Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»
Институт энергетики и перспективных технологий

На правах рукописи

КОСОВ ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ УСТАЛОСТИ И РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН НА ОСНОВЕ СВЯЗАННЫХ КОНТИНУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ И ФАЗОВЫХ ПОЛЕЙ РАЗРУШЕНИЙ

Специальность 1.1.8 – механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Шлянников Валерий Николаевич

КАЗАНЬ – 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы исследования

В инженерных приложениях понимание механизмов повреждения твердых тел имеет решающее значение для безопасной эксплуатации элементов конструкций, так как повреждения на микроскопическом уровне в виде микропор, трещин могут привести к потере несущей способности материала. Для того, чтобы воспроизвести подобные механизмы на стадии проектирования изделия, требуются соответствующие модели накопления и развития повреждений. Использование данных моделей в методе конечных элементов может быть полезным инструментом для проектирования и эксплуатации элементов конструкции.

Актуальной является задача разработки методов комплексного расчетно-экспериментального исследования механизмов и закономерностей появления и развития трещин в материалах и элементах конструкций на основе континуальных подходов механики повреждений и метода фазовых полей разрушения. Континуальные модели механики повреждений предоставляют возможность описывать эволюцию повреждений в материалах, учитывая их влияние на макроскопическом уровне. Методы фазовых полей разрушения позволяют описать процесс образования и развития трещин в материалах и элементах конструкций.

Цель и задачи работы

Целью диссертационной работы является разработка и обоснование расчетно-экспериментальных методов прогнозирования долговечности при малоцикловой усталости и моделирования роста трещин при монотонном и циклическом нагружении на основе фазовых полей разрушения с учетом накопления и развития повреждений.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать расчетно-экспериментальную модель и реализовать алгоритм прогнозирования долговечности при малоцикловой усталости для изотропного и кинематического упрочнения с учетом функций накопления повреждений при сложном напряженном состоянии.

2. Провести экспериментальные исследования при монотонном и циклическом нагружении для определения свойств материала и верификации разработанного алгоритма прогнозирования долговечности с целью установления параметров модели.

3. Разработать и интегрировать метод фазовых полей разрушения в вычислительный комплекс ANSYS для моделирования роста трещины в материалах и элементах конструкции при статическом и циклическом нагружении.

4. Выполнить параметрические исследования развития повреждений на основе метода фазовых полей разрушения для сквозных и поверхностных дефектов в условиях чистых и смешанных мод двухосного нагружения.

5. Разработать метод моделирования доминирующих механизмов разрушения в материале зернистой структуры в терминах фазовых полей разрушения на основе диаграммы Вороного.

6. Представить оценку долговечности и процессов роста трещин в элементе диска паровой турбины с эксплуатационным повреждением.

Научная новизна работы

Научная новизна работы состоит в:

- формировании системы определяющих соотношений и расчетно-экспериментальном обосновании нового метода прогнозирования долговечности на стадиях появления и развития дефектов на основе уравнений изотропного и кинематического упрочнения малоцикловой усталости и фазовых полей разрушения с учетом функции повреждений;
- разработке нового метода моделирования доминирующих механизмов разрушения и накопления и развития повреждений в материале зернистой структуры по моделям фазовых полей разрушения на основе мозаики Вороного;
- численной реализации решения общей системы разрешающих уравнений поврежденности и малоцикловой усталости в вычислительном МКЭ-комплексе ANSYS и расчетно-экспериментальном методе определения управляющих параметров данных уравнений, инвариантных к характеру поведения сплошной среды;
- анализе эффектов смешанных форм деформирования и двухосности нагружения при моделировании развития сквозных и поверхностных дефектов для плоских и трехмерных задач в терминах фазовых полей разрушения при монотонном и циклическом деформировании.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы заключается в формировании и расчетно-экспериментальном обосновании метода прогнозирования долговечности материалов и элементов конструкций при малоцикловой усталости с учетом функций накопления и развития повреждений на стадиях появления и развития дефектов. Теоретическую основу метода на стадии зарождения дефектов составляют объединенные в рамках одной системы уравнений закон накопления повреждений Lemaitre, модели изотропного и кинематического упрочнения Voce и Armstrong-Frederick соответственно. Метод фазовых полей разрушения, отнесенный в настоящей работе к стадии развития дефектов, представляет собой развитие классического энергетического подхода Гриффитса к исследованию и моделированию процессов разрушения материалов на различных масштабных уровнях. Реализованные в вычислительном комплексе модели прогнозирования долговечности материалов при малоцикловой усталости включают в себя сложные механические и физические процессы, обусловленные накоплением повреждений и упрочнением материала под действием циклических нагрузок при сложном напряженном состоянии.

Практическая значимость работы состоит в обосновании оценки несущей способности и долговечности элементов конструкций на основе современных моделей механики сплошной среды. В качестве примера практического приложения проведенных исследований выступают полученные в работе результаты расчетов остаточной долговечности элемента диска паровой турбины с эксплуатационным повреждением. Разработанные и реализованные в вычислительном комплексе новые алгоритмы расчетов и анализа процессов разрушения материалов пригодны для широкого использования и способствуют повышению качества прогнозирования и оптимизации долговечности элементов конструкций.

Методология и методы диссертационного исследования

Экспериментальные исследования выполнены на специализированных испытательных установках с применением высокоточных средств измерения. Численные исследования выполнялись на основе теории упругости, теории течения, метода конечных элементов, а также методов математического и компьютерного моделирования и программирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Разработка метода и численная реализация алгоритма прогнозирования долговечности при малоцикловой усталости состоит в объединении и совместном решении системы уравнений, включающую в себя законы накопления повреждений и изотропного и кинематического упрочнения для стадий появления начальных дефектов. Интегрирование предложенного алгоритма в программный комплекс ANSYS осуществляется с помощью динамически подключаемой библиотеки. Определение констант управляющих уравнений осуществляется расчетно-экспериментальным методом при монотонном и циклическом деформировании;

- Разработка и численная реализация метода фазовых полей разрушения состоит в формулировке полной энергии и составляющих плотности энергии деформации с введением дополнительных параметров масштаба поля и повреждения сплошной среды. Реализация метода фазового поля разрушения дополнена новой степенью свободы при решении трехмерных задач и функциями деградации для условий монотонного и циклического нагружения;

- Результаты численных параметрических исследований в терминах фазовых полей разрушения устанавливают закономерности и эффекты влияния смешанных мод деформирования и сложного напряженного состояния при развитии сквозных и поверхностных дефектов в трехмерных телах при линейном и нелинейном монотонном и циклическом деформировании;

- Численное моделирование доминирующих механизмов разрушения требует рассмотрения зернистой структуры материала с использованием мозаики Вороного. Варианты межзеренного и внутризеренного распространения трещин в методе фазовых полей разрушения реализованы за счет вариации основных механических характеристик зерен и примыкающих к ним границ различных размеров;

- Инновация практического плана состоит в обосновании и верификации развиваемого комплексного подхода в приложении к оценке остаточной долговечности элемента диска паровой турбины с эксплуатационным дефектом. Данный подход объединяет формулировку определяющих уравнений состояния среды с функциями повреждения, численное моделирование на основе МКЭ и фазовых полей разрушения, экспериментальные исследования усталости и роста трещин.

Степень достоверности результатов

Достоверность полученных результатов подтверждается установленным соответствием частных численных и аналитических решений с известными литературными данными других авторов, корректностью математических формулировок, валидацией и верификацией вычислительных моделей по отношению к экспериментальным исследованиям, выполненным в рамках настоящей работы.

Апробация результатов

Результаты работы представлялись и обсуждались на:

- Итоговых научных конференциях ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, 2020-2023 гг.;
- the 23st European Conference of Fracture (ECF23) (Madeira, Portugal June 27 – July 1, 2022)
- the 21st International Conference on Fracture and Damage Mechanics (12-14 September 2023, London, UK)
- International Conference FATIGUE 2024 (Jesus College, Cambridge, UK, 19-21 June 2024)
- XIII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербург, 21-25 августа 2023 г.
- the 6th International Conference on Structural Integrity and Durability (ICSID 2022) (Dubrovnik, Croatia September 20 – 23, 2022)
- the 6th IJFatigue and FFEMS Joint Workshop “Characterisation of Crack/Notch Tip Fields” (Dubrovnik, Croatia April 11 – 13, 2022)
- the 8th International Conference on Crack Paths (10-12 September, 2024, Remini, Italy, 2024)
- International Symposium on Structural Integrity (ISSI2024) (Dongguan, China, 5-8 November 2024)
- the 24st European Conference on Fracture (ECF24) (Zagreb, Croatia, 26-30 August 2024)

Личное участие соискателя в получении результатов, изложенных в диссертации, состояло в разработке методов моделирования накопления и развития повреждений, разработке методов и алгоритмов численных исследований, проведении экспериментальных исследований, выполнении комплекса численных расчетов в рамках механики повреждений сплошной среды, линейной и нелинейной механики разрушения; интерпретации экспериментальных результатов; обобщении результатов, полученных методом конечных элементов, анализе современного состояния исследований по теме работы.

ГЛАВА 1. НОВЫЕ ПОДХОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОВРЕЖДЕНИЙ

1. 1. Постановка задачи прогнозирования долговечности

Принципы безопасности и надежности лежат в основе современных методов проектирования, особенно в ядерной энергетике и авиационно-космической технике. Концепции допускаемой повреждаемости и конструктивной целостности [2, 4, 5, 15, 41, 45, 48, 51] существенно изменили методологию проектирования. В соответствии с ними безопасность конструкции должна обеспечиваться заранее установленными допусками на размеры повреждений и дефектов, появляющихся в процессе изготовления и эксплуатации. При проектировании конструкций используются в основном два подхода. Одним из них является подход безопасного повреждения, второй основан на принципе медленного роста трещины. Соответственно этому и конструкции разделяются на два класса. С целью обеспечения требуемой надежности и заданной долговечности для второго класса конструкций, в первую очередь, используются методы механики трещин.

Прогнозирование ресурса на стадии проектирования

На стадии проектирования необходимо разработать комплексные технические решения, которые обеспечат выполнение всех заявленных функций с максимальной эффективностью и экономичностью. Одной из главных целей является снижение материальных и трудовых затрат на стадии производства и эксплуатации объекта. Также требуется ускорение ввода объектов в эксплуатацию при соблюдении всех необходимых требований безопасности, надежности и долговечности. Все эти аспекты являются основными критериями, которые должны быть учтены при проектировании. Подобные принципы рассматриваются в исследованиях [4, 43, 55, 66], где анализируется влияние оптимизации проектных решений на эффективность и экономичность.

Задача прогнозирования ресурса на стадии проектирования заключается в обеспечении долговечности и безопасности конструкций, что напрямую связано с точностью расчетов и прогнозов, а также с применением современных методов математического моделирования. Исследования в области прогнозирования ресурса и долговечности конструкций широко освещены в работах [3, 4, 23, 36, 56, 91, 194, 203] где рассматриваются основные методы оценки прочности и надежности конструкций с учетом различных внешних факторов. Кроме этого, важно определить все потенциальные риски, которые могут возникнуть на различных этапах эксплуатации, а также предусмотреть минимизацию вероятности аварийных ситуаций и продлить срок службы объекта.

По мнению специалистов, главной задачей прогнозирования ресурса на стадии проектирования является согласование проектных решений с установленными критериями долговечности и безопасности. Эффективность проектирования обеспечивается с помощью использования разнообразных методов, включая расчетные, которые позволяют заранее оценить возможность возникновения дефектов и разрушений в процессе эксплуатации. Также необходимо рассматривать различные аспекты, такие как влияние внешних факторов на функционирование объекта и возможные изменения его состояния в долгосрочной перспективе. На стадии проектирования особое внимание уделяется прогнозированию не только эксплуатационных характеристик, но и факторов, которые влияют на технические параметры объекта.

Прогнозирование ресурса на стадии эксплуатации

Прогнозирование ресурса на стадии эксплуатации направлено на определение состояния объекта и его компонентов в процессе функционирования. Главной целью является оценка остаточного ресурса с учетом всех факторов, влияющих на его работу, с применением различных методов диагностики и прогнозирования [7, 32, 37]. Эти задачи могут быть разделены на несколько основных направлений. Во-первых, они включают контроль текущего состояния объекта с помощью диагностических систем, которые предоставляют информацию о текущем состоянии и возможных отклонениях от нормальной работы. Во-вторых, важно учитывать влияние внешних и внутренних факторов, таких как температура, нагрузка и другие условия, которые могут изменить поведение объекта в процессе эксплуатации.

Ключевым элементом прогнозирования является не только диагностика, но и использование математических моделей, основанных на механике деформирования и разрушения материалов. Важными инструментами для этого являются методы механики трещин, которые позволяют анализировать развитие дефектов в процессе эксплуатации и предсказывать момент выхода конструкции из эксплуатации с заданным уровнем надежности. Так, исследования [14, 24, 38, 48, 64] показывают, как модели механики разрушения могут быть использованы для оценки роста трещин и накопления повреждений в материалах. Методы, основанные на механике разрушения, позволяют вычислить критические условия, при которых дальнейшее функционирование объекта становится опасным.

Для более точного прогноза следует использовать дополнительные данные, такие как история нагрузок и предшествующие результаты диагностических мероприятий. Современные методы диагностики используют как традиционные, так и инновационные подходы, позволяющие повысить точность прогноза и предсказать возможные изменения в состоянии объекта. Это помогает избежать непредвиденных поломок и минимизировать риск аварий.

Задача прогнозирования остаточного ресурса заключается в оценке момента, когда объект достигнет предельного состояния, при котором его дальнейшая эксплуатация станет невозможной или небезопасной. Для этого необходимо отслеживать изменения технических характеристик во времени, анализировать их динамику и определять закономерности, позволяющие экстраполировать развитие процессов износа и повреждений. Одним из наиболее важных аспектов является оценка стадий распространения трещин и дефектов в материале, что непосредственно связано с безопасностью использования конструкции.

Методы прогнозирования остаточного ресурса можно условно разделить на прямые и косвенные. Прямые методы основаны на анализе физических механизмов разрушения, таких как усталостное накопление повреждений, пластическая деформация, коррозия и другие процессы деградации материалов, как это представлено в работах [52, 61, 194]. Косвенные методы используют параметры, которые непосредственно не связаны с повреждениями, но могут служить индикаторами изменения состояния конструкции, например, вибрационные характеристики, изменение электрического сопротивления или температурные колебания.

Для количественного описания процесса деградации объекта используется концепция диагностического пространства, в котором состояние системы описывается вектором признаков. Измеряемые параметры фиксируются в различные моменты времени, что позволяет отслеживать их изменения и прогнозировать их дальнейшее развитие. Одним из базовых подходов является экстраполяция полученных данных с использованием математических моделей, которые описывают изменение состояния объекта во времени, как это представлено в работах [4, 11, 25].

Современные методы прогнозирования остаточного ресурса активно используют вычислительные технологии, включая машинное обучение и методы обработки больших данных [40, 41]. Сбор и анализ информации с датчиков позволяют строить более точные модели деградации, учитывать влияние эксплуатационных факторов и адаптировать прогнозы в режиме реального времени.

Таким образом, прогнозирование остаточного ресурса представляет собой сложный многопараметрический процесс, требующий комплексного подхода. Он включает мониторинг состояния объекта, применение математических моделей, анализ закономерностей развития повреждений и использование современных технологий обработки данных. Развитие методов прогнозирования позволяет не только повысить безопасность эксплуатации машин и конструкций, но и значительно продлить их срок службы, обеспечивая экономическую эффективность и устойчивость технических систем.

Понятие о мере повреждений

Выработка ресурса машин и конструкций тесно связана с процессами накопления необратимых повреждений, возникающих в деталях, узлах и элементах под воздействием эксплуатационных нагрузок. Эти повреждения могут иметь механическую природу, такую как усталость, изнашивание, растрескивание и накопление пластических деформаций, либо быть результатом физико-химических процессов, включая коррозию, эрозию и адсорбцию. Часто разрушение носит смешанный характер, когда, например, изнашивание трущихся деталей включает как механические, так и физико-химические явления.

Для описания этих процессов применяются полуэмпирические теории, связывающие скорость накопления повреждений с действующими нагрузками и условиями окружающей среды. Основная задача таких моделей заключается в прогнозировании долговечности конструкций и машин, при этом они не стремятся детально описывать физические механизмы разрушения, а используются для инженерных расчетов на основе ограниченного количества эмпирических данных.

Для количественного описания процесса деградации материалов и элементов конструкции применяют меру поврежденности, которая отражает степень их разрушения. Эта мера обычно представлена параметром, принимающим значения от 0 (отсутствие повреждений) до 1 (предельное состояние, при котором элемент теряет работоспособность и считается полностью разрушенным). Такой подход позволяет формализовать процесс разрушения и связать его с внешними воздействиями. Данный параметр широко применяется при разработке моделей поврежденности, представленных в работах [8, 19, 52, 58, 94,157]. Однако интерпретация промежуточных значений этой функции может быть неоднозначной. Например, для износа можно использовать отношение глубины повреждения к предельно допустимой, в то время как для усталостных разрушений такая зависимость отсутствует. Для более точного описания процессов могут быть использованы тензорные меры поврежденности, которые учитывают пространственное распределение дефектов и их характерное изменение.

Полуэмпирические модели основываются на экспериментально установленных зависимостях между нагрузками, условиями эксплуатации и скоростью накопления повреждений. Они предполагают, что повреждения накапливаются во времени по заранее определенной функции, а разрушение наступает, когда их суммарное значение достигает критического уровня. Одним из ключевых принципов этих моделей является линейное суммирование повреждений (критерий Палмгрена-Майнера), согласно которому разрушение происходит, когда сумма частичных повреждений от каждого цикла достигает порогового значения. Этот принцип был впервые предложен Palmgren [195] и усовершенствован Miner [179], что стало основой для оценки долговечности материалов при циклическом нагружении.

Структурные модели, в отличие от полуэмпирических, ориентированы на более детальное описание процессов разрушения на микроуровне [10]. Они не ограничиваются скалярной мерой повреждений, а вводят тензорные характеристики, которые описывают пространственное распределение дефектов, рост микротрещин и изменение механических свойств материала. Эти модели базируются на законах механики разрушения, что позволяет связывать макроскопические эксплуатационные характеристики с процессами, происходящими на уровне микроструктуры материала. Структурные модели применяются в отраслях, где требуется высокая точность прогнозирования ресурса, таких как авиация, энергетика и машиностроение.

Кроме того, для более точного прогнозирования ресурса используются статистические методы, учитывающие случайные изменения эксплуатационных нагрузок и свойств материалов. Применение теории надежности позволяет оценить вероятность разрушения конструкции в условиях случайных вариаций нагрузок и скрытых дефектов. Распределения, такие как распределение Вейбулла и логнормальное распределение, позволяют моделировать вероятностное распределение ресурса и учитывать неопределенности в расчетах [4, 11, 25]. Эти методы также могут быть использованы для корректировки прогнозов по мере накопления данных о реальной эксплуатации, повышая точность расчетов.

Таким образом, по мнению В.В.Болотина [4] прогнозирование ресурса машин и конструкций основывается на трех подходах: полуэмпирических моделях, которые используют экспериментальные зависимости, тензорных (структурных) моделях, которые учитывают механизмы разрушения, и статистических методах, анализирующих влияние случайных факторов. Комплексное использование этих методов позволяет надежно оценить долговечность конструкций и машин, что особенно важно в условиях сложных и переменных эксплуатационных режимов.

1.2. Виды упрочнения. Кинематическое и изотропное упрочнение

Процессы эксплуатации материалов при монотонном и циклическом нагружении часто сопровождаются возникновением и развитием нелинейных деформаций. В этой связи актуальным является учет этих явлений с привлечением соответствующих модельных представлений. В рамках теории бесконечно малых деформаций математическое моделирование пластичности может основываться на тензоре линейной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$. При этом деформация представляется как аддитивная сумма упругой $\boldsymbol{\varepsilon}_{el}$ и пластической составляющих $\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{pl} \tag{1.2.1}$$

Тогда потенциал свободной энергии Гельмгольца можно записать как функцию тензора деформации, его пластической части и набора внутренних переменных, связанных с упрочнением. Плотность энергии деформации ψ, разделенная на упругую и пластическую части, равна:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}, \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}) = \psi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}) + \psi_{pl}(\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}) \tag{1.2.2}$$

где упругая составляющая:

$$\rho\psi_{el}(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_{el} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{el} \tag{1.2.3}$$

где $\mathbf{C}$ -тензор упругих констант материала четвертого ранга.

В соответствии со вторым законом термодинамики, процессы в материале должны быть термодинамически согласованы, то есть обеспечивать положительную диссипацию энергии. Это условие интерпретируется как стремление системы к равновесию. В механике сплошных сред оно выражается через неравенство Клаузиуса-Дюэма:

$$A = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{d\psi}{dt} \geq 0 \tag{1.2.4}$$

где A описывает внутреннюю диссипацию энергии в материале. Условие положительной диссипации гарантирует, что энергия, затрачиваемая на пластическую деформацию, не нарушает принципов термодинамического равновесия.

Чтобы описать эволюцию пластической деформации, вводится закон течения. В общем виде закон течения записывается как:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} = \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.2.5}$$

где Ф – функция текучести, $\boldsymbol{\sigma}$ - тензор напряжений, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}$ - тензор скорости пластических деформаций

Критерий текучести

Для определения упругих и пластических деформаций требуется критерий текучести. Связанная с ним функция текучести Ф может быть выражена через напряжение Коши σ:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \tag{1.2.6}$$

Граница упругой области называется поверхностью текучести:

$$Y = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 0\} \tag{1.2.7}$$

Условие Ф=0 является критерием текучести. Это условие определяет множество пластически допустимых напряжений и задаёт поверхность в пространстве главных напряжений, которая называется поверхностью текучести (Рис. 1.2.1). Если значение функции текучести меньше нуля, то напряжения находятся внутри упругой области, и поведение материала описывается законом Гука. Для одномерного случая идеальной пластичности функцию текучести можно выразить через напряжение σ и предел текучести материала σ_y следующим образом:

$$\Phi(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \qquad (1.2.8)$$

В частном случае предполагается, что материал подвергается изотропному упрочнению, и, следовательно пластическая деформация зависит только от девиатора напряжений $\boldsymbol{\sigma}_d$. В отличие от среднего напряжения p, которое связано с изменением объема, девиатор напряжений описывает изменение формы. Тензор напряжения Коши может быть аддитивно разложен:

$$\boldsymbol{\sigma} = p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\sigma}_d \qquad (1.2.9)$$

где $\boldsymbol{I}$ – единичный тензор второго ранга

$$p = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) \qquad (1.2.10)$$

Таким образом, критерий текучести для металлов может быть выражен через девиатор напряжений как $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_d) \geq 0$

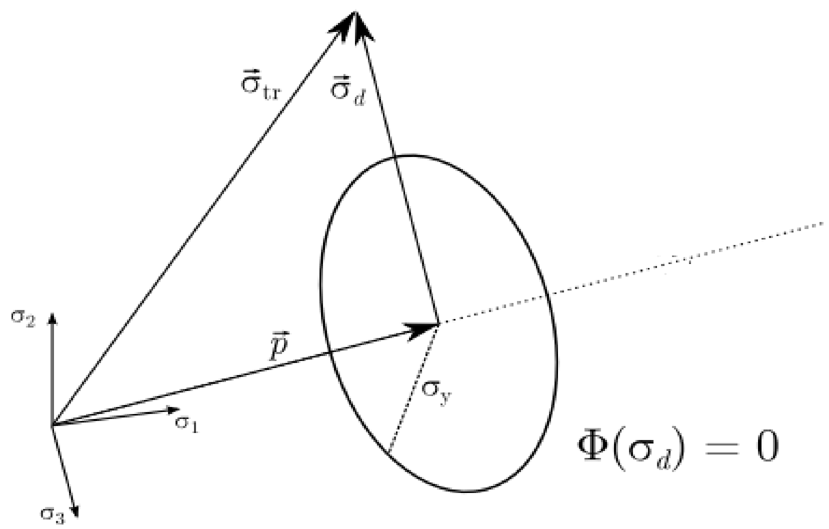


Рис. 1.2.1. Поверхность текучести

Один из критериев, который подходит для описания процесса текучести в металлах — это критерий текучести Мизеса (J_2). Его цель заключается в установлении критерия текучести для сложного напряженного состояния с использованием характеристик материала, полученных из испытаний на одноосное растяжение. При предположении о линейной упругости энергию можно разделить на гидростатические и девиаторные компоненты. Как упоминалось ранее, только девиаторная компонента

$$\psi_d^e = \frac{1}{G} J_2 = -\frac{1}{2G} tr(\boldsymbol{\sigma}_d^2) \quad (1.2.11)$$

оказывает влияние на процесс текучести. Следует отметить, что, по определению, след девиатора равен нулю ($J_1 = tr(\boldsymbol{\sigma}_d) = 0$), и второй инвариант J_2 можно выразить как ($J_2 = (J_1^2 - tr(\boldsymbol{\sigma}_d^2))/2$), а G представляет собой модуль сдвига. Для предельного упругого состояния свободная энергия достигает значения $\psi_d^e = \psi_{crit}$, и дальнейший процесс происходит за счет дополнительного расхода энергии в результате пластического деформирования [221]. Это приводит к формулировке критерия текучести Мизеса в виде

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eqv}(\boldsymbol{\sigma}_d) - \sigma_y \le 0 \quad (1.2.12)$$

где $\sigma_{eqv} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d}$ - эквивалентное напряжение (интенсивность напряжений по Мизесу).

Изотропное упрочнение

Модель пластичности относится к изотропному упрочнению, если эволюция поверхности текучести происходит таким образом, что на любом этапе упрочнения она равномерно расширяется относительно исходной поверхности текучести. Для модели пластичности с поверхностью текучести Мизеса [229] изотропное упрочнение соответствует увеличению радиуса цилиндрической поверхности текучести в пространстве главных напряжений. Этот процесс, а также кривая напряжение-деформация, полученная при знакопеременном нагружении для модели изотропного упрочнения Мизеса, проиллюстрированы на рисунке 1.2.2.

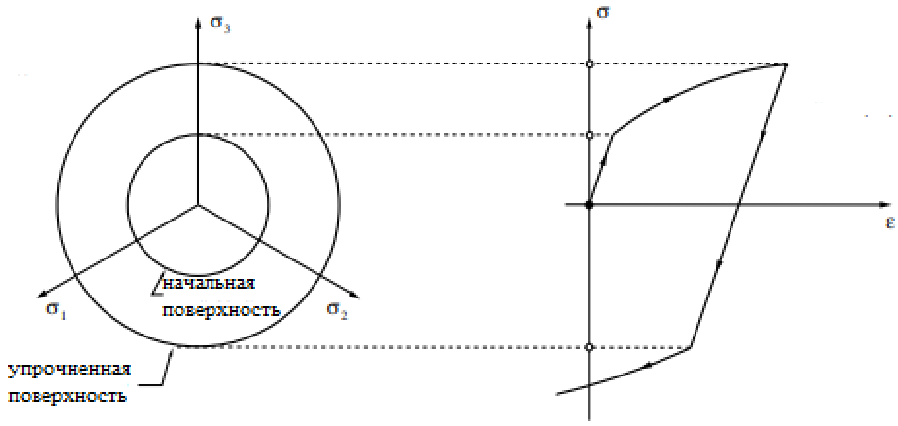


Рис. 1.2.2. Изотропное упрочнение

Радиус поверхности текучести описывается функцией упрочнения, которая связывает деформации и напряжения. В большинстве случаев данная функция аппроксимирует диаграмму одноосного растяжения. Функция упрочнения может принимать различный вид в истинных и условных координатах напряжение-деформация: билинейная аппроксимация, экспоненциальный закон Voce, степенной закон Ramberg-Osgood [200] и другие. Выбор подходящего набора внутренних переменных упрочнения, должен зависеть от конкретных характеристик рассматриваемого материала. В пластичности материалов, например, внутренняя переменная упрочнения связана с плотностью дислокаций в кристаллографической микроструктуре, вызывающей увеличение сопротивления пластическому течению. При описании изотропного упрочнения, набор пластических свойств материала определяет размер поверхности текучести.

При рассмотрении деформационного упрочнения внутренней переменной упрочнения является скалярная мера деформации, т.е. эквивалентная или накопленная пластическая деформация:

$$\bar{\varepsilon}_{pl} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}}\, dt \tag{1.2.13}$$

В этом случае модель упрочнения по Мизесу связывает предел текучести с накопленной пластической деформацией $\sigma_y(\varepsilon_p)$.

В общем виде данный подход подразумевает использование пластической работы в качестве внутренней переменной упрочнения и определяется как:

$$\psi_{pl} = \int_0^t \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} dt \tag{1.2.14}$$

$$\sigma_y = \sigma_y(\psi_p) \tag{1.2.15}$$

При рассмотрении диаграммы одноосного растяжения, показанной на рисунке 1.2.3, общая работа ψ, необходимая для деформации материала до точки P, представляет собой общую площадь под соответствующей кривой в координатах напряжение-деформация. Часть этой работы, обозначаемая как ψ_e, сохраняется в виде упругой энергии и полностью восстанавливается при упругой разгрузке. Оставшаяся (заштрихованная) площадь представляет собой пластическую работу. Она соответствует энергии, затраченной на внутренние необратимые процессы пластической деформации, такие как движение дислокаций и локальные перестройки структуры, и не подлежит восстановлению.

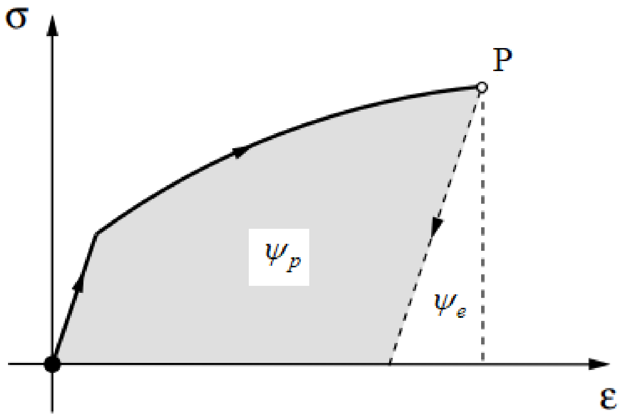


Рис. 1.2.3. Пластическая работа

Кинематическое упрочнение

Если размер поверхности текучести не изменяется, а изменяется лишь ее положение относительно центра в пространстве главных напряжений, то такое упрочнение называется кинематическим. Расстояние смещения центра поверхности текучести называют микронапряжением. Таким образом, в ситуации, когда поверхность текучести сохраняют свою форму и размер, но смещается в пространстве главных напряжений, происходит кинематическое упрочнение. В экспериментах часто наблюдается, что после активного нагружения (и упрочнения) в одном направлении многие материалы проявляют уменьшенное сопротивление пластической деформации в противоположном направлении [154, 184]. Этот феномен известен как эффект Баушингера и может быть описан с использованием кинематического упрочнения. Было предложено несколько моделей для описания упругопластического поведения при циклической нагрузке [154, 184]. Типичный результат циклического испытания с проявлением эффекта Баушингера проиллюстрирован на рисунке 1.2.4 Вместе с этим показана поверхность текучести типа Мизеса (в девиаторной плоскости), используемой для моделирования этого явления.

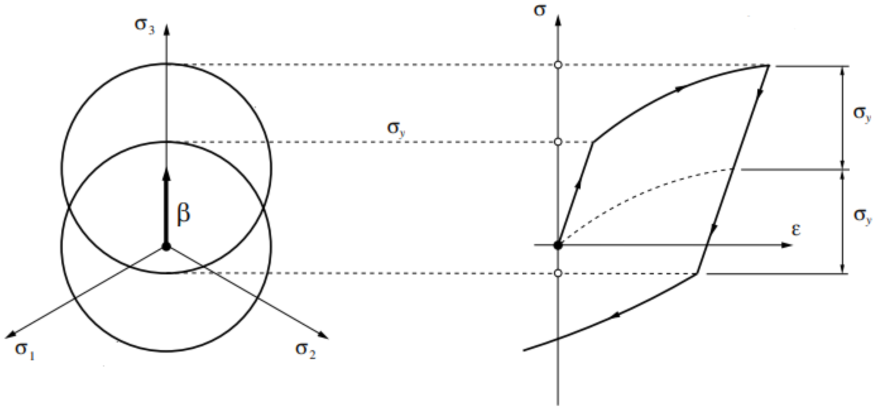


Рис. 1.2.4. Кинематическое упрочнение

Процессы упрочнения и разупрочнения материала, наблюдаемые при циклическом нагружении (рис. 1.2.5), могут быть описаны с помощью кинематического уравнения изменения микронапряжений [133].

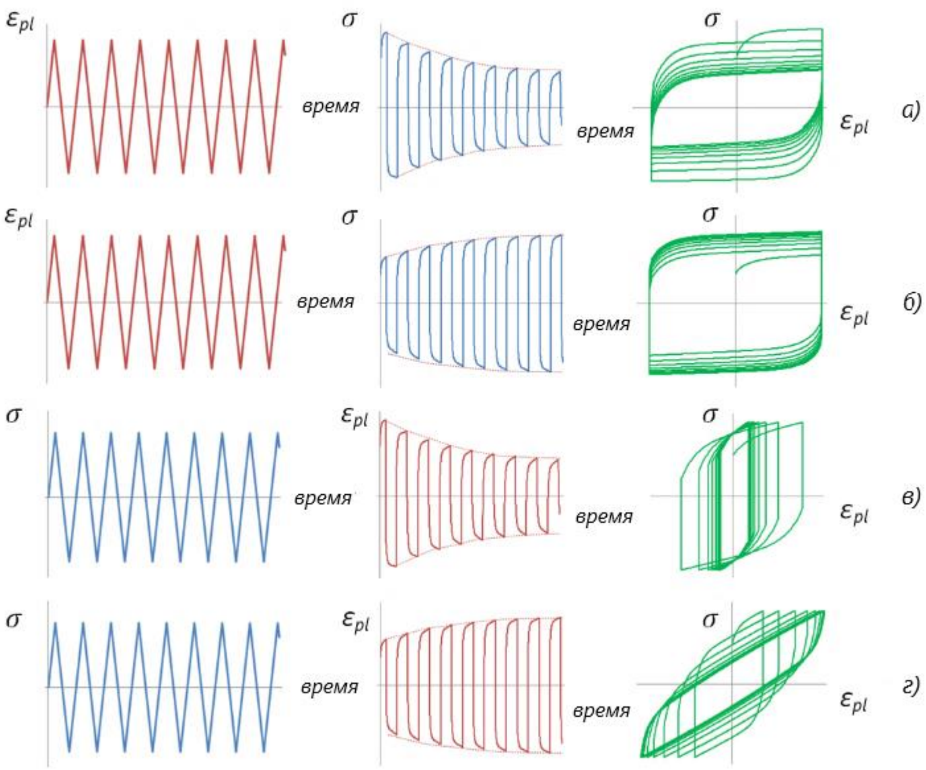


Рис. 1.2.5. Циклическое разупрочнение (а) и циклическое упрочнение (б) при жестком нагружении; циклическое упрочнение в) и циклическое разупрочнение г) при мягком нагружении

Функция текучести для модели с кинематическим упрочнением задается следующим образом:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta}) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\eta})} - \sigma_y \tag{1.2.16}$$

Смещение поверхности текучести моделируется с использованием кинематического упрочнения, где девиатор напряжений уменьшается за счёт тензора микронапряжений $\boldsymbol{\beta}$. Эта разница выражается как тензор относительного напряжения:

$$\eta(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\sigma}_d - \boldsymbol{\beta} \tag{1.2.17}$$

Кинематическое упрочнение связано с накопленной энергией и внутренней концентрацией микронапряжений, и его проявление становится значимым в момент изменения действия направления нагружения по отношению к исходному при упругопластическом деформировании.

В ранних работах при описании кинематического упрочнения использовались в основном линейные функции [18, 44]. Линейное кинематическое упрочнение является простейшим видом кинематического упрочнения и способно представить эффект Баушингера, но не способно вызвать накопление пластической деформации. Это связано с тем, что кривые напряжение-деформация в процессе циклического нагружения в этом случае имеют форму замкнутых петель гистерезиса [202]. В работе [79], был предложен нелинейный закон кинематического упрочнения позволяющий моделировать одностороннее накопление пластических деформаций.

В зависимости от свойств материала и температуры на протяжении одного испытания определенные этапы циклического нагружения могут сопровождаться уменьшением, увеличением и постоянством сопротивления упругопластическому деформированию. Подход Новожилова и Chaboche [47, 100] позволяет объединить различные законы кинематического упрочнения для описания различных этапов циклического деформирования.

Комбинированное упрочнение

При циклическом деформировании у материалов всегда наблюдается комбинация изотропного и кинематического упрочнения. В реальных материалах, в отличие от чисто изотропного или чисто кинематического упрочнения, обычно проявляется комбинация обоих эффектов, представленная на рисунке 1.2.6. При пластическом деформировании поверхность текучести материала одновременно расширяется/сжимается и перемещается в пространстве главных напряжений. Комбинирование этих двух механизмов упрочнения позволяет более точно учесть сложное поведение материалов под воздействием различных условий нагружения, включая циклическое деформирование.

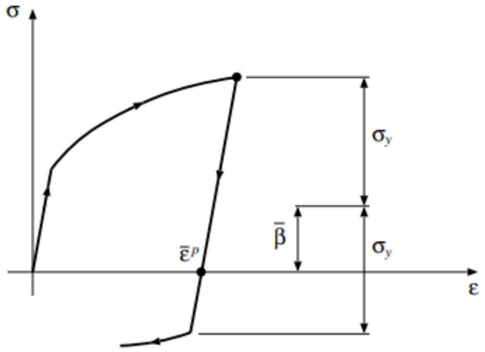


Рис. 1.2.6. Комбинированное изотропное/кинематическое упрочнение

Модель комбинированного изотропного/кинематического упрочнения можно представить в виде двух функций, зависящих от пластических деформаций:

$$\sigma_y = f(\bar{\varepsilon}_p) \quad \beta = \beta(\bar{\varepsilon}_p) \tag{1.2.18}$$

которые могут быть получены из одноосных испытаний со сменой направления нагрузки, как показано на рисунке 1.2.6.

Правильная идентификация параметров упрочнения является очень важным вопросом, на который обращают пристальное внимание многие авторы [13, 104, 113, 116, 157, 166, 196]. Тем не менее многие работы, основанные на подобных формулировках поврежденности и упрочнения, практически не акцентируют внимание на алгоритмах идентификации констант и параметров, ссылаясь при численном исследовании, как правило, на одни и те же исследования, в которых метод идентификации описан неоднозначно.

1.3. Численные методы и алгоритмы решения задач прогнозирования долговечности на основе подходов континуальной механики и функций повреждений

Трещина - один из наиболее часто встречающихся видов дефектов материалов и элементов конструкций. Предотвращение разрушения, вызванного трещинами, является основной целью в инженерном проектировании. Как и во многих других физических явлениях, численное моделирование наличия и развития трещин является неотъемлемым инструментом, необходимым не только для прогнозирования разрушения конструкций, для которых полномасштабные эксперименты либо слишком дороги, либо даже невозможны, но также для более глубокого понимания процессов разрушения различных материалов. Основы механики трещин изложены в работах Гриффитса [131], Ирвина [137]. Несмотря на достигнутые к настоящему времени результаты, моделирование инициализации трещины и ее распространения в материалах и элементах конструкций остается одной из самых значимых проблем в механике твердого тела.

Предметом механики трещин является изучение процессов возникновения и распространения трещин в материалах, а также закономерностей их развития под действием нагрузок. Теория Гриффитса [131] по сути энергетическая теория, которая устанавливает состояние разрушения как равенство между энергией необходимой на образование новой поверхности раздела и упругой энергией, накопленной в объеме материала. Этот подход объясняет наступление критического состояния. Основной характеристикой сопротивления разрушению в этом случае являются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) [137].

Параллельно с механикой трещин существует континуальная механика повреждений (CDM) - дисциплина, первоначально предложенная Л.М.Качановым [20]. В отличие от механики трещин, которая фокусируется на макроскопических трещинах конечной длины, континуальная механика повреждений в основном направлена на феноменологическое описание накопления микродефектов (микротрещин и микропор) с использованием внутренних параметров повреждения и законов их эволюции [149].

Одним из самых распространенных инструментов для численного решения задач механики является метод конечных элементов. Реализация метода континуальной механики повреждений в рамках метода конечных элементов зависит от параметров сетки моделируемого объекта. Отсутствие параметра внутреннего масштаба в формулировках привело к разработке различных теорий регуляризации, таких как вязкая регуляризация [220], нелокальная континуальная теория [206] и их вариации [198], модель градиента повреждений [196] и ее модификации.

Разрушение твердых материалов можно численно моделировать с использованием либо дискретного подхода, либо непрерывного. В первом случае поле перемещений может быть разрывным на поверхности трещин, тогда как во втором перемещения остаются непрерывными во всех точках, но напряжения постепенно снижаются для моделирования процесса деградации материала. Самые известные теории, лежащие в основе дискретного подхода - это линейно упругая механика разрушения [131, 137] и когезионные модели, введенные Дагдейлом [112] и Баренблаттом [82].

Континуальная механика повреждений является широко используемой теорией, относящейся к непрерывному подходу при моделировании разрушения, хотя также применяется модель “размытых” трещин, разработанная Rashid [201]. Описание подобных процессов разрушения так же представлено в работах [231, 232]. Смысл такого подхода состоит в том, что трещины представляются не как четкие линии разрыва в материале, а как размытые или размазанные области с постепенным изменением свойств материала в пределах этих областей.

Отдельное направление исследований в механике трещин составляют задачи смешанных форм разрушения, при которых одновременно реализуются формы деформирования отрывом, продольным и поперечным сдвигом. Этот раздел исследований объединяет разработку критериев направления роста трещин, методы расчета траекторий развития трещин и модели прогнозирования скорости роста трещин и остаточной долговечности при упругом и нелинейном деформировании в условиях смешанных форм деформирования. Обобщением исследований в таком комплексном сочетании решений задач механики трещины можно считать монографию В.Н.Шлянникова [207]. В ней представлены аналитические и численные упругопластические модели состояния тела с наклонной трещиной при двухосном нагружении произвольного направления и уравнения прогнозирования скорости роста трещины и усталостной долговечности при смешанных формах деформирования. Введены новый критерий определения направления развития трещины и разработаны на его основе новые модели распространения трещины. В основе изложенных подходов лежит понятие зоны процесса разрушения и критического значения плотности энергии деформации. Помимо этого, Шлянниковым разработан новый критерий разрушения на основе критерия Писаренко-Лебедева [50], который объединяет в себе первую и четвертую теории прочности. Данный критерий в частных случаях может работать как критерий максимальных нормальных напряжений [117] так и критерий минимальной плотности энергии деформации [218]. Модель прогнозирования скорости роста трещины, предложенная Шлянниковым, основана на сочетании уравнения Мэнсона-Коффина для малоцикловой усталости и уравнения Париса для распространения усталостной трещины. Сравнение различных критериев распространения трещин представлены в работах Shlyannikov [207], Bouchard и др. [87], Dumstorff и Meschke [113]. Особенности динамического разрушения с учетом дополнительного критерия для описания ветвления трещин рассмотрены Belytschko и др. [83]. Среди новых численных методов моделирования роста трещин в последнее время привлекают внимание специалистов модели когезионной зоны [77, 102, 114, 135, 143, 190, 191, 193, 232] и расширенный метод конечных элементов (XFEM) [84, 183, 230, 231]. Расширенный метод конечных элементов один из классических методов моделирования разрушения в условиях изменяющейся геометрии, позволяющий имитировать острую трещину в твердом теле путем введения дополнительных функций формы для описания перемещений и деформаций в области вершины трещины. Одним из преимуществ XFEM является его способность моделировать сложные формы трещин, их ветвление и слияние без необходимости перестроения сетки в процессе анализа. Однако, для успешного использования XFEM, необходимо явно отслеживать поверхность трещины, что может быть сложной задачей в случаях с произвольными и сложными траекториями трещин [81, 119, 223, 224].

Сложности, связанные с дискретным моделированием трещин, стимулируют использование других вычислительных методов, в которых траектории трещин автоматически определяются в ходе решения. Термин "дискретный" в контексте методов моделирования и численных методов означает, что значения переменных, характеризующих систему, рассматриваются в отдельных, разрывных точках или элементах. То есть, вместо рассмотрения непрерывных функций, система представляется в виде дискретных элементов, где значения определены только в определенных узлах или точках пространства. В контексте конечных элементов структура разбивается на конечные элементы, и переменные (такие как перемещения, напряжения и другие) определяются только в узлах каждого элемента. Это обеспечивает аппроксимацию непрерывных полей в ограниченном числе точек или элементов. Такой подход упрощает вычисления, так как система становится конечной, что облегчает применение численных методов для решения уравнений и моделирование поведения системы.

Известны два популярных подхода в этой категории численных решений – это модель фазового поля разрушения [76, 122] и перидинамика [204]. В фазовых полях разрушения, накопление и развитие повреждений и последующий рост трещин основаны на объединении подходов механики разрушения и механики повреждений сплошной среды. Фазовые поля разрушения обобщают известную теорию Гриффитса и непосредственно связаны с вариационным подходом к хрупкому разрушению [122], который минимизирует полную потенциальную энергию разрушения твердых тел.

Численная реализация вариационного подхода к разрушению была предложена Bourdin и др. [88], где топология острой трещины регулируется зоной повреждения благодаря введению скалярной переменной фазового поля, разделяющей материал в исходном и поврежденном состоянии [89]. В формулировке фазовых полей введен масштабный параметр l_0, характеризующий ширину поля локализации повреждений. Метод фазовых полей можно рассматривать как решение задач механики разрушения с использованием уравнений в частных производных (УЧП): решаются два УЧП - одно для векторного поля перемещений и другое для скалярного параметра поврежденности внутри фазового поля.

