На правах рукописи

Никулин Илларион Леонидович

# МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ЖИДКИЕ МЕТАЛЛЫ И НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Пермь – 2022

Работа выполнена в Федеральном бюджетном автономном образовательном учреждении «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Научный консультант – *Демин Виталий Анатольевич*, доктор физикоматематических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь

Официальные оппоненты

• Любимова Татьяна Петровна, доктор физико-математических наук, заведующая Лабораторией вычислительной гидродинамики Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, г. Пермь, заслуженный деятель науки Российской федерации.

• Шеремет Михаил Александрович, доктор физико-математических наук, профессор Научно-образовательного центра И.Н. Бутакова Инженерной школы энергетики Томского политехнического университета, г. Томск.

• Козлов Виктор Геннадьевич, доктор физико-математических наук, заведующий Кафедрой экспериментальной физики Пермского государственного педагогического университета, г. Пермь.

Ведущая организация – Уральский федеральный университет имени первого президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург (Уральский энергетический институт. Кафедра электротехники и электротехнологии)

Защита состоится 16 декабря 2022 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д ПНИПУ.01.09 на базе ФБАОУ «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» по адресу: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, тел. 8(342)1234567, сайт: www.pstu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Пермского национального исследовательского политехнического университета – www.pstu.ru.

Автореферат разослан 01 октября 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д ПНИПУ.01.09 доктор физико-математических наук, доцент

А.И. Швейкин

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

#### Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Современные металлургические технологии производства губчатого титана и индукционной плавки жаропрочных никелевых сплавов, применяемые при изготовлении деталей газотурбинных двигателей, характеризуются значительным потреблением энергии и стоимостью исходных материалов, поэтому повышение энергетической эффективности и улучшение качества продукции являются крайне актуальными направлениями работы. Одной из существующих проблем при реализации указанных технологий является накопление на свободной поверхности неметаллических включений. Так, при магнийтермическом восстановлении титана из его тетрахлорида на поверхности расплава магния может накапливаться продукт реакции – хлорид магния, который препятствует дальнейшему протеканию реакции восстановления титана из его тетрахлорида; а при индукционной плавке даже в вакууме могут образовываться поверхностные оксидные плёнки, которые, во-первых, при попадании в литейную форму приводят к браку, а во-вторых, имея большую излучательную способность, могут искажать показания яркостных пирометров.

В существующей конструкции реактора титана протекающая на поверхности расплава магния экзотермическая реакция значительно перегревает его, что приводит к двум негативным эффектам: первый – общее повышение температуры в верхней части реторты, второй – направленный вверх градиент температуры, который приводят к возникновению устойчивой стратификации расплава, что замедляет течение. Для устранения первого эффекта в реакторе имеется зона воздушного охлаждения реторты, в которой лишнее тепло отводится в атмосферу. Охлаждение верхней части реторты также способствует установлению неустойчивой стратификации по отношению к подогреваемой придонной области и разгоняет течение, которое для обсуждаемой конструкции является двухконтурным с заметно меньшей интенсивностью в верхней части. В настоящий момент основными параметрами, регулирующими протекание процесса, являются скорость подачи титана тетрахлорида, мощность тепловыделения в шахтной электропечи и расход воздуха в системе охлаждения верхней части реторты.

Бегущее магнитное поле (БМП), широко применяемое в технологии непрерывного литья, позволяет перемешивать металл без непосредственного контакта с ним, например, через затвердевшую корку кристаллизующегося слитка, и таким образом управлять внутренним температурным полем. Кроме выравнивания температуры при БМП-интенсификации движения выравнивается химический состав металла. При получении металлов методом жидкофазного восстановления протекает экзотермическая реакция. Для таких случаев индуктор БМП может выполнять функцию *отвода энергии* из зоны реакции. Применение БМП в технологии восстановления титана позволило бы использовать энергию реакции восстановления для поддержания температуры расплава магния, кроме того, вынужденная конвекция очищает поверхность магния от его хлорида, и реакция восстановления продолжается.

Нагрев и движение металла в *переменном магнитном поле* (ПМП) исследованы достаточно широко. При теоретическом описании наибольшее распространение приобрела следующая методика. Уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска решаются в *безындукционном* приближении с объёмной силой Лоренца в рамках *k*-є модели турбулентности; сила Лоренца рассчитывается как среднее за период значение мгновенных сил; магнитные поля индукционных токов вычисляются через векторный магнитный потенциал. Экспериментальные исследования в основном проводятся на легкоплавких металлах: ртуть, сплав Вуда и GaInSn. Недостатком таких экспериментальных исследований является фактическое сведение движения металла к вынуждаемому силой Лоренца изотермическому перемешиванию.

