{\kappa}{\sqrt{\beta}} = \operatorname{const}$, а в несогласованном случае имеет место ступенька, т.к. в особенности $c_1 \rightarrow \infty$. В газовой динамике появление бесконечного градиента ведет к возникновению УВ и изменению структуры течения. В частности, в одномерной задаче о распаде разрыва возникает не только УВ, идущая по течению с меньшим давлением, но

и слабые разрывы (включая контактные), идущие в другую сторону, чем УВ. В настоящей работе течения с УВ не рассматриваются и нет строгого построения структуры течения, но общая картина возникающего течения понятна: УВ будет двигаться поперек ЦВ.

11. Увеличение количества граней мишени (правильный n -угольник в поперечном сечении) приводит к уменьшению значения угла α , и течение БСС раньше переходит в УВ. Таким образом, когда поверхность мишени стремится к цилиндру или сфере ($n \gg 1$), режим течения сжатия не зависит от внешнего воздействия и всегда представляет собой сходящуюся УВ. Установление факта, что ни для одной практически реализуемой конфигурации мишени для УТС режим БСС невозможен, так как он ограничен критическим значением c_0^* много меньшим необходимой кумуляции для «зажигания» термоядерных реакций, позволяет сделать вывод, что для двумерной мишени рассматриваемого типа режим течения БСС возможен только в согласованном случае.
12. В работе частное решение рассматриваемой задачи (двойная волна Сучкова) применено к математическому описанию двух способов газодинамического воздействия на мишень, используемых в физических экспериментах по УТС. В обоих случаях описание течения сжатия строилось на основе интерпретации: поршень, задаваемый уравнением $\varphi(x_p(t), y_p(t)) = 0$, движется по фоновому течению, задаваемому решением Сучкова В. А., когда $-t_0 \leq t \leq 0$. Закон движения поршня $x_p(t), y_p(t)$ восстанавливался из краевого условия соответствующей ХЗК стандартного вида.
13. При сжатии мишени непроницаемым поршнем происходит переток газа из области течения ЦВ в область течения ДВ. Происходит выгибание поверхности поршня DE в направлении косой стенки. В угле между непроницаемым поршнем и косой стенкой наблюдается область повышенного давления – локальная кумуляция газа, где сосредоточено около 10 % массы сжимаемого газа. Степень локальной кумуляции зависит от начальной конфигурации поршня в области ДВ. Чем острее угол наклона поршня к косой стенке, тем степень кумуляции выше.
14. При сжатии мишени проницаемым поршнем поверхность поршня DE в области ДВ всегда перпендикулярна косой стенке, давление на нем всегда постоянно, не зависит от координат x, y и равно давлению на поршне

CD , сжимающего газ в области ЦВ. Нет областей с большой кумуляцией, газ перетекающий из области ЦВ в область ДВ, частично покидает область сжатия через проницаемую стенку поршня.

15. Для обоих вариантов газодинамического воздействия на мишень построена зависимость мощности энерговложения от времени $A_r(t)$. При этом для варианта воздействия на мишень заданным давлением максимальное значение A_r^{max} меньше, чем для воздействия непроницаемым поршнем приблизительно в пять раз. Показано, что сжатие мишени непроницаемым поршнем энергетически более выгодно приблизительно на порядок.

Перспективы дальнейшей разработки темы

Дальнейшая разработка данной темы предполагает решение задачи об истечении газа из трехмерного исходного объема при $t > 0$ и его сжатие при $t < 0$ в общем несогласованном случае.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Баутину С.П. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$$\left. \begin{matrix} c_n \\ u_n \\ v_n \end{matrix} \right\} \begin{matrix} n\text{-коэффициенты разложения вектора } \mathbf{U} = (c, u, v)^T \text{ в ряд по сте-} \\ \text{пеням } \vartheta \end{matrix}$$

c скорость звука газа

u горизонтальная компонента скорости газа

v вертикальная компонента скорости газа

$$\left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{физические автомодельные переменные } \xi = x/t, \eta = y/t \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \vartheta \\ \zeta \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{специальные переменные } \vartheta = \eta - f(\xi), \zeta = \eta - \xi \operatorname{tg} \alpha \end{matrix}$$

$f(\xi)$ функция, задающая звуковую характеристику AD

α угол наклона косой стенки

ρ плотность газа

S энтропия

γ показатель политропы газа, $\gamma = 1 + \frac{R}{c_v}$, отн. ед.