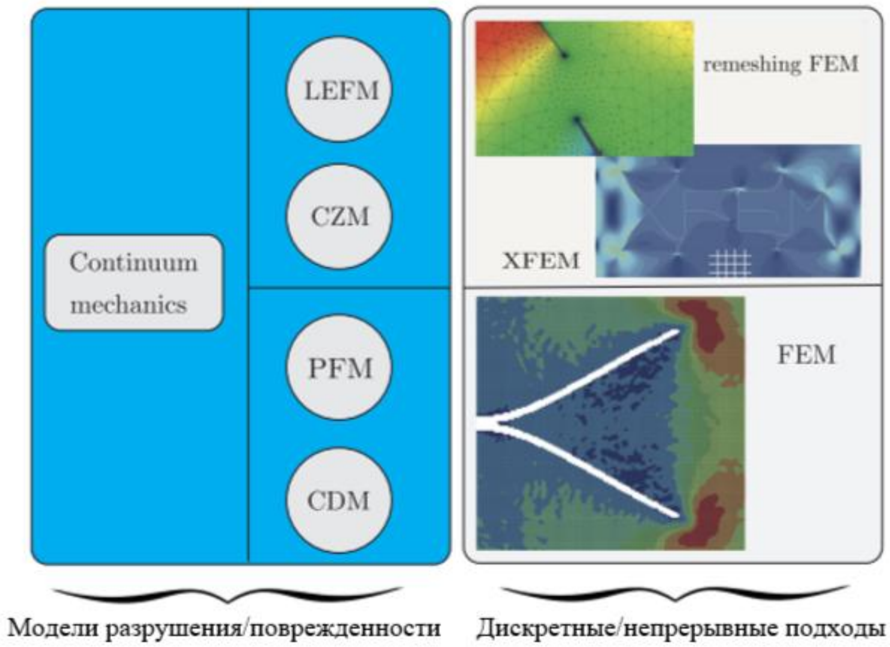


Рис. 1.3.1. Численные методы для реализации прогнозирования долговечности материалов

В перидинамике (PD) классические уравнения в частных производных заменяются интегральными, что позволяет избежать трудностей в обработке разрывов в перемещениях. Обе модели могут обрабатывать топологически сложные трещины, такие как пересекающиеся и ветвящиеся трещины в плоской и трехмерной постановке. В работах [204, 205] был реализован метод фазовых полей для хрупкого разрушения в рамках перидинамики. В таком комбинированном подходе частицы в твердых телах могут быть физически разрушены на части, что сам по себе метод фазовых полей сделать не может. На рисунке 1.3.1, согласно работе [220], представлена схематизация численных методов, используемых для прогнозирования долговечности материалов.

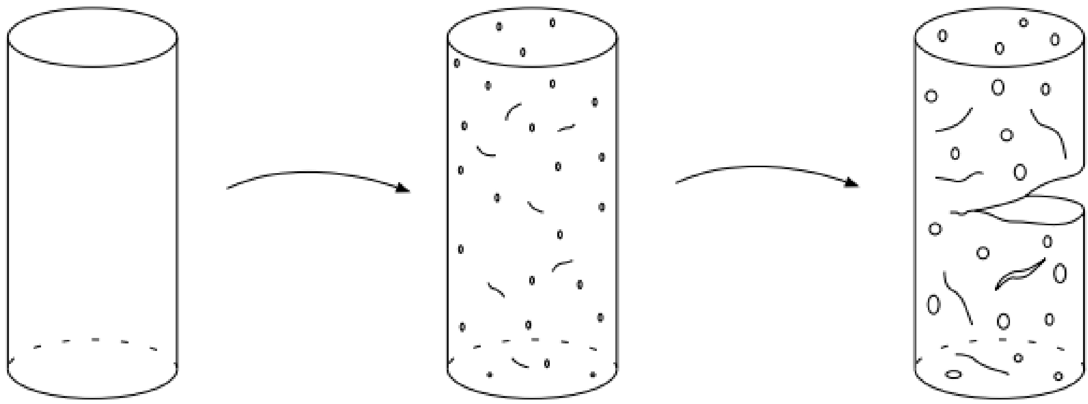
1.4. Параметры повреждений по континуальным моделям для условий монотонного и циклического деформирования

Начиная с работ Л.М. Качанова [19] существенная часть литературы в области прикладной механики посвящена формулировке моделей для описания структурного разрушения твердых тел в рамках континуальной механики. Благодаря непрерывному развитию, был достигнут значительный прогресс, и эти теории объединились в континуальную механику повреждений [146, 156]. Как отмечалось ранее, в отличие от механики разрушения, направленной на изучении макроскопических трещин конечной длины, континуальная механика повреждений направлена на феноменологическое описание развития микродефектов, таких как микротрещины и микропоры, с использованием внутренних параметров, характеризующих повреждения, и изучение их эволюции.

Со времени введения Л.М. Качановым [19, 20] скалярной переменной поврежденности и ее физическим обоснованием Ю.Н.Работновым [53], модели накопления поврежденности претерпели значительное развитие [1, 9, 82, 109, 139, 163, 228, 234]. В настоящее время разрушение (макроскопическое нарушение сплошности тела в результате воздействия на него внешнего окружения) рассматривается с учетом процессов внутреннего разрушения. Исследование скрытого разрушения (зарождение и развитие микродефектов, рассеянных по объему тела) осуществляется с помощью методов и теорий механики поврежденности – динамично развивающегося раздела современной механики деформируемого твердого тела. Классические и современные модели поврежденности представлены в работах [17, 29, 33, 34, 35, 58, 59].

На микроуровне повреждения являются следствием динамики дислокаций. Этот процесс анализируется с использованием теории дислокаций, таких как модели Zinera-Stro, Cottrell, Orvana-Stro и другие [22, 48]. Важно отметить, что кристаллические твердые тела обладают микроскопической анизотропией, основанной на кристаллографической текстуре [134]. Таким образом, критическое напряжение сдвига, которое можно трактовать как силу сопротивления движению дислокаций, и микронапряжения распределены в материале неравномерно. Микронапряжения обычно локализуются на дефектах кристалла, границах зерен и различных неоднородностях в материале [155].

Когда микронапряжение локально достигает критического напряжения сдвига или напряжения Peierls-Nabarro, начинается движение дислокаций. Этот процесс также называется скольжением или скольжением дислокаций в материалах, что приводит к пластической деформации кристаллической решетки и, в конечном итоге, всего материала.



а) б) в)

Рис. 1.4.1. Процесс накопления повреждений. (а) – неповрежденный материала; (б) – образование микроскопических трещин; (в) - слияние микротрещин и макроскопическое разрушение

В то время как зарождение дислокаций уже можно рассматривать как повреждение, на мезомасштабе повреждение относится к зарождению и слиянию микропустот [155]. Считается, что зарождение микропустот происходит в результате декогезии границ зерен, например, при включениях, пересечении полос скольжения и растрескивании частиц [125]. В пределах элементарного объема, представленного на рисунке 1.4.1, микропустоты образуются по мере накопления повреждений, далее эти микропустоты увеличиваются в размерах, и со временем объединяются, образуя макротрещины [134].

Очевидно, что феномены, характеризующие разрушение, существенно отличаются от тех, которые характерны собственно для деформации. Если разрушение проявляется в необратимом разрыве атомных связей, то деформация может быть связана с обратимыми изменениями межатомных расстояний (в чисто упругих процессах) и движением дислокаций в условиях пластичности. Таким образом, для описания внутреннего разрушения твердых тел в рамках теории континуальной механики повреждений необходимо ввести новые переменные, интегрально связанные с процессом внутренней деградации, помимо стандартных переменных (таких как тензор деформации, пластическая деформация и др.), используемых для описания деформирования. В данном контексте под моделью континуальной механики повреждений подразумевается любая модель, включающая внутренние переменные, представляющие собой плотность или распределение микроскопических дефектов, характеризующих разрушение.

Первая модель континуальной механики повреждений была предложена Л.М. Качановым [19, 20], который ввел скалярную внутреннюю переменную для моделирования ползучести металлов при одноосном нагружении. Физический смысл переменной разрушения был предложен позднее Ю.Н. Работновым [52], который связал уменьшение поперечной площади из-за наличия микротрещин с мерой состояния внутреннего повреждения:

$$\omega = \frac{A_0 - A}{A_0} \tag{1.4.1}$$

где A_0 - начальная площадь неповрежденного материала, A - площадь поврежденного материала, значение параметра ω=0 соответствует неповрежденному состоянию материала, а ω=1 представляет собой полную потерю несущей способности.

Для описания увеличения скорости деформации, характерного для последнего этапа ползучести, Л.М. Качанов заменил одноосное напряжение σ эффективным напряжением в стандартном законе ползучести Нортона:

$$\sigma_{eff} = \frac{\sigma}{1-\omega} \tag{1.4.2}$$

Уравнение состояния для скорости пластической деформации при одноосном напряжённом состоянии имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}_p = \left(\frac{|\sigma|}{\lambda(1-\omega)} \right)^N sign(\sigma) \tag{1.4.3}$$

где N и λ являются характеристиками материала, зависящими от температуры. Таким образом, рост поврежденности материала может вызвать ускорение пластической деформации, которое наблюдается во время последнего этапа ползучести.

В работе [8] представлены модели накопления повреждений при одноосном нагружении, модифицированные в соответствии с подходами Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова. Данные модели представлены в таблице 1.4.1, где C, m, q, β -параметры материала

Уравнение	Автор
$\frac{d\omega}{dt} = C_1 \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m$	Л.М. Качанов [19]
$\frac{d\omega}{dt} = C_1 \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m \omega^\beta$	Ю.Н. Работнов [52]
$\frac{d\omega}{dt} = C_3 \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m \frac{1}{1-\omega^\beta}$	J. Lemaitre [157]
$\frac{d\omega}{dt} = C_4 \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m \left(\frac{1}{1-\omega} \right)^{f(\sigma)}$	В.П. Голуб, А.В. Романов [12]
$\frac{d(1-\omega_n)}{dn} = -C_N \left(\frac{\Delta\sigma}{1-\omega_n} \right)^{m_c}$	Л.А. Сосновский [58]
$\frac{d(1-\omega_n)}{dn} = -C_K \left(\frac{\Delta K}{1-\omega_n} \right)^{m_к}$	Л.А. Сосновский [58]

Таблица 1.4.1. Модели накопления повреждений при ползучести и усталости при одноосном нагружении

Наибольшее распространение получили феноменологические модели пластического изотропного накопления повреждений Lemaitre и Chaboche [97, 98, 99, 101, 154]. Эти модели основаны на гипотезе эквивалентности деформаций, в которой деформационное поведение поврежденного материала представлено законами неповрежденного материала с заменой истинного напряжения эффективным напряжением [109]. Lemaitre описал закон, в котором стандартное определение параметра повреждения с точки зрения уменьшения несущей поверхности заменяется путем уменьшения модуля упругости в идеально изотропном случае. Эта теория была дополнена [98], а эффекты старения были позже включены в работах [163]. Позже оригинальная модель была расширена Lemaitre [162] для учета анизотропии тензора повреждений.

Концепция внутренней переменной повреждения была распространена на описание поведения трехмерных тел. Leckie и Hayhurst [152] использовали концепцию уменьшения площади как скалярную переменную деградации материала для создания модели повреждения под воздействием многоосного нагружения. Chaboche [94, 95, 96] предложил феноменологическую теорию разрушения при ползучести, в которой, благодаря гипотезе об эквивалентности деформации, переменная повреждения представлена несимметричным тензором в общем случае анизотропии. В теории, разработанной Murakami and Ohno [187] анизотропная переменная повреждения представлена симметричным тензором второго ранга. Позднее Murakami расширил теорию для описания общих анизотропных состояний внутреннего повреждения в твердых телах, с акцентом на анализ хрупких материалов [186]. В рамках теории континуальной механики повреждений, Saanouni использовал нелокальную формулировку для прогнозирования зарождения и распространения трещины [206].

В рамках упруго-пластической теории Gurson [132] предложил модель для деформационного повреждения, где (скалярная) переменная повреждения определяется из рассмотрения микроскопических сферических полостей (пор). Теория Gurson [132] показала высокую эффективность для описания поведения пористых материалов. Скалярная переменная повреждения также была рассмотрена Lemaitre [158] при определении чисто феноменологической модели для деформационного изотропного повреждения в металлах. Для упругого состояния материала можно записать:

$$\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.4.4}$$

где $\mathbf{C}$ - тензор упругих констант 4-го ранга. Для случая одноосного нагружения:

$$\sigma_{eff} = E_0 \varepsilon \tag{1.4.5}$$

или эквивалентно

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.4.6}$$

где E_0 и $E = (1-\omega)E_0$ модули упругости для неповрежденного и поврежденного состояния материала соответственно. Переменная повреждения (1.4.1) переопределяется как:

$$\omega = \frac{E_0 - E}{E_0} \tag{1.4.7}$$

Эта теория была дополнительно модифицирована Lemaitre [154, 160], а эффекты старения были впоследствии внесены Marquis и Lemaitre [163]. Позже исходная изотропная модель была расширена Lemaitre и др. [162] для учета анизотропии повреждений, а также для частичного закрытия микротрещин под действием сжимающих напряжений. Переменная повреждения в этом случае является тензором второго порядка, эволюция которого связана с основными направлениями тензора пластической деформации. На основе концепции эквивалентности энергии (в отличие от эквивалентности деформации Lemaitre) еще одну модель для упругопластического повреждения предложили Cordebois и Sidoroff [106]. Переменная повреждения в этом случае принимает форму тензора второго порядка при общей анизотропии. Также стоит упомянуть более поздние разработки Armero и Oller [78]. Эти авторы предложили концепцию, в рамках которой тензор деформации аддитивно разделяется на упругую, пластическую и поврежденную части. Компонента повреждения в этом случае разделяется как сумма индивидуальных вкладов различных механизмов повреждения. Другой подход был принят Krajcinovic и Fonseka [147] в разработке теории повреждений для хрупких материалов. Полагая, что повреждение в данном случае характеризуется в основном плоскими микротрещинами, была предложена векторная переменная в качестве локальной меры внутреннего разрушения [148]. Дальнейшие разработки были внесены Krajcinovic [149] с различием между активными и пассивными системами микротрещин. Другие векторные модели описаны авторами работы [180, 196].

Континуальная механика повреждений также была применена для описания процессов усталости. Janson [138] разработал континуальную теорию для моделирования распространения усталостных трещин, которая показала хорошее согласование с испытаниями при одноосном нагружении. Общая формулировка, включающая малоцикловую и многоцикловую усталость, а также взаимодействие усталости и ползучести при сложном напряженном состоянии, была представлена Lemaitre [161]. Дополнительные обсуждения этих моделей предоставлены Lemaitre и Chaboche [98, 156]. Для моделирования эффектов усталости, уравнение для переменной повреждения, обычно формулируется в терминах дифференциального уравнения, связывающего рост повреждения со средним напряжением, максимальным напряжением и количеством циклов.

Физическое обоснование

Для физического обоснования переменных повреждения, принято разделять теории континуальной механики повреждений на две основные категории: микромеханические и феноменологические модели.

В микромеханических моделях внутренняя переменная повреждения представляет собой некоторое среднее значение микроскопических дефектов, которые характеризуют состояние внутреннего повреждения. Несмотря на физическую обоснованность внутренних переменных, таких как уменьшение площади поперечного сечения, предложенных Ю.Н. Работновым [52], или распределение микротрещин, принятое Krajcinovic в его векторной модели [148, 149], остаются трудности, связанные с экспериментальной идентификацией поврежденных состояний, что делает большинство микромеханических теорий ограниченными для практического применения.

Феноменологические переменные в моделях накопления повреждений Cordebois и Sidoroff [106, 107]; Horii и Nemat-Nasser [136], с другой стороны, могут быть определены на основе влияния макроскопических свойств материала. В частности, через такие свойства как модули упругости предел текучести, плотность энергии деформации, которые чувствительны к накоплению повреждений. Измерение таких величин, как правило, гораздо проще, чем определение геометрии или распределения микродефектов. Основываясь на таких концепциях, модели, представленные Lemaitre и Chaboche [156], в основном полагаются на использование изменения модулей упругости в качестве макроскопической меры повреждения. В самой простой форме, т.е. в идеально изотропных условиях, переменная повреждения является скаляром, определенным выражением (1.4.7). В условиях анизотропии переменная повреждения представляет собой тензор второго ранга [162]. Аналогичное определение для изотропной переменной повреждения используется в работах Cordebois и Sidoroff [107]. Модель, основанная на изменениях объема из-за роста полостей в качестве меры внутреннего повреждения, описана Gelin и Mrichcha [127].

Учитывая разнообразие вариантов выбора внутренней переменной, связанной с повреждением, Leckie и Onat [153, 192] продемонстрировали, что распределение полостей на границах зерен может быть математически представлено последовательностью тензоров четного ранга, не поддающихся разложению на тензорное произведение. Несмотря на то, что этот вывод был получен в контексте теорий ползучести, Onat [192] показал, что феноменологическая репрезентация переменной повреждения применима к общим континуумам с микротрещинами, независимо от деформационных процессов.

1.5. Параметры повреждений в фазовых полях разрушения при анализе развития трещин при монотонном и циклическом деформировании

Модель фазового поля разрушений представляет собой современный метод численного моделирования процессов образования и распространения трещин в различных материалах. В отличие от традиционных моделей, где трещины моделируются как острые границы разрыва, в рамках модели фазового поля разрушений используется вспомогательная функция φ(x), которая принимает значения в диапазоне $\varphi(x) \in [0,1]$, чтобы регуляризовать и аппроксимировать трещину как зону с постепенным переходом от неповрежденного (φ =0) к поврежденному (φ=1) материалу.

Основой модели фазовых полей разрушения является энергетический подход Гриффитса, который рассматривает трещинообразование как процесс минимизации общей энергии системы. Баланс энергии Гриффитса устанавливает, что трещина будет расти только тогда, когда высвобождение энергии деформации превышает или равно энергии, необходимой для образования новой поверхности [131].

Минимизация полной потенциальной энергии с учетом соответствующих граничных условий позволяет определить поля перемещений $\boldsymbol{u}$ и функцию повреждения фазового поля φ [122, 182]. Вариационный подход к хрупкому разрушению был предложен Francfort и Marigo [122] и нашел своё математическое обоснование в рамках современной теории вариационного исчисления. Регуляризованная версия данного подхода на основе фазового поля была разработана Bourdin и др. [88]. Эта модель основана на использовании эллиптической регуляризации задачи свободного разрыва, описываемой функционалом Мамфорда-Шаха [185], и формализована в рамках метода Ambrosio и Tortorelli [72].

Freddi и Royer-Carfagni [123] отмечают, что регуляризованная версия вариационного подхода, предложенная Bourdin и др. [89], является самостоятельной моделью, в то время как исходная формулировка Francfort и Marigo [122] представляет её приближение. Данная регуляризованная модель фазового поля классифицируется как изотропная модель разрушения второго порядка. Термин "изотропная" подразумевает, что модель не различает поведения материала при растяжении и сжатии, а "второй порядок" указывает на наличие вторых производных фазового поля в уравнениях, управляющих процессом.

В дальнейшем была предложена анизотропная версия модели Bourdin и др. [88], представленная в работе Amor и др. [73]. В данной версии плотность упругой энергии была разложена на объемную и девиаторную компоненты для предотвращения возникновения трещин в зонах сжатия. Lancioni и Royer-Carfagni [151] разработали другую анизотропную модель для описания сдвиговых разрушений.

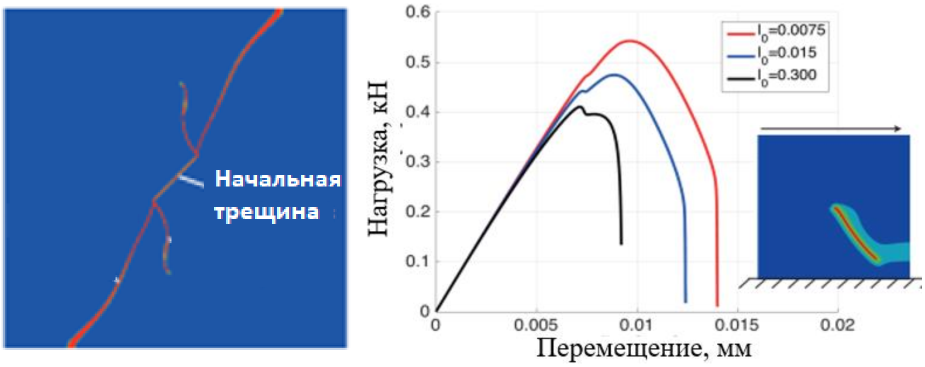
На основе теории структурированных деформаций Freddi и Royer-Carfagni [123] представили унифицированную формулировку, объединяющую различные модели Bourdin и др. [89], Amor и др. [73], а также Lancioni и Royer-Carfagni [151] для разрушения по формам нормального отрыва I и чистого сдвига II, а также для смешанных форм разрушения.

Borden и др. [86] предложили модель фазового поля четвёртого порядка, которая улучшает сходимость численных решений. Позднее было установлено, что эта модель является частным случаем анизотропной модели поверхностного разрушения, разработанной Li и др. [165].

Теория фазового поля для хрупкого разрушения была расширена на случаи пластического разрушения, как это представлено в работах [70, 71, 85, 111, 129, 150, 170, 177]. Общим для этих моделей является разложение функционала накопленной энергии на упругую и пластическую составляющие, в то время как часть функционала, связанная с трещинами, остаётся практически неизменной. Кроме того, с численной точки зрения подзадача для фазового поля перестаёт быть линейной, что увеличивает и без того высокую вычислительную сложность модели фазового поля. В работах Miehe, Borden, Kuhn и др. [85, 128, 140, 150, 175], для решения этой проблемы, была предложена функция деградации пластической энергии $g_p(\varphi)$.

Дальнейшее развитие теория фазовых полей разрушения получила в приложениях, связанных с циклическим деформированием. Повреждение, вызванное воздействием циклических нагрузок, учитывается с использованием функции усталостной деградации $f(\vartheta)$, предложенной Carrara [93], кумулятивной переменной истории и порогового параметра усталости ϑ_T.

Большинство существующих моделей фазового поля были верифицированы на хрупком разрушении, однако лишь немногие из них были применены к задачам квазихрупкого, когезионного [231] и пластического разрушения [85]. Klinsmann и др. [143], Tanné и др. [225] подтвердили корректность моделей фазового поля, сравнив их с результатами классической механики разрушения. Примеры полученных результатов представлены на рисунке 1.5.1.



а) б)

Рис. 1.5.1. Разрушение образца при (а) одноосном сжатии, б) одноосном растяжении

Использование подхода фазового поля для моделирования процессов разрушения обладает следующими преимуществами:

- Модель основана исключительно на минимизации энергии, что устраняет необходимость в предварительном задании трещин. Это позволяет автоматически определять зарождение, рост и слияние трещин.
- Модель естественным образом описывает ветвление и объединение множества трещин.
- Модель легко обобщается на трёхмерные задачи и имеет простую численную реализацию в любой размерности.

Недостатки метода фазового поля:

- Высокие вычислительные затраты. Для точного разрешения градиентного члена в повреждённой зоне требуется достаточно мелкая сетка, что замедляет работу алгоритма.

В настоящее время актуальным является развитие и совершенствование подходов к прогнозированию ресурса и долговечности конструкционных материалов с учетом процессов малоцикловой усталости и роста трещин. Использование современных моделей, таких как модели прогнозирования долговечности для малоцикловой усталости и модели фазового поля для описания роста трещин, открывает новые возможности для более точного анализа и оценки поведения материалов.

На основе проведенного литературного обзора установлено, что численные методы демонстрируют высокую эффективность в решении задач прогнозирования процессов образования и распространения трещин. Современные модели с высокой точностью описывают механизмы накопления повреждений, роста, ветвления и слияния трещин, что подтверждается их успешным применением в задачах механики разрушения.

Однако для дальнейшего совершенствование подобных подходов актуальным является учет сложного напряжённого состояния при многоосном внешнем нагружении, моделирование нелинейных эффектов при циклическом деформировании с учетом взаимодействия повреждений, реализация функций истории изменения эксплуатационных параметров. Перспективным направлением является объединение моделей механики поврежденности и механики разрушения, что позволит использовать их сильные стороны для более точного описания и прогнозирования поведения материалов и элементов конструкций в сложных эксплуатационных условиях на стадиях образования и распространения дефектов.

Таким образом целью данной работы является разработка и обоснование расчетно-экспериментальных методов прогнозирования долговечности при малоцикловой усталости и моделирования роста трещин при монотонном и циклическом нагружении на основе фазовых полей разрушения с учетом функций накопления и развития повреждений.

ГЛАВА 2. ОБОСНОВАНИЕ И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КОНТИНУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ LEMAITRE В ЗАДАЧАХ МОНОТОННОГО И ЦИКЛИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Данная глава посвящена формированию и расчетно-экспериментальному обоснованию метода прогнозирования малоцикловой усталости на основе модели поврежденности Lemaitre и комбинированного закона упрочнения на стадии образования трещины. В главе представлен разработанный алгоритм и изложена процедура численной реализации разработанного метода оценки долговечности с учетом характеристик предельного состояния при многоосном нагружении.

Полученные результаты и разработанные методы будут использованы в последующих разделах для анализа долговечности элемента конструкции. В частности, в разделе 4.3 предложенный метод будет применен к оценке долговечности проушины диска турбины на стадии образования дефекта. Особое внимание будет уделено учету сложного напряженно-деформированного состояния и влиянию циклического нагружения на процессы накопления повреждений. Таким образом, результаты данной главы формируют основу для дальнейшего анализа процессов разрушения и прогнозирования долговечности элементов конструкции на стадии образования дефектов в условиях эксплуатации.

В обобщающих трудах справочного и методического характера отечественными учеными изложены основы исследований поведения материалов и элементов конструкций при малоцикловом деформировании [4, 39, 57]. Существенное развитие теории и приложений расчетов и испытаний при малоцикловом нагружении в условиях сложного напряженного состояния изложено в трудах [92, 178]. Казанская школа механиков представлена исследованиями в области малоцикловой усталости трудами [6, 21, 61].

2.1. Разработка и реализация численного метода оценки предельного состояния и прогнозирования долговечности на основе моделей локальных повреждений Lemaitre-Frederiks

В настоящей работе сформирован и реализован алгоритм, основанный на наборе разрешающих уравнений и объединяющий экспоненциальный закон изотропного упрочнения, закон кинематического упрочнения Armstrong-Frederic [79] и модель накопления повреждений Lemaitre. Данный алгоритм был реализован в виде динамически подключаемой библиотеки пользовательского материала программного комплекса расчетов по методу конечных элементов ANSYS. Структура разрешающих уравнений алгоритма включает набор параметров обобщенной модели, метод определения которых рассмотрен в разделе 2.4

Определяющие соотношения

Разработанная математическая модель основывается на уравнении равновесия, формулируемом как условие баланса энергии, получаемое путём минимизации полной потенциальной энергии системы. Такой подход позволяет описывать взаимодействие внутренних и внешних сил в единой математической постановке, учитывая в рамках одной системы процессы деформирования, упрочнения и накопления повреждений.

Функционал полной энергии системы записывается в виде:

$$\Pi(\boldsymbol{u},\omega) = \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})),\omega)dV - \int_{\Omega} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}dV - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u}dA\,. \qquad (2.1.1)$$

Где W-плотность энергии деформации, $\boldsymbol{u}$-вектор перемещений, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{t}$ – векторы объёмных и поверхностных сил.

Задание граничных условий совместно с уравнениями равновесия позволяют решить задачу минимизации функционала энергии. Для решения итоговой системы уравнений требуется задание определяющих соотношений, которые связывают напряжённое состояние материала с деформацией, процессами упрочнения и накопления повреждений. Эти соотношения формируют замкнутую систему уравнений, описывающую эволюцию напряжённо-деформированного состояния материала при внешнем воздействии.

В модели предполагается аддитивное разложение тензора малых деформации на упругую и пластическую составляющие:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\,. \qquad (2.1.2)$$

Эволюция пластической деформации задаётся законом пластического течения, заданным в модели в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} = \frac{1}{h}\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{\sigma}_d,\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\sigma}_d}, \quad \text{при } \Phi(\boldsymbol{\sigma}_d,\boldsymbol{\beta}) = 0, \quad \dot{\Phi} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} \geq 0 \qquad (2.1.3)$$

где $h = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \bar{\varepsilon}_{pl}}$ – скалярный пластический множитель.

Граница упругопластического перехода определяется функцией текучести**:**

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_d, \boldsymbol{\beta}) = \frac{\|\boldsymbol{\sigma}_d - \boldsymbol{\beta}\|}{1-\omega} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{pl}) = 0 \tag{2.1.4}$$

При $\Phi < 0$ материал подчиняется закону Гука. Отсутствие приращения пластических деформаций означает отсутствие приращения поврежденности. При $\Phi \geq 0$ – неизвестными в задаче минимизации будут приращения пластических деформаций и приращения накопленных повреждений. При переходе материала в состояние пластического течения, линейная зависимость между напряжениями и деформациями, описываемая законом Гука, теряет свою применимость, поскольку материал начинает проявлять нелинейное поведение, сопровождаемое накоплением пластических деформаций и повреждений, изменением границы текучести. Для описания поведения материала необходимо введение дополнительных определяющих соотношений описывающих физическую нелинейность. Пластический потенциал должен учитывать изотропное и кинематическое упрочнение материала, а также накопление поврежденности в процессе деформирования.

Выбор модели изотропного упрочнения сводится к выбору функции, аппроксимирующей диаграмму одноосного растяжения. В данном исследовании использован экспоненциальный закон упрочнения:

$$\sigma_y = \sigma_0 + R_{\inf} \cdot \left[1 - \exp(-\gamma \cdot \bar{\varepsilon}_{pl})\right] \tag{2.1.5}$$

где σ_0 – предел текучести материала, $R_{\inf}$ – асимптотический предел временного сопротивления отрыву, γ – показатель упрочнения материала. Основным его преимуществом является возможность аналитического дифференцирования по накопленной пластической деформации $\bar{\varepsilon}_{pl} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}_{pl} dt$, $\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl} = \sqrt{2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} / 3}$, без привлечения итерационных методов.

Кинематический закон упрочнения описывает кинетику изменения микронапряжений в процессе деформирования. В данной работе использовалась модель Armstrong-Frederick, получившая мировое распространение при моделировании одноосного циклического нагружения [108, 167]. В работе [80] авторы показали способность модели достаточно хорошо моделировать эксперименты при одноосном растяжении, включая накопление пластической деформации во время циклического нагружения. В исследовании [108] была продемонстрирована возможность использования модели для прогнозирования пластичности при циклическом нагружении толстостенных цилиндрических и сферических сосудов при различных комбинациях термических и механических нагрузок. Кинематический закон упрочнения Armstrong-Frederick [124] в современной литературе имеет множество модификаций, существенно расширяющих области его применения [68, 69, 104, 164, 167, 174, 197]. В итоговой системе разрешающих уравнений в данной работе использована традиционная формулировка модели:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = a\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} - b \cdot \boldsymbol{\beta}\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}, \tag{2.1.6}$$

где, $\boldsymbol{\beta}$-тензор микронапряжений, a и b –параметры характеризующие свойства материала; $\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}$ - интенсивность скорости пластических деформаций.

Для моделирования накопления повреждений при пластическом деформировании была использована модель Lemaitre [157]. Согласно данной модели, скорость накопления повреждений определяется на основе термодинамической теории и зависит от уровня накопленных пластических деформаций и их скорости. В общем виде модель Lemaitre записывается в следующем виде:

$$\dot{\omega} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{pl} \frac{1}{1-\omega} \cdot \left(\frac{-Y}{r} \right)^s \tag{2.1.7}$$

$$-Y = \frac{\sigma_y \cdot R_v}{2E(1-\omega)^2} \tag{2.1.8}$$

$$R_v = \frac{2}{3}\left[(1+\upsilon) + 3(1-2\upsilon)\left(\frac{p}{\sigma_{etr}} \right) \right] \tag{2.1.9}$$

где $\dot{\omega}$ – скорость изменения параметра поврежденности, $\dot{\bar{\varepsilon}}_{pl}$ – скорость накопления пластических деформаций, Y – скорость выделения энергии деформации повреждений, E – модуль упругости первого рода, υ – коэффициент Пуассона, r, s – искомые параметры материала, R_v – функция многоосности, $p = tr(\boldsymbol{\sigma}_{etr})/3$– среднее напряжение (2.1.25), $\boldsymbol{\sigma}_{etr} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{el}$. Отношение p/σ_{etr} является параметром трехосности напряжений, $\sigma_{etr} = \sqrt{3\boldsymbol{\sigma}_{etr}^d : \boldsymbol{\sigma}_{etr}^d / 2}$ интенсивность напряжений. Параметр поврежденности принадлежит диапазону $0 \le \omega \le 1$, и в случае $\omega = 0$ материал не имеет повреждений, а при $\omega = 1$ считается полностью разрушенным. Непосредственно решение задачи минимизации потенциальной энергии с помощью метода конечных элементов более подробно будет представлено в следующем подразделе.

Численная реализация

В основу метода конечных элементов заложена задача минимизации полной потенциальной энергии:

$$\Pi = U - W \tag{2.1.10}$$

$$\delta\Pi = 0 \;\Rightarrow\; \delta U = \delta W \tag{2.1.11}$$

где П-полная потенциальная энергия, U-накопленная энергия, W-работа внешних сил. Как уже отмечалось ранее (2.1.1) работа внешних сил представляется в следующем виде:

$$\delta W = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{*} \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Omega + \int_{S} \mathbf{t}^{*} \cdot \delta \boldsymbol{u} dS \tag{2.1.12}$$

Для физически нелинейных задач, согласно документации конечно элементного комплекса ANSYS, накопленная внутренняя энергия:

$$\delta U = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{el} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}_{\text{tangent}} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \tag{2.1.13}$$

где $\mathbf{C}_{\text{tangent}}$ - касательный тензор жесткости.

Используя соотношения 2.1.12 и 2.1.13, уравнение равновесия 2.1.11 принимает следующий вид:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}_{\text{tangent}} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{*} \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Omega + \int_{S} \mathbf{t}^{*} \cdot \delta \boldsymbol{u} dS \tag{2.1.14}$$

После линеаризации баланс между внутренними и внешними силами в методе конечных элементов записывается в виде системы линейных уравнений следующего вида [172]:

$$[K] \cdot \{u\} = \{r\} \tag{2.1.15}$$

где ***K***-матрица жёсткости элемента, **r**-вектор невязок

$$\boldsymbol{K}_{ij} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{B}_i)^T \cdot \mathbf{C}_{\text{tangent}} \cdot \boldsymbol{B}_j d\Omega \tag{2.1.16}$$

$$\boldsymbol{r}_i = \int_{\Omega} (\boldsymbol{B}_i)^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{S} \mathbf{t}^* \cdot \delta \boldsymbol{u} dS \tag{2.1.17}$$

где $\boldsymbol{B}$ - матрица производных функций формы по координатам:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \end{bmatrix} \tag{2.1.18}$$

где N обозначает функцию формы, связанную с узлом i из всех m узлов элемента. Для плоского прямоугольного элемента функция формы определяется как:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i) \cdot (1 + \eta\eta_i) \tag{2.1.19}$$

где ξ, η — локальные координаты внутри элемента.

Решение данной системы заключается в итеративном определении значений перемещений $\{\mathrm{u}\}$, при которых внутренние силы, определяемые через матрицу жесткости, уравновешивают внешние нагрузки.

Структура программного комплекса ANSYS такова, что она обеспечивает возможность реализации пользовательских законов поведения материала через подключаемые динамические библиотеки на основе подпрограммы USERMAT. Совместимость подпрограммы USRMAT с остальными библиотеками программного комплекса обеспечивается предопределённым набором входных и выходных параметров [74, 75]. К входным параметрам относятся такие параметры как: приращения деформаций, время, номер элемента, основные механические свойства материала и т.п.

На основе входящих данных и результатов расчета напряжений, деформаций и поврежденности на предыдущих итерациях в подпрограмме USERMAT необходимо определить тензоры напряжений и пластических деформаций, уровень накопленных повреждений, упругую и пластическую плотность энергии деформации, а также матрицу Якоби для решения физически нелинейной задачи. Данный набор параметров уточняется на каждой итерации для каждой точки интегрирования конечного элемента.

На первом шаге реализации обобщенной модели накопления повреждений в программном комплексе расчётов по методу конечных элементов ANSYS согласно документации необходимо определить тензор упругих констант [75]:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.1.20)$$

В качестве основы для математического моделирования тензор деформаций формируется как сумма значений, полученных на предыдущем шаге, и приращений, вычисленных на текущем шаге нагружения.:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.1.21)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ – тензор деформаций на предыдущем шаге нагружения; $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор приращения деформаций на данном шаге нагружения.

В первом приближении на основе полученных приращений деформаций тензор напряжения вычисляется по закону Гука:

$$\boldsymbol{\sigma}_{etr} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{el} \quad (2.1.22)$$

Вычитая микронапряжение, получаем первое приближение упругих напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma}_r = \boldsymbol{\sigma}_{etr}^d - \boldsymbol{\beta} \quad (2.1.23)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_{etr}^d$ – тензор девиатор приближенных упругих напряжений (2.1.24).

Далее рассчитывается тензор-девиатор приближенных напряжений и определяются приближенные эквивалентные напряжения:

$$\boldsymbol{\sigma}_r^d = \begin{pmatrix} \sigma_r^{xx} - \sigma_r^{cp} & \sigma_r^{xy} & \sigma_r^{xz} \\ \sigma_r^{yx} & \sigma_r^{yy} - \sigma_r^{cp} & \sigma_r^{yz} \\ \sigma_r^{zx} & \sigma_r^{zy} & \sigma_r^{zz} - \sigma_r^{cp} \end{pmatrix}, \quad (2.1.24)$$

$$\sigma_r^{cp} = \frac{1}{3}(\sigma_r^{xx} + \sigma_r^{yy} + \sigma_r^{zz}), \quad (2.1.25)$$

$$\sigma_r^e = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_r^d : \boldsymbol{\sigma}_r^d}\ . \tag{2.1.26}$$

$\sigma_r^{xx}, \sigma_r^{yy}, \sigma_r^{zz}$ – напряжения главной диагонали тензора напряжений.

Аналогично поступают с эквивалентными деформациями:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \begin{pmatrix} \varepsilon^{xx} - \varepsilon^{cp} & \varepsilon^{xy} & \varepsilon^{xz} \\ \varepsilon^{yx} & \varepsilon^{yy} - \varepsilon^{cp} & \varepsilon^{yz} \\ \varepsilon^{zx} & \varepsilon^{zy} & \varepsilon^{zz} - \varepsilon^{cp} \end{pmatrix}. \tag{2.1.27}$$

$$\varepsilon^{cp} = \frac{1}{3}(\varepsilon^{xx} + \varepsilon^{yy} + \varepsilon^{zz}) \tag{2.1.28}$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d} \tag{2.1.29}$$

Предел текучести на данном шаге нагружения рассчитывается по экспоненциальному закону упрочнения Voce и зависит от накопленных пластических деформаций $\bar{\varepsilon}_{pl}$ определенных на предыдущем шаге:

$$k = \sigma_0 + R_{\text{inf}}(1 - \exp(-\gamma \cdot \bar{\varepsilon}_{pl})) \tag{2.1.30}$$

где R_{inf} – асимптотический предел временного сопротивления отрыву, γ – показатель упрочнения материала, σ_0 – предел текучести материала при одноосном статическом растяжении. Уравнение (2.1.30) описывает изотропное упрочнение, а k является границей поверхности текучести.

Критерий текучести на данном шаге нагружения в каждой точке интегрирования принимает форму:

$$\Phi = \frac{\sigma_r^e}{1 - \omega} - k \tag{2.1.31}$$

Определение параметра поврежденности осуществляется с помощью решения обобщенной системы уравнений (2.1.1-2.1.7). Решение основывается на итерационном методе Ньютона, который зависит от приращения пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}$. Таким образом, итоговая система уравнения для обобщенной модели записывается в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} A^{\Phi} \\ \mathbf{A}^{\sigma} \\ \mathbf{A}^{\beta} \\ A^{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_r^e}{1-\omega} - k\left(\varepsilon_{pl}^0 + d\bar{\varepsilon}_{pl}\right) \\ \boldsymbol{\sigma}_r - (1-\omega)\cdot \mathbf{C} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{elast} - d\bar{\varepsilon}_{pl}\cdot \mathbf{N}\right) \\ \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0 - d\bar{\varepsilon}_{pl}\cdot\left(a\mathbf{N} - b\boldsymbol{\beta}\right) \\ \omega - \omega_0 - \dfrac{1}{1-\omega}\cdot\left(\dfrac{-Y}{r}\right)^s \cdot d\bar{\varepsilon}_{pl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.32}$$

где нулевой индекс соответствует значениям, рассчитанным на предыдущей итерации,

$$\mathbf{N}\left(\boldsymbol{\sigma}_r, \boldsymbol{\beta}, \omega\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}_r}{(1-\omega)\sigma_r^e} \tag{2.1.33}$$

$$Y\left(\boldsymbol{\sigma}_r, \omega\right) = -\frac{1}{2(1-\omega)^2}\boldsymbol{\sigma}_r : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_r \tag{2.1.34}$$

Набор внутренних переменных, определяемых при решении системы уравнений (2.1.32) для упрощения изложения удобно представить в виде $\boldsymbol{\chi}\left(\boldsymbol{\sigma}_r, \omega\ , \Delta\varepsilon_{pl}, \boldsymbol{\beta}\ \right)$. Тогда для решения задачи система линеаризуется с помощью разложения в ряд Тейлора:

$$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\chi}^i\right) = \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\right)^{-1} : \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\chi}^{i-1}\right) + \left(\boldsymbol{\chi}^i - \boldsymbol{\chi}^{i-1}\right) \approx 0 \tag{2.1.35}$$

$$\boldsymbol{\chi}^i = \boldsymbol{\chi}^{i-1} - \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\right)^{-1} : \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\chi}^{i-1}\right) \tag{2.1.36}$$

$\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{J}$ – матрица Якоби

Величина $\boldsymbol{\chi}$ вычисляется итерационно, начальное приближение $\boldsymbol{\chi}^{i=0}$ выбирается исходя из значения внутренних переменных на предыдущем шаге нагружения, что соответствует предположению о малых приращениях. Такой выбор обеспечивает локальную сходимость метода Ньютона при малых шагах нагрузки. Матрица Якоби $\partial\mathbf{A}/\partial\chi$ используется для нахождения следующего приближения. Все зависимые переменные вычисляются на основе $\boldsymbol{\chi}^{i=-1}$ определенной на предыдущем шаге. Процесс продолжается до выполнения условия сходимости $\|\mathbf{A}(\gamma)\| \leq$ tol ≈ 0, после чего $\boldsymbol{\chi}$ принимается за результирующее решение.

Матрица Якоби формируется как матрица частных производных функций исходной системы уравнений по внутренним переменным. Таким образом, каждый элемент матрицы представляет собой частную производную одной из функций по одной из внутренних переменных.