Установлены следующие закономерности: различные типы течений реализуются в цилиндрическом объеме в зависимости от частоты ПМП (при *«низких»* – двухвихревое течение, при *«высоких»* – четырёхвихревое). Для материала определённого размера существует частота, при которой мощность тепловыделения максимальна. При этой частоте максимальна скорость движения расплава (фиксирована напряжённость поля), скорость прямо пропорциональна напряжённости (если неизменна частота).

Для управления нагревом и перемешиванием расплава создаются индукторы, содержащие несколько катушек, либо с независимым питанием со сдвигом фазы, которые порождают переменное и бегущее магнитные поля одновременно, либо пассивные катушки, в которых возбуждаются колебания дополнительной частоты для лучшего прогрева материала. С целью увеличения эффективности нагрева в настоящее время ведутся работы по выбору геометрии индукторов, содержащих несколько наборов катушек.

Разработан метод воздействия на структуру затвердевающего металла низкочастотными пульсациями силы Лоренца, генерируемыми индуктором ПМП: изменение рабочего тока с заданной частотой обеспечивает магнитогидродинамический резонанс в расплаве, а интенсификация течений измельчает зерно в кристаллизующемся металле, что повышает его механическую прочность.

Таким образом, при всём многообразии применения БМП и ПМП отдельно *вопросы очистки поверхности* от неметаллических включений ранее должным образом не рассматривались как применительно к технологии металлотермического восстановления титана, так и для индукционной плавки. Известные методы очистки поверхности металла, в которых расплав раскручивается вращающимся магнитным полем, и поллютанты (диэлектрические оксидные пленки или шлаки) скапливаются в образующейся лунке. На практике указанная технология не применяется ни при восстановлении титана, ни при индукционной плавке.

Для перечисленных выше технологий характерны высокие температуры протекающих процессов и изоляция рабочей зоны от непосредственного наблюдения закрытой стальной ретортой в случае производства титана и вакуумной камерой при индукционной плавке. Иными словами, наиболее доступным методом исследования и определения путей совершенствования технологических процессов является математическое моделирование.

# Цель работы

Выявление на основе математического моделирования эффектов, закономерностей и критериев эффективности воздействия при помощи электромагнитного поля с различными способами его приложения на системы, состоящие из расплавленного металла с неметаллом на поверхности, таким как расплавленная соль или оксидная плёнка, а также моделирование технологий, реализующих эти воздействия с целью очистки поверхности металла от солей или оксидных плёнок.

# Решаемые задачи

1) Обзор и обобщение данных, относительно математических моделей, описывающих действие магнитного поля на движение металла при различных способах приложения и связанные с ними эффекты, описание моделей радиационного теплообмена, проработка вопроса о способах описания тонких плёнок на поверхности расплава, их возможных свойств и закономерностей их поведения при внешнем воздействии.

2) Разработка математической модели новой конструкции реактора восстановления титана, содержащей индуктор БМП для перемешивания расплава магния, моделирование различных технологических режимов его функционирования и оценка эффективности применения новых решений.

3) Разработка математической модели диффузии ПМП в расплав и осреднённого действия возбуждаемых МП источников джоулевой теплоты и силы Лоренца.

4) Разработка математической модели движения металла в ПМП, учитывающей особенности существующей технологии индукционной плавки жаропрочных никелевых сплавов, учитывающей перемешивание и нагрев расплава в ПМП, а также радиационное охлаждение его поверхности.

5) Исследование методами вычислительного эксперимента влияния частоты, амплитуды и пространственного распределения ПМП на структуру течения и распределение температуры в расплавленном металле.

6) Выявление механизмов, управляющих движением расплава; определение областей параметров, в которых доминируют выявленные механизмы.

7) Разработка методов управления течениями на поверхности расплава в ПМП с целью очистки поверхности от оксидных плёнок, а также оценка эффективности предложенных методов.

8) Разработка математической модели упруго деформированного состояния оксидной плёнки на поверхности расплава в ПМП; учет динамического и теплового действия поверхностной плёнки на движение расплава, упругое нагружение плёнки вязкими силами со стороны движущегося расплава и конвекции Марангони на свободной поверхности. 9) Исследование методами вычислительного эксперимента закономерностей деформирования плёнки на поверхности расплава при вариации параметров ПМП.

10) Разработка методики, позволяющей прогнозировать стабильность плёнки на поверхности расплава, перемешиваемого переменным магнитным полем.

# Научная новизна<sup>1</sup>

# Разработанные новые математические методы моделирования объектов и явлений.

• <u>Метод эффективной теплопроводности</u>, заключающийся в замене участков с радиационным теплообменом участками с эквивалентным диффузионным механизмом теплопереноса. Это позволяет применять метод сквозного счёта, не прибегая к процедуре теплового сопряжения отдельных областей, разделённых зазором.