R универсальная газовая постоянная, $R = 8,31$ Дж/(моль · К)

c_v молярная теплоемкость газа

при постоянном объеме, Дж/(моль · К)

БСС безударное сильное сжатие

ВАК Высшая аттестационная комиссия

ГУ граничные условия

ДВ двойная волна

ДУ дифференциальное уравнение

ЛТС лазерный термоядерный синтез

НКЗ начально-краевая задача

НУ начальные условия

РФЯЦ-ВНИИЭФ Российский федеральный ядерный центр «Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики»

РФЯЦ-ВНИИТФ Российский федеральный ядерный центр «Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. акад. Е.И. Забабахина»

СЛАУ система линейных алгебраических уравнений

СОДУ система обыкновенных дифференциальных уравнений

СУГД система уравнений газовой динамики

УВ ударная волна

УРС уравнение состояния

УТС управляемый термоядерный синтез

ХЗК характеристическая задача Коши

ЦВ центрированная волна

ЭВМ электронно-вычислительная машина

LLNL Lawrence Livermore National Laboratory, California, USA

NIF The National Ignition Facility

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заявка 2010113417/07 от 06.04.2010 Рос. федерация, МПК G21B 1/19 (2006.01). Мишень для получения термоядерных реакций [Текст] / С. П. Баутин (РФ) ; заявитель Баутин Сергей Петрович. — № 2010113417/07 ; заявл. 06.04.2010 ; опубл. 27.10.2011, Бюл. № 30 ; приоритет 06.04.2010, 2432627 (США). — 8 с. : ил.
2. Накколс, Д. Осуществимость инерциально-термоядерного синтеза [Текст] / Д. Накколс // Успехи физ. наук. — 1984. — Т. 143, № 3. — С. 467—482.
3. Laser Compression of Matter to Super-High Densities: Thermonuclear (CTR) Applications [Text] / J. Nuckolls [et al.] // Nature. — 1972. — Sept. — Vol. 239, no. 5368. — P. 139—142.
4. Campbell, M. The National Ignition Facility - Applications for inertial fusion energy and high-energy-density science [Text] / M. Campbell, W. Hogan // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 1999. — Dec. — Vol. 41, 12B. — B39.
5. Capsule design for the National Ignition Facility [Text] / T. DITTRICH [et al.] // Laser and Particle Beams - LASER PART BEAM. — 1999. — Apr. — Vol. 17, no. 2. — P. 217—224.
6. Late-time simulation of National Ignition Facility hohlraums [Text] / D. Eder [et al.] // Nuclear Fusion. — 2004. — May. — Vol. 44, no. 7. — P. 709—719.
7. The National Ignition Facility Neutron Imaging System [Text] / M. Wilke [et al.] // The Review of scientific instruments. — 2008. — Nov. — Vol. 79. — 10E529.
8. Plastic ablator ignition capsule design for the National Ignition Facility [Text] / D. Clark [et al.] // Physics of Plasmas. — 2010. — May. — Vol. 17, no. 5. — P. 052703—052703.
9. Large Optics for the National Ignition Facility [Text] / P. Baisden [et al.] // Fusion Science and Technology. — 2016. — Feb. — Vol. 69, no. 1. — P. 295—351.
10. Description of the NIF Laser [Text] / M. Spaeth [et al.] // Fusion Science and Technology. — 2016. — Feb. — Vol. 69, no. 1. — P. 25—145.

11. *Bernstein, L.* Reactions on Excited States using the National Ignition Facility. Nuclear Astrophysics using NIF [Text] / L. Bernstein // Preprint No. UCRL PRES-233342 (Lawrence Livermore Nat. Lab.) — 2007.
12. *Гуськов, С. Ю.* Анализ экспериментов по прямому сжатию капсул на лазерной установке «ИСКРА-5» [Текст] / С. Ю. Гуськов, З. Н. Демченко, Н. В. Жидков // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2010. — Т. 138, № 3. — С. 524—543.
13. *Анненков, В. И.* Новые возможности установки «ИСКРА-5» [Текст] / В. И. Анненков, В. Г. Безуглов, А. В. Бессараб // Квантовая электроника. — 2006. — Т. 36, № 6. — С. 508—510.
14. *Кравченко, А. Г.* Методика измерений разновременности прихода лазерных пучков на мишень по эмиссии рентгеновского излучения из мишени на установке «ИСКРА-5» [Текст] / А. Г. Кравченко, В. П. Лазарчук, А. Н. Мунтян // Приборы и техника эксперимента. — 2008. — № 2. — С. 86—88.
15. *Илькаев, Р. И.* Исследование проблем термоядерного синтеза на мощных лазерных установках [Текст] / Р. И. Илькаев, С. Г. Гаранин // Вестник Российской академии наук. — 2006. — Т. 76, № 6. — С. 11—21.
16. *Карлыханов, Н. Г.* Результаты одномерных расчетов по выбору мишени с непрямым воздействием для зажигания на лазерной установке «ИСКРА-6» [Текст] / Н. Г. Карлыханов, В. А. Лыков, М. Н. Чижков // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2004. — Т. 79, № 1. — С. 30—33.
17. *Гришина, И. А.* Успехи фундаментальных и прикладных исследований по физике плазмы и УТС в России в 2012 году [Текст] / И. А. Гришина, В. А. Иванов, Л. М. Коврижных // Физика плазмы. — 2014. — Т. 40, № 2. — С. 200.
18. *Шибаршов, Л. И.* Физика мишеней инерциального термоядерного синтеза [Текст] / Л. И. Шибаршов. — Снежинск : Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2014. — 176 с.
19. Achievement of Target Gain Larger than Unity in an Inertial Fusion Experiment [Text] / H. Abu-Shawareb [et al.] // Physical Review Letters. — 2024. — Feb. — Vol. 132, no. 6. — P. 065102.