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\chi}} = [\mathbf{J}] = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\sigma}^{\Phi} & A_{D}^{\Phi} & A_{\Delta\varepsilon_{pl}}^{\Phi} & \mathbf{A}_{\beta}^{\Phi} \\ \mathbf{A}_{\sigma}^{\sigma} & \mathbf{A}_{D}^{\sigma} & \mathbf{A}_{\Delta\varepsilon_{pl}}^{\sigma} & \mathbf{A}_{\beta}^{\sigma} \\ \mathbf{A}_{\sigma}^{\beta} & \mathbf{A}_{D}^{\beta} & \mathbf{A}_{\Delta\varepsilon_{pl}}^{\beta} & \mathbf{A}_{\beta}^{\beta} \\ \mathbf{A}_{\sigma}^{D} & A_{D}^{D} & A_{\Delta\varepsilon_{pl}}^{D} & \mathbf{A}_{\beta}^{D} \end{pmatrix} \tag{2.1.37}$$

В (2.1.37) верхний индекс определяет непосредственно функцию, а нижний индекс является параметром, по которому берется частная производная. Таким образом, компоненты матрицы запишутся в следующем виде [126, 27, 62]:

$$\mathbf{A}_{\sigma}^{\Phi} = \frac{\partial \mathbf{A}^{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{N} \tag{2.1.38}$$

$$A_{\Delta\varepsilon_{pl}}^{\Phi} = \frac{\partial A^{\Phi}}{\partial \Delta\varepsilon_{pl}} = -\gamma R_{\inf} e^{-\gamma\left(\varepsilon_{pl}^{0} + \Delta\varepsilon_{pl}\right)} \tag{2.1.39}$$

$$\mathbf{A}_{\beta}^{\Phi} = \frac{\partial \mathbf{A}^{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{N} \tag{2.1.40}$$

$$A_{D}^{\Phi} = \frac{\partial A^{\Phi}}{\partial D} = \frac{\sigma_r^e}{(1-\omega)^2} - \frac{3}{2(1-\omega)^2 \sigma_r^e} \boldsymbol{\sigma}_{etr}^{d} : \boldsymbol{\sigma}_r \tag{2.1.41}$$

$$\mathbf{A}_{\sigma}^{\sigma} = \frac{\partial \mathbf{A}^{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{1}^{sym} + (1-\omega)\Delta\varepsilon_{pl}\mathbf{C} : \left[\frac{3}{2\left(\sigma_r^e\right)^3 (1-\omega)} \left(\left(\sigma_r^e\right)^2 \mathbf{1}^{dev} \cdot - \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_r \otimes \boldsymbol{\sigma}_r \right) \right] \tag{2.1.42}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{A}_{D}^{\sigma} = \frac{\partial \mathbf{A}^{\sigma}}{\partial D} = \frac{3\left(\boldsymbol{\sigma}_{etr}^{d} : \boldsymbol{\sigma}_r\right)}{2(1-\omega)\sigma_r^e} + \\ + \mathbf{C} : \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{elast} - \Delta\varepsilon_{pl}\mathbf{N} + (1-\omega)\Delta\varepsilon_{pl} \left(\frac{9}{4\left(\sigma_r^e\right)^3} \frac{\left(\boldsymbol{\sigma}_{etr}^{d} : \boldsymbol{\sigma}_r\right)\boldsymbol{\sigma}_r}{(1-\omega)^2} - \frac{3}{2\sigma_r^e} \frac{\boldsymbol{\beta}}{(1-\omega)^2} \right) \right] \end{gathered} \tag{2.1.43}$$

$$\mathbf{A}_{\Delta\varepsilon_{pl}}^{\sigma} = \frac{\partial \mathbf{A}^{\sigma}}{\partial \Delta\varepsilon_{pl}} = (1-\omega)\mathbf{C} : \mathbf{N} \tag{2.1.44}$$

$$\mathbf{A}_{\beta}^{\sigma}=\frac{\partial\mathbf{A}^{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\left(1-\omega\right)\Delta\varepsilon_{pl}\mathbf{C}:\left[\frac{3}{2\left(\sigma_r^e\right)^3\left(1-\omega\right)}\left(\left(\sigma_r^e\right)^2\mathbf{1}^{sym}\cdot-\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_r\otimes\boldsymbol{\sigma}_r\right)\right] \quad (2.1.45)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma}^{\beta}=\frac{\partial\mathbf{A}^{\beta}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=a\Delta\varepsilon_{pl}\left[\frac{3}{2\left(\sigma_r^e\right)^3\left(1-\omega\right)}\left(\left(\sigma_r^e\right)^2\mathbf{1}^{dev}\cdot-\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_r\otimes\boldsymbol{\sigma}_r\right)\right] \quad (2.1.46)$$

$$\mathbf{A}_{D}^{\beta}=\frac{\partial\mathbf{A}^{\beta}}{\partial D}=-a\Delta\varepsilon_{pl}\left(\frac{9}{4\left(\sigma_r^e\right)^3}\frac{\left(\boldsymbol{\sigma}_{etr}^{d}:\boldsymbol{\sigma}_r\right)\boldsymbol{\sigma}_r}{\left(1-\omega\right)^2}-\frac{3}{2\sigma_r^e}\frac{\boldsymbol{\beta}}{\left(1-\omega\right)^2}\right) \quad (2.1.47)$$

$$\mathbf{A}_{\Delta\varepsilon_{pl}}^{\beta}=\frac{\partial\mathbf{A}^{\beta}}{\partial\Delta\varepsilon_{pl}}=b\boldsymbol{\beta}-a\mathbf{N} \quad (2.1.48)$$

$$\mathbf{A}_{\beta}^{\beta}=\frac{\partial\mathbf{A}^{\beta}}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\left(1+b\Delta\varepsilon_{pl}\right)\mathbf{1}^{sym}-a\Delta\varepsilon_{pl}\left[\frac{3}{2\left(\sigma_r^e\right)^3\left(1-\omega\right)}\left(\left(\sigma_r^e\right)^2\mathbf{1}^{sym}\cdot-\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_r\otimes\boldsymbol{\sigma}_r\right)\right] \quad (2.1.49)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma}^{D}=\frac{\partial A^{D}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{s\Delta\varepsilon_{pl}}{r\left(1-\omega\right)}\left(-\frac{1}{\left(1-\omega\right)^2}\mathbf{C}^{-1}:\boldsymbol{\sigma}_r\right)\left(\frac{-Y}{r}\right)^{s-1} \quad (2.1.50)$$

$$A_{D}^{D}=\frac{\partial A^{D}}{\partial D}=1-\frac{\Delta\varepsilon_{pl}}{\left(1-\omega\right)^2}\left(\frac{-Y}{r}\right)^{s} \quad (2.1.51)$$

$$A_{\Delta\varepsilon_{pl}}^{D}=\frac{\partial A^{D}}{\partial\Delta\varepsilon_{pl}}=\frac{1}{1-\omega}\left(\frac{-Y}{r}\right)^{s} \quad (2.1.52)$$

$$\mathbf{A}_{\beta}^{D}=\frac{\partial A^{D}}{\partial\boldsymbol{\beta}}=0 \quad (2.1.53)$$

В результате решения системы уравнений (2.1.32) определяются значения параметра поврежденности, тензора напряжений и тензора микронапряжений на текущей итерации. Далее на основе полученных значений рассчитывается касательный тензор жёсткости:

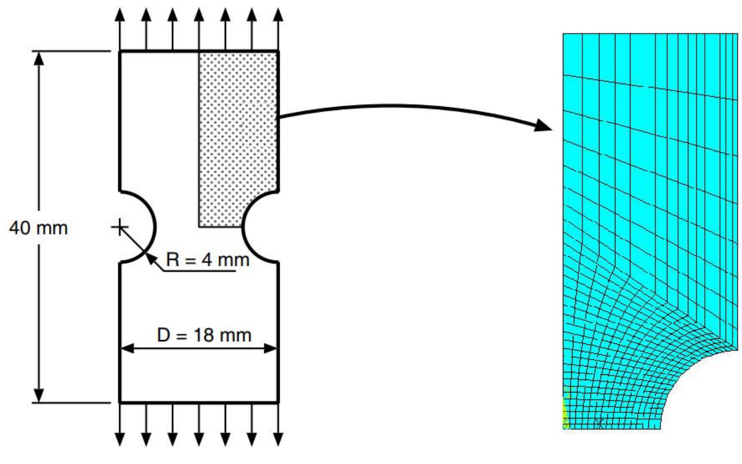
$$\mathbf{C}_{\text{tangent}}=\omega\mathbf{J}_{12}^{-1}:\mathbf{C} \quad (2.1.54)$$

На данном этапе осуществляется возврат управления из подпрограммы USERMAT в основной исполняющий модуль программы ANSYS, где происходит процесс ансамблирования глобальной матрицы жесткости и решение глобальной системы линейных уравнений. Сформированный алгоритм был реализован в виде программного кода на языке Fortran в виде динамически подключаемой библиотеки.

Верификация модели поврежденности

Верификация модели, основанной на алгоритме (2.1.20) - (2.1.54), осуществлялась поэтапно. На первом этапе, который представлен и описан в данном разделе, внимание сконцентрировано на верификации накопления пластической деформации и параметра поврежденности при монотонном статическом нагружении. Помимо этого, была проверена способность модели описывать диаграмму статического растяжения. Второй этап отнесен к верификации поцикловой кинетики накопления пластических деформаций и способности обобщенной модели описать кинетику петель гистерезиса при малоцикловой усталости.

В первом этапе верификации объектом исследований выступал цилиндрический образец с внешним кольцевым надрезом, подвергнутый монотонному осевому растяжению. Для сравнения полученных данных с известными в литературе, таких как параметр поврежденности и положение максимального значения поврежденности, была выбрана геометрия образца (Рис. 2.1.1а), использованная в работе [126].



а) б)

Рис. 2.1.1. Конечно-элементная модель образца

Расчетная схема метода конечных элементов была сформирована из восьмиузловых элементов второго порядка (рисунок. 2.1.1б). Задача моделировалась в осесимметричной постановке с приложением перемещений к верхней грани образца, максимальная величина которых u=0.576 мм соответствовала литературным данным [126].

Свойства используемого материала представлены в Таблице 2.1.1 и были получены в работе [126] путём проведения статических одноосных испытаний образцов из низкоуглеродистой стали AISI 1010.

E, МПа	σ_0, МПа	ν	R_{inf}	γ	r	s	a, МПа	b
210000	620	0.3	3300	0.4	1	3.5	2500	20

Таблица 2.1.1. Основные механические свойства материала стали AISI 1010

На рисунке 2.1.2 приведена зависимость параметра поврежденности от значения приложенных перемещений к верхней грани образца. Накопление повреждений в пределах численного эксперимента имеет идентичный характер по отношению к известным решениям в литературе [126]. При наблюдаемом качественном совпадении количественные отличия в результатах расчета обусловлены различиями программной реализации модели и размерностью конечно-элементной схемы.

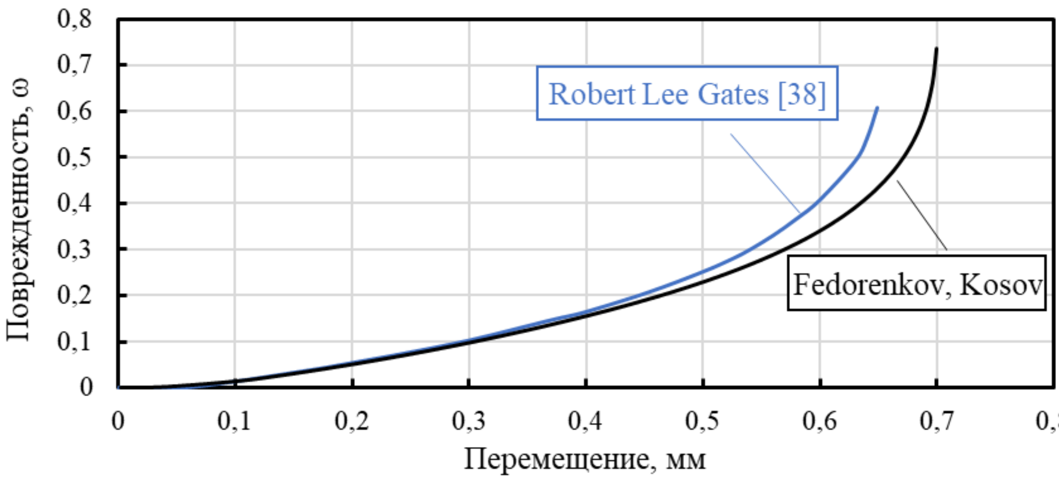


Рис. 2.1.2. Максимальное значение параметра поврежденности в зависимости от перемещения верхнего края образца

На рисунке 2.1.3 изображены контуры распределения поврежденности для различных стадий статического нагружения, полученные в результате численного расчета. В правом ряду показаны поля, полученные благодаря разработанной и внедренной динамической библиотеке, а в левом ряду – поля, приведенные в работе [126]. Можно наблюдать перераспределение полей повреждений по мере увеличения приложенных смещений к верхней грани образца. При малых значениях приложенных смещений максимум поврежденности располагается на внешней поверхности образца на контуре кольцевой выточки. По мере увеличения приложенных перемещений максимум повреждений смещается к линии симметрии образца. Данная тенденция изменения полей напряжений подтверждается литературными данными [109,126].

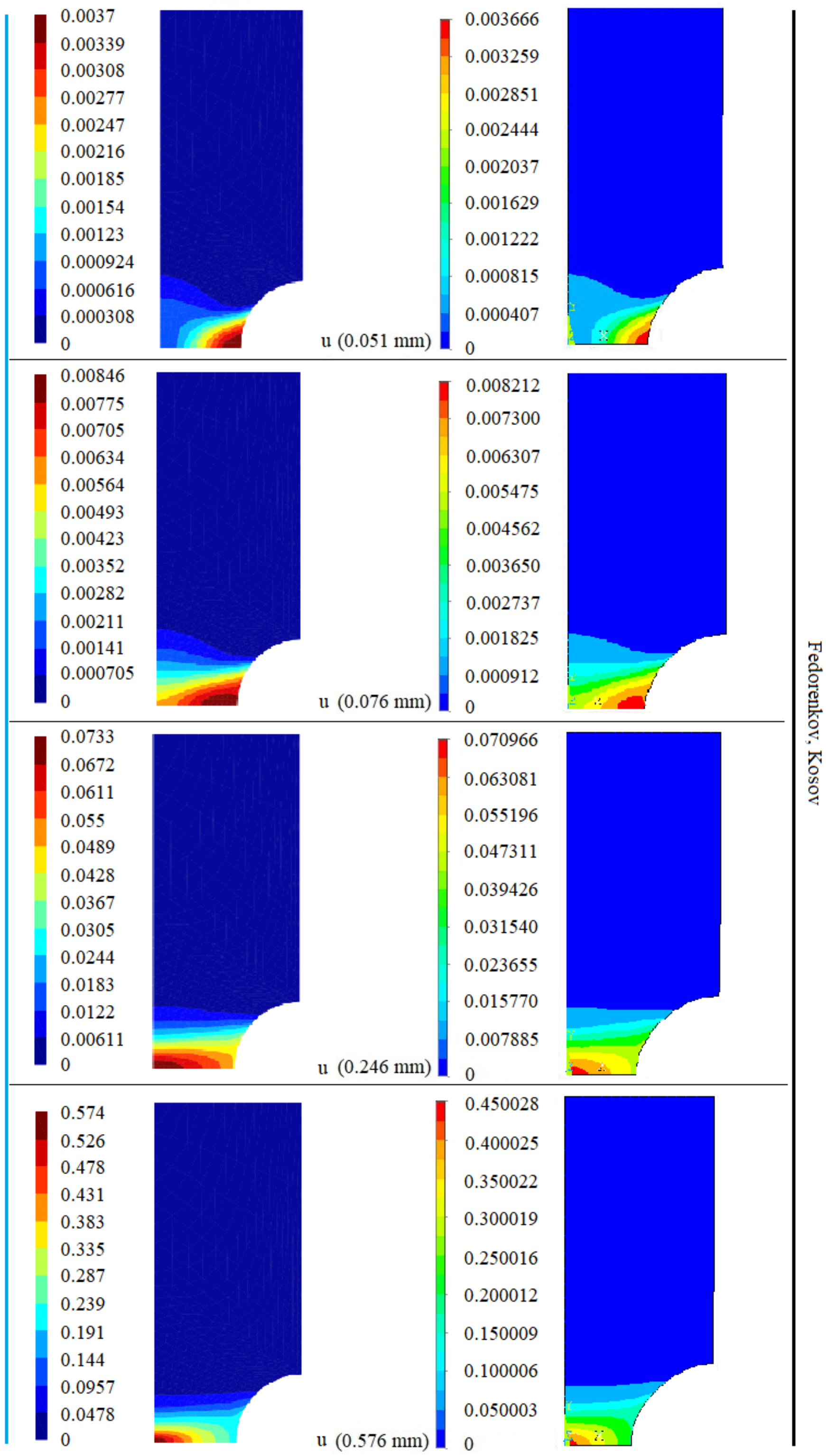


Рис. 2.1.3. Распределение параметра повреждённости в зависимости от перемещения верхнего края образца

Представленная реализация обобщенной модели в трёхмерной постановке позволяет существенно расширить набор объектов исследования и область применения разработанной модели. Помимо осесимметричной постановки, также была решена объемная задача моделирования монотонного нагружения образца с внешним кольцевым надрезом (рис. 2.1.4). Распределение параметра поврежденности, полученное при значении перемещая u=0.576 мм имеет идентичные значения с осесимметричной постановкой при соответствующем значении перемещения.

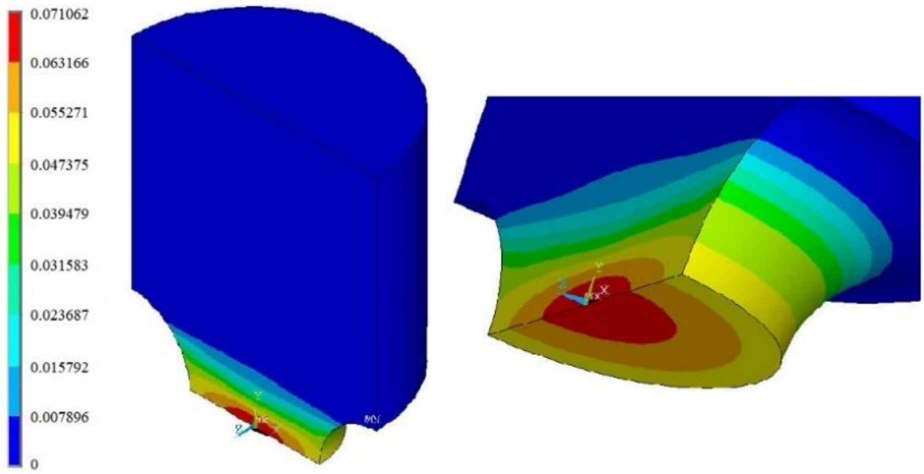


Рис. 2.1.4. Распределение параметра повреждённости при значении перемещения u=0.576 мм

На рисунке 2.1.5 изображена зависимость истинных напряжений от приложенных перемещений для узла с максимальным значением поврежденности (красный цвет), полученная с помощью численного расчета по методу конечных элементов с использованием собственной подпрограммы пользовательского материала. Можно заметить, что данная зависимость совпадает с экспериментальной (черный цвет), полученной в [109]. Помимо этого, на рисунке наглядно продемонстрировано, как повреждение в равной степени снижает предел текучести (синий цвет) и эквивалентные микронапряжения σ_β (зеленый цвет), являющиеся атрибутом кинематического упрочнения. При этом по мере накопления пластических деформаций параметр поврежденности, который связан с ними непосредственно, оказывает больше влияние на упомянутые напряжения. Это связано с тем, что в модели Lemaitre [157] эквивалентные напряжения заменяются на эффективные напряжения путем деления первых на величину

(1-ω). Приведённые распределения также подтверждаются литературными данными [109].

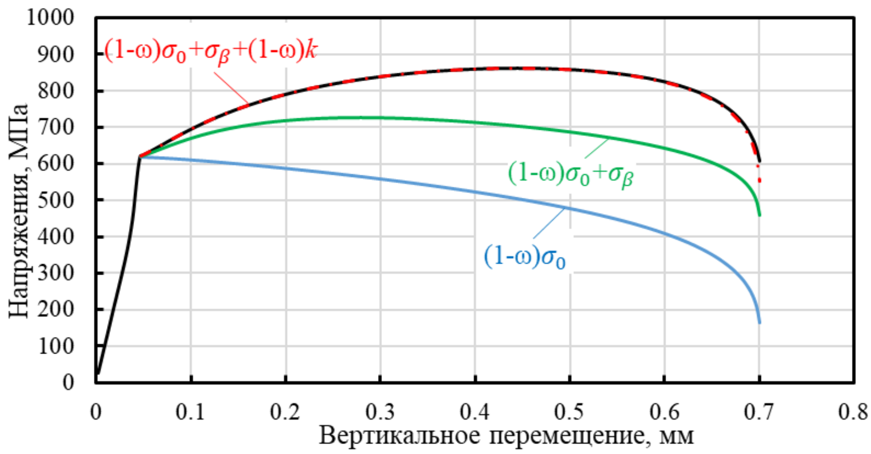


Рис. 2.1.5. Диаграммы одноосного растяжения стали AISI 1010

В результатах совместного решения уравнений (2.1.1)-(2.1.7), можно отметить подобие в изменении положения координаты максимума повреждений с известными трендами полученными по когезионным моделям [45, 90]. Когезионный подход так же широко используется в механике разрушения для описания поведения композиционных, квазихрупких и пластичных материалов.

На следующем этапе работы разработанная модель, основанная на системе уравнений (2.1.1)-(2.1.7), была использована для оценки предельного состояния материалов при многоосном статическом деформировании. Данная часть верификации модели состояла из совокупности экспериментальных и численных исследований. Цель экспериментальных исследований состояла в определении основных свойств материала при стандартном одноосном растяжении и характеристик сопротивления деформированию и разрушению при многоосном нагружении. Целью численных исследований была верификация разработанных моделей, путём сравнения предельных состояний с экспериментальными данными, а также определение наиболее опасного вида нагружения.

2.2. Критерии предельного состояния и функции многоосности НДС в силовой и деформационной трактовке

В области механики материалов, задачи, связанные со сложным напряженно-деформированным состоянием (НДС), требуют особого внимания при оценке долговечности материалов и несущей способности конструкций. Сложность таких задач заключается в том, что при многоосных нагрузках поведение материала существенно отличается от простых случаев одноосного растяжения или сжатия. В связи с этим перед изложением собственных результатов, в настоящем параграфе необходимо обратить внимание на классические теории прочности для сложного напряженного состояния. Под функциями многоосности понимаются уравнения, которые включают в себя для плоской задачи соотношения компонент нормальных напряжений в форме коэффициента двухосности, а для 3D-задач зависят от параметра трехосности в виде отношения гидростатических напряжений к эквивалентным по Мизесу напряжениям. Параметр трехосности можно еще выразить через отношение первого и второго инвариантов тензоров напряжений.

Основные задачи, решаемые в рамках сложного НДС, включают определение предельных состояний материалов, учет их поведения в процессе пластической деформации и оценку точности этих моделей с использованием численных и экспериментальных методов. Эти задачи становятся особенно актуальными при проектировании сложных конструкций, подвергающихся многоосному нагружению, таких как конструкции в авиации, энергетике, трубопроводном транспорте. Формулировка критериев прочности и пластичности, а также условий эквивалентности, представляет собой важный этап в развитии теории механики деформируемого твердого тела. Эти критерии служат основой для оценки предельных состояний материалов и конструкций при различных типах нагрузок.

Отметим, что в соответствии с первой теорией прочности опасное состояние наступает при достижении максимальным главным напряжением предела прочности материала. Данная теория дает удовлетворительный результат лишь в случаях хрупкого разрушения. Вторая теория прочности принимает в качестве критерия наибольшее относительное удлинение. Данный критерий был использован [65] для построения диаграммы механического состояния при различных способах нагружения и обобщенной оценки прочности материалов. Третья теория [226] принимает в качестве критерия прочности наибольшее касательное напряжение. Данная теория смогла объяснить разницу сопротивлений сдвигу и растяжению в пластическом состоянии материала, обнаруженную Баушингером, а также факт высокой прочности материалов при трехосном сжатии. Кроме того, теория дает хорошие результаты при оценке разрушения от сдвига, который является завершением развития пластических деформаций при наличии упрочнения [31, 47, 51]. Основным недостатком критерия является его плохая согласованность с экспериментальными данными в случае хрупкого состояния материала. Согласно четвертой теории [229] причиной разрушения материала является достижение удельной потенциальной энергии предельного значения. Третью и четвертую теории называют теориями пластичности благодаря хорошей согласованности с экспериментальными данными в случае пластического состояния материала. Перечисленные четыре теории прочности и пластичности считаются классическими. Существенные их недостатки относятся к ограничениям учета различий сопротивления одноосному растяжению и сжатию, а также отсутствием учета влияния шарового тензора напряжений [54].

Если при одноосном нагружении критерием разрушения могут служить максимальные нормальные или касательные напряжения, то при многоосном нагружении одного подобного параметра недостаточно. В зависимости от напряженно-деформированного состояния разрушение может происходить отрывом (максимальные нормальные напряжения) или сдвигом (максимальные касательные напряжения). Разрушение только от нормальных напряжений, как и только от касательных, практически невозможно. Достижение касательными напряжениями критического значения является только необходимым, но не достаточным условием. Роль касательных напряжений тем выше, чем ближе состояние материала к пластическому. Очевидно, что обобщенная теория должна сохранять справедливость как при хрупком, так и при пластическом состоянии материала, предотвращая разрушение или возникновение пластического течения.

Учет различного сопротивления растяжению и сжатию материала реализован в теории Mohr [181]. Согласно ей, нарушение прочности материала наступает либо при достижении касательными напряжениями некоторой критической величины, зависящей от нормальных напряжений, либо при достижении наибольшими нормальными напряжениями предельного значения. Третья классическая теория была улучшена путем добавления параметра χ, равного отношению предельных напряжений на растяжение σ_p^* к сжатию σ_c^*. Аналогичная модификация, но уже четвертой классической теории, предложена в работах [30, 31]. Данные теории применимы при $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_3 < 0$. В отличие от условия Mohr, критерий Писаренко-Лебедева [50] за счет введения параметра

χ, показал хорошее совпадение с экспериментальными данными для плоского напряженного состояния. Критерии Mohr и Писаренко-Лебедева являются положительными примерами обобщенного подхода к оценке прочности твердых тел.

Кривые предельного состояния твердых материалов при плоском напряженном состоянии в относительных координатах (рис. 2.2.1) демонстрируют, что в случае двухосного растяжения все приведенные выше теории показывают близкий результат в первом квадранте. В остальных случаях плоского напряженного состояния, особенно в области двухосного сжатия, положение предельных кривых существенно отличается.

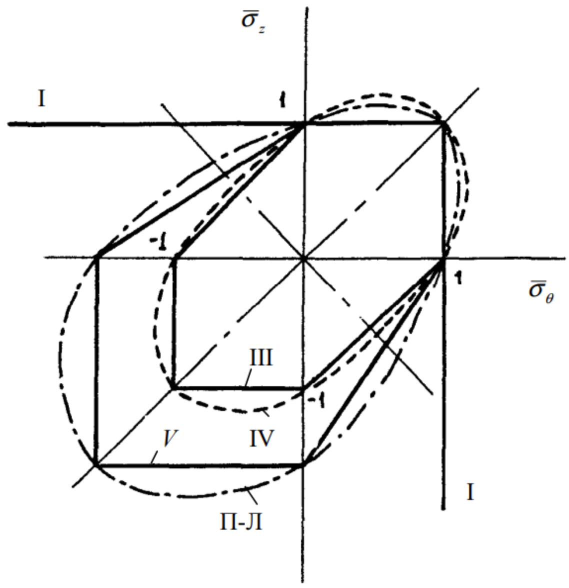


Рисунок 2.2.1. Кривых предельного состояния в относительных координатах [112]: I-IV – номера советующих классических теорий прочности, V – теория Mohr, ПЛ – теория Писаренко-Лебедева

По мнению автора [54], прочность и пластичность материалов существенно зависят от шарового тензора, а предельные поверхности текучести существенно отличаются от рассчитанных как по классическим гипотезам максимального касательного напряжения и энергии изменения формы, так и по их улучшенным вариантам. Как правило, критерии, учитывающие шаровой тензор, представляют собой математическую модель поверхности вращения в пространстве трех главных напряжений с осью, совпадающей с гидростатической осью.

Трактовку функций многоосности можно разделить на силовую и деформационную, каждая из которых предлагает свой подход к анализу поведения материалов в условиях сложного напряженного состояния. Силовая трактовка ориентирована на определение напряжений, возникающих в материале под воздействием внешних нагрузок. В этой трактовке основное внимание уделяется расчету эквивалентных напряжений, при которых возможно разрушение материала. Деформационная трактовка, в свою очередь, фокусируется на анализе деформаций, происходящих в материале под действием внешних сил. Здесь важным аспектом является учет как упругих, так и пластических деформаций, а также влияние накопленных деформаций на долговечность материала и его способность выдерживать многоосные нагрузки. В этой трактовке больше внимания уделяется критериям пластичности и предельных деформаций, которые описывают процесс разрушения через накопление пластических деформаций. В работе В.Н. Шлянникова и др. [68] проведено комплексное экспериментальное исследование предельных напряжений и деформаций алюминиевого сплава Д16Т при сложном напряженном состоянии. Рассмотрены различные виды комбинированного нагружения растяжением, сжатием, кручением и внутренним давлением. Установлено, что деформационный критерий статического разрушения является предпочтительным для описания поведения упрочняющегося материала при сложном напряженном состоянии по отношению к критериям прочности в условных упругих напряжениях. Наблюдались меньший разброс экспериментальных данных и лучшее согласие с теоретическим расчетом при использовании истинных упругопластических разрушающих напряжений и деформаций.

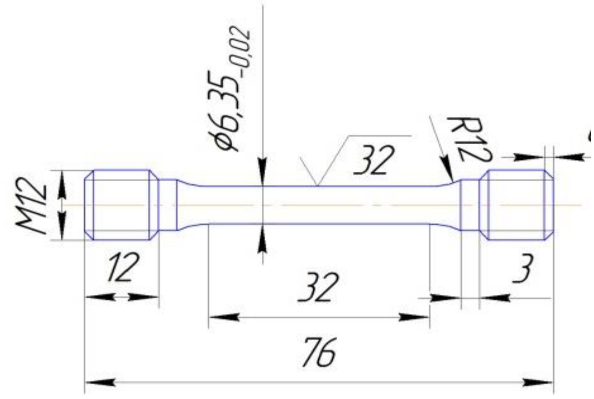
Известно, что при упругопластическом деформировании истинные напряжения и деформации отличаются от номинальных условных, причем различия становятся тем более существенны, чем больше величина накопленной пластической деформации. Для оценки реальной несущей способности материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии необходима новая формулировка теорий предельного состояния для общего трехмерного НДС, основанная на истинных величинах всех компонент тензоров напряжений и деформаций. Как правило, подобная формулировка теорий в явном виде затруднительна и в этой связи основные уравнения предельного состояния имеют феноменологический характер. Ключевые позиции в разработке таких теорий принадлежат поиску набора параметров, чувствительных к виду сложного напряженного состояния. Следуя этому постулату, в настоящей диссертационной работе была использована функция многоосности (2.1.9), которая учитывает гидростатическое напряжение и все компоненты тензора напряжений и деформаций. В разделе 2.3

представлен анализ напряжено-деформированного состояния образцов из алюминиевого сплава Д16Т при сложном напряжённом состоянии с учётом повреждённости.

2.3. Экспериментальные и численные исследования предельного состояния при монотонном статическом многоосном нагружении на основе численной реализации предложенной модели

На первом этапе экспериментального исследования было проведено испытание на одноосное растяжение гладкого цилиндрического образца (Рис.2.3.1б) для определения основных механических свойств алюминиевого сплава Д16Т [26, 144]. Испытание проводилось на универсальной испытательной машине УТС 111.2-50-23 согласно ГОСТ № 1497-84. Измерение деформаций осуществлялось с помощью навесного измерителя деформаций TC 703-3549-025M-050-ST (Рис. 2.3.1а). Результатом испытания является диаграмма одноосного растяжения (Рис. 2.3.2), а также основные механические свойства материала (Таб. 2.3.1). Полученная в результате испытаний диаграмма была аппроксимирована по экспоненциальному и линейно-степенному закону.

а)



б)

Рис. 2.3.1. Установка для испытаний конструкционных материалов УТС 111.2-50-23 (а) и образец для статических испытаний (б)

E, МПа	σ_0, МПа	S_k, МПа	$R_{\inf}$, МПа	γ	n
75000	430	590	3000	15.5	6.25

Таблица 2.3.1. Основные механические свойства сплава Д16Т

В данной таблице σ_0 – предел текучести материала, S_k – истинное сопротивление отрыву, $R_{\inf}$ – асимптотический предел временного сопротивления отрыву, γ – показатель упрочнения материала, n - показатель деформационного упрочнения.

На рисунке 2.3.2 показано отличие истинной диаграммы деформирования от аппроксимирующих функций. Было установлено, что для материала Д16Т предпочтительно использовать экспоненциальный закон изотропного упрочнения.

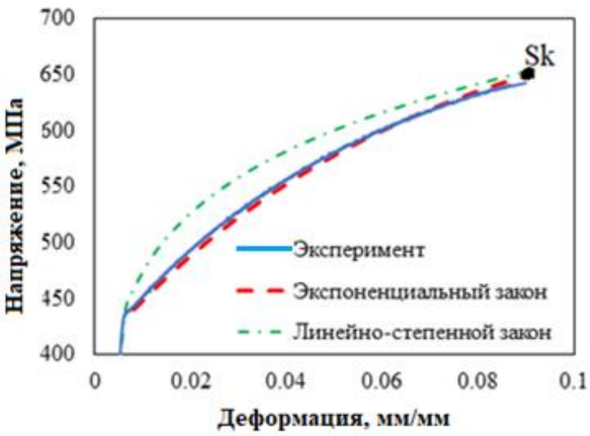
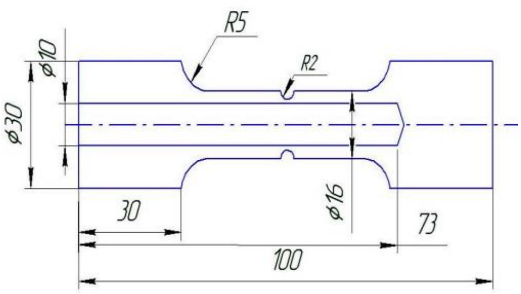


Рис. 2.3.2 Диаграмма одноосного растяжения алюминиевого сплава Д16Т

Объектом второго этапа экспериментальных исследований являлся полый цилиндрический образец с кольцевой выточкой (Рис. 2.3.3б). Толщина стенки цилиндра в гладком образце и в минимальном сечении образца с концентратором составляла t=1мм. Испытания проводились на установке Bi-00-701 Axial-Torsion Test System (Рис. 2.3.3а), на которой возможна реализация нагружения осевыми силами, крутящим моментом, внутренним давлением, а также их различные комбинации. При испытаниях, включающих в себя растяжение и сжатие, использовался осевой экстензометр. Для измерений окружных деформаций при испытаниях на внутреннее давление использовался поперечный экстензометр.



а) б)

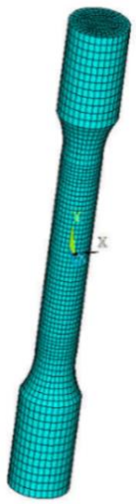
Рис. 2.3.3. Испытательная установка (а) и образец с концентратором напряжений (б)

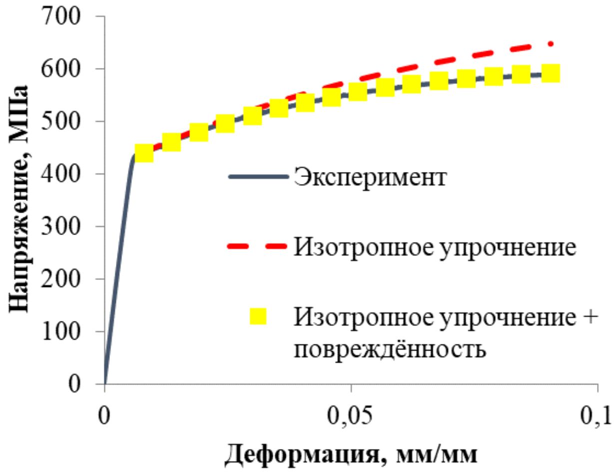
Программа экспериментов включала различные сочетания осевых сил, крутящего момента и внутреннего давления, приложенного к цилиндрическому образцу. Полученные в результате испытаний значения предельных нагрузок приведены в (Таб.2.3.2).

Вид нагружения	**Усилие**	**Внутреннее давление**	**Крутящий момент**
	P, Н	**q, МПа**	**M, Н*м**
Растяжение	17420	0	0
Растяжение + внутреннее давление	16480	21.88	0
Растяжение + внутреннее давление+ кручение	18284	17.48	5.32
Сжатие	-17839	0	0
Сжатие + внутреннее давление	-17619	23.71	0
Сжатие + внутреннее давление + кручение	-16949	19.48	4.71

Таблица 2.3.2. Результаты статических испытаний

На первом этапе верификации параметров модели накопления повреждений (2.1.7) было смоделировано испытание на одноосное растяжение алюминиевого сплава Д16Т. Объектом численных расчетов выступал гладкий цилиндрический образец (Рис. 2.3.1б) диаметром d=6мм и длиной рабочей части l = 32мм. Для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) в упруго-пластической постановке использовались трехмерные расчетные схемы, показанные на (Рис.2.3.4а). Расчётные схемы сформированы из объемных 20-узловых изопараметрических элементов второго порядка. Для моделирования эксперимента на расчётной схеме были заданы точки, которые являются местами контакта экстензометра и образца. Граничные условия моделировались путём приложения перемещений к захватной части образца до значения, при котором разрушился гладкий образец в испытании на одноосное растяжение. На каждом этапе нагружения были получены значения действующего усилия и расстояние между контактными ножами экстензометра. Результатом испытания являлась диаграмма одноосного растяжения, показанная на (Рис. 2.3.4б). На рисунке 2.3.4 также показаны результаты двух численных расчётов, с учетом накопления повреждений и без соответствующего учета. Различие полученных диаграмм характеризует накопление повреждений. Можно сделать вывод, что при анализе напряжённо-деформированного состояния необходимо использовать закон накопления повреждений.





а) б)

Рис. 2.3.4. Диаграмма одноосного растяжения алюминиевого сплава Д16Т

Для анализа напряжено-деформированного состояния алюминиевого сплава Д16Т при сложном напряжённом состоянии были сформированы трёхмерные расчётные схемы (рис.2.3.5) из объемных 20-узловых изопараметрических элементов. В зоне концентратора в виде кольцевой выточки произведено сгущение сетки для определения распределения напряжений и параметра повреждённости по толщине образца. Реализованная матрица расчётов полого цилиндрического образца с кольцевой выточкой под воздействием комбинированных нагрузок представлена в Таб.2.3.2. Результаты численного исследования представлены в Таб. 2.3.3.

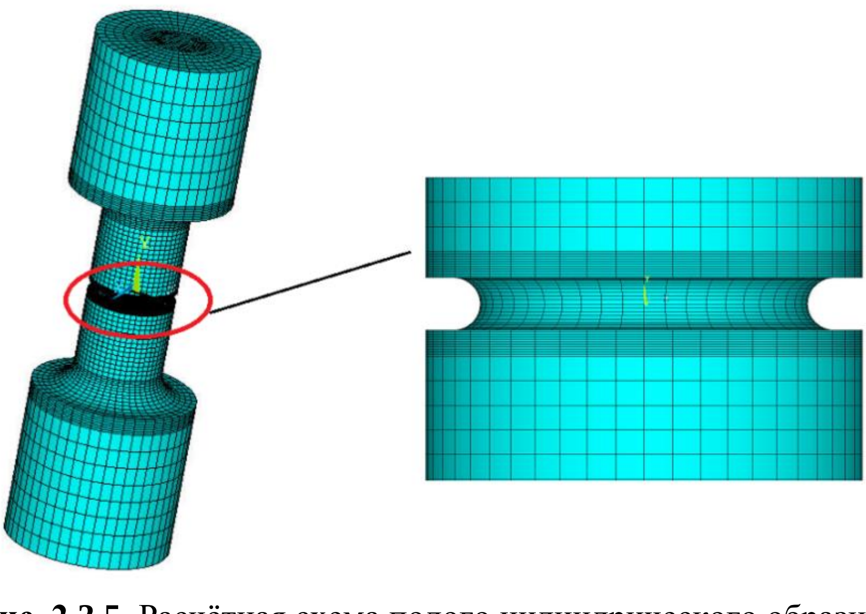


Рис. 2.3.5. Расчётная схема полого цилиндрического образца

Вид нагружения	Максимальное значение параметра повреждённости, ω %
Растяжение	1.55
Растяжение + внутреннее давление	2.47
Растяжение + внутреннее давление+ кручение	5.41
Сжатие	1.72
Сжатие + внутреннее давление	0.98
Сжатие + внутреннее давление + кручение	0.98

Таблица 2.3.3. Значение параметра поврежденности для рассмотренных видов нагружения

На рисунке 2.3.6 представлено распределение накопленных повреждений по толщине стенки в зоне кольцевой выточки. Для количественного анализа распределения повреждений, параметр повреждённости был нормирован на максимальное значение повреждённости из всей матрицы расчётов, который составляет 5.41%. Установлено, что максимальное значение параметра повреждённости достигается при сочетании нагрузок в виде одноосного растяжения, крутящего момента и внутреннего давления. Таким образом, такой вид многоосного нагружения является наиболее опасным. Так же следует отметить, что идентичный характер накопления повреждений наблюдается при сочетаниях Сжатие+Внутреннее давление и Сжатие + Внутреннее давление + Кручение.

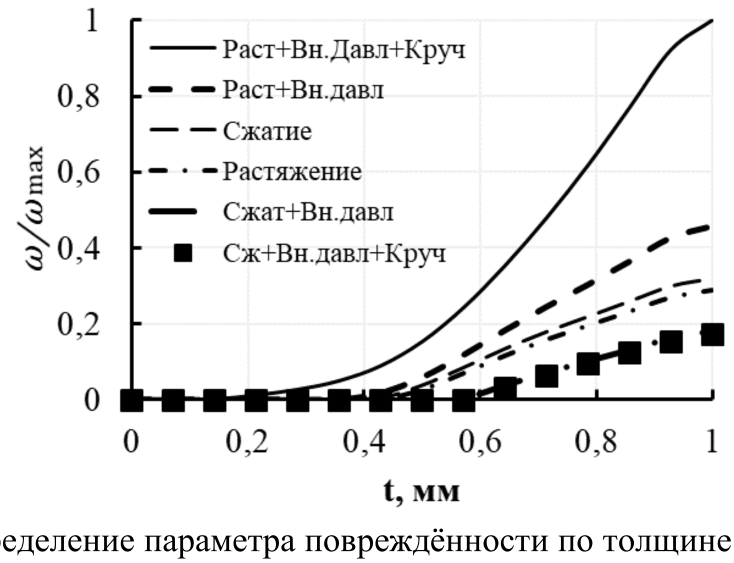


Рис. 2.3.6. Распределение параметра повреждённости по толщине стенки образца (t – минимальная толщина стенки образца в зоне выточки)

На рисунке 2.3.7 приведены распределения параметра повреждённости по толщине стенки в зоне кольцевой выточки. В данном случае текущие значения повреждений нормированы на величину $\omega_{\max}^{i}$, которая является максимальным значение параметра поврежденности для каждого из видов нагружения. Из графика видно, что при нагружении при совместном действии растягивающих нагрузок, внутреннего давления и кручения накопленные повреждения распределены по всей толщине стенки, а максимальное значение параметра повреждённости наблюдается в вершине кольцевой выточки. Однако при нагружении одновременным сжатием, внутренним давлением и кручением накопление повреждений начинается не с внутренней стенки, а с середины сечения стенки. Такой же эффект наблюдается и при взаимодействии сжатия и внутреннего давления.

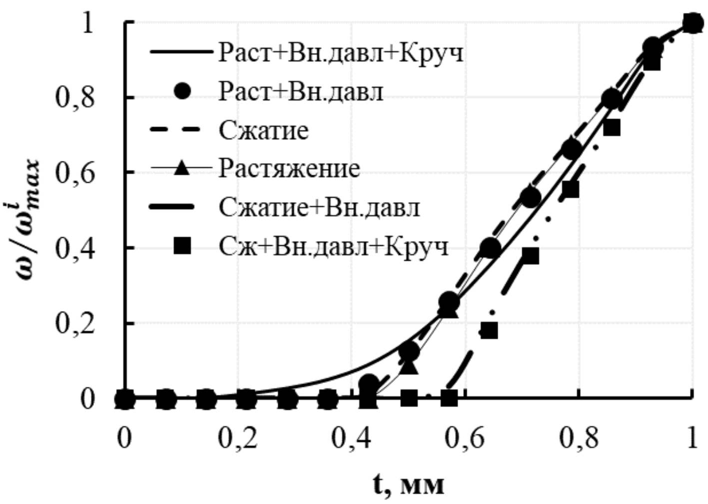


Рис. 2.3.7. Распределение параметра повреждённости по толщине стенки образца (t – минимальная толщина стенки образца в зоне выточки)

Анализ эффектов распределения напряжений в образцах рассматриваемой геометрии проводился на основе распределений коэффициента двухосности. Коэффициент двухосности определяет отношение осевых напряжений, к окружным напряжениям $\eta = \sigma_{zz} / \sigma_{\phi\phi}$. На рисунке 2.3.8 представлено распределение коэффициента двухосности по толщине стенки для различных видов напряжённого состояния. Из рисунка 2.3.8 следует, что во всех рассматриваемых случаях нагружения коэффициент двухосности в вершине кольцевой выточки находится в диапазоне $1.9 < \eta < 2.1$. Также можно заметить, что перераспределение напряжений при растяжении и сжатии полностью совпадают.

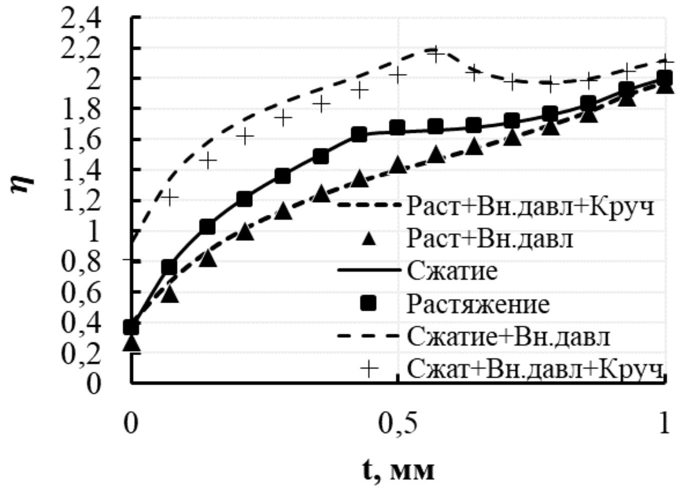


Рис. 2.3.8. Распределение коэффициента двухосности по толщине стенки образца (t – минимальная толщина стенки образца в зоне выточки)

Традиционной для оценки влияния сложного напряженного состояния на свойства материала является сравнение экспериментальных данных с классическими теориями прочности. Для этой цели использованы теория максимальных нормальных напряжений, теория максимальных касательных напряжений, обобщенный критерий Писаренко – Лебедева в форме:

$$\chi \cdot \sigma_E + (1-\chi) \cdot \sigma_1 \le \sigma_{растяжение}. \qquad (2.3.1)$$

где константа $\chi = \sigma_{растяжение} / \sigma_{сжатие}$ определяется отношением прочности при растяжении к прочности при сжатии. Для алюминиевого сплава Д16Т $\chi = 0,97$.

На рисунке 2.3.9 показано сопоставление классических теорий прочности и численно полученных величин предельных напряжений для шести вариантов сложного напряжённого состояния алюминиевого сплава Д16Т в нормированных координатах, когда текущие значения нормальных напряжений отнесены к величине предела текучести материала. Из диаграммы следует, что в первом квадранте диаграммы предельных состояний, когда коэффициент двухосности $\eta \ge 0$, для описания предельного состояния достаточно первой теории прочности (теории максимальных нормальных напряжений). Однако в четвертом квадранте, когда коэффициент двухосности $\eta < 0$, необходимо воспользоваться критерием Писаренко – Лебедева. Особенность подобных исследований состоит в том, что известные в литературе [142] упругие решения для зон концентрации напряжений в полых цилиндрах не применимы для анализа предельного состояния при нелинейном деформировании.