20. *Koonin, S. E.* Review of the Department of Energy's Inertial Confinement Fusion Program: The National Ignition Facility [Text] / S. E. Koonin. — Washington, D.C. : National Academies Press, 1997. — 64 p.
21. *Забабахин, Е. И.* Явления неограниченной кумуляции [Текст] / Е. И. Забабахин, И. Е. Забабахин. — Москва : Наука, 1988. — 177 с.
22. *Забабахин, И. Е.* Явления неограниченной кумуляции [Текст] / И. Е. Забабахин // Механика в СССР за 50 лет. — 1970. — Т. 2. — С. 313—342.
23. *Риман, Б.* О распаде плоских волн конечной амплитуды [Текст] / Б. Риман. — М–Л. : ОГИЗ, 1948. — С. 376—395.
24. *Riemann, G. F. B.* Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite [Text] / G. F. B. Riemann // Abhandl. Königl. Ges. Wiss. — Göttingen, 1860. — P. 8.
25. *Hugoniot, P. H.* Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits [Text] / P. H. Hugoniot // Journ. de l'Ecole Polytechnique. — 1887, 1889. — No. 57, 58. — P. 3—97, 1—125.
26. *Rayleigh, L.* Aerial Plane Waves of Finite Amplitude [Text] / L. Rayleigh // Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1910. — Jan. — Vol. 84, no. 570. — P. 247—284.
27. *Курант, Р.* Уравнения с частными производными [Текст] / Р. Курант. — Москва : Мир, 1964. — 830 с.
28. *Станюкович, К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды [Текст] / К. П. Станюкович. — Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. — 804 с.
29. *Овсянников, Л. В.* Лекции по основам газовой динамики [Текст] / Л. В. Овсянников. — 2-е изд. — Москва : Ин-т компьютер. исслед., 2003. — 335 с.
30. *Баутин, С. П.* Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа [Текст]. Т. 2 / С. П. Баутин. — Новосибирск : НИИ МИОО НГУ, 1996. — С. 13—22.
31. *Долголева, Г. В.* Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия: учебное пособие [Текст] / Г. В. Долголева, А. В. Забродин. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 72 с.

32. *Баутин, С. П.* Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа [Текст] / С. П. Баутин. — Новосибирск : Наука, 1997. — 160 с.
33. *Седов, Л.* Методы подобия и размерности в механике [Текст] / Л. Седов. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
34. *Забабахин, И. Е.* Сферическая центрированная волна сжатия [Текст] / И. Е. Забабахин, В. А. Симоненко // Прикл. математика и механика. — 1978. — Т. 42. — С. 573—576.
35. *Каждан, Я. М.* Сферический разлет газа к центру. (Препр. № 2) [Текст] / Я. М. Каждан. — М. : Ин-т прикл. математики РАН, 1969.
36. *Каждан, Я. М.* К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня [Текст] / Я. М. Каждан // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1977. — № 1. — С. 23—30.
37. *Каджан, Я. М.* Адиабатическое сжатие газа под действием цилиндрического поршня. (Препр. № 56) [Текст] / Я. М. Каджан. — М. : Ин-т прикл. математики РАН, 1980.
38. *Крайко, А.* Автомодельное сжатие идеального газа плоским, цилиндрическим или сферическим поршнем [Текст] / А. Крайко, Н. Тилляева // Теплофизика высоких температур. — 1998. — Т. 36, № 1. — С. 120—128.
39. *Сучков, В. А.* Истечение в вакуум на косой стенке [Текст] / В. А. Сучков // ПММ. — 1963. — Т. 27, № 4. — С. 739—740.
40. *Сидоров, А. Ф.* Оценки предельных степеней кумуляции энергии при безударном сжатии газа [Текст] / А. Ф. Сидоров // Докл. АН. — 1993. — Т. 329, № 4. — С. 444—448.
41. *Сидоров, А. Ф.* Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном сжатии газа [Текст] / А. Ф. Сидоров // Докл. АН. — 1991. — Т. 318, № 3. — С. 548—552.
42. *Сидоров, А. Ф.* Безударное сжатие баротропного газа [Текст] / А. Ф. Сидоров // Прикл. математика и механика. — 1991. — Т. 55. — С. 769—779.
43. *Сидоров, А. Ф.* Метод решения некоторых краевых задач для нелинейных уравнений гиперболического типа и распространение слабых ударных волн [Текст] / А. Ф. Сидоров // Прикл. математика и механика. — 1972. — Т. 36. — С. 426—434.