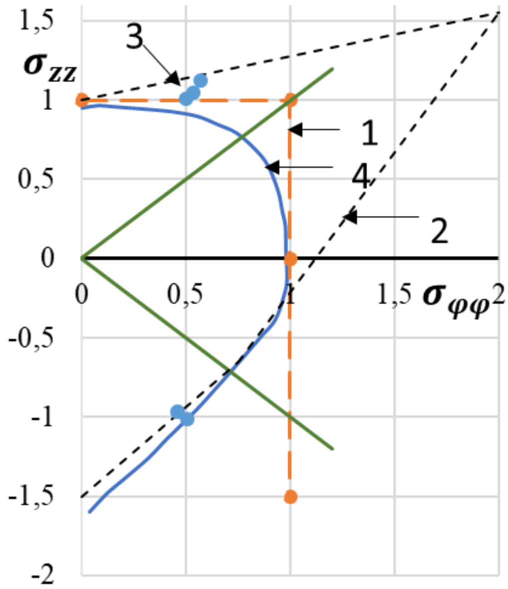


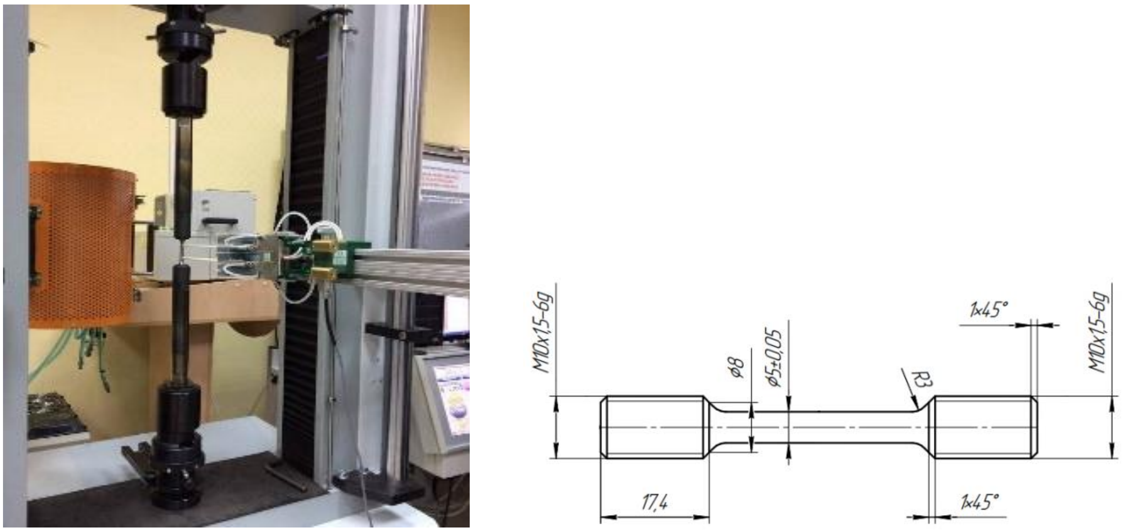
Рис. 2.3.9. Диаграмма предельных состояний (1 – теория максимальных нормальных напряжений; 2 – теория максимальных касательных напряжений; 3 – расчетные значения эквивалентных напряжений по Мизесу с учётом повреждённости; 4 – критерий Писаренко – Лебедева)

В результате проведенных численно-экспериментальных исследований была продемонстрирована возможность оценки предельного состояния при многоосном статическом деформировании на основе разработанной обобщенной модели накопления повреждений. При моделировании циклического нагружения необходимо разграничивать вклад изотропного и кинематического упрочнения в нелинейное поведение материала.

2.4. Расчетно-экспериментальные алгоритмы, методы и результаты определения констант уравнений поведения среды и накопления повреждений при монотонном и циклическом нагружении по моделям Lemaitre-Frederiks и Chaboche

Для прогнозирования долговечности материала с использованием разработанной модели, необходимо определение параметров закона накопления повреждений, законов изотропного и кинематического упрочнения. В связи с этим данный раздел посвящен реализации и верификации метода идентификации параметров обобщенной модели на примере роторной стали Р2М. В основе метода лежат два вида стандартных испытаний, а именно на одноосное растяжение и малоцикловую усталость.

В первую очередь на универсальной испытательной машине УТС 111.2-50-23 было проведено испытание на одноосное растяжение согласно ГОСТ № 1497-84. Измерение деформаций осуществлялось с помощью датчика деформаций ТС 703-3549-025М-050-ST (Рис. 2.4.1а). В результате испытаний была получена диаграмма одноосного растяжения стали Р2М (Рис. 2.4.2), а также ее основные механические характеристики (Таб. 2.4.1).



а) б)

Рис. 2.4.1. Установка для испытаний конструкционных материалов УТС 111.2-50-23 (а) и образец для статических испытаний (б)

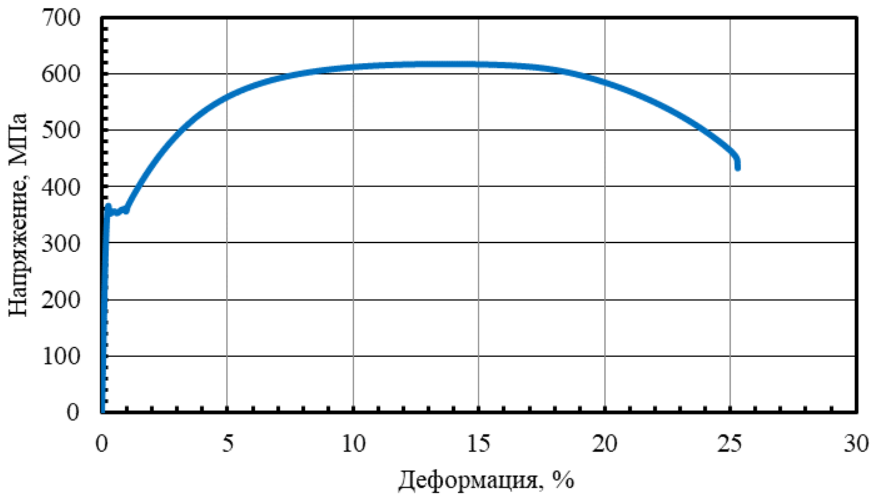
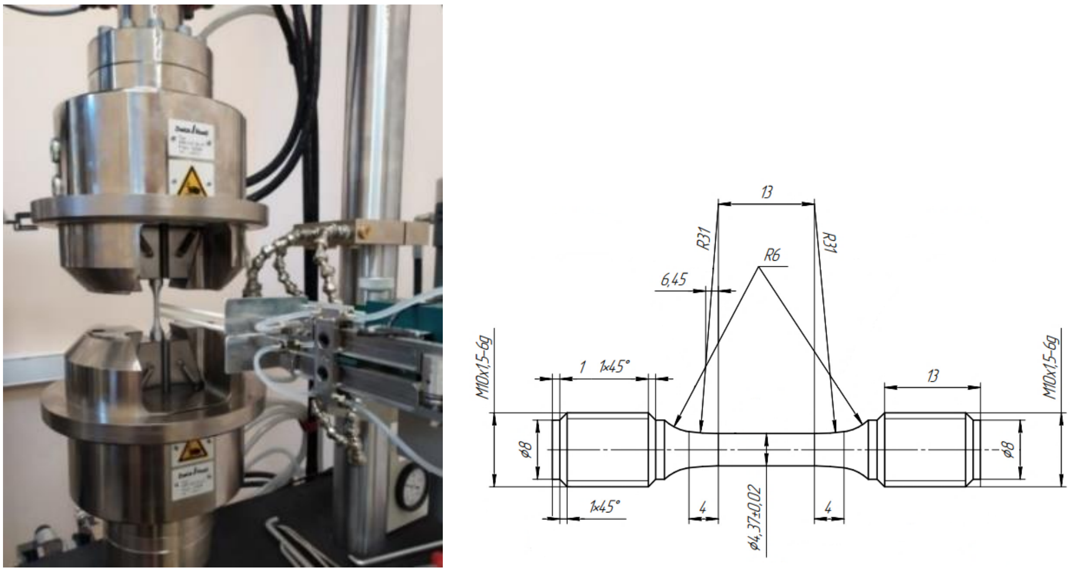


Рис. 2.4.2. Диаграмма одноосного растяжения стали Р2М

Модуль упругости	Предел текучести	Истинное сопротивление отрыву	Предел прочности	Относительное удлинение	Относительное сужение
E, МПа	σ_0, МПа	$\sigma_{разр}$, МПа	$\sigma_в$, МПа	δ, %	ψ, %
211220	353.26	617.72	432.89	25.29	61.53

Таблица 2.4.1. Основные механические свойства стали Р2М

Испытания на малоцикловую усталость при комнатной температуре проводились при постоянной амплитуде номинальных напряжений $\sigma_н = P / A_0$, выражающих отношение приложенной нагрузки P к начальной площади образца A_0 с коэффициентом асимметрии цикла $R = -1$. Испытания проводились на установке для испытаний конструкционных материалов Zwick/Roell HA100 согласно ГОСТ 25.502-79 (с учетом ГОСТ 25.505-85, ASTM E 606). С помощью навесного измерителя деформаций TC 703-3549-010-050-ST (Рис. 2.4.3а) производилась регистрация петель гистерезиса. В результате была получена кривая усталости стали Р2М (Рис. 2.4.4).



а) б)

Рис. 2.4.3. Установка для испытаний конструкционных материалов Zwick/Roell HA100 (а) и образец для испытаний на малоцикловую усталость (б)

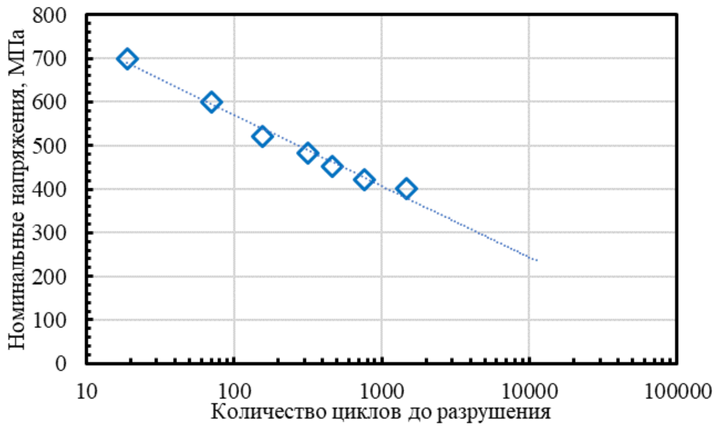


Рис. 2.4.4. Экспериментальная кривая усталости стали Р2М

Ранее было отмечено, что изотропное упрочнение учитывает расширение поверхности текучести. Экспоненциальный закон изотропного упрочнения (2.2.1) включает две искомые константы $R_{\inf}$ и γ. Параметр $R_{\inf}$ характеризует асимптотический предел временного сопротивления, к которому стремятся напряжения вплоть до истинного напряжения отрыва S_k (Рис. 2.4.5). Параметр γ учитывает кривизну зависимости напряжение-деформация при стремлении к $R_{\inf}$.

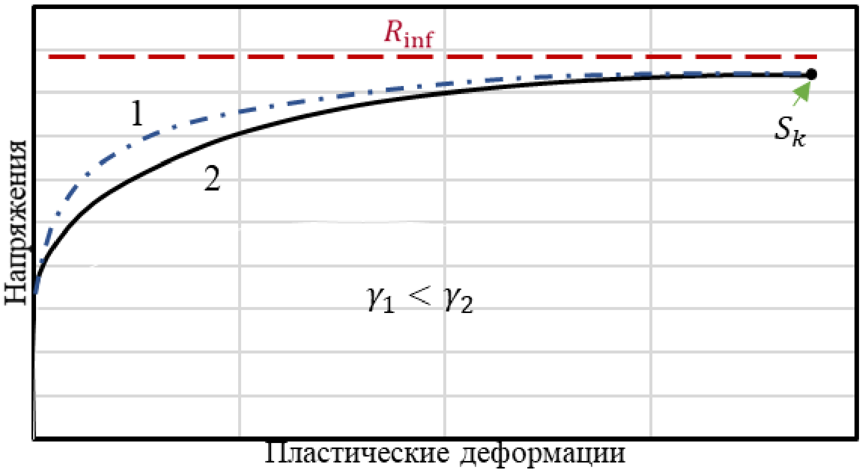


Рис. 2.4.5. Схематическое изображение экспоненциального закона упрочнения

Определить $R_{\inf}$ и γ можно аппроксимируя диаграмму статического растяжения в истинных координатах напряжение-деформация методом наименьших квадратов:

$$R_{\inf_n} = \exp\left(\frac{\sum \ln\left(\sigma_0 + R_{\inf_{n-1}} - \sigma^e\right)\cdot\sum\left(\varepsilon_{pl}^e\right)^2 - \sum\left(\ln\left(\sigma_0 + R_{\inf_{n-1}} - \sigma^e\right)\cdot\varepsilon_{pl}^e\right)\cdot\sum\varepsilon_{pl}^e}{n\cdot\sum\left(\varepsilon_{pl}^e\right)^2 - \left(\sum\varepsilon_{pl}^e\right)^2}\right) \quad (2.4.1)$$

$$\gamma = \frac{n\cdot\sum\left(\ln\left(\sigma_0 + R_{\inf_{n-1}} - \sigma^e\right)\cdot\varepsilon_{pl}^e\right) - \sum\ln\left(\sigma_0 + R_{\inf_{n-1}} - \sigma^e\right)\cdot\sum\left(\varepsilon_{pl}^e\right)^2}{n\cdot\sum\left(\varepsilon_{pl}^e\right)^2 - \left(\sum\varepsilon_{pl}^e\right)^2}, \quad (2.4.2)$$

$$\left|R_{\inf_n} - R_{\inf_{n-1}}\right| < 0.001, \quad (2.4.3)$$

где σ^e – напряжение на диаграмме растяжения, соответствующее накопленной пластической деформации ε_{pl}^e, n – количество точек на диаграмме растяжения, участвующие в аппроксимации.

Определение констант закона накопления повреждений Lemaitre

Эволюция параметра поврежденности Lemaitre была описана с помощью диаграммы одноосного растяжения следующим образом (Рис. 2.4.6): до предела текучести материала в области упругих деформаций поврежденность отсутствует. Как только возникнет пластическая деформация, уровень поврежденности начинает возрастать. Однако до достижения напряжения, соответствующего пределу прочности материала, уровень поврежденности будет незначительным.

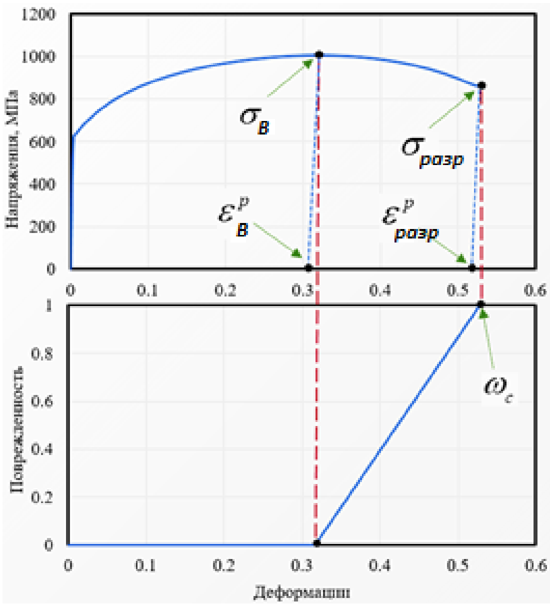


Рис. 2.4.6. Схематическое изображение эволюции параметра поврежденности в ходе испытания на статическое растяжение

После преодоления σ_B в материале лавинообразно увеличивается параметр поврежденности ω (этот момент сопровождается образованием шейки у образца) вплоть до разрушения при напряжении разрушения $\sigma_{разр}$ и критическом параметре поврежденности ω_c. Несмотря на теоретический предел $\omega_c = 1$, в действительности разрушение происходит при $0.2 \le \omega_c \le 0.5$. При этом критическое значение поврежденности представляет свойство материала при заданной температуре.

Определить критический параметр поврежденности возможно, зная значения предела прочности и истинного сопротивления отрыву:

$$\omega_c = 1 - \frac{\sigma_{разр}}{\sigma_B}. \qquad (2.4.4)$$

Закон Lemaitre (2.1.7) описывает кинетику накопления поврежденности с помощью параметров r, s. На рисунке 2.4.6 изображен линейный характер развития поврежденности при $s=1$.

При условии, что материал является идеально пластичным в случае одноосного растяжения, уравнение (2.1.7) примет следующий вид:

$$\dot{\omega}=\dot{\varepsilon}_{pl}^{e}\cdot\left(\frac{\sigma_{\max}^{2}}{2Er(1-\omega)^{2}}\right)^{s}. \qquad (2.4.5)$$

При монотонном нагружении, интегрируя (2.4.5) по пластической деформации, и предполагая, что материал изотропный, а поврежденность изменяется от нуля до критического значения $0\le\omega\le\omega_c$ во время изменения пластической деформации от ее значения при пределе прочности до значения при истинном напряжении разрушения $\varepsilon_B^p\le\varepsilon^p\le\varepsilon_{разр*}^p$ [126, 120], получим:

$$\omega_c=\left(\frac{\sigma_B^2}{2Er}\right)^{s}\left[\varepsilon_{разр*}^{p}-\varepsilon_B^p\right], \qquad (2.4.6)$$

$$\varepsilon_{разр*}^{p}=2\left(1-\sqrt{1-\psi}\right), \qquad (2.4.7)$$

где ψ – относительное сужение образца в процессе испытания на статическое растяжение.

Интегрируя уравнение (2.4.5) по количеству циклов, начиная с цикла, на котором начинается рост повреждений, до последнего цикла перед разрушением N_R с одной стороны, и от 0 до ω_c с другой, можно найти долговечность до разрушения:

$$N_R=\frac{\varepsilon_u^p}{2\cdot\Delta\varepsilon_{pl}}\left(\frac{\sigma_B-\sigma_r}{\sigma_{\max}-\sigma_r}\right)^{m}+\frac{1-\left(1-\omega_c\right)^{2s+1}}{2\left(2s+1\right)\omega_c\Delta\varepsilon^{p}}\left(\frac{\sigma_B}{\sigma_{\max}}\right)^{2s}\left[2\left(1-\sqrt{1-\psi}\right)-\varepsilon_B^p\right] \qquad (2.4.8)$$

где σ_r – предел выносливости, определяемый из испытаний на малоцикловую усталость.

Определив из испытаний количество циклов до разрушения N_R и ширину петли первого цикла $\Delta\varepsilon_{pl}$ для каждого уровня нагрузки $\sigma_{\max}$, можно определить параметры s и m. Из уравнения (2.4.8) следует, что существует некое парное значение параметров s и r, удовлетворяющие постоянному ω_c. Следовательно,

$$r=\frac{\sigma_B^2}{2E}\left(\frac{2\left(1-\sqrt{1-\psi}\right)-\varepsilon_B^p}{\omega_c}\right)^{1/s}. \tag{2.4.9}$$

Определение констант кинематического упрочнения

Константы кинематического упрочнения в уравнении (2.4.10) определяются в зависимости от целей и задач, которые стоят перед исследователем или инженером. Если целью является моделирование только монотонного нагружения, то идентифицировать a и b возможно методом наименьших квадратов, взяв за основу выражение:

$$\beta=\sigma-\sigma_Y=\frac{a}{b}\cdot\left[1-\exp\left(-b\varepsilon_{pl}\right)\right]. \tag{2.4.10}$$

Если целью является моделирование кинетики накопления пластической деформации при циклическом нагружении, то определение параметров несколько усложняется. Необходимо знать зависимость изменения ширины первой петли в первом цикле от уровня приложенных напряжений (номинальных напряжений) в испытаниях на малоцикловую усталость, благодаря которым была получена диаграмма распределения микронапряжений (Рис. 2.4.7).

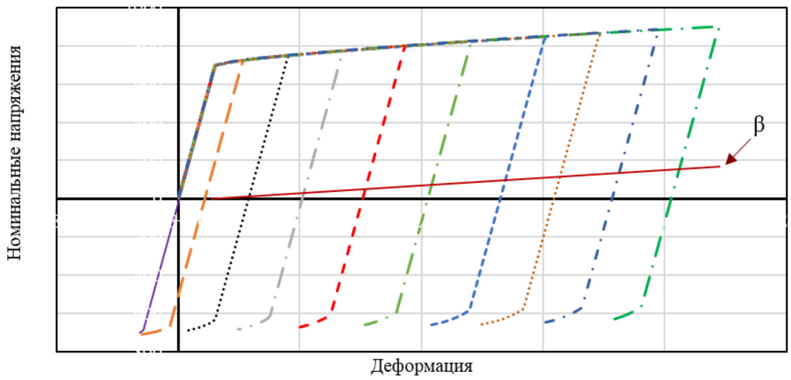


Рис. 2.4.7. Схематическое изображение диаграммы циклического деформирования для первого цикла при различном уровне номинальных напряжений и распределение микронапряжений

Далее из полученной совокупности первых циклов при различных уровнях циклического нагружения вычисляется величина смещения центра поверхности текучести – микронапряжения. Из определения эффекта Баушингира следует, что материал при разгрузке из состояния максимального осевого напряжения ведет себя упруго до точки, где разница между максимальным напряжением и пределом пропорциональности при сжатии равна удвоенной величине предела текучести. Величина микронапряжения есть разница между максимальным осевым напряжением и пределом текучести при сжатии (Рис. 1.2.6). Значение предела пропорциональности на сжатие определялось из условия изменения производной напряжений по деформациям в два раза, то есть, когда тангенс угла наклона касательной к кривой одноосного растяжения в двое меньше модуля упругости на сжатие.

На основе анализа поведения петель гистерезиса на первых циклах нагружения была получена зависимость микронапряжений от величины пластической деформации в образцах из стали Р2М при комнатной температуре (Рис.2.4.8).

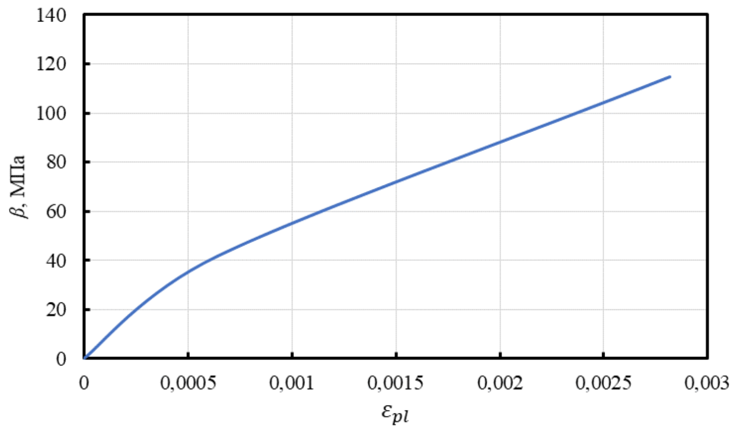


Рис 2.4.8. Зависимость микронапряжений от величины пластической деформации в образцах из стали Р2М

При одноосном растяжении в уравнении (2.4.10) скорость накопления пластической деформации совпадает интенсивностью скорости пластических деформаций. Записав (2.4.10) в приращениях напряжений и деформаций и разделив обе части уравнения на $d\varepsilon_{pl}$ получим:

$$d\beta = a \cdot d\varepsilon_{pl} - b \cdot \beta \cdot d\varepsilon_{pl} \tag{2.4.11}$$

$$\frac{d\beta}{d\varepsilon_{pl}} = a - b \cdot \beta \tag{2.4.12}$$

Представим зависимость микронапряжений от пластической деформации в виде функции $d\beta / d\varepsilon_{pl} = f(\beta)$ (Рис. 2.4.9). Тогда угол наклона кривой $f(\beta)$ однозначно определяет величину параметра a, сдвиг по оси абсцисс – дает значение параметра b.

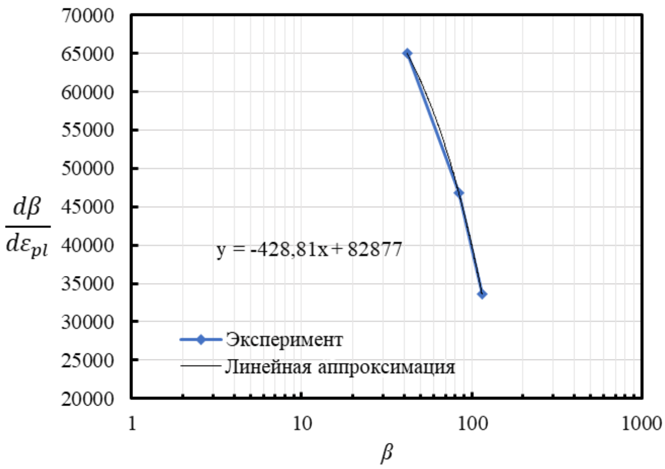


Рис. 2.4.9. Скорость изменения микронапряжений по величине пластической деформации в зависимости от микронапряжений

На основе вышеизложенной методики, были получены параметры обобщенной модели, включающие в себя параметры изотропного упрочнения по закону Voce, кинематического упрочнения по уравнениям Armstrong-Frederick и параметры модели поврежденности Lemaitre для роторной стали Р2М. Полученные параметры представлены в таблице 2.4.2.

E, МПа	σ_0, МПа	r, МПа	s	$R_{\inf}$, МПа	γ	a, МПа	b	ω_c
211220	353.26	1.3	1.5	850	6.46	82877	428.81	0.299

Таблица 2.4.2. Искомые свойства и параметры стали Р2М при комнатной температуре

Для верификации найденных параметров обобщенной модели для стали Р2М было проведено численное исследование с использованием описанной ранее динамически подключаемой библиотеки пользовательского материала программного комплекса расчетов по методу конечных элементов ANSYS [63, 121]. Расчеты проводились на модели цилиндрического образца с радиусными сопряжениями (Рис. 2.4.3). Моделировались испытания на малоцикловую усталость. Расчетная схема метода конечных элементов была сформирована из восьмиузловых элементов второго порядка. Задача решалась в осесимметричной постановке с приложением циклической нагрузки с коэффициентом асимметрии $R = -1$. Образец считался разрушенным при достижении критического параметра поврежденности $\omega_c = 0.299$.

На рисунке 2.4.10 представлено сопоставление расчетных и экспериментальных данных при моделировании стандартных цилиндрических образцов, выполненных из стали Р2М в условиях мягкого (с постоянной величиной максимальной нагрузки) циклического деформирования. Представленные результаты образуют общую кривую выносливости с областями перекрытия численных и экспериментальных данных.

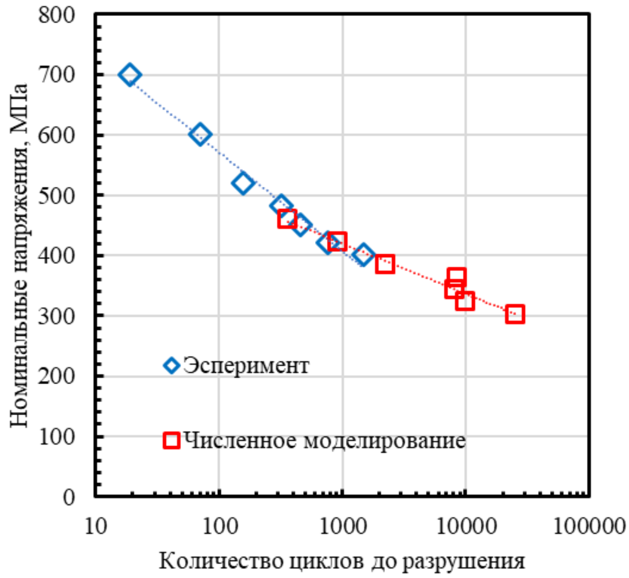


Рис. 2.4.10. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных при моделировании долговечности гладких цилиндрических образцов стали Р2М

Описанный в данной главе метод прогнозирования долговечности при малоцикловой усталости на стадии образования трещины, основывается на разработанной обобщенной модели, включающей в себя закон накопления повреждений и комбинированный закон упрочнения. Модель была верифицирована по отношению к литературным и экспериментальным данным и показала хорошую корреляцию полученных результатов. Модель может быть использована при моделировании условий одноосного статического нагружения, сложного напряженного состояния и циклического деформирования. Представлен расчетно-экспериментальный метод определения параметров разработанной модели.

ГЛАВА 3. ФОРМУЛИРОВКА И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН НА ОСНОВЕ ФАЗОВЫХ ПОЛЕЙ РАЗРУШЕНИЯ

В настоящей главе представлена формулировка, численная реализация и верификация модели фазового поля разрушения (ФПР) в комплексе программ для расчетов по методу конечных элементов ANSYS. Разработанная модель предназначена для прогнозирования долговечности материалов на стадии роста трещины при различных условиях нагружения.

Глава включает результаты численных параметрических исследований, выполненных в рамках теории фазовых полей разрушения. Эти исследования позволяют установить закономерности и эффекты, связанные с влиянием смешанных мод деформирования и сложного напряженного состояния на развитие сквозных и поверхностных дефектов в двух и трехмерных телах при линейном и нелинейном монотонном и циклическом деформировании. Представлен алгоритм интегрирования модели фазовых полей разрушения в конечно-элементный комплекс ANSYS. Разработанный метод определения долговечности на стадии роста трещины, изложенный в данной главе, будет использован в разделе 4.4 для определения долговечности на стадии роста трещины в элементе диска паровой турбины с эксплуатационным повреждением.

3.1. Разработка и реализация алгоритмов определения НДС и функций повреждений в фазовых полях разрушения для монотонного упругого и нелинейного деформирования для плоских и трехмерных задач механики трещин

Модели фазового поля разрушений представляют собой современный метод для численного моделирования процессов образования и распространения трещин в материалах различных свойств и структуры. В отличие от традиционных моделей, где трещины моделируются как острые границы разрыва, в методе фазовых полей используется вспомогательная функция φ(x), которая принимает значения в диапазоне φ(x)∈[0,1]. Как отмечалось в разделе 1.5, если представить функцию φ(x) в виде:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x=0\\ 0, & \text{если } x\neq 0\end{cases} \tag{3.1.1}$$

то возникают трудности, связанные с сингулярностью и сложностью численного моделирования. Это обусловлено невозможностью корректной аппроксимации разрывов гладкими функциями, что затрудняет численное решение. Для устранения этих ограничений используется регуляризованный подход, где для аппроксимации фазового поля φ(x) используется экспоненциальная функция:

$$\varphi(x) = e^{\frac{-|x|}{l}} \tag{3.1.2}$$

где ℓ — параметр длины регуляризации, определяющий характерный масштаб зоны перехода. На рисунке 3.1.1 представлена визуализация регуляризованного фазового поля, демонстрирующая плавное изменение φ(x), что устраняет сингулярность и повышает устойчивость метода фазового поля при численном моделировании.

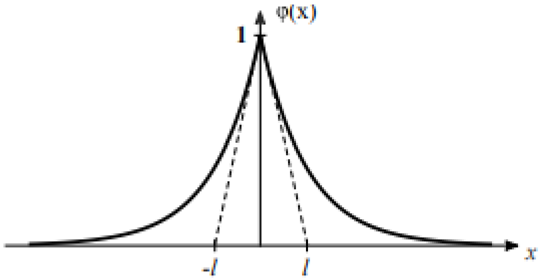
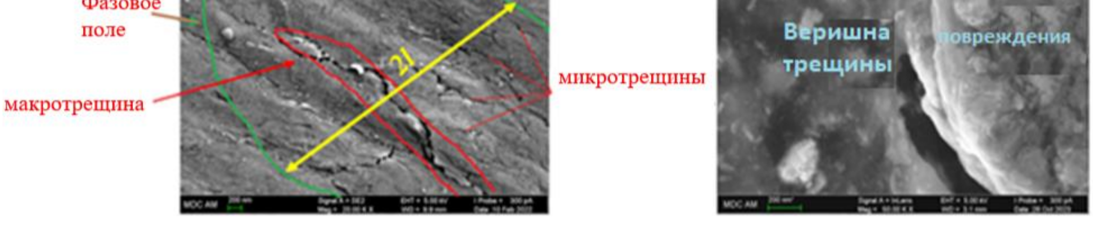


Рис. 3.1.1. Диффузная трещина с масштабным параметром ℓ.

При таком описании процесс разрушения рассматривается как постепенная потеря жесткости материала, которая выражается через функцию деградации *g(φ)*. Данная функция связывает накопленную объемную энергию с плотностью энергии деформации, характерной для неповрежденного материала. Параметр ℓ в этой модели играет ключевую роль, определяя размер зоны повреждения, а также влияя на механические свойства материала. Исходя из этого, в настоящей работе было проведено специальное исследование с использованием электронного микроскопа Merlin Zeiss (SEM) для определения границ зоны процесса разрушения и фазового поля на внешней поверхности образца из высокопрочной стали.



а) б)

Рис. 3.1.2. Изображения фазового поля, полученные с помощью электронного микроскопа: (а) общий вид поля, (б) вершина трещины.

На рисунке 3.1.2 представлены изображения поверхности разрушения образца, полученные с помощью электронного микроскопа, которые являются явным доказательством применимости парадигмы фазового поля. Магистральная трещина на рисунке 3.1.2а окружена несколькими микротрещинами, плотность распределения которых уменьшается с удалением от магистральной трещины. Кроме того, рисунок 3.1.2а является хорошим изображением зоны процесса разрушения вблизи главной трещины. Следует также отметить, что при высоком увеличении вершина трещины имеет конечный радиус кривизны как это показано на рисунке 3.1.2б. Эти результаты подтверждают модель повреждения, основанную на концепции теории фазового поля, в которой трещина рассматривается как диффузное повреждение, растянутое в пределах конечной области, контролируемой масштабным параметром l.

В изложении настоящего раздела приведены определяющие соотношения метода фазовых полей разрушения, которые в последующем реализованы посредством разработанного кода в среде вычислительного комплекса ANSYS. Эти соотношения дополнены новыми уравнениями, отражающими специфику рассматриваемых задач монотонного и циклического деформирования при упругом и нелинейном разрушении.

Основой метода фазовых полей разрушения является энергетический подход Гриффитса, который рассматривает образование трещин как процесс минимизации общей энергии системы (3.1.3). В соответствии с энергетическим балансом Гриффитса, распространение трещины происходит тогда, когда накопленная энергия достигает критического значения, необходимого для формирования новой поверхности разрыва. Полная потенциальная энергия записывается как сумма объёмной энергии деформации и поверхностной энергии трещины:

$$\Psi(\boldsymbol{u},\varphi) = \Psi^{b}(\boldsymbol{u},\varphi) + \Psi^{s}(\varphi) \tag{3.1.3}$$

Объёмная энергия отражает упругую деформацию материала и зависит от перемещений u и фазового поля φ:

$$\Psi_{b}(\boldsymbol{u},\varphi) = \int_{\Omega} g(\varphi)\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))dV \tag{3.1.4}$$

где $g(\varphi)=(1-\varphi)^2$ - функция деградации жесткости материала; $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))$ —плотность энергии деформации.

Поверхностная энергия трещины Ψ_s аппроксимируется следующим образом:

$$\Psi_S(\varphi) = \int_\Omega G_C \gamma(\varphi, \nabla\varphi)\, dV \qquad (3.1.5)$$

где G_c –критическая скорость высвобождения энергии [Дж/м^2]; $\gamma(\phi;\nabla\phi)$ — функция плотности энергии поверхности трещины, заданная как:

$$\gamma(\varphi, \nabla\varphi) = \frac{1}{2l}\varphi^2 + l\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 \qquad (3.1.6)$$

Основные разрешающие уравнения фазовых полей разрушения выводятся из удовлетворения баланса виртуальной работы внешних (δW_{ext}) и внутренних (δW_{int}) сил:

$$\delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0 \qquad (3.1.7)$$

С учетом (3.1.6) внутренняя энергия, затрачиваемая на деформирование и продвижение трещины представляется как:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_\Omega \left(\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} - 2(1-\varphi)\delta\varphi\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) + G_c\left[\frac{1}{l}\varphi\delta\varphi + l\nabla\varphi\cdot\nabla\delta\varphi\right]\right) dV \qquad (3.1.8)$$

Работа внешних сил является суммой работ объемных сил $\mathbf{b}$ и сил $\mathbf{h}$, приложенных к границам области $\partial\Omega_h$:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_\Omega \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}\, dV + \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}\, dA, \qquad (3.1.9)$$

Применение теоремы Остроградского-Гаусса позволяет получить основное уравнение баланса в задаче фазовых полей разрушения. Согласно данной теореме, поток непрерывно-дифференцируемого векторного поля через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого поля по объёму, ограниченному этой поверхностью. В итоге можно получить следующее разрешающее уравнение [162]:

$$\begin{gathered}\int_\Omega \left(-[Div[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{b}]\cdot\delta\mathbf{u} - \left[2(1-\varphi)\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) + G_c\left(\frac{1}{l}\varphi - Div[l\nabla\varphi]\right)\right]\delta\varphi \right) dV + \\ + \int_\Omega [\sigma\cdot\mathbf{n} - \mathbf{t}]\cdot\delta u\, dA + \int_{\partial\Omega_h}[G_c l\nabla\varphi\cdot\mathbf{n}]\cdot\delta\varphi\, dA = 0\end{gathered} \qquad (3.1.10)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор нормали к поверхности $\partial\Omega$.

Задача минимизации внутренней потенциальной энергии относительно фазового поля трещины осуществлена посредством эволюционного уравнения с граничным условием типа Неймана:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ на } \partial\Omega_h \qquad \text{и} \qquad \nabla\varphi\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega \qquad (3.1.11)$$

Это в свою очередь приводит к основным уравнениям баланса в следующем виде:

$$Div[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{b} = 0 \tag{3.1.12}$$

$$G_c\left[\frac{1}{l}\varphi - l\nabla\varphi\right] - 2(1-\varphi)\psi = 0 \tag{3.1.13}$$

Решение данной системы позволяет определить поля перемещений $\boldsymbol{u}$ и фазового поля φ [88].

В используемых моделях континуальной механики предполагается аддитивное разложение тензора деформации на упругую и пластическую составляющие:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}\,. \tag{3.1.14}$$

Полная плотность энергии деформации в этом случае есть сумма упругой (ψ_{el}) и пластической (ψ_{pl}) составляющих:

$$\psi_0 = \int \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} = \psi_{el} + \psi_{pl} \tag{3.1.15}$$

Помимо этого, для предотвращения образования и распространения трещин при сжимающих напряжениях плотность энергии деформации разделена на отдельные компоненты растяжения и сжатия следующим образом:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon},\varphi) = g(\varphi)(\psi_{el}^{+}(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}) + \psi_{pl}^{+}(\boldsymbol{\varepsilon}_{pl})) + \psi_{el}^{-}(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}) \tag{3.1.16}$$

В представленной в главе формулировке метода фазовых полей разрушения предотвращение повреждений при сжатии включает разложение плотности энергии деформации, что обычно осуществляется двумя различными методами. Один из таких методов — это объемно-девиаторное разложение, предложенное Amor и соавторами [73], которое формулируется следующим образом:

$$\psi_{el}^{+}(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}) = \frac{1}{2}K\left\langle tr(\boldsymbol{\varepsilon}_{el})\right\rangle_{+}^{2} + \mu(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}:\boldsymbol{\varepsilon}_{el}),\ \psi_{el}^{-}(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}) = \frac{1}{2}K\left\langle tr(\boldsymbol{\varepsilon}_{el})\right\rangle_{-}^{2} \tag{3.1.17}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{el}}$ представляет тензор упругих деформаций, μ и λ - параметры Ламе, tr обозначает след матрицы, а ⟨x⟩ указывает на скобки Макаулея (возвращают значение x при x>0 и 0 при x≤0), K - модуль объемного сжатия. Второй метод — так называемое спектральное разложение, предложенное Miehe [176]. Этот подход использует спектральное разложение тензора деформаций $\varepsilon\pm=\sum\langle\varepsilon_I\rangle\pm n_I\otimes n_I$ где ε_I и n_I являются соответственно главными деформациями и главными направлениями деформаций

(I=1,2,3). Разложение плотности энергии деформации затем выражается следующим образом:

$$\psi_{el}^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}_{el}) = \frac{1}{2}\lambda\left\langle tr(\boldsymbol{\varepsilon}_{el})\right\rangle_{\pm}^{2} + \mu tr[(\boldsymbol{\varepsilon}^{\pm})^2] \qquad (3.1.18)$$

Повреждение является необратимым процессом $\varphi \geq 0$. Для обеспечения необратимости введена переменная поля истории деформирования H, которая удовлетворяет условиям Каруша–Куна–Таккера:

$$\psi - H \leq 0, \qquad \dot{H} \geq 0, \qquad \dot{H}(\psi - H) = 0 \qquad (3.1.19)$$

Соответственно, для текущего момента времени t в течение всего времени τ, поле истории определяется следующим образом:

$$H = \max\nolimits_{t \in [0,\tau]} \psi_{el}^{+}(t) \qquad (3.1.20)$$

В расчетах полная плотность энергии деформации обновляется на текущем временном шаге $t+\Delta t$ и вычисляется как:

$$\psi_0^{t+\Delta t} = \psi_0^t + \sum \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}^{t+\Delta t} - \varepsilon_{ij}^t)(\sigma_{ij}^{t+\Delta t} - \sigma_{ij}^t) \qquad (3.1.21)$$

Согласно принципу суперпозиции, упругая составляющая представлена путем суммирования по всем направлениям:

$$\psi_{el} = \sum \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \qquad (3.1.22)$$

Соответственно, пластическая часть плотности энергии деформации выражается следующим образом:

$$\psi_{pl}^{t+\Delta t} = \psi_0^{t+\Delta t} - \psi_{el} \qquad (3.1.23)$$

Для вычисления компонент плотности энергии деформации необходимо знать связь между напряжениями и деформациями. Для упругих задач метода фазовых полей разрушения используется следующая формулировка закона Гука:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-\varphi)^2 \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{el}\,. \qquad (3.1.24)$$

Связь между напряжениями и деформациями в нелинейной области задается аналогично описанному во второй главе методу с заменой параметра поврежденности на параметр фазовых полей разрушения. В рассматриваемой модели фазовых полей разрушения не учитывается кинетика микронапряжений. Тогда закон пластического течения (2.1.4.), запишется в следующем виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{pl} = \frac{1}{h}\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}_d)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_d}, \tag{3.1.25}$$

Граница упругопластического перехода определяется функцией текучести, которая упростится до**:**

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_d) = \left\|\boldsymbol{\sigma}_d\right\| - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{pl}) = 0 \tag{3.1.26}$$

Для определения предела текучести, как и в случае континуальной механики повреждений использован экспоненциальный закон упрочнения.

$$\sigma_y = \sigma_0 + R_{\inf} \cdot \left[1 - \exp(-\gamma \cdot \bar{\varepsilon}_{pl})\right]. \tag{3.1.27}$$

В настоящем подходе распространение трещины обусловлено балансом между объёмной и поверхностной энергией. Заметим, что с одной стороны, деформации упругого тела под действием нагрузки увеличивают упругую энергию. Когда её значение в определённой области приближается к критическому, системе становится энергетически выгодно снизить объёмную энергию за счёт стремления параметра повреждения фазового поля трещины φ к единице. С другой стороны, увеличение значения φ приводит к росту поверхностной энергии. Следует отметить, что общий функционал энергии является квадратичным и выпуклым по переменным $\boldsymbol{u}$ и φ отдельно. Это означает, что для фиксированного значения φ функционал (3.1.3) может быть эффективно минимизирован путём решения линейной системы уравнений. Аналогично, для фиксированного перемещения $\boldsymbol{u}$ функционал (3.1.3) минимизируется аналогичным образом. В результате, численная реализация модели фазового поля становится относительно простой и осуществляется с использованием надёжного алгоритма, который поочерёдно минимизирует каждое поле в чередующемся режиме. Отметим, что до настоящего времени в программном комплексе ANSYS отсутствовала реализация метода фазовых полей разрушения, и излагаемый подход имеет приоритетный характер.

Численная реализация метода фазовых полей разрушения в ANSYS

Для реализации модели фазового поля в методе конечных элементов необходимо ввести дополнительную степень свободы. Модель фазового поля реализуется с помощью подпрограммы ANSYS USERELEMENT, которая позволяет вычислять матрицы жесткости элемента и векторы узловых нагрузок, определяемые пользователем. В рамках плоской задачи рассматриваются изопараметрические четырехугольные элементы с тремя степенями свободы в узле, то есть u, v и φ. Для решения задачи с использованием метода конечных элементов необходимо привести решаемую задачу к следующему виду:

$$[K]\cdot\{u\}=\{r\} \tag{3.1.28}$$

где K -матрица жесткости элемента, $\{u\}$ - вектор степеней свободы (по умолчанию вектор узловых перемещений), а $\{r\}$ – вектор невязок. Самый простой способ реализации модели фазового поля для плоских задач состоит в замене степени свободы u на φ. Тогда для каждой точки интегрирования в элементе матрица примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{uu} & \boldsymbol{K}_{u\varphi} \\ \boldsymbol{K}_{\varphi u} & \boldsymbol{K}_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{r}_\varphi \end{pmatrix} \tag{3.1.29}$$

где $\boldsymbol{K}_{u\varphi}$ и $\boldsymbol{K}_{\varphi u}$ описывают взаимное влияние фазового поля на перемещения и перемещений на фазовое поле. Такой подход обладает высокой точностью, так как учитывает все нелинейные взаимосвязи между полями. Однако при моделировании роста трещин возникают численные сложности, обусловленные резкими изменениями напряжённого состояния и значительной деградацией матрицы жёсткости. Эти факторы приводят к снижению численной устойчивости системы.

Альтернативой подходу (3.1.29) является пошаговый подход, в котором система уравнений решается поочерёдно для фазового поля φ и перемещений $\boldsymbol{u}$. На каждом шаге решаются две независимые подзадачи: сначала для перемещений при фиксированном фазовом поле, а затем для фазового поля при фиксированных перемещениях. Тогда определяющее соотношение принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{uu} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K}_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{r}_\varphi \end{pmatrix} \tag{3.1.30}$$

Такой метод исключает взаимные члены $\boldsymbol{K}_{u\varphi}$ и $\boldsymbol{K}_{\varphi u}$, что упрощает вычисления и обеспечивает существенно более высокую сходимость. Применение данного подхода улучшает численную устойчивость модели в задачах с резкими изменениями фазового поля, например, при нестабильном росте трещин, так как исключается необходимость решать взаимосвязанную задачу.

С использованием обозначений Войта поле перемещений $\boldsymbol{u} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ и параметр повреждения φ_i в фазовом поле в уравнении (3.1.3) дискретизируются следующим образом:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{N}_i^u \boldsymbol{u}_i \quad \text{и} \quad \varphi = \sum_{i=1}^{m} N_i \varphi_i \tag{3.1.31}$$

В уравнении (3.1.31) $\boldsymbol{N}$ обозначает функцию формы, связанную с узлом i из всех m узлов элемента. Для плоского прямоугольного элемента функция формы определяется как:

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)\cdot(1+\eta\eta_i) \tag{3.1.32}$$

Для кубического 8-узлового элемента:

$$N_i(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i+\zeta\zeta-2) \tag{3.1.33}$$

где ξ, η и ζ — локальные координаты внутри элемента.

Соответственно производные дискретизируются следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{B}_i^u \boldsymbol{u}_i \qquad \nabla\varphi = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{B}_i^{\varphi} \varphi_i \tag{3.1.34}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}\}^T$. Матрицы связующие деформации и перемещения представляются в следующем виде:

$$\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{u}} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \text{ и } \boldsymbol{B}_i^{\varphi} = \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} \tag{3.1.35}$$

где $N_{i,x}$ и $N_{i,y}$ - это производные от соответствующей функции формы по x и y соответственно.

Согласно документации ANSYS [76], элементы вектора перемещений в уравнении (3.1.28) должны быть представлены в следующем порядке: $\mathbf{u}=\{u_1, v_1, \varphi_1, \ldots, u_4, v_4, \varphi_4\}$, а вектор невязок $\boldsymbol{r} = \{r_1^u, r_2^u, r_1^{\varphi} ... r_7^u, r_8^u, r_4^{\varphi}\}$. Таким образом, для реализации необходимо упорядочить компоненты матрицы жесткости 4-х узлового элемента с 4 точками интегрирования следующим образом:

$$[K]=\begin{bmatrix} K_{11}^{uu} & K_{12}^{uu} & 0 & \ldots & K_{17}^{uu} & K_{18}^{uu} & 0 \\ K_{21}^{uu} & K_{22}^{uu} & 0 & \ldots & K_{27}^{uu} & K_{28}^{uu} & 0 \\ 0 & 0 & K_{11}^{\varphi\varphi} & \ldots & 0 & 0 & K_{14}^{\varphi\varphi} \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{71}^{uu} & K_{72}^{uu} & 0 & \ldots & K_{77}^{uu} & K_{78}^{uu} & 0 \\ K_{81}^{uu} & K_{82}^{uu} & 0 & \ldots & K_{87}^{uu} & K_{88}^{uu} & 0 \\ 0 & 0 & K_{41}^{\varphi\varphi} & \ldots & 0 & 0 & K_{44}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \tag{3.1.36}$$

Элементы матрицы жесткости и вектора невязок с учетом (3.1.26) имеют вид:

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{uu}=\int_{\Omega} g(\varphi)\cdot(\boldsymbol{B}_i^u)^T\,\mathbf{C}\;\boldsymbol{B}_j^u dV \tag{3.1.37}$$

$$\boldsymbol{r}_i^u=\int_{\Omega} g(\varphi)\cdot(\boldsymbol{B}_i^u)^T\boldsymbol{\sigma} dV \tag{3.1.38}$$

для степеней свободы u, v и для степени свободы φ:

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{\varphi\varphi}=\int_{\Omega}\left\{\left(2\psi_e+\frac{G_c}{l}\right)N_iN_j+G_cl\boldsymbol{B}_i^T\cdot\boldsymbol{B}_j\right\}dV \tag{3.1.39}$$

$$\boldsymbol{r}_i^{\varphi}=\int_{\Omega}\left\{2(1-\varphi)\psi_eN_i+\frac{G_c}{l}\left[\varphi N_i+l^2(\boldsymbol{B}_i)^T\nabla\varphi\right]\right\}dV \tag{3.1.40}$$

Для трехмерных задач конечно-элементный код ANSYS не позволяет свободно выбирать степени свободы. Поэтому следует использовать только встроенные наборы. Примером являются подходы авторов [188, 189], в которых для реализации трехмерных задач использовалась аналогия между законом эволюции фазового поля и вектора магнитного потенциала. Этот подход позволяет использовать подавляющее большинство встроенных функций ANSYS, что упрощает программирование пользовательских элементов. Для этой цели в библиотеке конечных элементов ANSYS для команды DOF могут быть использованы следующие степени свободы: UX, UY, UZ (структурные перемещения); TEMP (температура); PRES (давление); VOLT (напряжение); MAG (магнитный скалярный потенциал); AZ (магнитный векторный потенциал); CURR (ток); EMF (падение электродвижущей силы); CONC (концентрация) и другие. Любая из этих степеней свободы может быть использована как степень свободы фазового поля. Ниже представлен пример формулировки магнитного потенциала для реализации метода фазовых полей разрушения в методе конечных элементов. Согласно документации, решаемая система уравнений для определения магнитного поля записывается в следующем виде:

$$\left[\bar{C}\right]\{v\}+\left[\bar{K}\right]\{v\}=\left\{\bar{J}_i\right\} \tag{3.1.41}$$

где $\{v\}$- вектор магнитного потенциала в узлах элемента, J_i — вектор плотности тока, $[C]$ - матрица демпфирования, а $[K]$ - матрицы коэффициентов. Аналогия между уравнением (3.1.41) и реализацией фазового поля в методе конечных элементов (3.1.28) очевидна, при этом магнитный векторный потенциал действует как фазовое поле $\{v\} = \varphi$. Предполагается, что:

$$\left[\bar{C}\right]=0,\ \left[\bar{K}\right]=\left[K^{\varphi}\right] \text{ и } \left\{\bar{J}_i\right\}=\left\{r^{\varphi}\right\} \tag{3.1.42}$$

Уравнение (3.1.42) является основой предложенного пользовательского элемента для численного решения трехмерных задач разрушения по модели фазового поля с использованием стандартного решателя ANSYS. В настоящем исследовании данный метод был реализован в программном комплексе ANSYS с помощью пользовательских функций для решения представленных ниже трехмерны задач [145]. Следует отметить, что стандартные критерии сходимости могут приводить к остановке расчета до достижения устойчивого решения. Для установки правильных параметров сходимости для нелинейных анализов следует использовать команду CNVTOL. Таблица 3.1.1 связывает список степеней свободы с узловыми векторами нагрузок, которые могут быть использованы для задач фазовых полей разрушения без изменения исходного кода пользовательского элемента.

Тип степеней свободы	**Обозначение**	**Вектор нагрузки**	**Описание**
Structural	UX,UY,UZ	FX,FY,FZ	Force
Thermal	TEMP	HEAT	Heat Flow
Electric Conduction	VOLT	AMPS	Electric Current
Electromagnetic Induction	EMF	CURT	Current
Electrostatic	VOLT	CHRG	Electric Charge
Magnetic	AZ	CSGZ	Magnetic Current

Таблица 3.1.1. Идентификация степеней свободы в ANSYS

Далее эффективность и возможности разработанной реализации метода фазовых полей разрушения в системе ANSYS будут продемонстрированы путем моделирования процессов разрушения для нескольких принципиальных задач механики трещин. В первую очередь будет рассмотрено зарождение и распространение трещины в пластине с надрезом при воздействии одноосного растяжения в плоской и трехмерной постановке. Затем будет смоделировано разрушение компактного образца (CT), подвергнутого растяжению при упругом и упруго-пластическом деформировании. Далее в разделе 3.2 приведены численные результаты поведения образца CTS (compact tension shear) при смешанных формах деформирования и разрушения. В разделе 3.3 будет представлена кинетика фазовых полей разрушения в трехмерной модели пластины с поверхностными трещинами при различных видах двухосного нагружения и приведены примеры взаимодействия, объединения и совместного развития исходных двух поверхностных дефектов полуэллиптической формы в плане.

Верификация разработанной модели фазовых полей разрушения

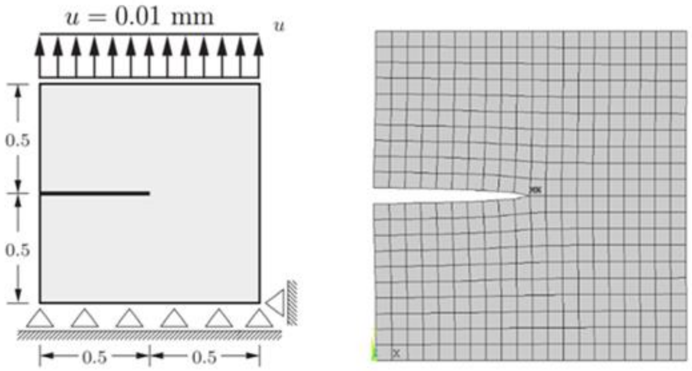
Смысл последующих разделов настоящей главы состоит в сопоставлении результатов разработанной реализации с известными литературными данными на примере решения классических задач механики трещин, а также достигнутых возможностях в новых приложениях фазовых полей разрушения. Каждый из перечисленных примеров будет сопровождаться таблицей, содержащей список параметров, использованных в соответствующих численных расчетах. Этот список включает следующие параметры, которые содержатся в основных определяющих соотношениях (3.1.37-3.1.40), использованных в расчетах: E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; l — масштабный параметр фазового поля; G_c — критическая скорость высвобождения энергии (вязкость разрушения); σ_0 — предел текучести; R_{inf}, γ– параметры закона изотропного упрочнения; α — угол ориентации трещины; $H_{\min}$ — минимальное значение плотности энергии деформации, приводящей к разрушению; h — размер элемента; Δu — шаг прикладываемых перемещений.

Первым примером является классическая задача роста трещины в пластине с надрезом, подвергнутой одноосному растяжению. Этот пример широко использован в мировой литературе для иллюстрации метода фазовых полей разрушения, как показано в работах Miehe [175] и Martínez-Paneda [172, 173]. В настоящей главе модель фазового поля реализована через подпрограмму ANSYS USERELEM (пользовательский элемент), которая позволяет выполнять вычисления с определением матриц жесткости элемента и вектора узловых нагрузок [145]. Геометрия объекта расчетов и граничные условия изображены на рисунке 3.1.3а. Параметры, использованные в анализе, приведены в таблице 3.1.2.

E, [ГПа]	**ν**	**l, [мм]**	**G_c, [МПа·мм]**	**h, [мм]**	**Δu [мм]**
210	0.3	0.04	2.7	0.01	1´10^{-5}

Таблица 3.1.2. Параметры модели фазового поля для хрупкого разрушения

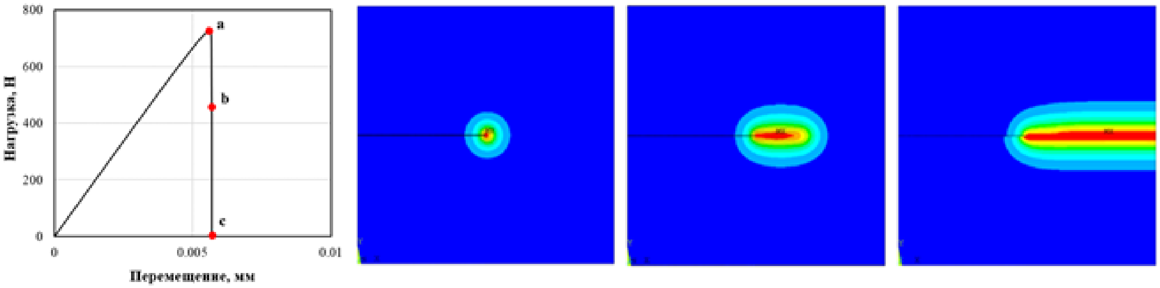
Модель описывается с использованием линейных изопараметрических плоских элементов с 3 степенями свободы в узле, то есть u, v и φ, и 4 точками интегрирования. На рисунке 3.1.3 показана сетка, специально адаптированная для того, чтобы следовать предполагаемой траектории трещины, при этом размер элемента для обеспечения корректности вычислений должен быть минимум в четыре раза меньше масштабного параметра фазового поля *l*. Такое соотношение масштабов было выбрано для обеспечения независимости результатов от топологии сетки в области распространения трещины. В общей сложности было использовано порядка 10,000 четырехугольных элементов.



а) б)

Рис. 3.1.3. Пластина с односторонним надрезом: (а) граничные условия и геометрия, (б) сетка конечных элементов.

Полученные результаты для пластины с надрезом, подвергнутой одноосному растяжению, показаны на рисунке 3.1.4(а) в координатах «нагрузка – прикладываемое перемещение». Как следует из полученных результатов численного расчета по разработанному алгоритму, повреждение вызывает значительное падение нагрузки. Полученные картины разрушения на различных этапах деформирования показаны на Рис.3.1.4(б-г). Синие и красные цвета соответствуют неповрежденному и полностью разрушенному состоянию материала, соответственно. Получено хорошее соответствие с результатами Miehe [176] и Martínez-Paneda [130, 171] при идентичных входящих параметрах вычислений, что говорит о корректности разработанного метода и эффективности его численной реализации.



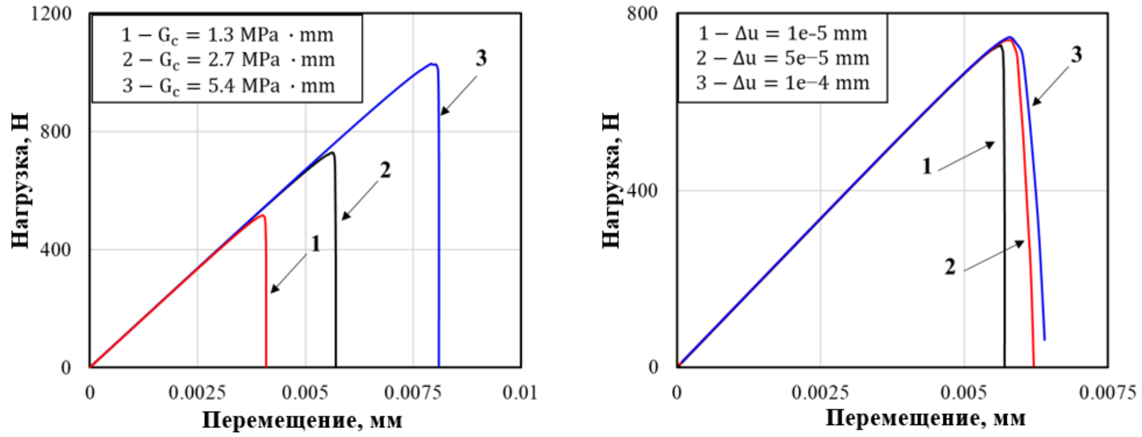
а) б) в) г)

Рис. 3.1.4. Диаграмма нагрузка-перемещение (а), фазовые поля разрушения при смещении (б) u=0.0055 мм, (в) u=0.005693 мм, (г) u=0.005696 мм.

Далее было проведено параметрическое исследование управляющих параметров модели фазового поля. В частности, на рисунке 3.1.5а показаны кривые «нагрузка - перемещение», полученные для трех различных значений критической скорости высвобождения энергии G_c при фиксированных значениях других параметров (l=0.04, h=0.01, $\Delta u=1\times10-5$ мм $\Delta u=1\times10-5$мм). В данном случае поведение среды задавалось упругим. Как и ожидалось, выбор значений G_c=1.3, 2.7, 5.4 МПа·мм приводит к увеличению значений максимальных нагрузок при разрушении. На рисунке 3.1.5б показаны кривые «нагрузка - перемещение» для расчетов, учитывающих пластические свойства материала. Для выполнения расчетов в упруго-пластической постановке использован набор параметров модели, приведенный в таблице 3.1.3. В этом случае увеличение значения G_c приводит к увеличению критических деформаций и изменению профиля кривых разрушения.

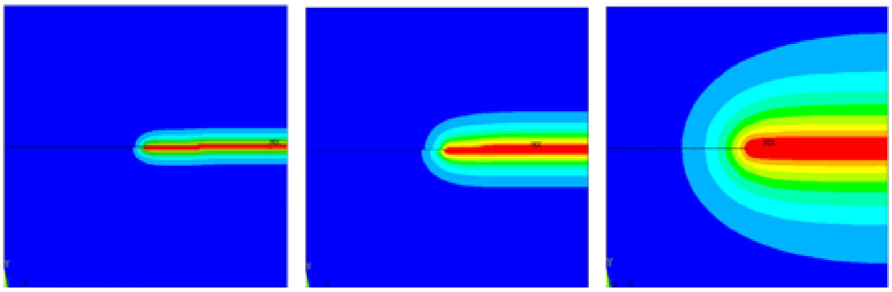
E, [ГПа]	ν	σ_0, [МПа]	R_{inf}, [МПа]	γ	G_c, [МПа ·мм]	l, [мм]	h, [мм]	Δυ, [мм]
210	0.3	465	55	2.38	2.7	0.04	0.01	$1´10^{-5}$

Таблица 3.1.3. Параметры модели для пластического разрушения с использованием уравнений (3.1.12)



а) б)

Рис. 3.1.5. Кривые «нагрузка-деформация», для пластины при растяжении: (а) упругое решение, (б) упруго-пластическое решение.

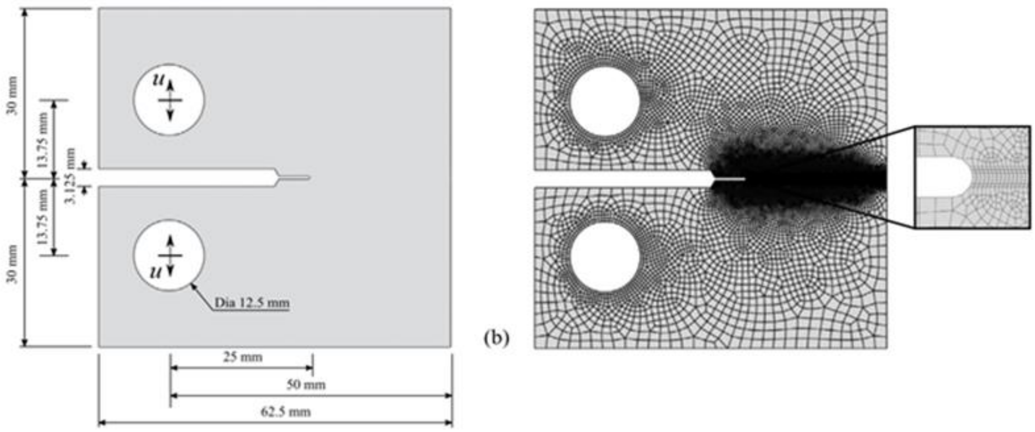


а) б) в)

Рис. 3.1.6. Размер фазового поля в зависимости от масштабного параметра l (а) l =0.02, h=0.005, (б) l =0.04, h=0.01, (в) l =0.12, h=0.03

Для того чтобы оценить эффекты, связанные с характерным масштабом фазового поля параметра l и влиянием отношения l/h, были проведены расчеты с фиксированным значением параметра G_c=2.7 МПа·мм. Прогнозируемый путь трещины представлен на рисунке 3.1.6 с помощью контуров переменной фазового поля φ. При изменении значения параметра масштаба l от 0.02 до 0.12 мм, как и ожидалось, размер фазового поля увеличивается на всех стадиях роста трещины. Видно, что наиболее узкая трещина имеет место для наименьшего параметра масштаба длины l=0.02 мм. Приведенные на рис.3.1.4-3.1.6 численные результаты соответствуют известным литературным данным в рассмотренных диапазонах вариации управляющих параметров модели фазового поля.

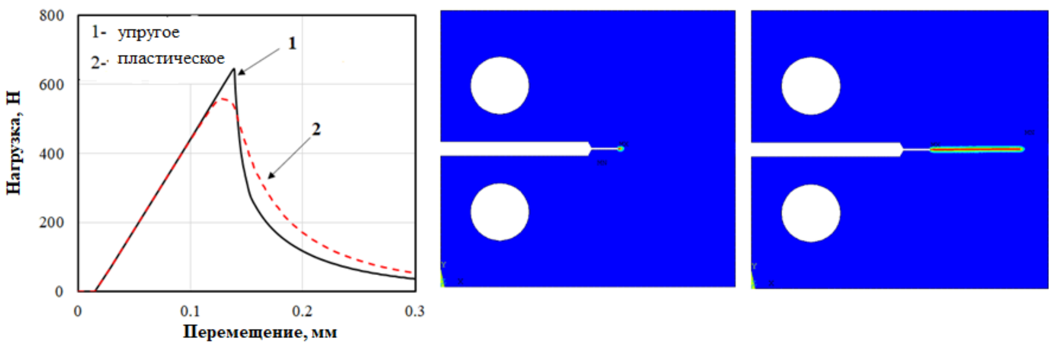
Классическим объектом исследований в механике разрушения является компактный образец при внецентренном растяжении. Используемая для моделирования компактного образца в данной работе геометрия и сетка конечных элементов показаны на рисунке 3.1.7. В качестве граничных условий прикладывались перемещения в крепежных отверстиях, при этом перемещения были ограничены в горизонтальном направлении по оси приложения нагрузки. Используемые параметры модели представлены в таблице 3.1.3. масштабный параметр принят равным l = 0.3мм, а минимальный размер элемента h = 0.08мм.



а) б)

Рис. 3.1.7. Компактный образец. Геометрия (а), сетка конечных элементов (б)

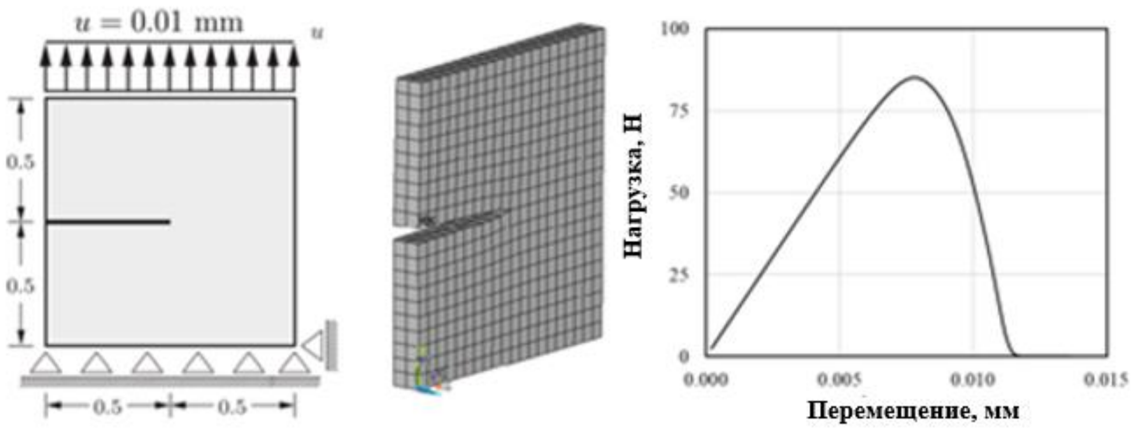
Цель расчетов состояла в сравнении фазовых полей разрушения при одинаковых условиях нагружения, полученных при использовании упругой и упруго-пластической модели поведения материала. На рисунке 3.1.8а представлены кривые зависимости нагрузки от перемещения для компактных образцов для двух последовательных стадий деформирования при упругом и упругопластическом разрушении. Важным результатом этих решений является установленная разница в предельных нагрузках и различия в формах кривых деформирования. Так, материал выдерживает меньшую нагрузку при упруго-пластическом разрушении и наблюдается более пологий спад нагрузки в связи с пластическим течением материала.



а) б) в)

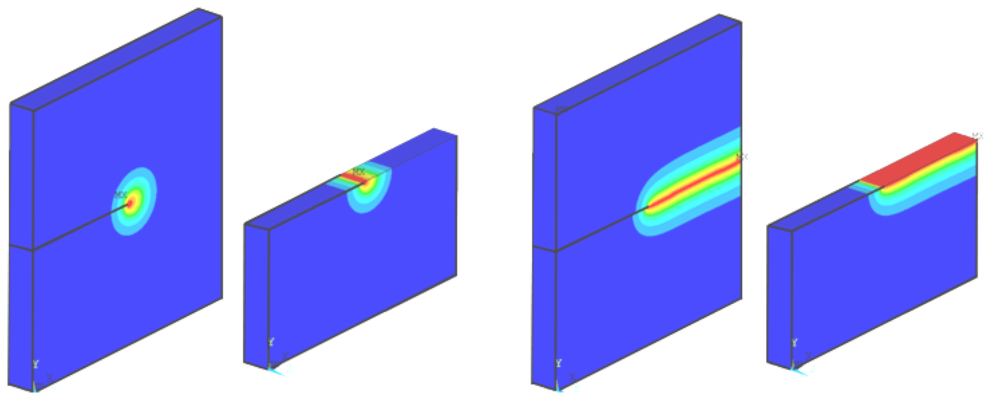
Рис. 3.1.8. Кривые нагрузка-перемещение (а), фазовые поля для перемещений u=0.138мм (б) и 0.3мм (в)

Реальные объекты, как правило, имеют трехмерную конфигурацию. В этой связи следующим важным результатом работы является распространение модели фазового поля по разработанному алгоритму в рамках кода ANSYS на решение задач разрушения в трехмерной постановке. Результаты, представленные ниже, были получены в процессе реализации с учетом особенностей, описанных выше, при использовании аналогии уравнений вектора магнитного потенциала. Рассмотрена трехмерная пластина с односторонним боковым надрезом. Как и в случае плоской задачи в качестве граничных условий выступали перемещения, приложенные к торцам пластины. Геометрия и граничные условия показаны на рисунке 3.1.9(а). Нижняя грань пластины зафиксирована, а вертикальное перемещение приложено к верхней грани. Пластина с надрезом толщиной t=0.1мм моделируется структурированной сеткой, состоящей из примерно 100 000 элементов. Были использованы изопараметрические 20-узловые 3D-элементы, которые являются квадратичными с 4 степенями свободы в узле (u, v, w и φ) и имеют 8 точек интегрирования. Сетка имеет уточненную топологию в области, где предполагается распространение трещины. Масштабный параметр фазового поля принят равным l=0.02мм, что примерно в четыре раза больше минимального размера элемента h=0.005мм. Параметры материала представлены в таблице 3.1.2. Результаты расчетов в трехмерной постановке приведены в форме зависимости нагрузка-перемещение (рис.3.1.9в) и фазовых полей для начальной (рис.3.1.10а) и конечной (рис.3.1.10б) стадий монотонного разрушения.



а) б) в)

Рис. 3.1.9. Геометрия и граничные условия трехмерной пластины (а), сетка конечных элементов (б), расчетная кривая нагрузка-перемещение (в).



(а) (б)

Рис. 3.1.10. Фазовые поля в трехмерной постановке. Инициализация трещины (а), разрушение образца (б).

Из сравнения результатов 3D моделирования (рис. 3.1.10) и плоскими задачами (рис.3.1.4), можно отметить различное поведение расчетных профилей зависимостей нагрузки от перемещения при одинаковых граничных условиях. Для плоского образца наблюдается резкое падение нагрузки, тогда как для 3D образца наблюдается умеренное уменьшение нагрузки. Подобный характер изменения расчетных зависимостей соответствует известным литературным данным, что говорит об применимости модели для решения трёхмерных задач. Существенное значение имеет достигнутый численный результат в плане моделирования положения и изменения кривизны фронта трещины в процессе ее роста. Полученные фазовые поля разрушения для начального и конечного положения фронта трещины в трехмерной панели открывают возможность оценки эффектов стеснения связанные с выходом фронта трещины на свободную поверхность при разрушении [209]. За счет изменения значений функций повреждений фазового поля устанавливается совместное влияние длины трещины, толщины пластины и схемы нагружения на текущее и предельное состояние исследуемой конструкции.

Следующим важным результатом работы и основополагающим для прогнозирования долговечности на стадии роста трещины является реализации модели фазового поля при циклическом нагружении.

В разработанном алгоритме повреждение, вызванное воздействием циклических нагрузок, учитывается с использованием функции деградации для усталости $f(\bar{\vartheta})$ с помощью кумулятивной переменной истории нагружения и ее порогового значения ϑ_T. В данной работе используется подход, предложенный Carrara [93] для упругих твёрдых тел, где рассматривается функция усталостной деградации в следующем виде:

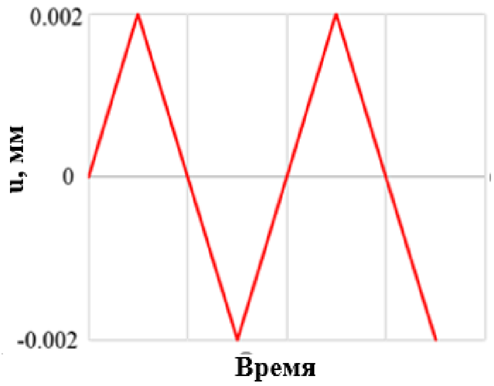
$$f(\vartheta(t)) = \begin{cases} 1 & \text{если } \vartheta(t) \le \vartheta_T \\ \dfrac{2\vartheta_T}{\vartheta(t)+\vartheta_T} & \text{если } \vartheta(t) > \vartheta_T \end{cases}; \ \vartheta_T = \frac{G_c}{12l} \tag{3.1.39}$$

За счет введения данной функцию в уравнения (3.1.39-3.1.40) разрешающая система уравнений преобразуется к виду:

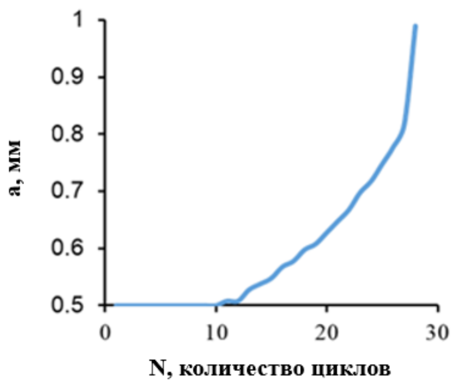
$$\boldsymbol{K}_{ij}^{\varphi\varphi} = \int_{\Omega} \left\{ \left(2(\psi_e + \psi_p) + \frac{G_c f(\vartheta)}{l} \right) N_i N_j + f(\vartheta) G_c \cdot l \cdot \boldsymbol{B}_i^T \boldsymbol{B}_j \right\} dV \tag{3.1.40}$$

$$\boldsymbol{r}_i^{\varphi} = \int_{\Omega} \left\{ 2(1-\varphi)(\psi_e + \psi_p) + \frac{G_c f(\vartheta)}{l} \left[\varphi N_i + l^2 (\boldsymbol{B}_i)^T \nabla\varphi \right] \right\} dV \tag{3.1.41}$$

Соответственно, разработанный алгоритм распространен на моделирование процессов разрушения в терминах фазовых полей с учетом истории циклического нагружения. Для верификации предложенного метода осуществлено моделирование испытания пластины с надрезом (рис. 3.1.3) при циклическом нагружении.



а)



б)

Рис. 3.1.11. Цикл нагружения (а), расчетная зависимость длины трещины от количества циклов нагружения (б).

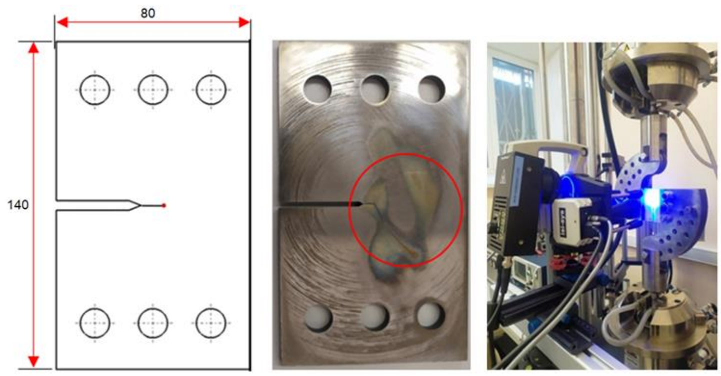
На рисунке 3.1.11а представлен реализованный цикл нагружения с коэффициентом ассиметрии R = -1. В результате расчетов получены фазовые поля разрушения для различных стадий роста трещины и основополагающая для прогнозирования долговечности диаграмма зависимости длины трещины от количества циклов нагружения вплоть до полного разрушения моделируемой пластины (рис.3.1.11б).

По результатам данного раздела на основе решения тестовых задач и их сравнения с известными литературными данными можно утверждать, что предложенная реализация модели фазового поля с введенными дополнениями применима для моделирования процессов разрушения в двухмерной и трехмерной постановке в материалах и элементах конструкций при монотонном и циклическом нагружении при упругом и нелинейном деформировании.

3.2. Расчет траекторий развития трещин по фазовым полям разрушения при смешанных формах деформирования

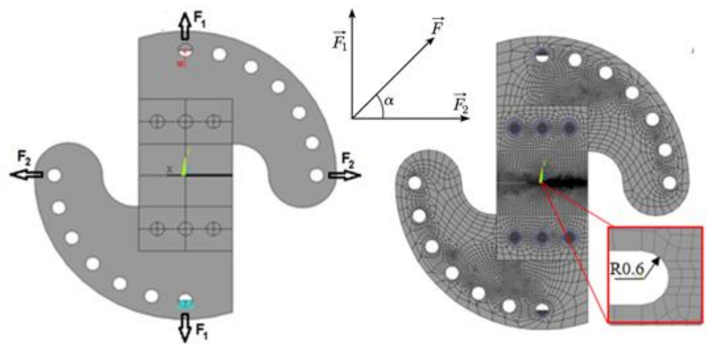
Большинство элементов конструкций в современной авиации, энергетике, автомобилестроении и других отраслях машиностроения находятся при эксплуатации в условиях сложного напряженного состояния при наличии дефектов и трещин. Соответственно, элементы конструкций могут подвергаться растяжению, продольному и поперечному сдвигу, что приводит к смешанным формам деформирования и разрушения. Спецификой смешанных форм деформирования и разрушения является то, что направление и траектория роста трещины, как правило, заранее неизвестны и ключевым вопросом является то, какой механизм разрушения является доминирующим. В связи с этим следующий раздел посвящен исследованию и моделированию развития трещин при смешанных формах деформирования с использованием теории фазовых полей разрушения. Преимущество данной теории состоит в том, в ней естественным результатом является путь развития трещины, который интерпретируется собственно через наличие фазового поля разрушения.

Для целей исследования влияния условий нагружения на распространение трещины, был использован образец с боковым надрезом для испытаний при совместном воздействии внецентренного растяжения и сдвига - Compact Tension Shear (CTS). Данный образец представляет собой специальную конфигурацию для реализации в рамках плоской задачи чистой формы растяжения (Mode I), чистой формы сдвига (Mode II) и их сочетаний при контролируемых смешанных формах монотонного и циклического деформирования. Геометрия данного образца представлена на рисунке 3.2.1(а,б). На рисунке 3.2.1(в) показана испытательная установка с использованием S-образных захватов, которые позволяют реализовать весь диапазон смешанных форм нагружения (сочетание Mode I и Mode II). Нормальный отрыв достигается, когда сила прикладывается в направлении $\alpha=90^\circ$ к плоскости трещины, в то время как чистый сдвиг обеспечивается при приложении силы в направлении $\alpha=0^\circ$.



а) б) в)

Рис. 3.2.1. Геометрия CTS образца (а,б), испытательная установка (в)



а) б)

Рис. 3.2.2. Модель S-образных захватов. Геометрия и схема нагружения (а), сетка конечных элементов (б)

Как уже отмечалось ранее в рамках данной работы для моделирования разрушения материала используется формулировка общего функционала потенциальной энергии. Повреждение оценивается путем разложения плотности энергии деформации на компоненты, описывающие объемное и девиаторное разложение (3.1.18), либо через спектральное разложение (3.1.17). Эти два подхода предлагают разные способы распределения энергии в материале во время деформации, что, в свою очередь, влияет на траекторию распространения трещины. При моделировании были полностью воспроизведены условия испытаний, а именно передача нагрузки от оснастки через шпильки к образцу (рис.3.2.2). При моделировании решалась контактная задача типа "поверхность–поверхность" с учетом трения на контакте оснастки, шпилек и образца. Для этого использованы контактные элементы, с заданным коэффициентом трения μ=0.2. Значения упругих свойств материала и параметры модели фазового поля приведены в таблице 3.1.2. Для моделирования выбраны изопараметрические 2D элементы с 3 степенями свободы в узле (перемещения u, v и функция повреждения в фазовом поле φ)

и 4 точками интегрирования. Для моделирования испытаний на растяжение использовано 50000 элементов, а для условий чистого сдвига 200000 элементов.

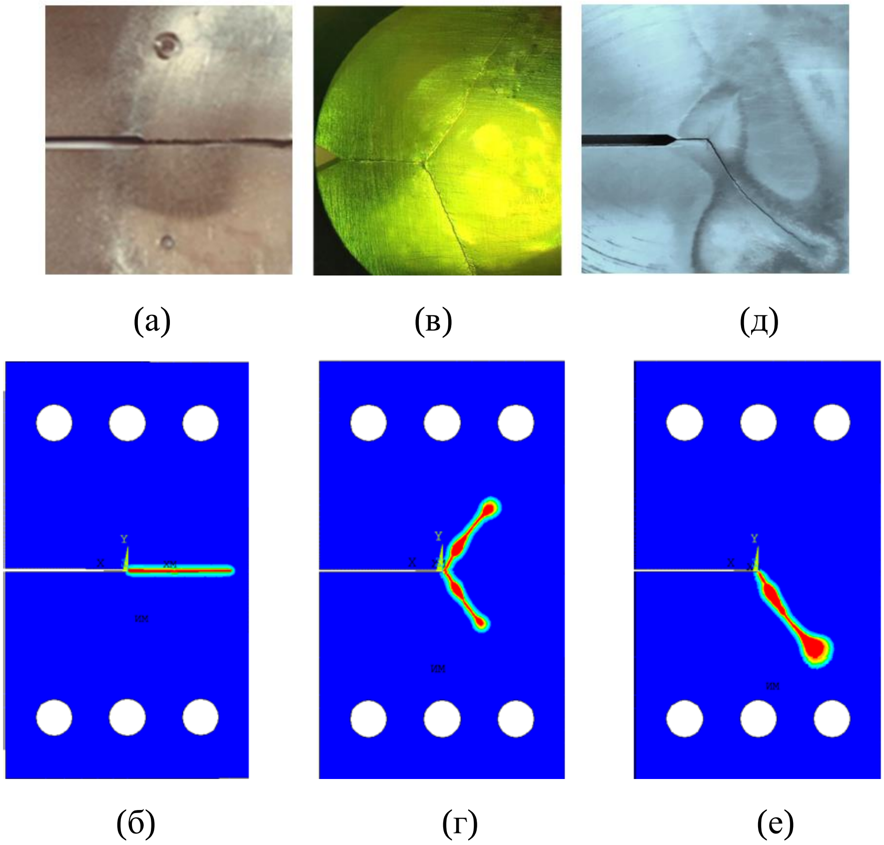


Рис. 3.2.3. Экспериментальные (а,в,д) и расчетные (б,г,е) траектории роста трещин в CTS образце.

На рисунке 3.2.3. представлены экспериментальные данные по траекториям роста трещины, полученные В.Н. Шлянниковым и Д.В. Федотовой [208] для образца CTS, выполненного из высокопрочной стали 34Х. Испытания проводились при нормальном отрыве (чистая форма I) (Рис. 3.2.3а) и при начальном чистом сдвиге (чистая форма II) (Рис. 3.2.3в и 3.2.3е). Результаты показывают, что при одинаковых условиях нагружения начальным чистым сдвигом могут наблюдаться как ветвление, так и одностороннее распространение трещины (Рис. 3.2.3в и 3.2.3д). Кроме того, данные расчетов для зависимостей нагрузка-перемещение (рис.3.2.4) демонстрируют, что для достижения предельного состояния при начальном чистом сдвиге требуется больше затрат энергии при разрушении по сравнению с нормальным отрывом. Это обусловлено разной длиной пути разрушения, который при нормальном отрыве существенно меньше длины криволинейной трещины при начальном чистом сдвиге с учетом большей податливости образца в этом случае.

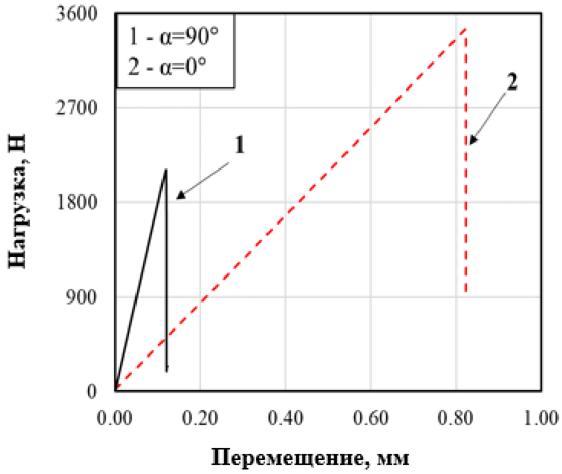


Рис. 3.2.4. Диаграммы нагрузка-перемещение для нормального отрыва по форме I (α =90˚) и начального чистого сдвига по форме II (α =0˚)

Результаты моделирования фазовых полей, показанные на рисунках 3.2.3(б), 3.2.3(г) и 3.2.3(е), были получены с использованием метода фазовых полей разрушения. В частности, рисунок 3.2.3г соответствует использованию уравнения (3.1.22), а для получения результатов, показанных на Рис. 3.2.3е, было использовано уравнение (3.1.18). Эти модели приводят к различным траекториям роста трещины из-за различий в способах разложения плотности энергии деформации. Это подчеркивает роль выбора уравнений в предсказании пути распространения трещины при сложных условиях нагружения. Несмотря на то, что обе формулировки адекватно описывают экспериментальные данные, проблема предсказания траектории роста трещины при смешанных формах разрушения остается незавершенной. Требуется дополнительный учет и обоснование влияния пластических свойств материала и их кинетики по циклам деформирования. Тем не менее первые результаты, полученные в настоящей работе, являются обнадеживающими в продолжении исследований в этом направлении.

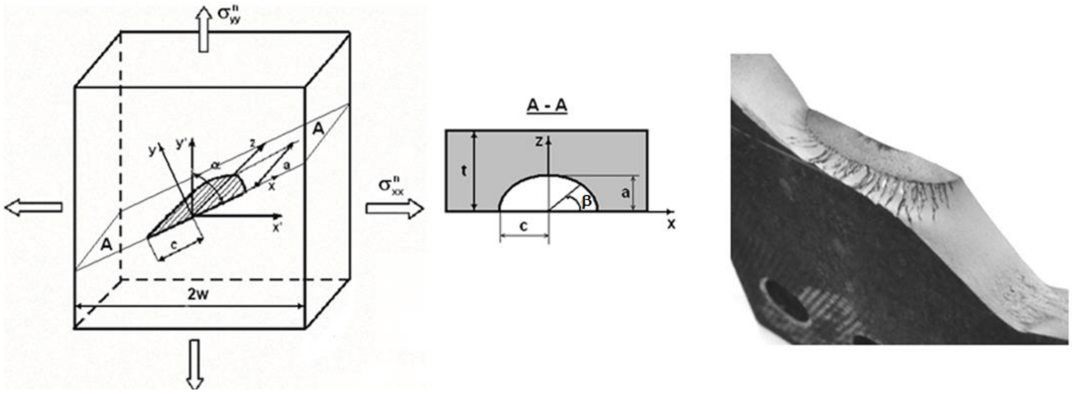
Важным аспектом этого исследования является соотношение между масштабом или размером фазового поля l и критической скоростью высвобождения энергии G_c. Масштабный параметр фазового поля определяет размер зоны процесса разрушения. Важно отметить, что данный параметр не может рассматриваться исключительно как числовой параметр. Размер зоны разрушения влияет как на инициирование, так и на распространение трещины, и поэтому его необходимо тщательно определять, чтобы он соответствовал физико-механическим свойствам материала с учетом параметра структуры. Это наблюдение согласуется с выводами, представленными в работе [227]. В исследовании нелинейной циклической деформации авторы подчеркнули важность правильного выбора параметров модели для точных предсказаний фазовых полей разрушения. В своей работе, посвящённой сравнению моделей изотропного и кинематического упрочнения, они отметили необходимость тщательного выбора уравнений при моделировании роста трещин в материалах, подвергающихся сложным условиям нагрузки.

Таким образом, настоящая работа предоставляет дополнительную информацию в порядке обсуждения механизмов повреждения при смешанных формах разрушения, а также обращает внимание на важность трактовки физического смысла параметров моделирования, особенно размера фазового поля и способов разложения плотности энергии для прогнозирования траектории и скорости роста трещины в реальных материалах и элементах конструкций.

3.3. Анализ фазовых полей разрушения для поверхностных трещин при сложном напряженном состоянии

Наиболее актуальными в практических приложениях являются задачи анализа и прогнозирования развития поверхностных дефектов различной формы в плане. В этой связи в данном разделе рассмотрено применение модели фазового поля для моделирования распространения исходных несквозных дефектов в 3D-пластинах для смешанных мод разрушения при многоосном нагружении.