44. *Сидоров, А. Ф.* Новые режимы неограниченного безударного сжатия газа [Текст] / А. Ф. Сидоров // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 199—202.
45. *Сидоров, А. Ф.* Процессы безударного конического сжатия и разлета газа [Текст] / А. Ф. Сидоров, О. Б. Хайруллина // Прикл. математика и механика. — 1994. — Т. 58. — С. 81—92.
46. *Баутин, С. П.* Математическое моделирование сильного сжатия газа [Текст] / С. П. Баутин. — Новосибирск : Наука, 2007. — 312 с.
47. *Забабахин, Е. И.* Сходящаяся ударная волна в теплопроводном газе [Текст] / Е. И. Забабахин, В. А. Симоненко // Прикл. математика и механика. — 1965. — Т. 29. — С. 334—336.
48. *Баутин, С. П.* Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум [Текст] / С. П. Баутин, С. Л. Дерябин. — Новосибирск : Наука, 2005. — 390 с.
49. *Сидоров, А. Ф.* Об оптимальном безударном сжатии газовых слоев [Текст] / А. Ф. Сидоров // Докл. АН. — 1990. — Т. 313, № 2. — С. 283—287.
50. *Баутин, С. П.* Характеристическая задачи Коши и ее приложения в газовой динамике [Текст] / С. П. Баутин. — Новосибирск : Наука, 2009. — 368 с.
51. *Анучин, М. Г.* Влияние теплопроводности на неограниченное безударное сжатие плоского газового слоя [Текст] / М. Г. Анучин // Прикл. механика и техн. физика. — 1998. — Т. 39, № 4. — С. 25—32.
52. *Баутин, С. П.* Аналитические решения задачи о движении поршня [Текст] / С. П. Баутин // Числ. методы механики сплошной среды. — 1973. — Т. 4, № 1. — С. 3—15.
53. *Баутин, С. П.* Приближенный метод расчета одномерных течений газа, вызванных немонотонным движением поршня [Текст] / С. П. Баутин // Прикл. математика и механика. — 1976. — Т. 40, № 6. — С. 1058—1064.
54. *Баутин, С. П.* Схлопывание одномерной полости [Текст] / С. П. Баутин // Прикл. математика и механика. — 1982. — Т. 46, № 1. — С. 50—59.
55. *Баутин, С. П.* Одномерное истечение газа в вакуум [Текст] / С. П. Баутин // Числ. методы механики сплошной среды. — 1983. — Т. 14, № 4. — С. 3—20.
56. *Баутин, С. П.* Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа [Текст] / С. П. Баутин. — Екатеринбург : Изд. центр УГГГА, 1996. — 168 с.

57. *Баутин, С. П.* Безударное сверхсжатие идеального газа [Текст] / С. П. Баутин // Вычисл. технологии. — 1998. — Т. 3, № 6. — С. 3—8.
58. *Баутин, С. П.* Асимптотические законы безударного сильного сжатия квазиодномерных слоев газа [Текст] / С. П. Баутин // Прикл. математика и механика. — 1999. — Т. 63, № 3. — С. 415—423.
59. *Баутин, С. П.* Математическое исследование безударного сжатия газа [Текст] / С. П. Баутин // Успехи механики. — 2002. — Т. 1, № 2. — С. 3—36.
60. *Баутин, С. П.* Математическое описание безударного сильного сжатия одномерных объемов политропного газа [Текст] / С. П. Баутин // Вычисл. технологии. — 2004. — Т. 9, № 1. — С. 26—33.
61. *Баутин, С. П.* Истечение идеального газа в вакуум [Текст] / С. П. Баутин, С. Л. Дерябин // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 273, № 4. — С. 817—820.
62. *Баутин, С. П.* Задача об истечении в вакуум нормального газа [Текст] / С. П. Баутин, С. Л. Дерябин // Динамика сплошной среды. — 1993. — № 107. — С. 26—38.
63. *Долголева, Г. В.* Методика расчета движения двухтемпературного излучающего газа (СНД) [Текст] / Г. В. Долголева // Вопр. атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. — 1983. — 2 (13). — С. 29—33.
64. *Долголева, Г. В.* Воспроизведение безударного сжатия в оболочечных конструкциях микромишеней. (Препр. № 53) [Текст] / Г. В. Долголева, А. В. Забродин. — М. : Ин-т прикл. математики РАН, 1999.
65. *Долголева, Г. В.* Построение последовательности асимптотик для определения величины кумулирующей энергии при сжатии слоистой системы оболочек [Текст] / Г. В. Долголева, А. В. Забродин // Вопр. атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. — 1992. — № 1. — С. 3—10.
66. *Долголева, Г. В.* Построение последовательности приближенных решений для определения величины кумулирующей энергии при сжатии слоистой системы оболочек [Текст] / Г. В. Долголева, А. В. Забродин // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1993. — № 2. — С. 116—123.