Решение рассматриваемой задачи в соответствии с развиваемым подходом фазовых полей разрушения относится к моделированию поведения поверхностной несквозной полуэллиптической трещины, ориентированной под углом $\alpha = 45°$ к осям приложения нагрузки в пластине, подверженной равномерному двухосному нагружению с различным соотношением компонент номинальных напряжений (рис. 3.3.1а). Данный пример демонстрирует потенциал моделей фазового поля в предсказании сложных процессов разрушения в трёхмерной постановке при эксплуатационных нагрузках. Отношение нагрузок $\eta=\sigma_{xx}/\sigma_{yy}$ (коэффициент двухосности), определяет взаимосвязь между приложенными номинальными напряжениями. Пластина с поверхностной наклонной трещиной, изображённая на рис. 3.3.1, при монотонном двухосном нагружении характеризуется наличием всех трёх компонентов коэффициентов интенсивности напряжений для форм отрыва I, сдвига II и среза III вдоль фронта трещины. Этот раздел в первую очередь направлен на исследование совместного влияния соотношения полуосей *a/c* полуэллиптической поверхностной трещины и коэффициента двухосности η на поведение фазового поля разрушения при упругом деформировании.

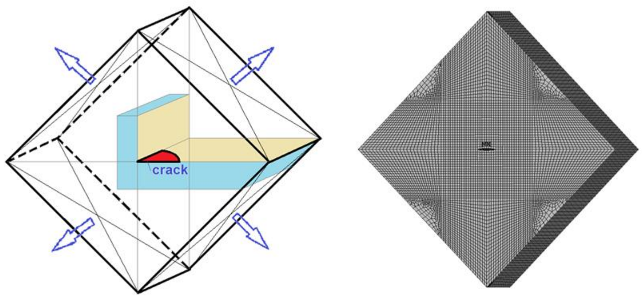


а) б) в)

Рис. 3.3.1. Поверхностная наклонная трещина в пластине при двухосном нагружении.

В методе фазового поля эволюция трещины является результатом, который основывается на формулировке и оценке локальной плотности энергии деформации, движущей силы и сопротивления материала к разрушению. Следовательно, величина плотности энергии деформации, управляющая распространением трещины, должна зависеть как от деформации, так и от ориентации поверхности трещины относительно вектора нагрузки. Комбинация пространственного описания поверхности трещины с основным физическим принципом образования поверхности трещины, а именно диссипацией энергии деформации, предоставляет подход, который может моделировать и предсказывать распространение трещин в соответствии с экспериментально найденными траекториями. В настоящем разделе рассматриваются несколько трёхмерных задач, основанных на численных и экспериментальных результатах, представленных в работах [16, 213, 214].

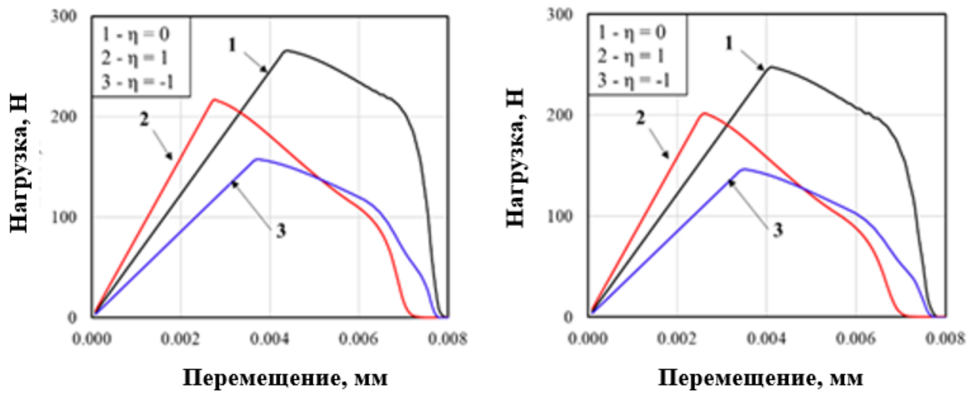
На рисунке 3.3.2 показан представительный объем, выделенный двумя парами взаимно перпендикулярных сечений в рассматриваемой пластине с поверхностной трещиной, ориентированной под углом $\alpha = 45°$ к осям приложения нагрузки и граничные условия для реализации двухосного нагружения. Трещина была смоделирована таким образом, что отношение полуосей начальной трещины составляло $a/c = 1$ и $a/c = 0.5$, где $a = 0.025$ мм, $c = 0.025$ и 0.05 мм соответственно. Рассматриваются три различных случая сочетания двухосной нагрузки и начальной ориентации поверхностной полуэллиптической трещины. Первый случай представляет нормальный отрыв (mode I) при равно-двухосном растяжении, когда $\eta = +1$ и $\alpha = 45^{\circ}$. Второй случай относится к смешанному разрушению при одноосном растяжении $\eta = 0$ для начальной поверхностной трещины, расположенной под углом $\alpha = 45^{\circ}$. Третий случай принадлежит чистому сдвигу (mode II) при равно-двухосном растяжении-сжатии с $\eta = -1$ и $\alpha = 45^{\circ}$. Механические свойства материала и масштабный параметр $l = 0.03$ мм фазового поля приведены в Таблице 3.1.2.



а) б)

Рис. 3.3.2. 3D-пластина при двухосном нагружении с полуэллиптической поверхностной трещиной: (а) представительный объем, (б) сетка конечных элементов.

Следует отметить, что в трехмерной задаче количество узлов становится значительно больше, поэтому для анализа использована упрощенная модель, как показано на рисунке 3.3.2б. Конечно-элементная модель состоит из 160000 20-узловых элементов с 8 точками интегрирования. Нагружение пластины происходит путем приложения перемещений к ее границам с шагом Δu.



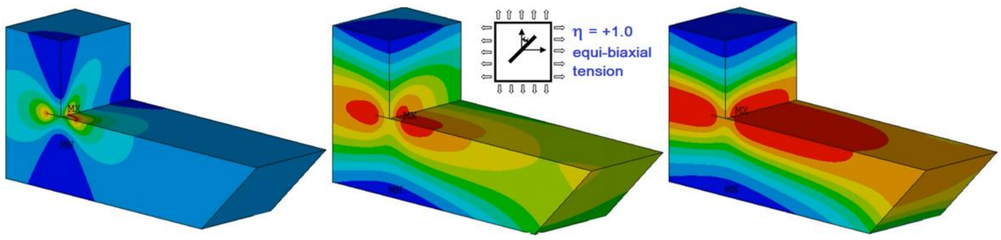
а) б)

Рис. 3.3.3. Кривые нагрузка-перемещение при двухосном нагружении для трещины с соотношением полуосей (а) $a/c = 1$ (полукруг) и (б) $a/c = 0.5$ (полуэллипс).

На рисунке 3.3.3. показаны расчетные зависимости нагрузка-перемещения по теории фазовых полей разрушения для различных значений коэффициента двухосности напряжений $\eta = \sigma_{xx}/\sigma_{yy}$ для полуэллиптических трещин с отношением полуосей *a/c* = 1 (полукруг) и *a/c* = 0.5 (полуэллипс). Из представленных данных следует, что двухосность нагружения оказывает значительное влияние на сопротивление разрушению материала. Как и ожидалось, пластина с начальным поверхностным дефектом при одноосном растяжении выдерживает большую максимальную нагрузку, чем при двухосном нагружении. Кроме того, смешанные формы разрушения при равно-двухосном растяжении (η = +1) и равно-двухосном растяжении-сжатии (η = -1) приводят к более низким пиковым нагрузкам по сравнению с одноосным растяжением (η = 0). Данные результаты, полученные при моделировании фазовых полей разрушения, подтверждают с точки зрения несущей способности и практических приложений актуальность исследований поведения материала и его предельных состояний при сложном напряженном состоянии, представленные в главе 2 настоящей работы.

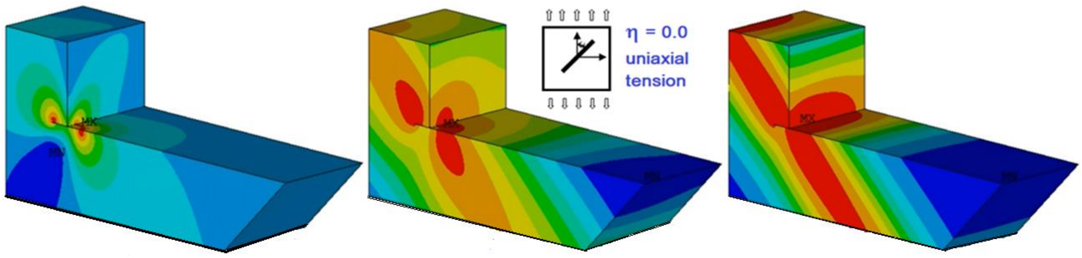
На Рис.3.3.4-3.3.6 показаны траектории роста поверхностной трещины в форме последовательных положений контуров фазовых полей для полуэллиптического начального дефекта с отношением полуосей *a/c* = 0.5. На этих рисунках красный цвет соответствует значению параметра повреждения $\varphi > 0.9$. Для удобства анализа представление контуров фазовых полей разрушения в пластине при двухосном нагружении выполнено с использованием репрезентативного объема, как показано на рис. 3.3.2a. Такое представление позволяет наблюдать распределения фазовых полей во взаимно перпендикулярных поперечных сечениях.

Состояние равнодвухосного растяжения η = +1 (рис. 3.3.4) по определению является разрушением по форме нормального отрыва и инвариантно к углу наклона плоскости дефекта по отношению к осям нагружения пластины. Симметрия контуров фазовых полей на рис. 3.3.4 для различных стадий разрушения подтверждает это теоретическое положение. Приращение размеров полуэллиптического дефекта вдоль криволинейного фронта трещины происходит неравномерно. При равнодвухосном растяжении наблюдается ускоренный рост дефекта на свободной поверхности пластины по сравнению с темпами роста в направлении толщины пластины. Контуры фазовых полей можно условно принять за размеры зоны процесса интенсивного разрушения, которые в горизонтальной плоскости в несколько раз больше, чем размеры контуров в вертикальной плоскости.



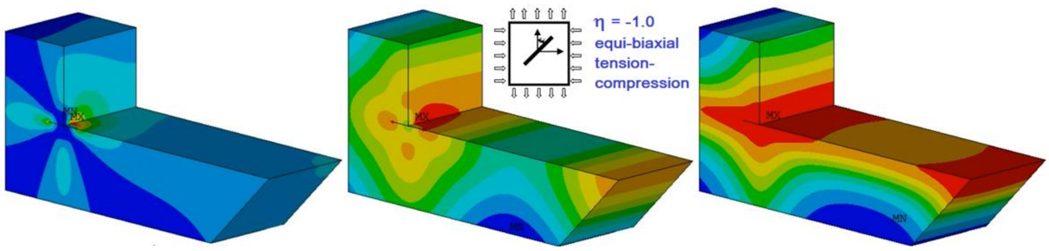
а) б) в)

Рис. 3.3.4. Фазовые поля разрушения в процессе роста поверхностной трещины при равнодвухосном растяжении: (а) u = 0.0029 мм, (б) u = 0.0063 мм, (в) u = 0.0069 мм.



а) б) в)

Рис. 3.3.5. Фазовые поля разрушения в процессе роста поверхностной трещины при одноосном растяжении: (а) u = 0.0043 мм, (б) u = 0.0065 мм, (в) u = 0.0074 мм.



а) б) в)

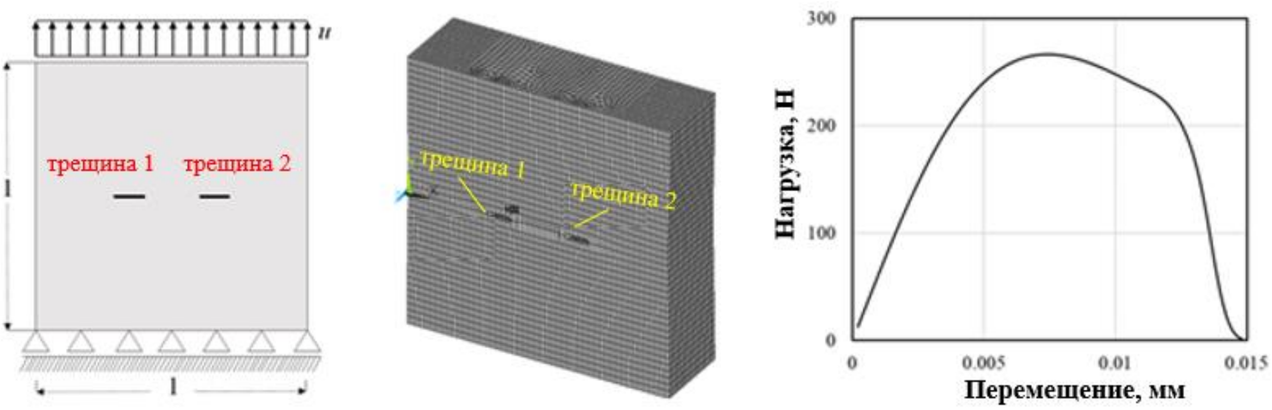
Рис. 3.3.6. Фазовые поля разрушения в процессе роста поверхностной трещины при равнодвухосном растяжении-сжатии: (а) u = 0.0029 мм, (б) u = 0.0058 мм, (в) u = 0.0073 мм.

При одноосном растяжении $\eta = 0$ пластины с наклонной полуэллиптической трещиной $\alpha = 45^{\circ}$ (рис. 3.3.5), доминирующими является механизм смешанных форм разрушения, при котором направление роста трещины изменяется вдоль криволинейного фронта полуэллиптического дефекта. Следует отметить, что сначала фазовые поля повреждения распространяются в наклонной плоскости, и затем пересекают всю толщину пластины, превращая исходный поверхностный дефект в сквозной. В этом случае контуры фазовых полей разрушения имеют прямую симметрию как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскостях, а также показывают обратную симметрию на свободной поверхности пластины. Такая ситуация характеризуется наличием различных изменяющихся вдоль полуэллиптического фронта трещины комбинаций упругих коэффициентов интенсивности напряжений для форм отрыва, сдвига и среза.

Равно-двухосное растяжение-сжатие с коэффициентом η = -1 в плоскости расположения начального полуэллиптического дефекта под углом $\alpha = 45^{\circ}$ (рис. 3.3.6) по определению формирует состояние чистого сдвига на свободной поверхности пластины. Однако в этих же условиях нагружения начальный полуэллиптический дефект приводит к состоянию чистого среза в наиболее глубокой точке фронта трещины, совпадающей с осью симметрии OZ. Фазовые поля на рис. 3.3.6 показывают, что при развитии поверхностной трещины на начальной стадии она быстро становится сквозной по толщине с небольшими размерами на поверхности пластины. Дальнейшее распространение трещины происходит преимущественно в горизонтальной плоскости. В этом случае фазовые поля разрушения во всех взаимно перпендикулярных плоскостях симметричны относительно координатных осей. Эти численные результаты совпадают с теоретическими оценками контуров эквивалентных напряжений и деформаций, проявляющих свойства симметрии при чистом сдвиге и срезе.

Полученные численные фазовые поля подтверждают недавние экспериментальные данные авторов [214], которые указывают на то, что поверхностные дефекты развиваются с разной скоростью на свободной поверхности образца и в самой глубокой точке полуэллиптического фронта трещины. Контуры фазовых полей, показанные на рис. 3.3.4-3.3.6, представляют собой уникальную перспективу для изучения накопления повреждений вдоль фронтов полуэллиптических трещин в зависимости от различных сочетаний условий двухосного нагружения, формы в плане и ориентации поверхностного дефекта. Трехмерные эффекты наиболее сильно влияют на поведение параметров смешанных форм разрушения. Это убедительно показано на примере сравнения состояний разных точек одного и того же фронта трещины при равно-двухосном растяжении-сжатии при η = -1 и $\alpha = 45^{\circ}$, когда происходит изменение форм разрушения от чистой формы сдвига II при $\beta = 0^{\circ}$ на поверхности образца до чистой формы среза III при $\beta = 90^{\circ}$ в самой глубокой точке фронта. Так же визуализируются процессы эволюции дефекта от поверхностной полуэллиптической трещины до сквозной трещины с прямолинейны фронтом, полностью пересекающей сечение в направлении толщины образца.

Оценка несущей способности элемента конструкции часто требует оценки взаимодействия нескольких близко расположенных поверхностных дефектов, анализа процессов их роста и взаимодействия в зависимости от времени эксплуатации. Одним из главных достоинств модели фазового поля разрушения является возможность моделирования процессов образования трещин, их распространение, ветвление, слияние в рамках независимой регуляризованной вариационной модели. Следующая задача настоящего раздела посвящена приложению разработанного метода фазовых полей разрушения к моделированию процессов взаимодействия и объединения поверхностных трещин.

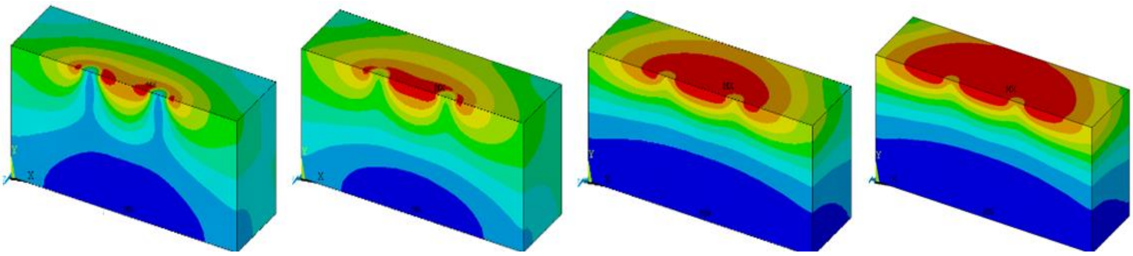


а) б) в)

Рис. 3.3.7. Пластина с двумя поверхностными трещинами: (а) геометрия пластины, нагрузки и граничные условия, (б) сетка конечных элементов, (в) кривая нагрузка-перемещение.

Рассматривается пластина с двумя исходными полукруговыми поверхностными трещинами, геометрия и граничные условия для которых показаны на рис. 3.3.7а. Толщина пластины t = 0.3 мм. Два начальных дефекта моделируются таким образом, что отношение размеров полуосей a/c для начальной трещины равно 1, а собственно полуоси имеют размеры $a = c = 0.05$ мм. Для материала предполагаются следующие параметры: модуль упругости E = 210 ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$ и критическое значение скорости высвобождения энергии $G_c = 2{,}7$ МПа·мм. Масштабный параметр фазового поля в 3 раза больше размера элемента сетки, $l = 0{,}06$ мм. Сгущение сетки выполнено в тех областях, где ожидается развитие трещин, расчетная сетка состоит из 50 000 элементов с характерным размером элемента $h = 0{,}02$ мм. Шаг по перемещению задается как Δu =

1×10-3 мм по мере приближения к пиковым нагрузкам. Полученная кривая нагрузка-перемещение по 3D модели фазового поля представлена на рис. 3.3.7в. Сравнивая результаты 3D моделирования двух поверхностных трещин (рис. 3.3.7в) с более простыми 3D задачам пластины со сквозной трещиной с прямолинейным фронтом (рис. 3.1.9в), можно отметить, что расчетный профиль зависимости нагрузки от перемещения для двух поверхностных дефектов имеет более насыщенный по перемещениям характер. Процесс взаимодействия трещин приводит к умеренно сглаженному поведению при снижении нагрузки до окончательного разрушения.



а) б) в) г)

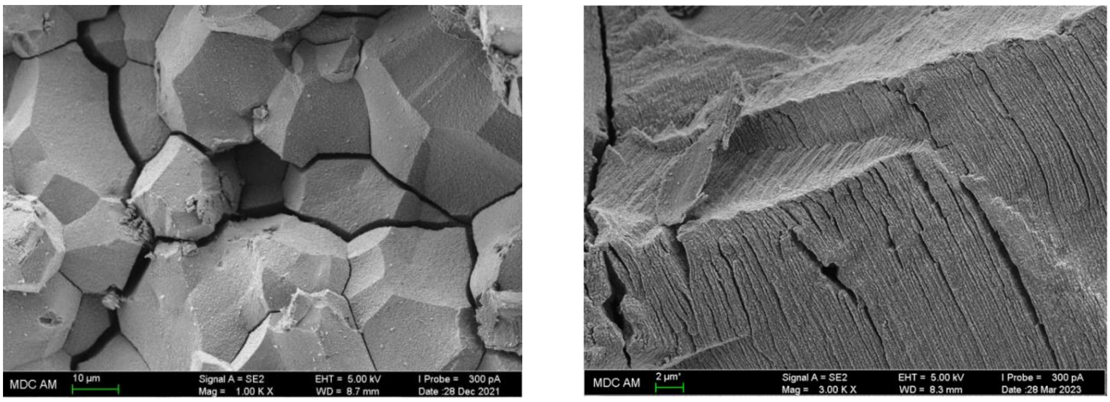
Рис. 3.3.8. Взаимодействие, объединение и развитие двух исходных поверхностных трещин.

Расчетные контуры фазовых полей разрушения, соответствующие последовательным стадиям взаимодействия, объединения и дальнейшего роста с общим фронтом двух начальных поверхностных дефектов на различных стадиях нагружения приведены на Рис. 3.3.8. На первом этапе наблюдается развитие каждой отдельной трещины Рис.3.3.8(а). На следующем этапе (рис. 3.3.8 б-в) происходит взаимодействие трещин и их объединение и распространение с трещин с общим фронтом. Наконец, на последней стадии (рис. 3.3.8г), процесс завершается разрушения пластины со сквозным фронтом, который пересекает всю толщину пластины. Синие и красные цвета на рисунках соответствуют исходному неповрежденному и полностью разрушенному состоянию материала соответственно.

Представленные картины фазовых полей разрушения позволяют визуализировать динамику взаимодействия и разрушения поверхностных дефектов. Полученные результаты являются чрезвычайно актуальными с позиций оценки эксплуатации элементов конструкций по стратегии допускаемой повреждаемости. В эксплуатации часто элементы конструкций ослаблены совокупностью поверхностных дефектов различной формы и размеров, расположенных в различных плоскостях по отношению к направлениям действующей нагрузки. Подход фазовых полей разрушения естественным образом предсказывает траектории распространения трещин в трехмерной постановке, что позволяет наперед предусмотреть конструктивные и технологические способы ограничения роста дефектов.

3.4. Моделирование доминирующих механизмов внутризеренного и межзеренного разрушения на основе метода фазовых полей разрушения

Все металлы и сплавы, затвердевшие в обычных условиях, имеют зернистое строение, то есть состоят из множества мельчайших кристалликов неправильной формы (зерен), случайным образом ориентированных в пространстве. Исследования процессов нелинейного деформирования структурных сред является важной и актуальной задачей. На процесс деформирования влияют такие факторы как механические характеристики материалы, структура материала, размеры структурных элементов. Фазовые поля разрушения удобны тем, что их можно использовать на различных масштабных уровнях по отношению к характерному параметру структуры материала. В связи с этим следующий раздел настоящей главы посвящен моделированию доминирующих механизмов разрушения материалов с зернистой структурой. Такой подход позволяет более детально исследовать процессы разрушения на мезоуровне как внутризеренные и межзеренные, которые идентифицируются прямыми наблюдениями на сканирующих электронных микроскопах (СЭМ).



а) б)

Рис. 3.4.1. Межзеренное разрушение (а), внутризеренное разрушение (б).

На представленных на рис 3.4.1 полученных нами с помощью СЭМ Merlin Zeiss фрактографиях поверхностей разрушения экспериментальных образцов показаны типовые примеры реализации межзеренных и внутризеренных доминирующих механизмов разрушения в образцах из жаропрочной сплава. Разрушение материала по границам зерен сопровождается образованием новых поверхностей раздела в первоначально сплошном континууме. Разрушение по телу зерна предполагает его разделение на части.

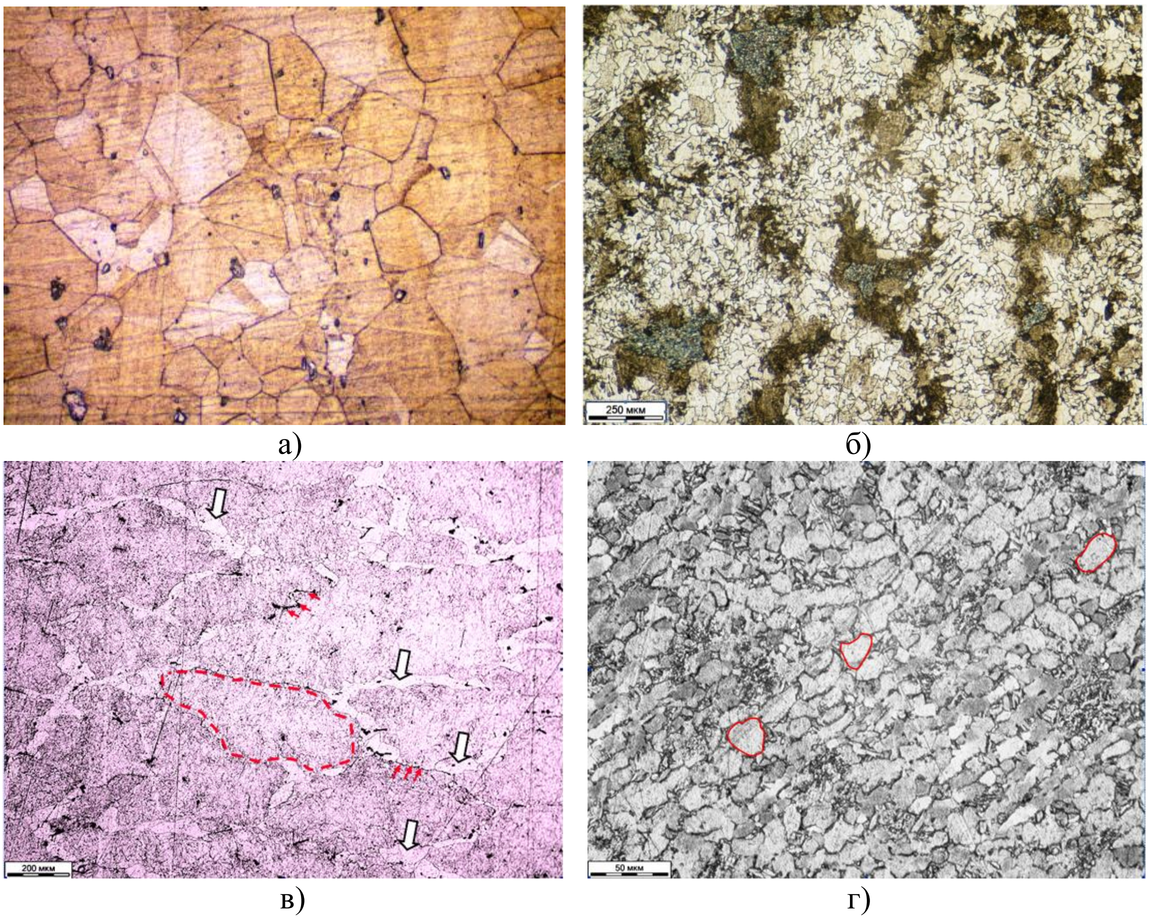


Рис. 3.4.2. Структуры конструкционных материалов: (а) сплав на основе никеля, (б) сталь Р2М, (в) алюминиевый сплав, (г) титановый сплав.

Реализация того или иного механизма разрушения зависит от структуры и свойств материала, а также от сочетания условий нагружения и воздействия окружающей среды. В качестве примера на рис.3.4.2 приведены структуры основных конструкционных материалов: жаропрочный сплав на основе никеля (ферритно-перлитная структура (а), сталь Р2М (ферритно-перлитная структура) (б), алюминиевый сплав (зернистая структура с интерметаллидами по границам) (в), двухфазный α-β титановый сплав с глобулярной формой α фазы (г). Из представленных на рисунке 3.4.2 следует, что для моделирования доминирующих процессов разрушения металлических конструкционных материалов необходимо воспроизвести их кристаллическую структуру с выделением отдельных зерен и границ между ними. В настоящей работе для построения заданных кристаллических структур разработан и реализован вспомогательный компьютерный код, позволяющий моделировать структуру материала по заданным характеристикам. Данный метод моделирования, как и динамически подключаемая библиотека реализующая фазовые поля разрушения, был интегрирован в программный комплекс ANSYS.

Для моделирования ячеистой структуры был использован подход на основе мозаики (диаграммы) Вороного [110], представляющей из себя плоскость, разбитую на регионы, в которой каждый регион этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества, чем к любому другому элементу множеств. Данные области (регионы) можно интерпретировать как зерна структуры материала. Зерна отделены друг от друга границей, представляющей собой переходный слой характерной толщины, от которого зависит поведение материала. Алгоритм построения межзеренного расстояния представляет собой смещение границ каждого зерна к центру так, чтобы каждое зерно было отделено от соседнего на одинаковое расстояние (межзеренное расстояние), при этом геометрия зерна сохраняется. В программном комплексе ANSYS данный процесс был реализован с помощью равномерного масштабирования каждого зерна.

Описание диаграммы Вороного

Диаграмма Вороного - это графическое представление разбиения пространства на регионы, где каждый регион состоит из точек, ближайших к определенной точке из набора заданных точек. Математически определение диаграммы Вороного включает следующие основные понятия:

1. Точки в пространстве: Имеется набор точек $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, где каждая точка p_i является d-мерным вектором в пространстве.
2. Расстояние: Определение расстояния между двумя точками является важной составляющей в построении диаграммы Вороного. Обычно

используется евклидово расстояние, которое определяется как $\| p_i - p_j \|$, где $\| \cdot \|$ обозначает норму.

3. Центроиды: Центроид точек в пространстве - это точка, которая является средним положением всех точек в заданном множестве. Центроид точек P может быть определен как:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \tag{3.4.1}$$

4. Регионы Вороного: регион, связанный с точкой p_i из набора точек P представляет собой множество всех точек, которые ближе к p_i по сравнению с остальными точками в P. Регион Вороного обозначается как $V(p_i)$ и определяется как:

$$V(p_i) = \{x \in \mathbf{R}^d \mid \| x - p_i \| \le \| x - p_j \| \quad \forall p_j \in P, j \ne i\} \tag{3.4.2}$$

5. Границы Вороного – это множество всех точек в пространстве, которые находятся на равном расстоянии между двумя или более точками из набора P.

Алгоритм построения диаграммы Вороного

Алгоритм последовательного построения является одним из популярных методов для вычисления диаграммы Вороного. Он основан на последовательном добавлении точек набора и постепенном обновлении регионов Вороного. Последовательность действий согласно алгоритму состоит в следующем:

1. Инициализация:

- Создается пустой список регионов Вороного (V)
- Создается пустой список ребер (E).

2. Постепенное добавление точек:

- Для каждой точки p_i из набора точек:
  - Добавление точки:
    - Добавляется точка p_i в список регионов Вороного (V).
  - Определение региона:
    - Для каждой точки p_i из набора точек, где $j \ne i$:

- Вычисляется расстояние d_{ij} между точками p_i и p_j

- Если d_{ij} является наименьшим расстоянием для точки p_i (ближайшей точкой к p_i), то точка p_j входит в регион R_i для точки p_i.

- Обновление ребер:

- Для каждой пары точек p_j и p_k из региона R_i (где j и k могут быть различными точками из R_i):

- Если ребро (p_j, p_k) еще не присутствует в списке ребер (E), добавляем его в список.

3. Завершение:

- Построение финальной диаграммы Вороного путем завершения обновления регионов и ребер для последней добавленной точки. Реализация алгоритма может включать дополнительные детали и оптимизацию в зависимости от конкретных требований и особенностей задачи.

При использовании генератора случайных чисел было сформировано множество точек и построена по ним диаграмма Вороного следующего вида (рис.3.4.3):

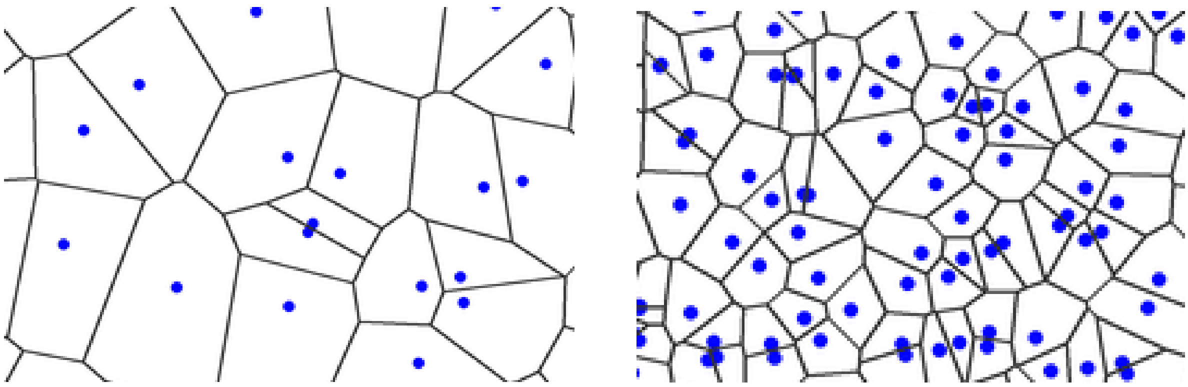
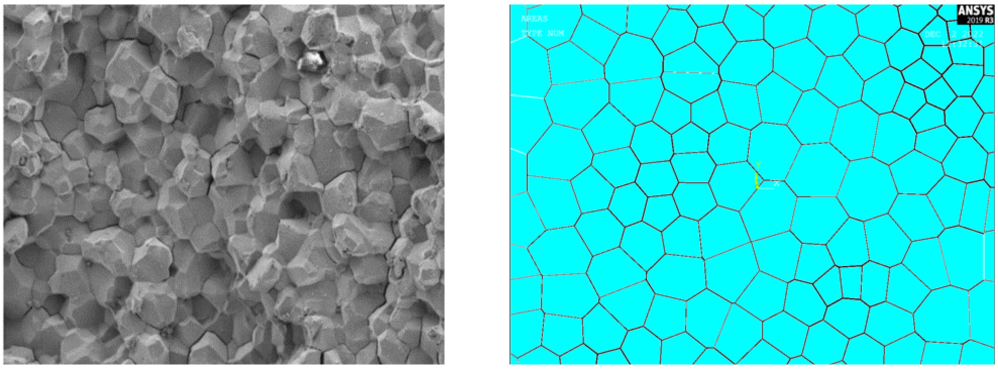


Рис. 3.4.3. Метод распределения центроидов зерен

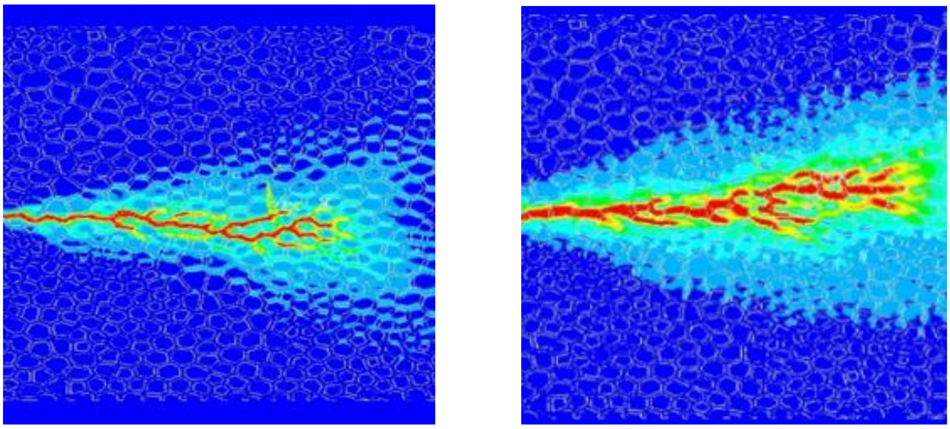
Для получения более равномерного распределения точек использован алгоритм релаксации Ллойда [166], который использует диаграмму Вороного, построенную по исходным точкам. Смысл алгоритма Ллойда заключается в том, чтобы построить диаграмму Вороного, а затем переместить каждую точку в центроид (геометрический центр) соответствующей ей ячейки. Данный процесс может быть итерационным и повторяться несколько раз.

Для демонстрации реализации этой методики, в качестве примера была использована структура жаропрочного сплава ЭИ698 (рис.3.4.2), который является типичным примером конструкционных материалов с зернистой микроструктурой. Была построена модель кристаллической структуры в соответствии с описанным выше алгоритмом для формирования зерен и межзеренных границ материала (рис.3.4.4).



а) б)

Рис. 3.4.4. Расположение зерен в сплаве ЭИ698 (а) и модель структуры (б).



а) б)

Рис. 3.4.5. Межзеренное разрушение (а) и внутризеренное разрушение (б) в фазовых полях разрушения

Разработанный алгоритм построения ячеистой структуры был адаптирован к разработанному комплексу программ, реализующих фазовые поля разрушения в среде вычислительного кода ANSYS. С помощью разработанного алгоритма были смоделированы два основных типа доминирующих механизма разрушения материала с зернистой структурой в терминах фазовых полей разрушения: межзеренное разрушение (рис. 3.4.5а), при котором дефекты распространяются вдоль границы зерна и внутризеренное разрушение (рис. 3.4.5б), когда разрушение происходит по телу зерна.

Различия в моделируемых механизмах разрушения было достигнуто за счет задания различных свойств элементов кристаллической структуры материала. В данном расчете было принято соотношение модулей упругости между телом зерна и межзеренной границей, равное 0.7. Это соотношение показывает, что модуль упругости межзеренной границы составляет 70% от значения упругости зерна. Подобный же результат был достигнут за счет изменения значений критической скорости выделения энергии G_c для тела зерна и его границы. Картины распределения параметра повреждения, представленные на рис.3.4.5 показывают, что размер или характерный масштаб фазового поля увеличивается в процессе роста трещины, что соответствует основному постулату теории фазовых полей и наблюдалось прямыми измерениями с помощью электронной микроскопии.

Таким образом, использование фазовых полей для моделирования различных типов разрушения на уровне зернистой структуры материала позволяет эффективно анализировать поведение материала при различных механизмах разрушения. Представленные на рис.3.4.5 результаты являются первым шагом в моделировании доминирующих механизмов разрушения в реальных конструкционных материалах и должны сопровождаться дополнением возможностей по учету влияния истории и вида нагружения, воздействия температуры и окружающей среды, упруго-пластических свойств материала, диффузионных процессов и изменения структуры при развитии дефектов. Такой подход предоставит возможность более точно предсказать, где и как будет происходить разрушение, что важно для разработки и прогнозирования несущей способности новых материалов и элементов конструкции. Метод фазовых полей разрушения эффективно описывает сложные механизмы разрушения, возникающие при смешанных формах деформирования по формам I, II и III, а также позволяет точно прогнозировать траекторию распространения трещины, учитывая взаимодействие между дефектами. Данный метод также позволяет учитывать взаимодействие различных механизмов разрушения и предсказывать их влияние на развитие дефектов на различных масштабных уровнях.

В следующем разделе 4.4 настоящей работы метод фазовых полей будет применен для анализа состояния и прогнозирования остаточной долговечности элемента диска паровой турбины, где будет моделироваться рост трещины в условиях сложного напряженного состояния.

ГЛАВА 4. ПРИЛОЖЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ПОВРЕЖДЕНИЙ УСТАЛОСТИ И ФАЗОВЫХ ПОЛЕЙ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ДИСКА ТУРБИНЫ

Вопрос долговечности элементов конструкций, подверженных циклическим нагрузкам, является актуальной задачей в области механики деформирования и разрушения. Общая долговечность таких материалов и структур определяется двумя основными стадиями: стадией образования трещины и стадией её роста. На стадии образования трещины материал подвергается накоплению повреждений, что ведет к образованию микротрещин, которые со временем могут эволюционировать в более крупные дефекты. На стадии роста трещины эти дефекты начинают распространяться, что приводит к ухудшению прочностных характеристик материала и, в конечном итоге, к разрушению. Для описания этих процессов необходимо использовать различные методы моделирования, которые могут учитывать, как механизмы локального повреждения, так и процессы распространения трещин на более сложных уровнях.

Для стадии образования трещины, когда речь идет о накоплении повреждений на микроуровне, эффективными являются континуальные модели поврежденности, такие как модели, основанные на критериях пластичности и прочности материалов. В главе 2 была разработана и представлена модель, описывающая стадию накопления повреждений, что дает возможность прогнозировать время и место образования трещины. Разработанная модель описывают эволюцию повреждения в материале через изменение его свойств, включая модуль упругости и предел текучести. Обычно такие модели применяются для описания поведения материала до момента, когда повреждения становятся достаточными, чтобы привести к видимым трещинам.

На стадии роста трещины необходимо использовать другие подходы, например такие как модели фазовых полей, которые описывают не только начальную стадию образования трещины, но и её дальнейшее развитие. Модели фазовых полей позволяют отслеживать эволюцию трещины на мезоскопическом уровне, учитывая такие факторы, как взаимодействие между зернами, типы разрушения (межзеренное и внутрезеренное), а также сложные механизмы, которые могут возникать в процессе роста трещины. Эти модели обладают достаточной гибкостью, что позволяет учитывать различные условия нагружения, включая монотонное и циклическое деформирование, а также неустойчивости, связанные с ростом трещины. Разработанная и реализованная модель фазового поля была представлена в главе 3.

В настоящей главе работы будет рассмотрено практическое применение моделей повреждений усталости (глава 2) и фазовых полей разрушения (глава 3) для прогнозирования долговечности элемента диска паровой турбин с эксплуатационным повреждением.

4.1. Напряженно-деформированное состояние и повреждения диска турбины в эксплуатации

Данный раздел работы относится к комплексной оценке несущей способности диска паровой турбины (ПТ) с эксплуатационным повреждением, основанной на передовых вычислительных и экспериментальных подходах в области прогнозирования долговечности материалов и механики разрушения. Представленная методология применяется к ротору паровой турбины ПТ-135/165-130, как показано на Рис. 4.1.1, который используется в качестве примера реализации разработанного метода. В работе рассматривается накопление и рост повреждений в диске паровой турбины при циклических нагрузках, обусловленных пуском и остановом, с эксплуатационным повреждением на поверхностях крепежных отверстий в заклепочном соединении лопаток с диском турбины.

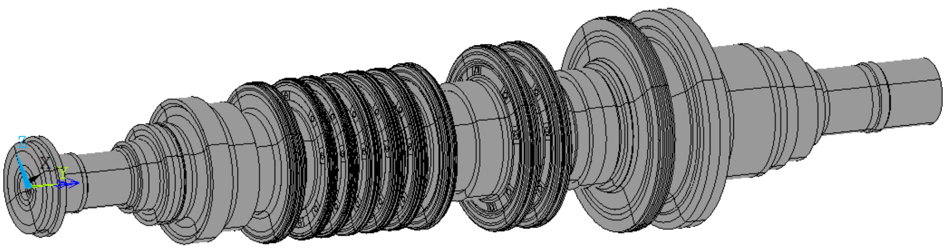
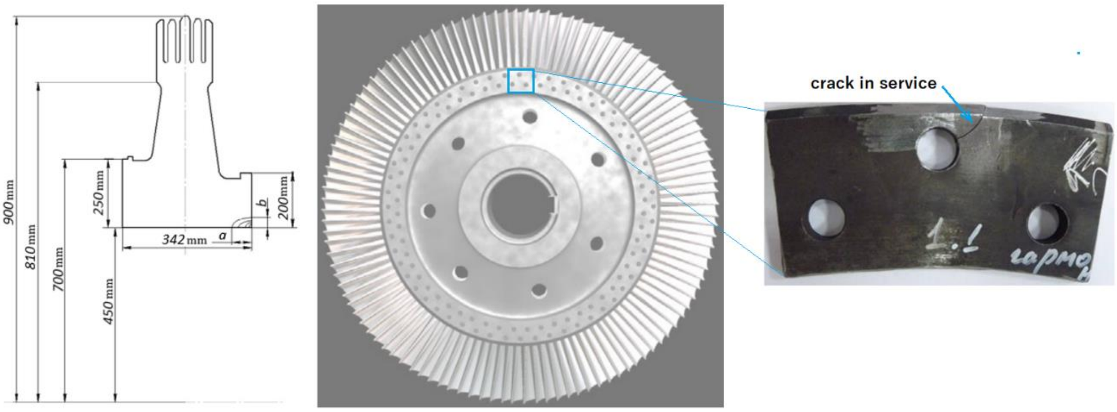


Рис. 4.1.1. Ротор паровой турбины РТ-135/165-130

Ротор турбины подвергается комбинированным термическим и механическим напряжениям в процессе эксплуатации, при максимальной температуре 550°С и скорости вращения 3000 об/мин. На Рис. 4.1.2а показано одно из радиальных сечений диска турбины (Рис. 4.1.2б) с соответствующими размерами. Рассматриваемый диск является частью 23-й ступени и расположен в цилиндре среднего давления ротора турбины. Повреждения, обнаруженные с использованием методов неразрушающего контроля (НК) в области обода диска с монтажными отверстиями, характеризуются образованием угловых трещин, начальный размер которых составляет примерно a = 1 мм на свободной поверхности (Рис. 4.1.2в).



а) б) в)

Рис. 4.1.2. Радиальное сечение (а) диска паровой турбины (б) и эксплуатационное повреждения в замковой части диска (в) 23-й ступени в виде угловой трещины.

В 23-й ступени турбины рабочая температура составляет примерно 140°C, поэтому влияние температуры в настоящих расчетах не учитывается. Для анализа напряжений на 23-й ступени турбины была использована комбинация центробежных нагрузок (сумма массы диска и лопаток) при максимальной скорости вращения 3000 об/мин.

Материал диска турбины — сталь 34ХН3МА, химический состав которой представлен в Таблице 4.1.1. Основные механические свойства для элементов пакета заклепочного соединения диска и лопаток (включая сам диск, лопатки и заклепки), которые будут использованы при анализе напряженно-деформированного состояния и моделирования процессов развития трещин в разделах 4.2-4.4, приведены в Таблицах 4.1.2 и 4.1.3.