67. *Долголева, Г. В.* Поэтапное построение решения в задаче схождения слоистой системы оболочек. Определение величины кумулирующей энергии [Текст] / Г. В. Долголева, А. В. Забродин // *Вопр. атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* — 1993. — № 4. — С. 8—14.
68. *Долголева, Г. В.* Построение решения в задаче движения слоистых оболочек [Текст] / Г. В. Долголева, А. В. Забродин // *Вопр. атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* — 1996. — № 3. — С. 27—34.
69. *Долголева, Г. В.* Построение решения в задаче движения слоистых оболочек [Текст] / Г. В. Долголева, А. В. Забродин // *Пробл. механики сплошной среды.* — 1996. — С. 160—169.
70. *Долголева, Г. В.* Разработка термоядерных мишеней на основе реализации концепции безударного сжатия [Текст] / Г. В. Долголева, А. В. Забродин // *Аэромеханика и газовая динамика.* — 2002. — № 2. — С. 48—54.
71. *Баутин, С. П.* Численное решение задачи о сжатии газа из покоя в покой [Текст] / С. П. Баутин, Ю. В. Николаев // *Вычислительные технологии.* — 2020. — Т. 25, № 5. — С. 55—65.
72. *Баутин, С. П.* Численное решение задачи о сжатии газа при заданном законе воздействия [Текст] / С. П. Баутин, Ю. В. Николаев // *Вычислительные технологии.* — 2021. — Т. 26, № 6. — С. 20—32.
73. *Баутин, С. П.* Алгоритм построения произвольной сетки численного решения задачи безударного сжатия газа [Текст] / С. П. Баутин, Ю. В. Николаев // *Математические структуры и моделирование.* — 2021. — 2(58). — С. 53—64.
74. *Баутин, С. П.* Об одной конструкции мишеней для управляемого термоядерного синтеза [Текст] / С. П. Баутин // *Забабахинские научные чтения: сборник материалов X Международной конференции.* — Снежинск : издательство РФЯЦ–ВНИИТФ, 2010. — С. 30—31.
75. *Брушлинский, К. В.* Неустойчивость сходящейся сферической ударной волны [Текст] / К. В. Брушлинский // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* — 1982. — Т. 2, № 6. — С. 1468—1479.
76. *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1977.

77. *Баутин, С. П.* Представление решений системы уравнений Навье–Стокса в окрестности контактной характеристики [Текст] / С. П. Баутин // Прикл. математика и механика. — 1987. — Т. 51, № 4. — С. 574—584.
78. *Баутин, С. П.* Представление решений системы уравнений Навье–Стокса с помощью характеристических рядов [Текст] / С. П. Баутин // Динамика сплошной среды. — 1987. — № 83. — С. 11—31.
79. *Баутин, С. П.* Характеристические поверхности в течениях газа [Текст] / С. П. Баутин // Прикл. математика и механика. — 2001. — Т. 65, № 5. — С. 862—875.
80. *Двайт, Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы [Текст] / Г. Б. Двайт ; под ред. К. А. Семендяев. — СПб. : Лань, 2005.
81. *Сучков, В. А.* Двойные волны плоского потенциального течения политропного газа [Текст] / В. А. Сучков // Тр. МИАН СССР. — 1966. — Т. 74. — С. 156—167.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В ИЗДАНИЯХ ИЗ СПИСКА ВАК РФ

82. *Bautin, S. P.* Self-similar solutions of the problem of polytropic gas flow along an oblique wall into vacuum [Text] / S. P. Bautin, E. I. Ponkin // J. Appl. Mech. Tech. Phys. — 2021. — Vol. 62, no. 1. — P. 27—37.
83. *Понькин, Е. И.* Математическое описание двух способов газодинамического воздействия на мишень с использованием решения Сучкова [Текст] / Е. И. Понькин // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. — 2022. — № 2. — С. 27—39.
84. *Баутин, С. П.* Некоторые рекомендации по мишеням для лазерного термоядерного синтеза [Текст] / С. П. Баутин, Ю. В. Николаев, Е. И. Понькин // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. — 2022. — Т. 11, № 1. — С. 44—50.

85. *Ponkin, E. I.* The characteristic Cauchy problem of standard form for describing the outflow of a polytropic gas into vacuum from an oblique wall [Text] / E. I. Ponkin // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. — 2022. — June. — Vol. 26, no. 2. — P. 322—338.
86. *Ponkin, E. I.* Construction of a self-similar solution to the system of gas dynamics equations describing the outflow of polytropic gas into vacuum from an inclined wall in the inconsistent case [Text] / E. I. Ponkin // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 27, no. 2. — P. 336—356.

ЗАРЕГИСТРИРОВАННЫЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

87. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Истечение/сжатие газа на косой стенке. Визуализация решения В.А. Сучкова при $-1 < t < 1$ [Текст] / Е. Понькин ; НИЯУ МИФИ. — № 2024660359 ; заявл. 19.04.2024 ; опубл. 06.05.2024, 2024618608 (Рос. Федерация).
88. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Построение поверхности скорости звука в квазисогласованном случае при $-1 < t < 1$ [Текст] / Е. Понькин ; НИЯУ МИФИ. — № 2024619830 ; заявл. 19.04.2024 ; опубл. 27.04.2024, 2024618786 (Рос. Федерация).
89. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Расчет газодинамических параметров двойной волны Сучкова в согласованном случае при сжатии призматического объема газа [Текст] / Е. Понькин ; НИЯУ МИФИ. — № 2021660586 ; заявл. 18.06.2021 ; опубл. 29.06.2021, 2021619544 (Рос. Федерация).

В СБОРНИКАХ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ

90. *Баутин, С. П.* Рекомендации по мишеням для лазерного термоядерного синтеза [Текст] / С. П. Баутин, Ю. В. Николаев, Е. И. Понькин // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2022 по направлению «Инновационные ядерные технологии». — 2022.
91. *Баутин, С. П.* Предложения по мишеням для лазерного термоядерного синтеза [Текст] / С. П. Баутин, Ю. В. Николаев, Е. И. Понькин // Лазерные, плазменные исследования и технологии. ЛаПлаз-2022. Сборник научных трудов VIII международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения лауреата Нобелевской премии по физике Басова Николая Геннадиевича. — 2022.

92. *Баутин, С. П.* Конкретные конфигурации сильного сжатия газа и некоторые рекомендации по мишеням для ЛТС [Текст] / С. П. Баутин, Ю. В. Николаев, Е. И. Понькин // Забабахинские научные чтения: сборник материалов XVI Международной конференции. — 2023.
93. *Понькин, Е. И.* Газодинамические характеристики двойной волны Сучкова, описывающей сжатие газа [Текст] / Е. И. Понькин // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2020 по направлению «Инновационные ядерные технологии». — 2020.
94. *Понькин, Е. И.* Автомодельные решения для задачи истечения политропного газа с косой стенки в вакуум [Текст] / Е. И. Понькин // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2019 по направлению «Инновационные ядерные технологии». — 2019.
95. *Понькин, Е. И.* Описание истечения политропного газа с косой стенки в вакуум в пространстве физических переменных [Текст] / Е. И. Понькин // Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2020. — 2020.
96. *Баутин, С. П.* Автомодельные решения задачи об истечении политропного газа в вакуум с косой стенки [Текст] / С. П. Баутин, Е. И. Понькин // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике. Тезисы докладов IX международной конференции. — 2020.
97. *Понькин, Е. И.* Использование двумерных автомодельных течений газа [Текст] / Е. И. Понькин, С. П. Баутин // Забабахинские научные чтения: сборник материалов XV Международной конференции. — 2021.
98. *Понькин, Е. И.* Решение транспортного уравнения в задаче об истечении газа на косой стенке [Текст] / Е. И. Понькин // Забабахинские научные чтения: сборник материалов XVI Международной конференции. — 2023.
99. *Понькин, Е. И.* Построение решения транспортного уравнения в задаче об описании истечения политропного газа на косой стенке [Текст] / Е. И. Понькин // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике. Сборник тезисов докладов. В 4-х томах. — Санкт-Петербург, 2023. — С. 445.
100. *Понькин, Е. И.* Построение автомодельного решения системы уравнений газовой динамики, описывающей истечение политропного газа в вакуум с косой стенки в несогласованном случае [Текст] / Е. И. Понькин // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2023 по направлению «Инновационные ядерные тех-

- нологии». Сборник научных трудов всероссийской научно-практической конференции. — Москва—Снежинск, 2023. — С. 108—110.
101. *Понькин, Е. И.* Постановка характеристической задачи Коши стандартного вида для случая истечения политропного газа с косой стенки [Текст] / Е. И. Понькин // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2022 по направлению «Инновационные ядерные технологии». Сборник научных трудов всероссийской научно-практической конференции. — Снежинск, 2022. — С. 147—148.
 102. *Понькин, Е. И.* Характеристическая задача Коши стандартного вида для описания истечения политропного газа в вакуум с косой стенки [Текст] / Е. И. Понькин // Пермские гидродинамические научные чтения. Сборник статей по материалам VIII Всероссийской конференции, посвященной памяти профессоров Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова. — 2022.
 103. *Понькин, Е. И.* Построение уравнения для нахождения коэффициента ряда C_n решения задачи об истечении газа в вакуум на косой стенке [Текст] / Е. И. Понькин // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2024 по направлению «Инновационные ядерные технологии». Сборник научных трудов всероссийской научно-практической конференции. — Москва, 2024. — С. 194—196.
 104. *Понькин, Е. И.* Получение n -ых коэффициентов ряда по c_n, u_n, v_n , степеням ϑ для искомых функций $c(\xi, \vartheta), u(\xi, \vartheta), v(\xi, \vartheta)$ в задаче об истечении газа в вакуум на косой стенке [Текст] / Е. И. Понькин // X Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии. ЛаПлаз-2024». Сборник научных трудов. — М. : НИЯУ МИФИ, 2024. — С. 124—125.
 105. *Понькин, Е. И.* ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ СЖАТИЯ В КВАЗИСОГЛАСОВАННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В РЕЗУЛЬТАТЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НЕПРОНИЦАЕМОМ ПОРШНЕМ НА ДВУМЕРНУЮ МИШЕНЬ [Текст] / Е. И. Понькин // Забабахинские научные чтения: сборник материалов XVII Международной конференции. — Снежинск, 2025.
 106. *Понькин, Е. И.* ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СВОЙСТВ ТЕЧЕНИЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧИ ОБ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА В ВАКУУМ НА КОСОЙ СТЕНКЕ [Текст] / Е. И. Понькин // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2025 по направлению «Инновационные ядерные технологии».