	C	**Si**	**Mn**	**Ni**	**S**	**P**	**Cr**	**Mo**
%	0.3–0.4	0.17–0.37	0.5–0.8	2.75–3.75	0.035	0.03	0.7–1.1	0.25–0.4

Таблица 4.1.1. Химический состав стали 34ХН3МА

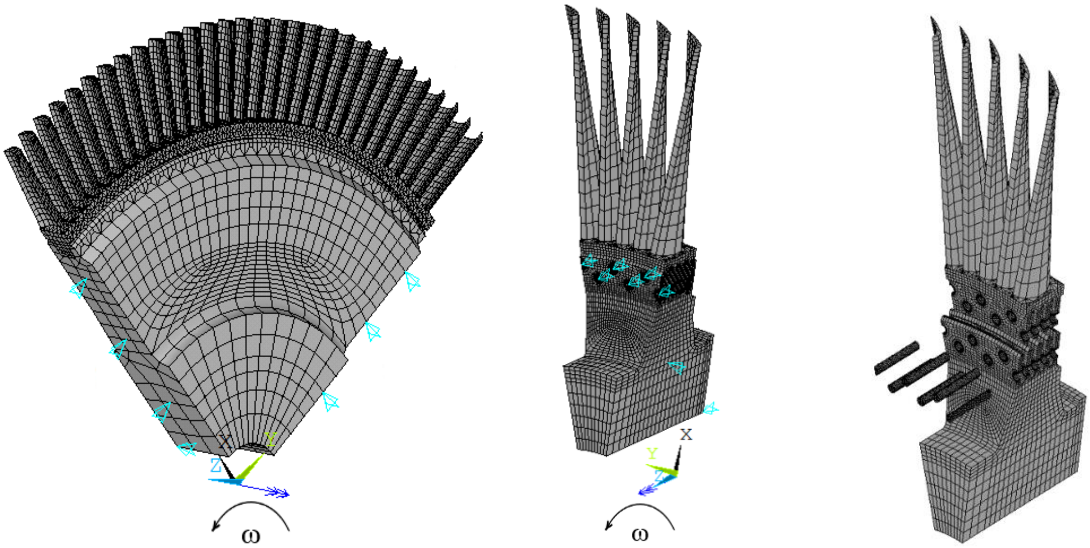
Элемент	Материал	Статическое нагружение						
		σ_0, МПа	**$\sigma_{\text{В}}$, МПа**	**E, ГПа**	**ν**	**ψ, %**	**n**	**ρ**
Диск	34ХН3МА	624.04	805.24	190.97	0.3	56	7.49	7710
Лопатка	2Х13	635.05	755.30	218.14	0.3	50	4.42	7670
Заклепка	25Х1М	750.15	900.12	217.07	0.3	50	5.50	7840

Таблица 4.1.2. Основные механические свойства элементов соединения

Элемент	Материал		
		K_{1C}, МПа*м$^{0.5}$	**G_C, МПа*м**
Диск	34ХН3МА	60-79	0.015-0.032

Таблица 4.1.3. Характеристики сопротивления разрушению стали 34ХН3МА

В таблицах 4.1.2-4.1.3: $\sigma_в$ — предел текучести, σ_0 — предел прочности, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ψ — относительное сужение, n —показатель деформационного упрочнения, ρ — плотность, K_{IC} — вязкость разрушения, G_c — критическая скорость высвобождения энергии.



а) б) в)

Рис. 4.1.3. Диск паровой турбины (а) и модели конечных элементов с лопатками (б) и заклепками (в)

Для прогнозирования долговечности была разработана 3D модель диска 23-й ступени турбины, которая включает диск турбины и лопатки, а также заклепки (рисунок 4.1.3). Для определения распределений напряжений и деформаций в диске турбины при рабочих нагрузках использован коммерческий программный комплекс ANSYS [75]. Для моделирования конфигурации диска и лопатки с заклепками использованы 20-узловые изопараметрические трехмерные конечные элементы. Сетка конечных элементов показана на рис. 4.1.3 с минимальным размером конечных элементов 0.36 мм. В силу циклической симметрии рассмотрен только сегмент диска с углом раствора 30 градусов.

На рисунке 4.1.4 представлены элементы соединения диска и лопатки в заклепочном соединении (Рис. 4.1.4а), а также распределения эквивалентных упруго-пластических напряжений (Рис. 4.1.4б, в) в диске турбины. Эти рисунки показывают, что максимальное значение эквивалентного напряжения, равное σ_B = 725 МПа, появляется на внутренней поверхности отверстий для крепежных элементов в проушине диска. В этой области эквивалентные напряжения превышают значение предела текучести для стали 34ХН3МА $\sigma_0 \approx$ 630 МПа.

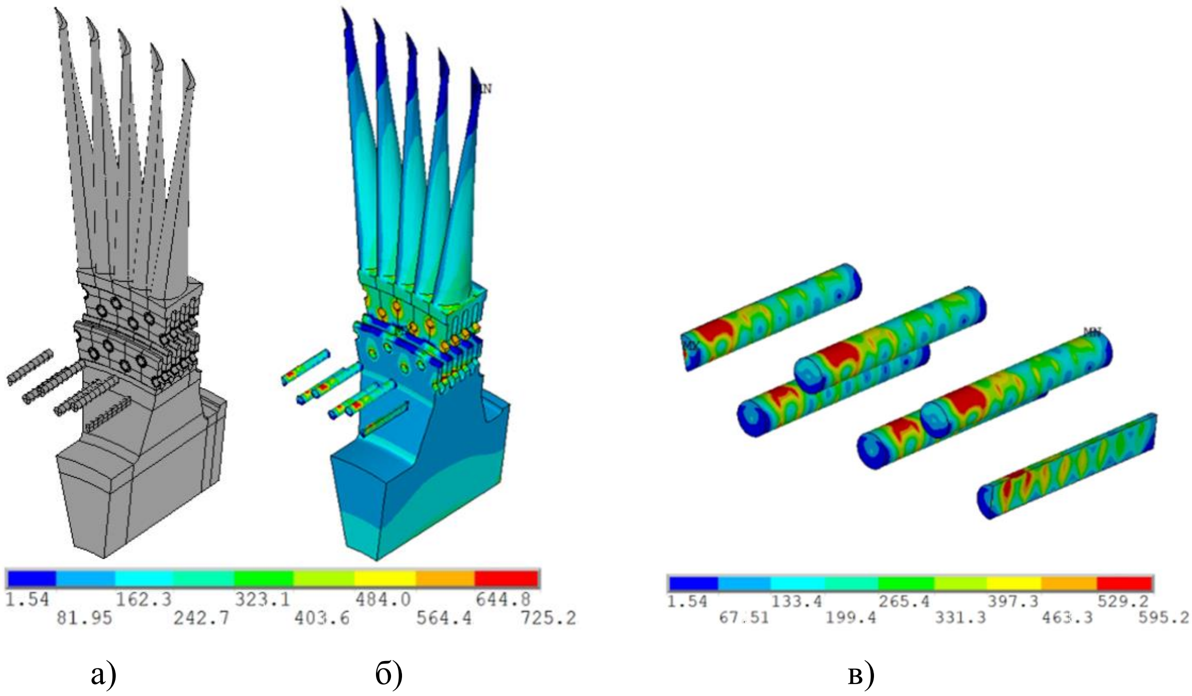
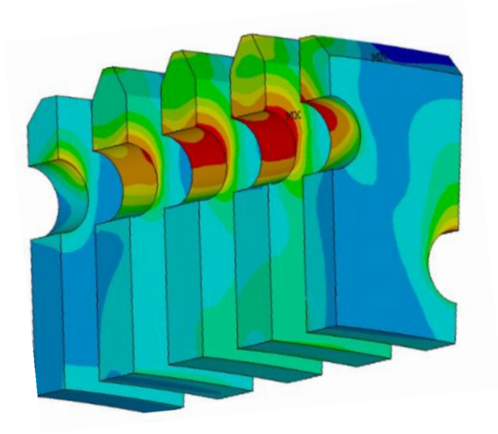
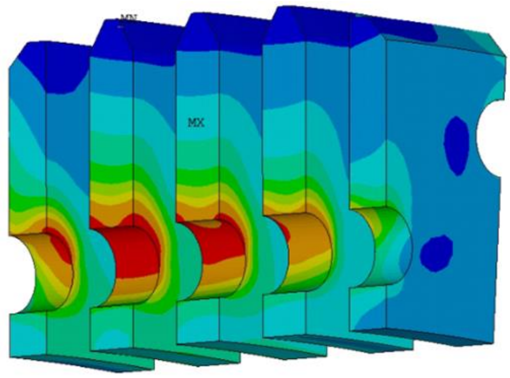


Рис. 4.1.4. Модель диска турбины (а) и распределения эквивалентных напряжений для диска (б) и (в) заклепок.

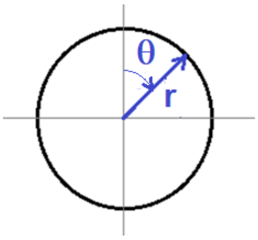
Диск турбины спроектирован как равнопрочная конструкция, и, следовательно, в критических зонах верхнего и нижнего ряда замковых соединений, максимальные эквивалентные, радиальные и окружные напряжения будут примерно одинаковыми в каждом из отверстий. Для более удобного сравнения распределений напряжений в проушине диска турбины с заклепочным соединением целесообразно ввести локальные полярные координаты r и θ (рис. 4.1.6). В этой системе координат начало отсчёта совпадает с центром отверстия, а полярный угол θ = 0° соответствует направлению действия центробежной нагрузки.

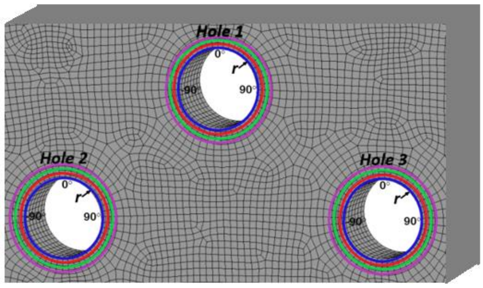




а) б)

Рис. 4.1.5. Распределение эквивалентных напряжений в верхнем (а) и нижнем (б) ряду крепежных отверстий в диске турбины.

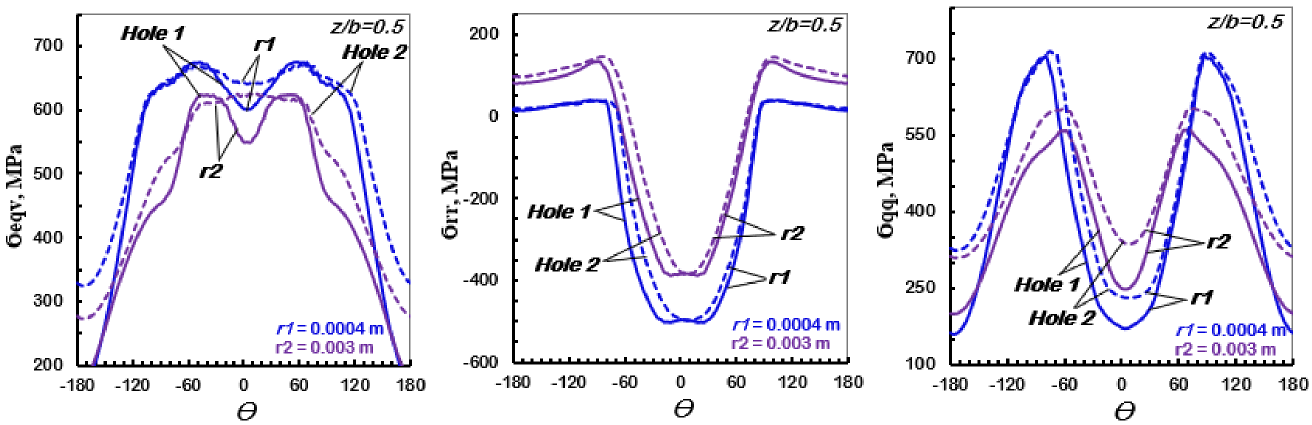




а) б)

Рис. 4.1.6. Полярная система координат (а) и расположение крепежных отверстий (б).

Сравнение радиальных распределений эквивалентных по Мизесу, радиальных и окружных напряжений при эксплуатационных нагрузках в средней плоскости центральной проушины трехмерного диска турбины для двух отверстий 1 и 2 показало, что на расстояниях от контуров отверстий в диапазоне r = 0.6-0.8 мм значения эквивалентных и окружных напряжений превышают предел текучести материала, который составляет σ_0 = 624 МПа. Таким образом, вблизи поверхности отверстий возникают области локальной пластической деформации. Максимальные значения эквивалентных напряжений σ_{eqv} и окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ в каждом отверстии проушины находятся в плоскости с угловой координатой θ = 60°-90° относительно направления действия центробежных нагрузок. В каждом отверстии, в точке с угловой координатой θ = 0°, возникают максимальные сжимающие радиальные напряжения σ_{rr} = -500 МПа из-за контактного взаимодействия между проушиной диска и заклепкой.

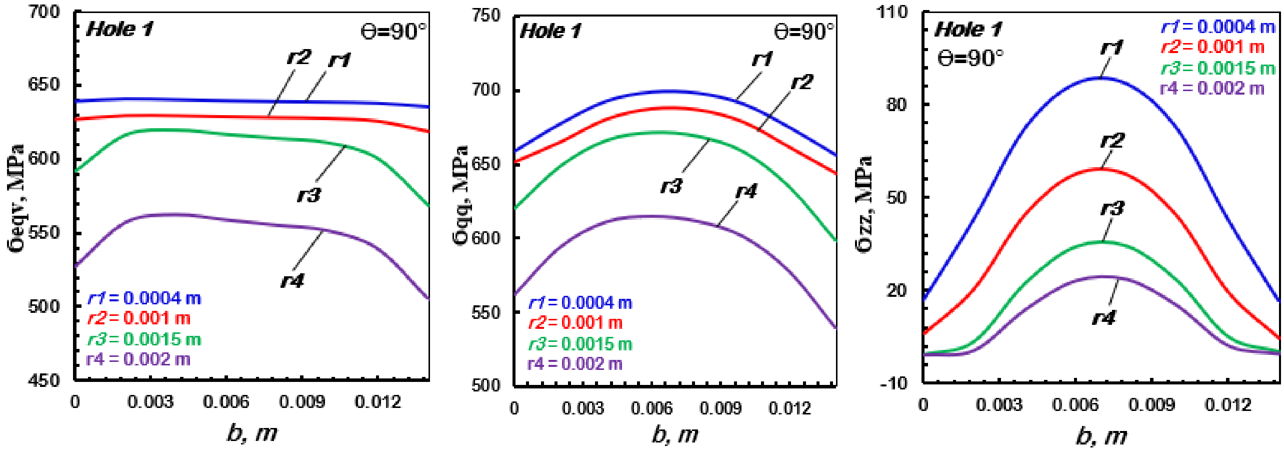


а) б) в)

Рис. 4.1.7. Распределения эквивалентных (а), радиальных (б) и окружных (в) напряжений в зависимости от полярной координаты.

Рисунок 4.1.7 показывает полярные распределения компонент напряжений вдоль контуров отверстий 1 и 2 на различных расстояниях от поверхности [141]. Значение r = 0.0004м совпадает с внутренним радиусом каждого отверстия. Значения полярного угла θ = 0° и θ = ±90° соответствуют вертикальной и горизонтальной плоскостям симметрии, соответственно. Из представленных данных следует, что распределения напряжений неравномерны вдоль угловой координаты с зонами концентрации эквивалентных напряжений σ_{eqv} и окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ в области θ = ±(60°-90°), а также радиальных напряжений σ_{rr} в области θ = 0°. Эти результаты полезны для оценки эффектов стеснения, связанных со значительной толщиной проушины b = 15 мм.

На Рис. 4.1.8. приведены распределения эквивалентных напряжений σ_{eqv}, окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и напряжений σ_{zz} вдоль толщины проушины для полярной координаты θ = 90°. На рисунке показаны распределения упруго-пластических напряжений в зависимости от радиального расстояния от контура отверстия в диапазоне r = 0,0004-0,002 м. Как и ожидалось, в направлении толщины окружные и поперечные напряжения (Рис. 4.1.8 б и в) имеют максимум в середине толщины проушины z/b = 0,5 с умеренными градиентами напряжений при приближении к свободной поверхности проушины.



а) б) в)

Рис. 4.1.8. Распределения эквивалентных (а), окружных (б) и поперечных (в направлении толщины) напряжений по толщине проушины для координаты θ = 90°.

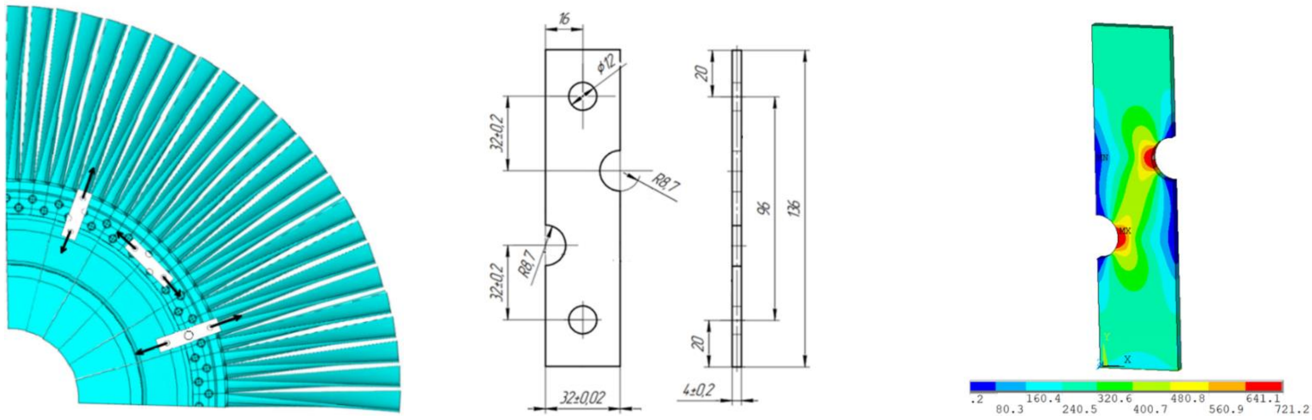
В этом случае эквивалентные напряжения показывают равномерное распределение по всей толщине на расстояниях, близких к поверхности контура отверстия (Рис. 4.1.8, а). Более высокие значения компонентов наблюдаются для окружного напряжения по сравнению с поперечным напряжением, величина которого не превышает 15% [141]. Эти распределения напряжений в трехмерном диске турбины служат основой для формирования геометрии и условий нагружения в численных исследованиях, которые представлены в следующем разделе.

4.2. Экспериментальное определение свойств и параметров расчетных моделей стали 34ХН при циклическом деформировании

Основные принципы имитационного моделирования, в приложении к вращающимся дискам энергетических машин и авиационных газотурбинных двигателей, были сформулированы авторами [210-217]. В соответствии с этими принципами был проведён анализ состояния критических зон, в которых накапливаются повреждения в процессе эксплуатации. В рассматриваемом случае, как показано в разделе 4.1, критической зоной является область сопряжённых отверстий заклепочного соединения диска и лопаток. В соответствии с изложенными принципами, в настоящей работе была разработана и обоснована геометрия имитационной модели образца с учётом параметров напряженно-деформированного состояния, которая удовлетворяет следующим условиям:

- модель образца полностью воспроизводит конфигурацию сопряжённых отверстий в проушине для 23-й ступени диска энергетической турбины (Рис. 4.1.9 а,б);

- модель воспроизводит значения максимальных напряжений на поверхности отверстий для угловой координаты θ = 90°, которые возникают в процессе эксплуатации в критической зоне диска турбины;
- условия нагружения модели могут быть реализованы на стандартных машинах для испытаний на одноосное растяжение/сжатие.

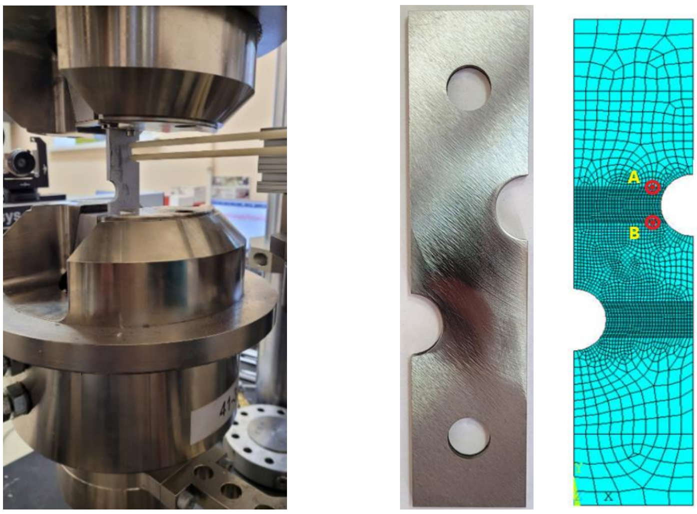


а) б) в)

Рис. 4.2.1. Критические зоны диска турбины (а), имитационная модель (б) (размеры в мм) и распределение эквивалентных напряжений (в, МПа).

Следует отметить, что результаты анализа распределения напряжений в трехмерной модели диска турбины (Рис. 4.1.6 - 4.1.8) предопределили необходимость расположения разработанного образца (Рис. 4.2.1б) в направлении центробежной нагрузки в процессе эксплуатации. Предложенная конфигурация и её расположение в критической зоне рассматриваемого диска турбины показаны на Рис. 4.2.1а. Этот образец сохраняет диаметры отверстий для заклепок и расстояния между ними, соответствующие реальному диску. Метод конечных элементов использован для оптимизации геометрии имитационной модели и подбора величины нагрузки, прикладываемой к образцу при испытаниях на усталость. Величина нагрузки соответствует максимальному значению окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ = 720 МПа на контуре отверстия в диске. Результаты расчета распределения напряжений для расчетной модели представлены на Рис. 4.2.1в. Очевидно, что максимальное значение на контуре нижнего отверстия в образце соответствует уровню напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ = 721 МПа в проушине диска турбины. Таким образом, для валидации и верификации предложенной модели прогнозирования долговечности определены значения параметров, которые необходимо реализовать при испытаниях разработанной имитационной модели для получения экспериментальной кривой усталости. Для этой цели использован испытательный комплекс, который включает серво-гидравлический стенд Zwick/Roell HA100 с осевым экстензометром для замера деформаций.

Испытания на усталость проводились при комнатной температуре с коэффициентом асимметрии номинальных напряжений R = 0,01 при синусоидальной нагрузке с частотой 5 Гц. Для измерения перемещений на наружной поверхности образца в месте расположения отверстия использовался осевой экстензометр Epsilon 3548–10 с начальным расстоянием между точками контакта стержней A и B, равным 10 мм (4.2.2б). Для записи петель упруго-пластического гистерезиса в зависимости от числа циклов нагружения осуществлялись непрерывные измерения перемещений.

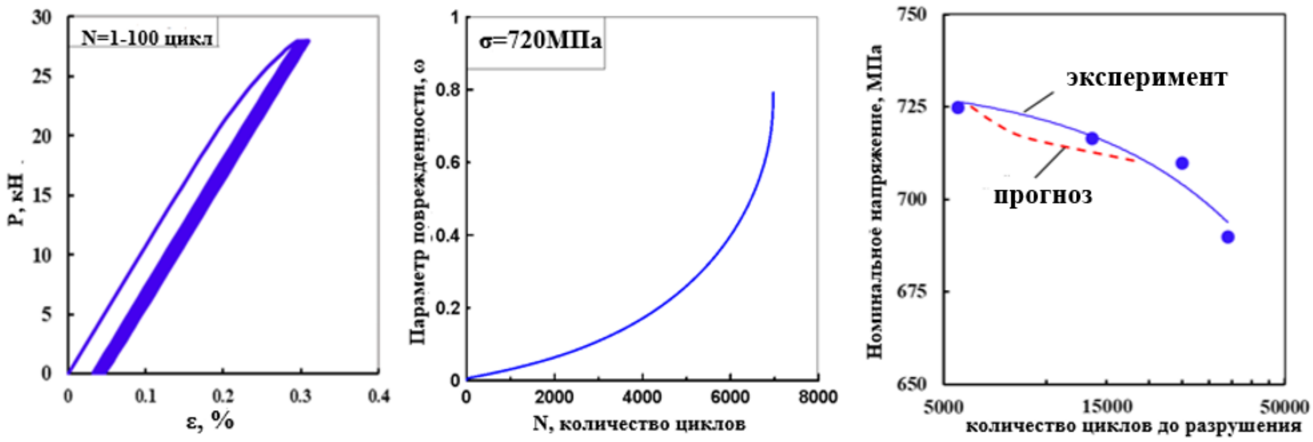


а) б)

Рис. 4.2.2. Испытательная установка (а) и имитационная модель (б).

Для прогнозирования долговечности на стадии образования дефекта необходимо располагать зависимостями между напряжением и деформацией в форме петель гистерезиса и временем до разрушения, что позволяет на основе результатов испытаний определить значения констант изотропного и кинематического упрочнения материала R_{inf} γ, a, b в уравнениях (2.1.5) и (2.1.6). Для этого были проведены испытания материала при циклическом нагружении имитационных моделей (рис.4.2.2б) с записью набора параметров, характеризующих петли гистерезиса.

Процесс накопления повреждений, а именно зависимость параметра поврежденности от количества циклов нагружения при испытаниях на усталость при номинальном напряжении σ=720MPa показан на рисунках 4.2.3а и 4.2.3б. Следует отметить, что необходимые константы R_{inf} γ, a, b уравнений (2.1.5) и (2.1.6) определяются из кривой усталости, которая содержит результаты испытаний нескольких образцов при различных уровнях номинальных напряжений и петель гистерезиса по методу, представленному в разделе 2.4. В наших испытаниях базовой точкой является уровень напряжения σ=720MPa, что соответствует напряжениям при эксплуатационной скорости вращения ротора 3000 об/мин. Дополнительные уровни напряжений в испытаниях были выбраны таким образом, чтобы сформировать кривую в диапазоне долговечности при малоцикловой усталости. Кривая усталости, полученная в результате испытаний образцов показана на рисунке 4.2.3в.



а) б) в)

Рис. 4.2.3. Петли гистерезиса (а), эволюция повреждений (б) и сравнение экспериментальных и прогнозируемых долговечностей (в) в образцах.

Изотропное упрочнение		Кинематическое упрочнения		Модель поврежденности	
R_{inf}	γ	a	b	R	s
240	130	300000	400	2.47	2

Таблица. 4.2.1. Параметры модели малоцикловой усталости для стали 34ХН

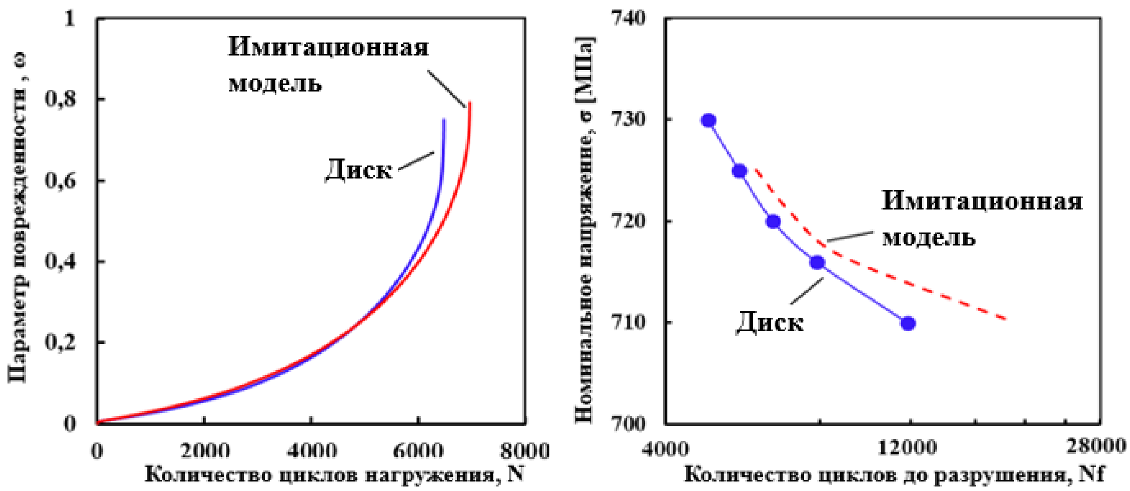
Константы изотропного и кинематического упрочнения, а также закона накопления повреждений (Таблица 4.2.1), определенные по методу, представленному в разделе 2.4, были использованы для прогнозирования долговечности испытанных образцов, изготовленных из стали 34ХН3МА при различных уровнях приложенного напряжения. Пунктирная красная линия на рисунке 4.2.3в отображает результаты прогноза количества циклов до образования дефекта в зависимости от приложенных номинальных напряжений ($\sigma_н = P / A_0$, где A_0-начальная площадь образца, *P*-действующая нагрузка) в соответствии с определяющими соотношениями (2.1.1-2.1.7). Из сравнения расчетных и экспериментальных данных о прогнозировании долговечности на рисунке 4.2.3в следует, что сформулированная модель успешно верифицирована и может быть использована для оценки несущей способности реального диска турбины.

Таким образом, в результате численного моделирования были определены константы упрочнения R_{inf}, γ, *a*, *b*, значения которых приведены в таблице 4.2.1. Соответствие экспериментальных и численных петель гистерезиса при малоцикловом нагружении демонстрирует, что предложенная модель корректно описывает поведение материала при циклических упруго-пластических деформациях и может быть использована в прогнозах долговечности элементов конструкций.

4.3. Прогнозирование долговечности проушины диска на стадии образования дефектов по модели малоцикловой усталости с учетом повреждений

Раздел 4.3 данной работы представляет метод прогнозирования долговечности на стадии накопления повреждений при малоцикловой усталости, который основан на моделях Lemaitre (2.1.7) и Armstrong-Frederics (2.1.6) изложенных в 2 главе. Основной целью практического применения этой модели является оценка долговечности рассматриваемого диска турбины с эксплуатационными повреждениями. Необходимым условием для использования модели является её валидация и верификация с учётом экспериментальных данных, представленных в предыдущем разделе.

Для расчета долговечности элемента диска турбины (рис. 4.1.2в) прикладываемая нагрузка, была выбрана таким образом, чтобы эквивалентные напряжения на контуре отверстия соответствовали напряжениям, полученным в результате расчетов полноразмерного турбинного диска под действием эксплуатационных нагрузок, которые представлены на рис. 4.1.6 – 4.1.8. Ранее было установлено, что значение коэффициента двухосности действующих напряжений в исследуемой области диска $\eta=\sigma_{rr}/\sigma_{\theta\theta}=0.25$. Для прогнозирования долговечности использовались модели Lemaitre и Armstrong-Frederics, описанные в разделе 2.1 с константами R_{inf}, γ, *a*, *b* (таблица 4.2.1), значения которых для стали 34ХН3МА были определены в результате экспериментального исследования (раздел 4.2). После выбора соответствующей нагрузки долговечность рассчитывалась путем использования текущих значений параметра повреждения ω при малоцикловом деформировании. Прогнозируемая долговечность до разрушения была определена как количество циклов нагружения, при котором параметр повреждения достигает критического значения $\omega \approx 0.8$.



а) б)

Рис. 4.3.1. Сравнение прогнозируемого накопления повреждений (а) и долговечностей (б) элемента диска турбины и образцов.

На основе результатов расчетов было установлено, что максимальное усталостное повреждение локализуется на контуре отверстия 1 (рис. 4.1.6) в точках с угловыми координатами θ=±(60°−90°). На рисунке 4.3.1а приведено сравнение расчетов процессов накопления повреждений в элементе диска турбины и в образцах (4.2.1б) при циклическом деформировании для условий нагружения, соответствующих скорости вращения ротора турбины 3000 об/мин. Из этих данных следует, что элемент диска имеет несколько меньшую долговечность по сравнению с образцами. Такое поведение можно объяснить тем, что проушина диска имеет толщину t=14мм, что близко к состоянию плоской деформации, а имитационные модели имеют толщину t=4мм, что приближенно соответствует обобщенному плоскому напряженному состоянию. На рисунке 4.3.1б показано сравнение прогнозируемых долговечностей для элемента диска и испытанных образцов в зависимости от величины приложенных напряжений. Напомним, что базовой точкой расчетов является значение напряжения σ=720МПа, но для оценки тенденций изменения усталостной прочности расчеты были выполнены для больших и меньших нагрузок с целью построения кривой усталости. Результаты расчетов были сопоставимы, но с более консервативной оценкой долговечности для 3D-МКЭ модели диска турбины. На основе проведенных исследований и полученных данных, можно сделать вывод о том, что интеграция теоретических моделей с реализованными числовыми алгоритмами представляет собой эффективный метод для оценки долговечности элементов конструкций. Ключевым параметром, определяющим эту оценку, является функция накопления повреждений.

4.4. Прогнозирование траектории и длительности роста трещины в проушине диска по модели фазовых полей разрушения

В следующем разделе настоящей главы рассматривается прогнозирование траектории роста трещины в заклепочном соединении лопаток с диском турбины. Этот раздел исследований является важной составляющей оценки несущей способности диска турбины. В данной части работы продемонстрированы возможности предложенной методики по моделированию траектории и длительности роста трещины на основе приложений метода фазовых полей разрушения к трехмерному заклепочному замковому соединению лопаток с диском паровой турбины.

Результаты, представленные ниже, были получены в порядке реализации разработанного алгоритма в вычислительном комплексе ANSYS, с учетом особенностей решения трехмерных задач, которые описаны в разделе 3.1. Моделирование выполнялось для двух случаев: с отсутствием начального дефекта и с начальной угловой трещиной, подвергнутой двухосному напряжению. Рассмотрение ситуации с начальной угловой трещиной на контуре отверстия обосновано тем, что в процессе монтажа заклепочного соединения подобные дефекты могут возникать в эксплуатации.

Условия для двухосного нагружения элемента диска турбины были установлены на основании анализа напряженно-деформированного состояния диска турбины в процессе эксплуатации, приведенного в разделе 4.1. Из этих данных следует, что коэффициент двухосности действующих нормальных напряжений составляет $\eta=\sigma_{rr}/\sigma_{\theta\theta}=0.25$.

Как уже отмечалось ранее модель фазового поля была реализована через подпрограмму ANSYS USERELEM. Конфигурация расчетной модели проушины диска турбины с крепежными отверстиями изображена на рис. 4.1.6б. На элемент диска турбины наложены соответствующие граничные условия, предполагающие вертикальные и горизонтальные перемещения. Для прогнозирования долговечности на стадии роста трещины в элементе диска турбины расчеты проведены по условиям контролируемой деформации с постепенным увеличением перемещений до достижения предельного состояния. При моделировании использовались разработанные объемные элементы с 4 степенями свободы в узле (u,v,w - компоненты перемещений, φ – величина повреждения) и 8 точками интегрирования.

Характерный размер фазового поля установлен равным l=2мм, что в 2.5 раза больше максимального размера элемента h=0.8мм, необходимого для корректного моделирования области вершины и фронта трещины в трехмерной проушине толщиной t=15мм. Механические свойства материала проушины из стали 34ХН3МА приведены в таблице 4.1.2. Условия двухосного нагружения растяжения заданы через положительное перемещение узлов на верхней и правой поверхностях рассматриваемого элемента диска турбины (рис. 4.1.6б). Начальный дефект задан в виде полуэллиптической трещины с отношением полуосей a/c=1 и размерами трещины a=c=1мм.

Расчетные зависимости нагрузки от перемещений для 3D модели проушины диска турбины по модели фазовых полей показаны на рисунке 4.4.1а. Из сравнения результатов для проушины без начального дефекта и с угловой поверхностной трещиной можно отметить, что профили зависимостей нагрузка-перемещения для одинаковых условий нагружения и граничных условий показывают разные результаты. Как и ожидалось, в присутствии начального дефекта максимальная нагрузка разрушения снижается, однако оба случая демонстрируют плавное уменьшение жесткости перед окончательным разрушением.

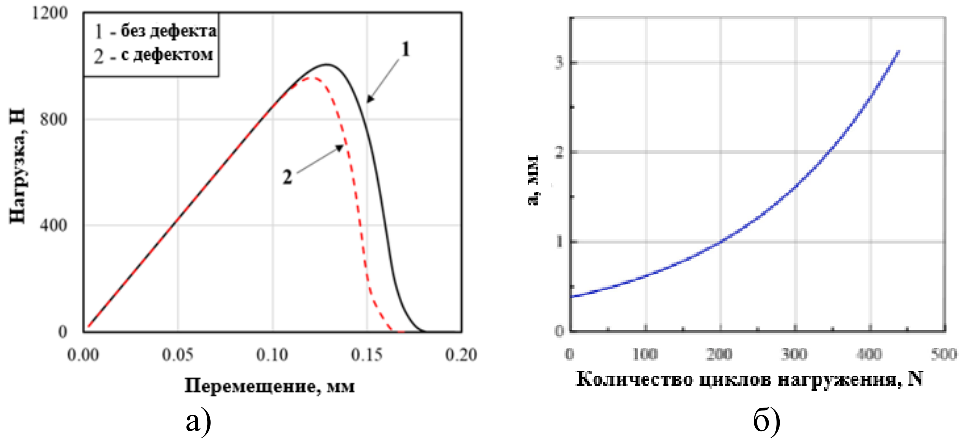
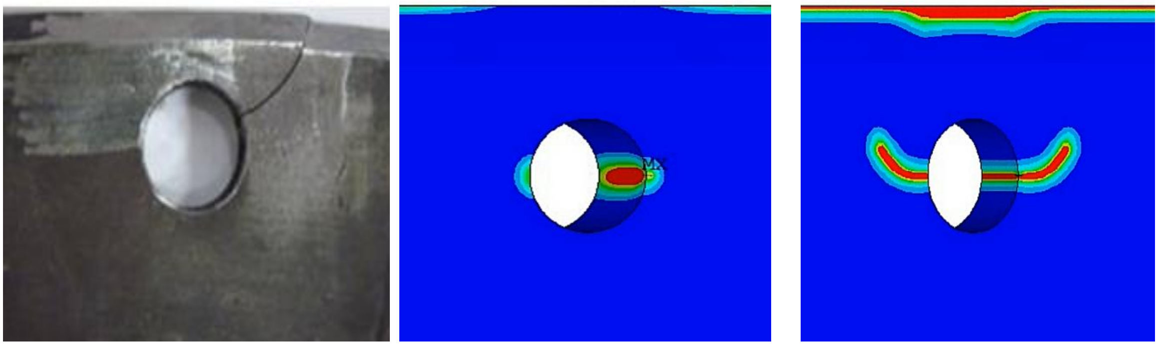


Рис. 4.4.1. Кривые нагрузка-перемещение для монотонного нагружения (а) и длина трещины в зависимости от количества циклов нагружения (б).

Рисунок 4.4.1б представляет результаты расчета долговечности в виде зависимости длины трещины на свободной поверхности элемента диска турбины от количества циклов нагружения на стадии роста трещины. Рассчитанный диапазон долговечности составляет N=438 циклов, что примерно соответствует экспериментальной долговечности N=389 циклов для имитационных моделей. Таким образом, общая долговечность может быть рассчитана путем суммирования прогнозируемой долговечности на стадии образования дефекта, которая представлена в разделе 4.3 и на стадии роста трещины Рис.4.4.1б.



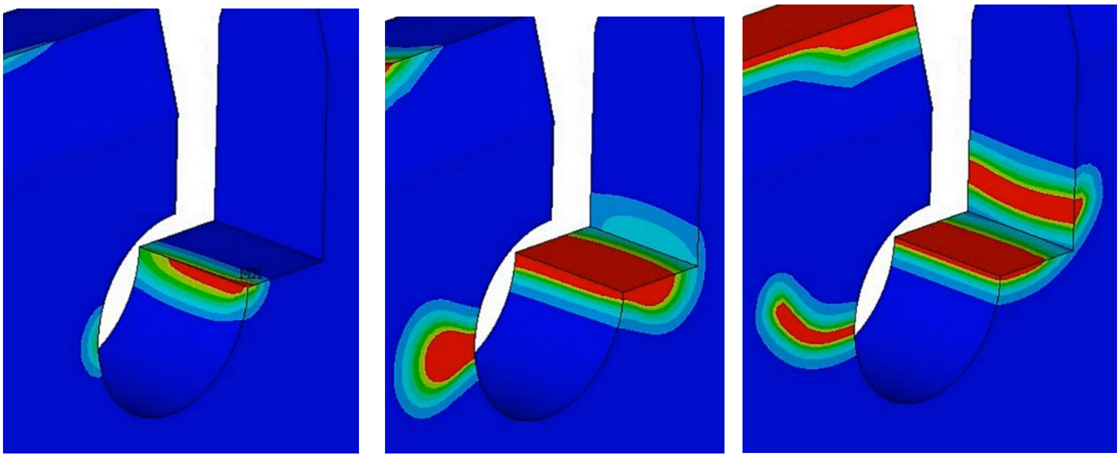
а) б) в)

Рис. 4.4.2. Эксплуатационная (а) и прогнозируемые (б, в) траектории повреждения.

Рисунок 4.4.2 показывает сравнение траекторий роста трещин в элементе диска турбины с эксплуатационном повреждением и прогнозируемым путем развития трещины на основе метода фазового поля разрушения. Данные результаты расчетов иллюстрируют эволюцию фазовых полей для различных стадий развития трещин без начального технологического дефекта. Рисунки 4.4.2 (б, в) показывают контуры фазового поля, где параметр повреждения φ>0.9 (красный цвет). Начальная стадия разрушения, изображенная на рис. 4.4.2б, характеризуется возникновением повреждений в серединной плоскости вдоль толщины рассматриваемого объекта в отверстии, где происходит максимальное накопление деформаций, положение которого обусловлено воздействием сложного напряженно-деформированного состояния. Затем, как показано на рисунке 4.4.2в, наблюдается накопление повреждений с увеличением их интенсивности. Этот процесс приводит к тому, что дефекты полностью пересекают толщину проушины и трещина становится сквозной.

В следующем примере моделируется поведение начального уголкового поверхностного дефекта с соотношением полуосей a/c=1. Этот пример демонстрирует, что модели фазового поля обладают потенциалом для предсказания процессов разрушения трехмерных конструкций при сложном напряженном состоянии. Наблюдается эволюция уголкового поверхностного дефекта в сквозную криволинейную трещину с последующими смешанными формами разрушения.

Изначально растущий поверхностный дефект формируется вдоль толщины проушины и распространяется к свободным поверхностям (рис. 4.4.3а). В то же время доминирующим механизмом является ускоренное развитие дефекта по форме I в направлении толщины пластины по сравнению с ростом трещины на свободной поверхности (рис. 4.4.3б). Размер зоны процесса разрушения в горизонтальной плоскости сопоставим с размером этого контура в вертикальной плоскости.



а) б) в)

Рис. 4.4.3. Эволюция поверхностного дефекта в сквозную трещину.

Сквозной дефект, изображенный на рис. 4.4.3в, подвергается условиям разрушения в смешанном режиме, который характеризуется наличием всех трех основных форм деформирования берегов трещины: отрыв, продольный и антиплоский сдвиг. Это обуславливает то, что траектория трещины отклоняется от горизонтальной плоскости. Таким образом, накопление и рост повреждений начально происходили на внутренней поверхности отверстия. Затем, когда растущая начальная уголковая поверхностная трещина увеличилась в размере, произошло образование сквозной макротрещины, которая в конце концов полностью пересекала сечение элемента диска турбины. Как упоминалось ранее, заклепочное соединение диска является наиболее уязвимой областью для накопления и развития повреждений. Таким образом, представленные результаты прогнозирования траектории трещины являются важным элементом для оценки общей долговечности вращающихся дисков турбины.

В данном исследовании функции повреждения используются отдельно в модели Lemaitre (параметр ω в уравнении (2.1.7)) и в модели фазового поля разрушения (параметр φ в уравнении (3.1.1)). Расчеты для этих моделей проводились отдельно. Расчет для модели малоцикловой усталости завершался, когда параметр повреждения достигал значений $0.8<\omega<0.9$. Прогнозирование долговечности на стадии роста трещины осуществлялось в два этапа. На первом этапе задача пути трещины (траектория роста трещины) была решена с использованием модели фазового поля разрушения. Затем была рассчитана зависимость длины трещины от количества циклов нагружения для проушины диска с начальным уголковым поверхностным дефектом размером a=0.5мм также с использованием модели фазового поля. Общий срок службы элемента диска турбины был определен как сумма числа циклов до возникновения дефекта по модели малоцикловой усталости и числа циклов на стадии роста трещины с использованием модели фазового поля разрушения, который составил $N_f = 6938$.

Рис. 4.4.4. Эволюция трещины в зависимости от числа циклов нагружения. N_a — количество циклов до образования трещины, N_f — суммарная долговечность, включающая стадии образования и распространения трещины.

По результатам, представленным в данной главе, разработан и обоснован расчетно-экспериментальный подход к прогнозированию долговечности элементов конструкций, основанный на объединении принципов континуальной механики повреждений и моделей фазовых полей разрушения. Применяемые методы тесно взаимосвязаны и дополняют друг друга. Инновационность работы заключается в интегрированном подходе к оценке несущей способности, который включает формулировку определяющих соотношений с функциями повреждений, численное моделирование методом конечных элементов (МКЭ), использование метода фазовых полей разрушения, а также экспериментальные исследования малоцикловой усталости и роста трещин.

Предложенный подход полезен для практических приложений, так как устраняет недостатки испытаний полномасштабных конструкций, которые часто не обеспечивают необходимую статистическую достоверность и не позволяют напрямую измерять процессы накопления повреждений и роста трещин. Моделирование обеспечивает гибкость и значительно снижает затраты на проектирование современных конструкций.

В настоящей работе проблема прогнозирования траектории роста трещины решалась с использованием метода фазовых полей разрушения, который был дополнен новой степенью свободы при решении трехмерных задач. Метод фазовых полей разрушения демонстрирует высокий потенциал для решения сложных задач, таких как коррозия, насыщение водородом, термомеханическая усталость и ползучесть. Вариационные модели фазовых полей разрушения привлекают большое внимание благодаря их способности описывать зарождение трещин в произвольных местах, сложные траектории их роста, ветвление и слияние множественных трещин.