- Сборник научных трудов всероссийской научно-практической конференции. — Снежинск, 2025. — С. 192—193.
107. *Понькин, Е. И.* Исследование свойств течения разряда типа двойной волны при разлете газа в вакуум на косой стенке в несогласованном случае [Текст] / Е. И. Понькин // XVIII Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций». Сборник материалов. — Екатеринбург : ИМАШ УрО РАН, 2024. — С. 54.
108. *Понькин, Е. И.* Построение поверхности скорости звука в задаче о сжатии специального призматического объема [Текст] / Е. И. Понькин // Международный симпозиум «Неравновесные процессы в сплошных средах 2024». Сборник статей по материалам Международного симпозиума. — Пермь : ПГНИУ, 2024. — С. 54—57.
109. *Баутин, С. П.* Газодинамические характеристики двойной волны Сучкова, дающие описание различных способов воздействия на мишень [Текст] / С. П. Баутин, Е. И. Понькин // Лазерные, плазменные исследования и технологии – ЛАПЛАЗ-2021. Сборник научных трудов VII международной конференции. — 2021.

СПИСОК РИСУНКОВ

1.1	Установки для реализации ЛТС: (а) NIF в LLNL (California, USA), (б) установка «Искра-5» в РФЯЦ–ВНИИЭФ (г. Саров, Россия)	13
1.2	Разлет оболочки DT-мишени в результате воздействия лазерного излучения с оболочкой мишени в инерциальном термоядерном синтезе	13
1.3	Конструкция хольраума и DT-мишени в эксперименте LLNL на установке NIF по материалам [19]. Слева: схематическое изображение мишени и конфигурации лазера, включая хольраум. Внизу справа: конфигурация капсулы из углерода высокой плотности и топлива на основе дейтерия и трития. Вверху справа: зависимость общей мощности лазера и температуры излучения T_r от времени. Для эксперимента N221204 (красная линия) по сравнению с экспериментом N210808 (черная линия) толщина капсулы из углерода высокой плотности была увеличена на 7 %, а энергия лазера – на 7,9 %	14
1.4	Зависимость коэффициента усиления мишени от календарной даты (по материалам [19]). По горизонтали указано начало каждого года. Цвет узких полос коэффициента усиления мишени соответствует различным схемам имплозии, а пунктирная горизонтальная линия соответствует коэффициенту усиления мишени, равному 1, в соответствии с критериями воспламенения Национальной академии наук США [20]	15
1.5	График адиабаты Гюгонио (а). Серия последовательных ударных волн для сжатия DT-мишени (б)	16
1.6	Вид DT-мишени в момент сжатия рентгеновским излучением	16
1.7	Цилиндрическая мишень для реализации УТС, когда газ сжимается движением непроницаемого поршня (воздействие на мишень пучка ионов)	23
1.8	Возможные конфигурации капсул	24
1.9	Поведение оболочки в процессе сжатия капсулы	25
1.10	Капсула с сердечником	25
1.11	Область построения течений в задаче сжатия «из покоя в покой»	26

1.12	Поведение плотности на сжимающем поршне и распределение плотности в финальный момент сжатия «из покоя в покой» (а). Зависимость от времени работы, производимой сжимающим поршнем (б)	27
2.1	Конфигурация потока в момент $t = 0$ (а) и в момент $t > 0$ (б)	29
2.2	Графики функции $f(\xi)$ для различных значений α	48
3.1	График функции $c(t, x, y)$ при $t < 0$ (а) и $t > 0$ (б)	86
3.2	График функции $u(t, x, y)$ при $t < 0$ (а) и $t > 0$ (б)	87
3.3	График функции $v(t, x, y)$ при $t < 0$ (а) и при $t > 0$ (б)	88
3.4	Конфигурация течения в области ДВ при $\gamma = 5/3$ (а), $\gamma = 2$ (б), $\gamma = 5/2$ (в) и $\alpha = \pi/6, \alpha_s, 5\pi/12$	96
3.5	Графики функций $c(\xi, \eta)$ (а), $u(\xi, \eta)$ (б), $v(\xi, \eta)$ (в) в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете водорода в вакуум на косой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = \pi/6 < \alpha_s$	98
3.6	Графики функций $c(\xi, \eta)$ (а), $u(\xi, \eta)$ (б), $v(\xi, \eta)$ (в) в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете водорода в вакуум на косой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = 5\pi/12 > \alpha_s$	98
3.7	Графики функций $c(\xi, \eta)$ (а), $u(\xi, \eta)$ (б), $v(\xi, \eta)$ (в) в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете газа с $\gamma = 2$ в вакуум на косой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = \pi/6 < \alpha_s$	99
3.8	Графики функций $c(\xi, \eta)$ (а), $u(\xi, \eta)$ (б), $v(\xi, \eta)$ (в) в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете газа с $\gamma = 2$ в вакуум на косой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = 5\pi/12 > \alpha_s$	99
3.9	Графики функций $c(\xi, \eta)$ (а), $u(\xi, \eta)$ (б), $v(\xi, \eta)$ (в) в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете газа с $\gamma = 5/2$ в вакуум на косой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = \pi/6 < \alpha_s$	100
3.10	Графики функций $c(\xi, \eta)$ (а), $u(\xi, \eta)$ (б), $v(\xi, \eta)$ (в) в области ДВ в квазисогласованном приближении при разлете газа с $\gamma = 5/2$ в вакуум на косой стенке, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = 5\pi/12 > \alpha_s$	100
3.11	График функции $M_1(c_0)$ при $1 \leq c_0 \leq 5$	103
3.12	Значение c_0^* в зависимости от значений γ и α	104