На основе проведенного теоретического анализа, численных расчетов для диска турбины с заклепочным соединением и усталостных испытаний имитационных моделей в настоящем разделе работы приведен пример практического приложения разработанного метода прогнозирования долговечности элемента конструкции с эксплуатационным повреждением. Данный подход дополняет перспективы решения сложных инженерных задач и повышения надежности современных конструкций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования и рекомендации

Цель работы состояла в разработке и обосновании расчетно-экспериментальных методов прогнозирования долговечности при малоцикловой усталости и моделировании роста трещин при монотонном и циклическом нагружении на основе фазовых полей разрушения с учетом функции накопления и развития повреждений.

В настоящем исследовании представлены сформированная система определяющих соотношений и расчетно-экспериментальное обоснование подхода к прогнозированию долговечности материалов и элементов конструкций, основанных на объединении методов континуальной механики повреждений и фазовых полей разрушения. Данный подход позволяет описывать процессы накопления повреждений и динамику роста трещин, что обеспечивает более точное понимание и расчет несущей способности конструкций при эксплуатации в условиях сложного напряженного состояния.

На стадии образования трещин используется модель континуальной механики повреждений, которая описывает процесс накопления повреждений. Данная модель позволяет эффективно прогнозировать стадию зарождения микротрещин и переход к следующей стадии разрушения. На стадии роста трещины применяется метод фазовых полей разрушения, который обладает широкими возможностями моделирования развития сложных дефектов, таких как ветвление, слияние трещин и их взаимодействие. Этот метод позволяет учитывать историю нагружения в эксплуатации, что делает его особенно эффективным для анализа роста трещин в условиях статистического распределения действующих нагрузок. Моделирование доминирующих механизмов разрушения открывает возможности управления характеристиками долговечности на уровне характерного масштаба кристаллической структуры материала.

Преимущество развиваемого подхода заключается в том, что оба метода прогнозирования взаимосвязаны и дополняют друг друга, обеспечивая возможность всестороннего анализа долговечности конструкций на всех этапах разрушения. Численные расчеты, выполненные на основе метода конечных элементов, позволили подтвердить применимость предложенных моделей к материалам и элементам конструкций, а также продемонстрировали их пригодность для прогнозирования долговечности и анализа траекторий роста трещин.

Использование имитационного моделирования открывает новые возможности для повышения эксплуатационной безопасности конструкций, снижая при этом затраты на проведение необходимых испытаний и увеличивая эффективность современных инженерных решений. Основные достижения работы могут быть обобщены следующим образом.

1. Разработана и численно реализована модель прогнозирования малоцикловой усталости, включающая закон накопления повреждений, условия изотропного и кинематического упрочнения. Модель позволяет прогнозировать долговечность с учетом эволюции повреждений и адаптивных свойства материала в условиях эксплуатационных нагрузок.

2. Сформирована общая система разрешающих уравнений, разработан и реализован алгоритм расчета долговечности в вычислительном МКЭ-комплексе через новые динамически подключаемые библиотеки. Разработан метод расчетно-экспериментального определения констант определяющих уравнений малоцикловой усталости.

3. Разработан и численно реализован метод фазовых полей разрушения в энергетической трактовке с введением дополнительных параметров масштаба поля и повреждения сплошной среды. Реализация метода фазового поля разрушения дополнена новой степенью свободы при решении трехмерных задач и функциями деградации для условий циклического нагружения.

4. Проведенные численные параметрические исследования в терминах фазовых полей разрушения позволили установить закономерности и эффекты влияния смешанных фор деформирования и сложного напряженного состояния при развитии сквозных и поверхностных дефектов в трехмерных телах при линейном и нелинейном монотонном и циклическом деформировании;

5. Проведена верификация разработанных моделей по отношению к экспериментальным данным по испытаниям материалов на малоцикловую усталость и развитие трещин при смешанных формах деформирования. Достоверность численных расчетов подтверждается соответствием характеристик долговечности и траекторий роста трещин.

6. Разработан и реализован метод численного моделирования доминирующих механизмов разрушения для материалов зернистой структуры с использованием мозаики

Вороного. Варианты межзеренного и внутризеренного распространения трещин в методе фазовых полей разрушения реализованы за счет вариации основных механических характеристик и размеров зерен и межзеренных границ.

7. Проведена оценка долговечности проушины диска паровой турбины с эксплуатационным повреждением для стадий появления и развития дефектов, основанная на совместном применении модели малоцикловой усталости и метода фазовых полей разрушения. Результаты подтвердили применимость предложенных моделей и реализованных алгоритмов для прогноза долговечности и надежности элементов конструкций с учетом условий эксплуатации.

Перспективы дальнейшей разработки темы

Перспективы дальнейших исследований и разработок включают расширение возможностей предложенного подхода для анализа долговечности элементов конструкций в более сложных эксплуатационных условиях. В первую очередь, планируется адаптация метода к задачам, связанным с ползучестью материалов и термомеханической усталостью. Реализация разработанной методологии в контексте высокотемпературных воздействий позволит учитывать длительную прочность и изменение структуры материала в процессе термо-силового воздействия, которые имеют существенное значение в оценке несущей способности элементов, работающих при повышенных температурах, таких как компоненты энергетических турбин или авиационных двигателей.

Важным направлением является расширение возможностей описания функций деградации для учёта истории нагружения при термомеханических воздействиях, что позволит более точно моделировать взаимодействие тепловых и механических нагрузок. Это особенно актуально для задач, связанных с термомеханической усталостью, где материал подвергается повторяющимся циклам нагрева и охлаждения, сопровождающимся изменениями напряжённо-деформированного состояния. Расширение набора функций деградации создаст возможность моделировать более широкий спектр физических процессов, которые определяют долговечность конструкций.

Перспективным направлением является внедрение подходов для моделирования диффузионных процессов разрушения под воздействием водорода и кислорода на мезомасштабном уровне с привлечением методов фазовых полей. Учет водородной деградации, приводящей к ослаблению межатомных связей и ускоренному росту трещин, позволит применять разработанный подход к материалам подверженным коррозии в эксплуатации. Реализация модели фазовых полей для водородного разрушения и воздействия окислов потребует учета взаимодействия диффузии активных элементов с процессами накопления повреждений и роста трещин в агрессивной среде.

Также планируется создание трёхмерных моделей структуры материала для моделирования процессов межзеренного и внутрезеренного разрушения. Такой подход позволит изучать механизмы зарождения и распространения трещин на уровне зерен, учитывая влияние их формы, размеров и ориентации. Это особенно важно для материалов с выраженной зернистой структурой, где межзеренные границы играют ключевую роль в процессах повреждения и разрушения. Развитие таких моделей позволит детально исследовать взаимодействие трещин с микроструктурными элементами материала, что значительно повысит точность прогнозирования долговечности.

Таким образом, дальнейшее развитие предложенного подхода будет направлено на расширение его возможностей для решения задач, связанных с ползучестью, термомеханическими нагрузками, разрушением под воздействием водорода и окислов в сочетании с анализом микроструктурных эффектов. Это позволит создавать более универсальные инструменты для оценки долговечности конструкций, работающих в экстремальных условиях эксплуатации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. — Самара: Изд-во "Самарский университет", 2001. — 632 с.

2. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчеты на прочность деталей машин. — М.: Машиностроение, 1979. — 702 с.

3. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 560с.

4. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. — М.: Машиностроение, 1984. — 280 с.

5. Брандт Д.Е. Расчет роторов турбин с помощью критерия, основанного на механике разрушения. — М.: Машиностроение, 1987. — 320 с.

6. Брауде Н.З., Шканов И.Н. Условия разрушения материалов при двухосном малоцикловом нагружении // ИВУЗ. Авиационная техника. — 1984. — № 3. — С. 25–28.

7. Будрин С.Б., Овсянников В.В. Оценка остаточного ресурса металлических конструкций перегрузочных машин по условию трещиностойкости // Вестник ИШ ДВФУ. — 2019. — № 3(40).

8. Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.В. Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории // Физика мезомеханики. — 2015. — № 4.

9. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. — М.: Физматлит, 2008. — 424 с.

10. Волкова Т.А., Волков С.С. Критическая поврежденность микроструктуры металлов в элементах конструкций // Транспорт Урала. — 2012. — № 4(35). — С. 21–25.

11. Гнеденко Б.В., Беляев А.И., Соловьев А.П. Математические методы в теории надёжности. — М.: Наука, 1965. — 512 с.

12. Голуб В.П., Романов А.В. К задаче построения нелинейных моделей накопления повреждений при ползучести // Проблемы прочности. — 1990. — № 6. — С. 9–14.

13. Горохов В.А. Численное моделирование процессов упруговязкопластического деформирования и разрушения элементов конструкций при квазистатических термосиловых, циклических и терморадиационных воздействиях: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04 / В.А. Горохов. — Нижний Новгород: Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2018. — 240 с.

14. Григорян С.С., Барашенков Е.И. Механика трещин. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — 256 с.

15. Завойчинская Э.Б., Кийко И.А. Введение в теорию процессов разрушения твердых тел: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 2004. — 169 с.

16. Захаров А.П., Косов Д.А., Федоренков Д.И., Федотова Д.В. Развитие поверхностных трещин в материале лопаток паровых турбин // Труды Академэнерго. – 2019. – №3. – С. 107–121.

17. Извеков О.Я., Селицкий А.А., Крупеник А.М. Реализация энергетической модели континуального разрушения хрупких сред в SIMULIA/ABAQUS 6.9 [Электронный ресурс]. URL: http://www.tesis.com/software/abaqus/abaqus-exp.php.

18. Ишлинский А.Ю. Основы механики разрушения. — М.: Наука, 1975. — 300 с.

19. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. — М.: Наука, 1974. — 312 с.

20. Качанов Л.М. Время разрушения при ползучести // Изв. Акад. Наук СССР, Отд. Техн. Наук. — 1958. — С. 26–31.

21. Каюмов Р.А., Нежданов Р.О., Тазюков Б.Ф. Определение характеристик волокнистых композитных материалов методами идентификации. — Казань: Изд-во КГУ, 2005. — 258 с.

22. Клюшников В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — 189 с.

23. Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность: справочник. — М.: Машиностроение, 1985. — 224 с.

24. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. — М.: Мир, 1984. — 624 с.

25. Корольков Д.И. Оценка остаточного ресурса строительных конструкций: монография. — Санкт-Петербург: СПбГАСУ, 2020. — 168 с.

26. Косов Д.А., Федоренков Д.И. Анализ напряженно-деформированного состояния алюминиевого сплава Д16Т при сложном напряжённом состоянии с учетом повреждённости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – №4. – С. 45–53.

27. Косов Д.А., Федоренков Д.И., Туманов А.В. Реализация модели повреждённости Lemaitre в конечно-элементном комплексе ANSYS // Труды Академэнерго. – 2020. – №4 (61). – С. 30–48.

28. Крыжевич Г.Б., Филатов А.Р. Модель упругопластического деформирования алюминиевых сплавов и критерии малоцикловой усталости конструкций // Труды Крыловского государственного научного центра. — 2018. — Vol. 2. — P. 85–95.
29. Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. — М.: МФТИ, 2008. — 320 с.
30. Лебедев А.А. О возможном совмещении условий пластичности и хрупкого разрушения // Прикладная механика. — 1968. — № 4. — Вып. 8. — С. 85–93.
31. Лебедев А.А. Расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии. — Киев: М-во высш. и сред. спец. образования УССР, 1968. — 66 с.
32. Лобанов Д.С., Струнгарь Е.М., Зубова Е.М., Вильдеман В.Э. Исследование развития технологического дефекта в конструкционном углепластике методами корреляции цифровых изображений и акустической эмиссии в условиях сложнонапряженного состояния // Дефектоскопия. — 2019. — № 9. — С. 3–10.
33. Ломакин Е.В. Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряженного состояния // Механика композитных материалов. — 1988. — № 1. — С. 3–9.
34. Ломакин Е.В., Мельников А.М. Задачи плоского напряженного состояния тел с вырезами, пластические свойства которых зависят от вида напряженного состояния // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2011. — № 1. — С. 77–89.
35. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 1978. — № 6. — С. 29.
36. Лыкова А.В., Ильиных А.В., Вильдеман В.Э. Прогнозирование циклической долговечности при малоцикловой усталости с использованием нелинейной модели Марко-Старки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2022. — № 3. — С. 14–22.
37. Матвиенко Ю.Г., Васильев И.Е., Чернов Д.В. Структурно-феноменологическая концепция мониторинга несущей способности элементов конструкций из композитных материалов // iPolytech Journal. — 2023. — № 27(1). — С. 39–47.
38. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. — М.: Машиностроение, 1981. — 271 с.

39. Махутов Н.А., Воробьев А.З., Гаденин М.М. и др. Прочность конструкций при малоцикловом нагружении. — М.: Наука, 1983. — 270 с.

40. Монахов А.Д., Гуляев М.М., Гладышева Н.Е., Коптельцева О.Ю., Автаев В.В., Яковлев Н.О., Гулина И.В. Применение метода корреляции цифровых изображений для построения диаграмм деформирования в истинных координатах // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. — 2023. — Т. 29. — № 3. — С. 79–88.

41. Монахов А.Д., Яковлев Н.О. Применение метода глубокого обучения при исследовании характеристик трещиностойкости // Труды ВИАМ. — 2024. — № 6. — С. 80–91

42. Морозов Е.М., Зернин М.В. Контактные задачи механики разрушения. — М.: Машиностроение, 1999. — 544 с.

43. Музафаров Э.Р. Методы оптимизации в проектировании машин // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». — 2021. — № 4. — С. 57–66.

44. Най Дж. Физические свойства кристаллов. — М.: Мир, 1967. — 391 с.

45. Насонов А.Н. Когезионные модели образования дефектов в материалах // Новая наука: Опыт, традиции, инновации. — 2017. — Т. 3, № 4. — С. 48–51.

46. Нейбер Г. Концентрация напряжений. — Москва-Ленинград: ОГИЗ-Гостехиздат, 1947. — 256 с.

47. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. — 1969. — Т. 33, № 2. — С. 212–222.

48. Панасюк В.В. Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие: В 4 т. / под ред. В.В. Панасюка. — Киев: Наукова думка, 1988. — Т. 1. — 488 с.; Т. 2. — 620 с.; Т. 3. — 436 с. — 1990. — Т. 4. — 680 с.

49. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения твердых тел. — СПб.: Профессия, 2002. — 300 с.

50. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. — Киев: Наукова думка, 1976. — 368 с.

51. Потапова Л.Б., Ярцев В.П. Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения. — М.: Изд-во "Машиностроение – 1", 2005. — 244 с.

52. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. — М.: Наука, 1987. — 388 с.

53. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — 752 с.

54. Ратнер С.И. Прочность и пластичность металлов. — М.: Оборонгиз, 1949. — 152 с.
55. Решетов Д.Н. Работоспособность и надёжность деталей машин. — М.: Высшая школа, 1974. — 205 с.
56. Савкин А.Н., Седов А.А. Прогнозирование долговечности конструкционных сталей при циклическом нагружении // Известия Волгоградского государственного технического университета. — 2010. — № 4(64). — С. 122–124.
57. Серенсен С.В., Шнейдерович Р.М., Гусенков А.П. и др. Прочность при малоцикловом нагружении. — М.: Наука, 1975. — 286 с.
58. Сосновский Л., Щербаков С. Концепции поврежденности материалов // Вестник ТНТУ. — 2011. — Спец. вып. — Ч. 1. — С. 14–23.
59. Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. — М.: Физматлит, 2009. — 336 с.
60. Степанова Л.В. Уточненный расчет напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях циклического нагружения в среде с поврежденностью // Вестник Самарского госуниверситета. — 2011. — № 83. — С. 105–115.
61. Терегулов И.Г., Сибгатуллин Э.С., Тимергалиев С.Н. Предельное состояние слоистых композитных оболочек при совместном действии статических и циклических нагрузок // Известия АН. Механика твердого тела. — 1994. — № 4. — С. 155–161.
62. Федоренков Д.И., Косов Д.А. Реализация модели поврежденности Lemaitre с кинематическим упрочнением в конечно-элементном комплексе ANSYS // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – №2. – С. 147–157.
63. Федоренков Д.И., Косов Д.А., Туманов А.В. Методика определения констант и параметров модели накопления повреждений с изотропным и кинематическим упрочнением // Физическая мезомеханика. – 2022. – №6. – С. 63–74
64. Филатов А.В., Черняев В.А. Применение J-интеграла в расчетах прочности конструкций // Физика и механика материалов. — 2001.
65. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. В двух частях. Часть первая. Деформация и разрушение. — М.: Машиностроение, 1974. — 472 с.
66. Шишко В.Б., Чиченев Н.А. Надёжность технологического оборудования: учебник. — М.: Издательский дом МИСиС, 2012. — 1990 с.

67. Шлянников В.Н. Вычислительная механика деформирования и разрушения. — Казань: КГЭУ, 2001. — 210 с.

68. Шлянников В.Н., Иштыряков И.С., Яруллин Р.Р. Характеристики деформирования сплава Д16 при совместном нагружении растяжением, сжатием, кручением и внутренним давлением // Труды Академэнерго. — 2014. — № 3. — С. 78–90.

69. Agius D., Kourousis K.I., Wallbrink C. A modification of the multicomponent Armstrong–Frederick model with multiplier for the enhanced simulation of aerospace aluminium elastoplasticity // International Journal of Mechanical Sciences. — 2018. — Vol. 144. — P. 118–133.

70. Alessi R., Marigo J.-J., Maurini C. A variational approach to fracture mechanics of brittle materials // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2015. — Vol. 20, No. 7. — P. 767–783.

71. Ambati M., Gerasimov T., De Lorenzis L. Phase-field modeling of ductile fracture // Computational Mechanics. — 2015. — Vol. 55, No. 5. — P. 1017–1040.

72. Ambrosio L., Tortorelli V.M. Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via T-convergence // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1990. — Vol. 43, No. 8. — P. 999–1036.

73. Amor H., Marigo J.-J., Maurini C. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact: Numerical experiments // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2009. — Vol. 57, No. 8. — P. 1209–1229.

74. ANSYS Academic Research Electronics, Mechanical APDL Release 2021 R1 // ANSYS, Inc.

75. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference Release 14.5 // ANSYS, Inc. Southpointe, 275 Technology Drive, Canonsburg, PA, 2012.

76. Aranson I. S., Kalatsky V. A., Vinokur V. M. Continuum description of crack dynamics // Reviews of Modern Physics. — 2000.

77. Armero F., Linder C. Numerical simulation of dynamic fracture using finite elements with embedded discontinuities // International Journal of Fracture. — 2009. — Vol. 160. — P. 119–141.

78. Armero F., Oller S. A general framework for continuum damage models. I. Infinitesimal plastic damage models in stress space // International Journal of Solids and Structures. — 2000. — Vol. 37. — P. 7409–7436.

79. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect // Materials at High Temperatures. — 1966. — Vol. 24. — P. 1–26.
80. Aygün S., Wiegold T., Klinge S. Coupling of the phase field approach to the Armstrong-Frederick model for the simulation of ductile damage under cyclic load // International Journal of Plasticity. — 2021. — Vol. 143.
81. Azinpour, E., Ferreira, J.P.S., Parente, M.P.L., et al. A simple and unified implementation of phase field and gradient damage models // Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci. — 2018. — Vol. 5(1). — P. 15.
82. Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture // Advances in Applied Mechanics. — 1962. — Vol. 7. — P. 55–129.
83. Belytschko T. Arbitrary cracks and nonlinear material behavior // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1988. — Vol. 48 — P. 1741–1760.
84. Bordas S., Nguyen P.V. Advanced crack propagation models using XFEM // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2008. — Vol. 71, No. 6. — P. 703–732.
85. Borden M. J., Hughes T. J., Landis, C. M. A phase-field formulation for fracture in ductile materials: Finite deformation balance law derivation, plastic degradation, and stress triaxiality effects // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2016. — Vol. 312. — P. 130–166.
86. Borden M.J., Hughes T.J., Landis C.M., Verhoosel C.V. A higher-order phase-field model for brittle fracture: Formulation and analysis within the isogeometric analysis framework // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2014. — Vol. 273. — P. 100–118.
87. Bouchard P.O., Bay F., Chastel Y. Comparison of crack propagation criteria in simulations // International Journal of Fracture. — 2003.
88. Bourdin B., Francfort G.A., Marigo J.-J. The variational approach to fracture // Journal of Elasticity. — 2008. — Vol. 91, No. 1–3. — P. 5–148.
89. Bourdin G., Francfort G., Marigo J.-J. Numerical experiments in revisited brittle fracture // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2000. — Vol. 48, No. 4. — P. 797–826.
90. Brocks W., Scheider I. Application of cohesive elements for the simulation of crack extension / W. Brocks, I. Scheider // 19th European Conference on Fracture: Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety, ECF 2012.
91. Broek D. Elementary engineering fracture mechanics. — Springer, 1986. — 541 p.

92. Brown M.W., Miller K.J. Two decades of progress in the assessment of multiaxial low-cycle fatigue life // In: Amzallag C., Leis B.N., Rabbe P. (eds.) Low-Cycle Fatigue and Life Prediction. — ASTM STP 770. — Philadelphia, PA: ASTM, 1979. — P. 482–499.
93. Carrara P., Ambati M., Alessi R., De Lorenzis L. A framework to model the fatigue behavior of brittle materials based on a variational phase-field approach // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2020. — Vol. 361. — P. 1–31.
94. Chaboche J.L. Anisotropic creep damage in the framework of continuum damage mechanics // Nuclear Engineering and Design. — 1984. — Vol. 79. — P. 309–319.
95. Chaboche J.L. Continuous damage mechanics – a tool to describe phenomena before crack initiation // Nuclear Engineering and Design. — 1981. — Vol. 64. — P. 233–247.
96. Chaboche J.L. Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement. — Technical Report 1978–3. Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, 1978.
97. Chaboche J.L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity // International Journal of Plasticity. — 1989. — Vol. 5. — P. 247–302.
98. Chaboche J.L. Continuum damage mechanics: Part I—General concepts // Journal of Applied Mechanics. — 1988. — Vol. 1. — P. 55–59.
99. Chaboche J.L. Continuum damage mechanics: Part II—Damage growth, crack initiation, and crack growth // Journal of Mechanics. — 1988.
100. Chaboche J.L. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects // International Journal of Plasticity. — 1991. — Vol. 7(7). — P. 661–678.
101. Chaboche J.L., Lemaître J. Mechanics of solid materials — Cambridge: Cambridge University Press, 1994. — 556 p.
102. Citarella R., Cricri G. Comparison of DBEM and FEM crack path predictions in a notched shaft under torsion // Engineering Fracture Mechanics. — 2010. — Vol. 77. — P. 1730–1749.
103. Citarella R., Lepore M., Shlyannikov V., Yarullin R. Fatigue crack growth by FEM-DBEM approach in a steam turbine blade // Industrial Engineering & Management. — 2015. — Vol. 4. — Article 160.
104. Cleja-Ţigoiu S., Stoicuţa N.E. Variational inequality in classical plasticity. Applications to Armstrong–Frederick elasto-plastic model // Computational Mathematics with Applications. — 2019. — Vol. 77(11). — P. 2953–2970.

105. Coppieters S., Kuwabara T. Identification of post-necking hardening phenomena in ductile sheet metal // Experimental Mechanics. — 2014. — Vol. 54. — P. 1355–1371.

106. Cordebois J.P., Sidoroff F. Damage induced elastic anisotropy // Euromech 115 – Villard de Lans – Juin 1979. — 1979. — P. 761–774.

107. Cordebois J.P., Sidoroff F. Endomagement anisotrope en élasticité et plasticité // Journal de Mécanique Théorique et Appliquée. — 1982. — Numéro spécial. — P. 45–60.

108. Dafalias Y.F., Kourousis K.I., Saridis G.J. Multiplicative AF kinematic hardening in plasticity // International Journal of Solids and Structures. — 2008. — Vol. 45(10). — P. 2861–2880.

109. De Souza Neto E., Peric D., Owen D. Computational methods for plasticity: theory and applications. — Wiley, 2008. — 504 p.

110. Du Q. Convergence of the Lloyd algorithm for computing centroidal Voronoi tessellations // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2006. — Vol. 44. — P. 102–119.

111. Duda F.P., et al. Phase-field modeling of fracture in elastic–plastic solids // Computational Mechanics. — 2015. — Vol. 55, No. 6. — P. 1129–1145.

112. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1960. — Vol. 8, No. 2. — P. 100–104.

113. Dumstorff P., Meschke G. Crack propagation criteria in the framework of X-FEM-based structural analyses // Computers & Structures. — 2007. — Vol. 31, No. 2. — Special Issue: Advanced Models for Fracture in Quasi-Brittle Materials. — P. 239–259.

114. Dvorkin E., et al. Finite element analysis of crack propagation // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1990.

115. Eggertsen P., Mattiasson K. On the identification of kinematic hardening material parameters for accurate springback predictions // International Journal of Material Forming. — 2011. — Vol. 4. — P. 103–120.

116. Ellyin F. Fatigue damage, crack growth and life prediction // Dordrecht: Springer, 1997. — 483 p.

117. Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // Journal of Basic Engineering. — 1963. — Vol. 85, No. 4. — P. 519.

118. Eslami M.R., Mahbadi H. Cyclic loading of thermal stresses // Journal of Thermal Stresses. — 2001. — Vol. 24(6). — P. 577–603.

119. Ewing J.A., Humfrey J.C.W. The fracture of metals under repeated alternations of stress // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. — 1903. — Vol. 200. — P. 241–250.

120. Fedorenkov D.I., Kosov D.A., Tumanov A.V. A method of determining the constants and parameters of a damage accumulation model with isotropic and kinematic hardening // Physical Mesomechanics. – 2023. – Vol.26, No.2. – P. 157.

121. Fedorenkov D.I., Kosov D.A., Tumanov A.V. Constants and parameters of the damage accumulation model with isotropic and kinematic hardening for 25Cr1Mo1V steel // Procedia Structural Integrity. – 2022. – Vol.42. – P. 537–544.

122. Francfort G.A., Marigo J.-J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1998. — Vol. 46. — P. 1319–1342.

123. Freddi F., Royer-Carfagni G. Regularized variational theories of fracture: A unified approach // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2010. — Vol. 58, No. 8. — P. 1154–1174.

124. Frederick C.O., Armstrong P.J. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect // Materials at High Temperatures. — 2007. — Vol. 24(1). — P. 1–26.

125. Garrison W.M., Moody N.R. Ductile fracture // Journal of Physics and Chemistry of Solids. — 1987. — Vol. 48, No. 11. — P. 1034–1074.

126. Gates R.L. A finite element implementation of a ductile damage model: Bachelor thesis. — Hannover: Gottfried Wilhelm Leibniz University, 2012.

127. Gelin J.C., Mrichcha A. Computational procedures for finite strain elasto-plasticity with isotropic damage // In: Owen D.R.J., Oñate E., Hinton E. (eds.) Computational Plasticity: Fundamentals and Applications – Proceedings of the Third International Conference, Barcelona, 6–10 April 1992. — Swansea: Pineridge Press, 1992. — P. 1401–1412.

128. Giry C., Dufour F., Mazars J. Stress-based nonlocal damage model // International Journal of Solids and Structures. — 2011. — Vol. 48, No. 25–26. — P. 3431–3443.

129. Golahmar A., Kristensen P.K., Niordson C.F., Martínez-Pañeda E. A phase field model for hydrogen-assisted fatigue // International Journal of Fatigue. — 2022. — Vol. 154.

130. Golahmar A., Niordson C.F., Martínez-Pañeda E. A phase field model for high-cycle fatigue: Total-life analysis // International Journal of Fatigue. — 2023. — Vol. 170.

131. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. — 1920. — Vol. 221. — P. 163–198.

132. Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth – Part I: Yield criteria and flow rule for porous media // Journal of Engineering Materials and Technology. — 1977. — Vol. 99. — P. 2–15.

133. Halama R., Sedlak J., Sofer M. Phenomenological modelling of cyclic plasticity // In: InTech. — 2012. — P. 329–354.

134. Hertzberg R.W. Deformation and fracture mechanics of engineering materials. — Wiley, 1996. — 789 p.

135. Hillerborg A., Modéer M., Petersson P.-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite element // Cement and Concrete Research.-1976. – Vol.6. – P.773-782

136. Horii H., Nemat-Nasser S. Overall moduli of solids with microcracks: Load-induced anisotropy // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1983. — Vol. 31, No. 2. — P. 155–171.

137. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // Journal of Applied Mechanics. — 1957. — Vol. 24, No. 3. — P. 361–364.

138. Janson J. A continuous damage approach to the fatigue process // Engineering Fracture Mechanics. — 1978. — Vol. 10. — P. 651–657.

139. Junhe L., Yuan F., Sebastian M. A modified Lemaitre damage model phenomenologically accounting for the Lode angle effect on ductile fracture // Procedia Materials Science. — 2014. — Vol. 3.

140. Khalil Z., Elghazouli A.Y., Martínez-Pañeda E. A generalised phase field model for fatigue crack growth in elastic–plastic solids with an efficient monolithic solver // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2022. — Vol. 388. — Article 114286.

141. Khamidullin R., Shlyannikov V., Kosov D., Zakharov A. Comprehensive study of the structural integrity of a damaged turbine disk using FEM, DIC and phase field methods // International Journal of Fatigue. – 2025. – Vol.192. – 108720.

142. Kim E.-H., Rim M.-S., Hwang T.-K. Composite damage model based on continuum damage mechanics and low velocity impact analysis of composite plates // Composite Structures. — 2013. — Vol. 95. — P. 123–134.

143. Klinsmann M., Rosato D., Kamlah M., McMeeking R.M. An assessment of the phase field formulation for crack growth // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2015. — Vol. 294. — P. 313–330.

144. Kosov D., Fedorenkov D., Tumanov A. Complex stress state analysis for aluminum alloy accounting for damage accumulation // Procedia Structural Integrity. – 2022. – Vol.42. – P. 545–552.

145. Kosov D., Tumanov A., Shlyannikov V. ANSYS implementation of the phase field fracture approach // Frattura ed Integrità Strutturale. – 2024. – Vol.18, No.70. – P. 133–156.

146. Krajcinovic D. Damage mechanics. — Amsterdam: North-Holland, 1996. — 775 p.

147. Krajcinovic D., Fonseka G.U. The continuous damage theory of brittle materials – Part 1: General theory // Journal of Applied Mechanics. — 1981. — Vol. 48. — P. 809–815.

148. Krajcinovic D. Constitutive equations for damaging materials // Journal of Applied Mechanics. — 1983. — Vol. 50. — P. 355–360.

149. Krajcinovic D. Continuous damage mechanics revisited: Basic concepts and definitions // Journal of Applied Mechanics. — 1985. — Vol. 52. — P. 829–834.

150. Kuhn C., Noll T., Müller R. On phase field modeling of ductile fracture // GAMM-Mitteilungen. — 2016. — Vol. 39, No. 1. — P. 35–54.

151. Lancioni G., Royer-Carfagni G. The variational approach to fracture mechanics. A practical application to the French Panthéon in Paris // Journal of Elasticity. — 2009. — Vol. 95, No. 1. — P. 1–30.

152. Leckie F.A., Hayhurst D.R. Creep rupture of structures // Proceedings of the Royal Society of London A. — 1974. — Vol. 340. — P. 323–334.

153. Leckie F.A., Onat E.T. Tensorial nature of damage measuring internal variables // In: Proceedings of the IUTAM Symposium on Physical Nonlinearities in Structures. — Springer, 1981. — P. 140–155.

154. Lemaitre J. A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture // J. Eng. Mater. Tech. Trans. ASME. — 1985. — T. 107. — C. 83–89.

155. Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. 2nd ed. — Springer, 1996.

156. Lemaitre J., Chaboche J. L. Mechanics of Solid Materials. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

157. Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture // J. Eng. Mater. Technol. — 1985. — Vol. 107(1). — P. 83–89.

158. Lemaitre J. A Three-dimensional Ductile Damage Model Applied to Deep-drawing Forming Limits // ICM 4 Stockholm, vol. 2. — 1983. — P. 1047–1053.

159. Lemaitre J. and Chaboche, J.L. Mechanics of Solid Materials. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
160. Lemaitre J. Coupled Elasto-plasticity and Damage Constitutive Equations // Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. — 1985. — Vol. 51. — P. 31–49.
161. Lemaitre J., Krajcinovic, D. Formulation and Identification of Damage Kinetic Constitutive Equations // Continuum Damage Mechanics: Theory and Applications. — 1987. — P. 37–89. Springer-Verlag.
162. Lemaitre J., Desmorat R. and Sauzay M. Anisotropic Damage Law of Evolution // Eur. J. Mech. A/Solids. — 2000. — Vol. 19. — P. 187–208.
163. Lemaitre J., Marquis D. Constitutive Equations for the Coupling Between Elasto-plasticity Damage and Ageing // Rev. Phys. Applic. — 1988. — Vol. 23. — P. 615–624.
164. Lemaitre J., Desmorat R. Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures // New York: Springer-Verlag, 2005. — 380 p.
165. Li B., Peco C., Millán D., Arias I., and Arroyo M. Phase-field modeling and simulation of fracture in brittle materials with strongly anisotropic surface energy // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2015. — Vol. 102, No. 3-4. — P. 711–727.
166. Lloyd S. Least squares quantization in PCM // IEEE Transactions on Information Theory. — 1982. — Vol. 28, No. 2. — P. 129–137.
167. Lucchetta A., Auslender F., Bornert M., Kondo D. Incremental variational homogenization of elastoplastic composites with isotropic and Armstrong-Frederick type nonlinear kinematic hardening // Int. J. Solids and Structures. — 2021. — Vol. 222–223.
168. Mahbadi H., Eslami M.R. Cyclic loading of thick vessels based on the Prager and Armstrong–Frederick kinematic hardening models // International Journal of Pressure Vessels and Piping. — 2006. — Vol. 83, No. 6. — P. 409–419.
169. Mahmoudi A.H., Pezeshki-Najafabadi S.M., Badnava H. Parameter determination of Chaboche kinematic hardening model using a multi-objective genetic algorithm // Computational Materials Science. — 2011. — Vol. 50, No. 3. — P. 1114–1122. — ISSN 0927-0256.
170. Marquis D., Lemaitre J. Constitutive equations for the coupling between elasto-plasticity damage and ageing // Revue de Physique Appliquée. — 1988. — Vol. 23. — P. 615–624.

171. Martínez-Pañeda E. Phase field modelling of fracture and fatigue in shape memory alloys // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2021. — Vol. 373. — Article 113504.
172. Martínez-Pañeda E., Golahmar A. ABAQUS implementation of the phase field fracture method // Technical Report. — University of Oxford, 2018. — P. 1–27.
173. Martínez-Pañeda E., Golahmar A., Niordson C.F. A phase field formulation for hydrogen assisted cracking // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2018. — Vol. 342. — P. 742–761.
174. Meyer K.A., Ekh M., Ahlström J. Modeling of kinematic hardening at large biaxial deformations in pearlitic rail steel // International Journal of Solids and Structures. — 2018. — Vol. 130–131. — P. 122–132.
175. Miehe C., Hofacker M., Welschinger F. A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2010. — Vol. 199, No. 45–48. — P. 2765–2778.
176. Miehe C., Welschinger F., Hofacker M. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2010. — Vol. 83. — P. 1273–1311.
177. Mikula J., Joshi S.P., Tay T., Ahluwalia R., Quek S. A phase field model of grain boundary migration and grain rotation under elasto–plastic anisotropies // International Journal of Solids and Structures. — 2019. — Vol. 178–179. — P. 1–18.
178. Miller K.J. Fatigue under complex stress // Metal Science. — 1977. — Aug./Sept. — P. 432–438.
179. Miner M.A. Cumulative damage in fatigue // Journal of Applied Mechanics. — 1945. — Vol. 12, No. 3. — P. 159–164.
180. Mitchell G.P. Topics in the numerical analysis of inelastic solids: PhD thesis / G.P. Mitchell. — Department of Civil Engineering, University College of Swansea, 1990.
181. Mohr O. Which factors determine the yield point and fracture of a material // Journal of the Verein Deutscher Ingenieure. — 1900. — Vol. 44. — P. 1524–1530.
182. Molnár G., Gravouil A., Seghir R., Réthoré J. An open-source Abaqus implementation of the phase-field method to study the effect of plasticity on the instantaneous fracture toughness

in dynamic crack propagation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2020. — Vol. 365. — Article 113004. — DOI: 10.1016/j.cma.2020.113004.
183. Moës N., Dolbow J. A finite element method for crack growth without remeshing// International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1999. — Vol. 46. — P. 131–150.
184. Mróz Z. On the description of anisotropic work hardening // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1967. — Vol. 15. — P. 163–175.
185. Mumford D., Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1989. — Vol. 42, No. 5. — P. 577–685.
186. Murakami S. Mechanical modeling of material damage // Journal of Applied Mechanics. — 1988. — Vol. 55. — P. 280–286.
187. Murakami S., Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage // In: Ponter A.R.S. (ed.), Proceedings of the IUTAM Symposium on Creep in Structures, Leicester, 1980. — Berlin: Springer, 1981. — P. 422–443.
188. Navidtehrani Y., Betegón C., Martínez-Pañeda E. A simple and robust Abaqus implementation of the phase field fracture method // Applications in Engineering Science. — 2021. — Vol. 6. — P. 100050.
189. Navidtehrani Y., Betegón C., Martínez-Pañeda E. A unified Abaqus implementation of the phase field fracture method using only a user material subroutine // Materials. — 2021. — Vol. 14. — P. 1913.
190. Nguyen V.P. Extended finite element methods for crack propagation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2014.
191. Nguyen V.P., Stroeven M., Sluys L.J. Multiscale failure modeling of concrete: Micromechanical modeling, discontinuous homogenization and parallel computations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2012. — Vol. 201–204. — P. 139–156.
192. Onat E.T. Representation of mechanical behaviour in the presence of internal damage // Engineering Fracture Mechanics. — 1986. — Vol. 25. — P. 605–614.
193. Ortiz M., Leroy Y., Needleman A. A finite element method for crack growth without remeshing // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1999. — Vol. 44, No. 9. — P. 1267–1282.

194. Paimushin V.N., Kayumov R.A., Kholmogorov S.A. Degradation of the mechanical properties of fiber reinforced plastic under cyclic loading // Mechanics of Composite Materials. — 2023. — Vol. 59. — P. 371–380.

195. Palmgren A. The life of ball bearings // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure (Zevon Maschinenbau). — 1924. — Vol. 56, No. 1. — P. 1–7.

196. Peerlings R.H., De Borst R., Brekelmans W.A., De Vree J.H. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1996. — Vol. 39, No. 19. — P. 3391–3403.

197. Pei P., Dong J., Mei J. The effects of kinematic hardening on thermal ratcheting and Bree diagram boundaries // Thin-Walled Structures. — 2021. — Vol. 159. — Article 107235.

198. Pereira L., Weerheijm J., Sluys L. A new rate-dependent stress-based nonlocal damage model to simulate dynamic tensile failure of quasi-brittle materials // International Journal of Impact Engineering. — 2016. — Vol. 94. — P. 83–95.

199. Peroni M., Solomos G. Advanced experimental data processing for the identification of thermal and strain-rate sensitivity of a nuclear steel // Journal of Dynamic Behavior of Materials. — 2019. — Vol. 5. — P. 251–265.

200. Ramberg W., Osgood W.R. Description of stress-strain curves by three parameters: Technical note № 902 // National Advisory Committee for Aeronautics, Washington. — 1943. — 48 p.

201. Rashid Y. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels // Nuclear Engineering and Design. — 1968. — Vol. 7, No. 4. — P. 334–344.

202. Rezaiee-Pajand M., Sinaie S. On the calibration of the Chaboche hardening model and a modified hardening rule for uniaxial ratcheting prediction // International Journal of Solids and Structures. — 2009. — Vol. 46, No. 16. — P. 3009–3017.

203. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Journal of Applied Mechanics. — 1968. — Vol. 35, No. 2. — P. 379.

204. Roy P., Deepu S., Pathrikar A., Roy D. Phase field based peridynamics damage model for delamination of composite structures // Composite Structures. — 2017. — Vol. 180. — P. 972–993.

205. Roy P., Pathrikar A., Deepu S., Roy D. Peridynamics damage model through phase field theory // International Journal of Mechanical Sciences. — 2017. — Vol. 128–129. — P. 181–193.

206. Saanouni K., Chaboche J.L., Lesne P.M. Creep crack-growth prediction by a non-local damage formulation // In: Mazars J., Bazant Z.P. (eds.), Cracking and Damage, Strain Localization and Size Effect. — Amsterdam: Elsevier, 1989. — P. 404–414.
207. Shlyannikov V. Elastic-Plastic Mixed-Mode Fracture Criteria and Parameters // Springer-Verlag, 2003.
208. Shlyannikov V., Fedotova D. Distinctive features of crack growth rate for assumed pure mode II conditions // International Journal of Fatigue. — 2021. — Vol. 147. — Article 106163.
209. Shlyannikov V., Kosov D., Fedorenkov D., Zhang X.-C., Tu S.-T. Size effect in crack growth rate under creep-fatigue interaction in P2M steel // Fatigue Fract Eng Mater Struct. – 2021. – Vol.44, No.12. – P. 3301–3319.
210. Shlyannikov V., Sulamanidze A., Kosov D. Generalization of crack growth mechanisms under isothermal and thermomechanical fatigue by COD and ERR parameters // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2024. – Vol.131. –104392.
211. Shlyannikov V., Sulamanidze A., Kosov D. Crack growth analysis of XH73M nickel alloy under fatigue, creep-fatigue interaction and thermo-mechanical conditions // Procedia Structural Integrity. – 2024. – Vol.52, No.1. – P. 214–223.
212. Shlyannikov V., Sulamanidze A., Yarullin R. Fatigue and creep-fatigue crack growth in aviation turbine disk simulation models under variable amplitude loading / V. Shlyannikov, A. Sulamanidze, R. Yarullin // Engineering Failure Analysis. — 2022. — Vol. 131. — Article 105886.
213. Shlyannikov V., Tumanov A. An inclined surface crack subject to biaxial loading // International Journal of Solids and Structures. — 2011. — Vol. 48. — P. 1778–1790.
214. Shlyannikov V., Tumanov A., Zakharov A., Gerasimenko A. Surface flaws behavior under tension, bending and biaxial cyclic loading // International Journal of Fatigue. — 2016. — Vol. 92. — P. 557–576.
215. Shlyannikov V., Yarullin R., Yakovlev M., Giannella V., Citarella R. Mixed-mode crack growth simulation in aviation engine compressor disk // Engineering Fracture Mechanics. — 2021. — Vol. 246. — Article 107617.
216. Shlyannikov V., Yarullin R., Zakharov A. Fatigue of steam turbine blades with damage on the leading edge // Proceedings of Materials Science. — 2014. — Vol. 3. — P. 1792–1797.

217. Shlyannikov V.N., Zakharov A.P., Yarullin R.R. Structural integrity assessment of turbine disk on a plastic stress intensity factor basis // International Journal of Fatigue. — 2016. — Vol. 92. — P. 234–245.

218. Sih G.C. Some basic problems in fracture mechanics and new concepts // Engineering Fracture Mechanics. — 1973. — Vol. 4, No. Y. — P. 365–377.

219. Silling S.A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2000. — Vol. 48, No. 1. — P. 175–209.

220. Simo J.C. and Ju J.W. Strain- and Stress-based Continuum Damage Models – I. Formulation and II. Computational Aspects // Int. J. Solids Structs. — 1987. — Vol. 23. — P. 821–869.

221. Sinai V. Discrete Element Modeling of Complex Crack Networks // Engineering Fracture Mechanics. — 2018.

222. Skrzypek J. J. Plasticity and Creep. Theory, Examples and Problems. — London: CRC Press, 1993.

223. Sukumar N., Moës N., Moran B., Belytschko T. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2000. — Vol. 48, No. 11. — P. 1549–1570.

224. Sutula D., Kerfriden P., van Dam T., Bordas S.P.A. Minimum energy multiple crack propagation. Part I: Theory and state of the art review // Engineering Fracture Mechanics. — 2018. — Vol. 191. — P. 205–224.

225. Tanné E., Li T., Bourdin B., Marigo J.-J., and Maurini C. Crack initiation in variational phase-field models of brittle fracture // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2018. — Vol. 110. — P. 80–99.

226. Tresca, H. (1868). Memoir on the flow of solid bodies // Memoirs presented by various scholars. — Vol. 18. — P. 733–799.

227. Tsakmakis A., Vormwald M. Thermodynamics and analysis of predicted responses of a phase field model for ductile fracture // Materials. — 2021. — Vol. 14, No. 19. — Article 5842.

228. Tvergaard V., Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar // Acta Metall. — 1984. — Vol. 32. — P. 157–169.

229. von Mises R. . Mechanics of solids in the plastically deformable state // Reports of the Society of Sciences in Göttingen, Mathematical-Physical Class. — 1913.

230. Wells G.N., Sluys L.J. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2001. — Vol. 50, No. 12. — P. 2667–2682.
231. Wu J.Y. Robust numerical implementation of non-standard phase-field damage models for failure in solids // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2018. — Vol. 340. — P. 767–797.
232. Wu J.-Y., Huang Y., Zhou H., Nguyen V.P. Three-dimensional phase-field modeling of mode I + II/III failure in solids // Preprint submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2020. — Vol. 373. — Article 113537.
233. Xu X.-P., Needleman A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1994. — Vol. 42, No. 9. — P. 1397–1434.
234. Zehsaz M., Tahami F.V., Akhani H. Experimental determination of material parameters using stabilized cycle tests to predict thermal ratchetting // UPB Sci Bull Series D. — 2016. — Vol. 78(2). — P. 7–13.