3.13	Поверхность функции $c(x, y, t_* < 0)$ в области ДВ в квазисогласованном приближении при $\gamma = 5/3$ и $\alpha = \pi/6 < \alpha_s$ (а), $\alpha = \pi/3 > \alpha_s$ (б)	105
4.1	(а) Начальная конфигурация в момент $t_0 = -1$. (б) Конфигурация течения в момент $t_0 < t < 0$	109
4.2	Пространственно-временное распределение функции $c(t, x, y)$ в призматическом объеме при его сжатии непроницаемым поршнем CDE в момент времени $t_1 = -0,9$ (а), $t_2 = -0,5$ (б) и $t_3 = -0,1$ (в) . . .	118
4.3	Значение $\delta m(t)$ для интервалов давлений A_p, B_p, C_p в области ДВ (а) и в области ЦВ и ДВ (б). (в) Мощность энерговложения в мишень – $A_r(t)$	119
4.4	Способы задания исходного положения непроницаемого поршня в области ДВ относительно косой стенки в момент времени $t_{0\varepsilon}$: поршень DE перпендикулярен косой стенке (а), является продолжением линии CD (б), наклонен под острым углом к косой стенке (в)	121
4.5	График функции $p(t)$ в моменты времени $t_1 = -0,9, t_2 = -0,5$ и $t_3 = -0,1$ вдоль поршня CDE в области ЦВ и ДВ для различного исходного положения поршня CDE в момент времени $t_{0\varepsilon}$: поршень DE перпендикулярен косой стенке (а), является продолжением линии CD (б), наклонен под острым углом к косой стенке (в)	123
4.6	Распределение скорости звука $c(x, y, t)$ в призматическом объеме при его сжатии поршнем CDE (поршень DE – проницаем) в момент времени $t_1 = -0,9$ (а), $t_2 = -0,5$ (б) и $t_3 = -0,1$ (в)	128
4.7	Распределение давления газа вдоль поршня CDE в области ЦВ и ДВ в моменты времени $t_1 = -0,9, t_2 = -0,5, t_3 = -0,1$	129
4.8	Значение $\delta m(t)$ для интервалов давлений A_p, B_p, C_p в области ДВ (а) и области ЦВ и ДВ (б). (в) Мощность энерговложения в мишень – $A_r(t)$	130
4.9	Рекомендуемая мишень для реализации БСС при УТС	132

СПИСОК ТАБЛИЦ

1	Параметры кумуляции газа для двух вариантов воздействия на мишень при $t = -0,1$	131
---	--	-----

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2021660586

«Расчет газодинамических параметров двойной волны
Сучкова в согласованном случае при сжатии
призматического объема газа»

Правообладатель: *федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ» (НИЯУ МИФИ) (RU)*

Автор(ы): *Понькин Евгений Игоревич (RU)*

Заявка № 2021619544
Дата поступления 18 июня 2021 г.
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ 29 июня 2021 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности
Г.П. Излиев



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2024660359

«Истечение/сжатие газа на косой стенке. Визуализация
решения В.А. Сучкова при $-1 < t < 1$.»

Правообладатель: *федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ» (RU)*

Автор(ы): *Понькин Евгений Игоревич (RU)*

Заявка № 2024618608
Дата поступления 19 апреля 2024 г.
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ 06 мая 2024 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности
Ю.С. Зубов



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2024619830

«Построение поверхности скорости звука в
квазисогласованном случае при $-1 < t < 1$.»

Правообладатель: *федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ» (RU)*

Автор(ы): *Понькин Евгений Игоревич (RU)*

Заявка № 2024618786
Дата поступления 19 апреля 2024 г.
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ 27 апреля 2024 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности
Ю.С. Зубов