• <u>Метод решения задачи о диффузии переменного магнитного поля в</u> <u>расплав и учёте осреднённых силовых и тепловых эффектов</u>, позволяющий рассчитывать магнитные поля индукционных токов, осреднённые пространственные распределения силы Лоренца и источников джоулевой теплоты. Достоинством данного подхода является возможность расчёта именно осреднённых мощностей тепловыделения и сил, что позволяет значительно ускорить моделирование тепломассопереноса и реализовать массовый вычислительный эксперимент, раскрывающий новые закономерности.

• <u>Методика оценки стабильности оксидной плёнки</u>, построенная на подобии структуры течений при одной частоте и пропорциональности скорости движения расплава напряжённости ПМП. Прогноз упруго напряжённого состояния плёнки, полученный по предложенной методике, хорошо согласуется с результатами прямого моделирования и позволяет ускорить поточные вычислительные эксперименты путём сокращения числа расчётов за счёт обобщения с применением выявленных критериев подобия.

# Разработанные, обоснованные и протестированные эффективные вычислительные методы с применением современных компьютерных технологий.

• Разработан и протестирован эффективный <u>метод решения сопряжённой задачи взаимодействия тепломассопереноса в расплаве металла в условиях</u> <u>его нагрева при перемешивании переменным магнитным полем и упруго</u> <u>напряжённой поверхностной плёнки, тормозящей расплав и изменяющей теп-</u> <u>ловое излучение на поверхности</u>. Вычислительная реализация выполнена с применением <u>современной высокопроизводительной вычислительной библиотеки</u> <u>Intel<sup>TM</sup> Math Kernel Library<sup>TM</sup></u>. Показано, что погрешность вычислений не превышает 0,1% от абсолютной величины.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Формулировка подпунктов параграфа Научная новизна соответствует требованиям, определённым в Паспорте специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Реализованные эффективные численные методы и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

• Программный комплекс «Вычислительное моделирование движения расплава в переменном магнитном поле и его взаимодействие с поверхностной оксидной плёнкой»

• Программный комплекс «Вычислительное моделирование неравновесных процессов тепломассопереноса в реакторе для получения пористого титана при осуществлении внешних электромагнитных воздействий».

Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

• Проведено <u>моделирование перспективного реактора для производства</u> <u>титана</u>, в котором реализовано электромагнитное перемешивание. Показаны физические эффекты, приводящие к положительным технологическим эффектам: применение БМП через управление течением расплава в реторте позволяет предотвратить перегрев верхней части реторты, продляя её рабочий ресурс и устранить неразделение продуктов реакции, приводящее к остановке технологического процесса.

• На основе математического моделирования исследованы течения расплавленного металла в ПМП, выявлены основные механизмы, формирующие эти течения и определены границы параметров, в которых доминирует тот или иной механизм.

• Методами вычислительного эксперимента проведены комплексные исследования, в которых выявлены связи упруго напряжённого состояния оксидной плёнки на поверхности расплава металла с параметрами переменного магнитного поля: частоты, напряжённости и пространственного распределения, причём посредником в указанных связях является расплавленный металл, который перемешивается и нагревается этим полем, а плёнка тормозит металл и увеличивает тепловое излучение на его поверхности. Определены основные методы воздействия на поверхностную плёнку.<sup>2</sup>

## Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая значимость результатов, полученных в настоящем диссертационном исследовании, заключается в разработке *новых математических методов*, позволяющих рассчитывать радиационный теплообмен, диффузию ПМП в проводник и связанных с ней осреднённых джоулевева тепловыделения и силы Лоренца, а также в создании *новой методики* прогнозирования упруго напряжённого состояния оксидной плёнки на поверхности металлического расплава в ПМП. В работе *разработаны комплексные математические модели*,

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Настоящая работа соответствует направлению <u>Физико-математические науки</u> Паспорта специальности 1.2.2, поскольку представленные исследования соответствуют четырём (не менее чем трем) пунктам Паспорта <u>при преобладании математических методов в качестве аппарата исследований</u> и при получении результатов в виде новых математических методов, вычислительных алгоритмов и <u>новых закономерностей</u>, характеризующих изучаемые объекты.

позволяющие изучать влияние БМП на тепломассоперенос в реакторе для производства титана и ПМП на сопряженные тепломассоперенос в никелевом расплаве и упруго напряжённые состояния тонкой плёнки на поверхности этого расплава. *Методами математического моделирования получены картины* течений расплава в ПМП, *зависимости и карты* для режимов течений и для деформаций на плоскостях управляющих параметров, *выявлены основные механизмы*, определяющие поведение сложных систем. Результаты, полученные с помощью разработанных математических моделей, открывают возможности совершенствования технологических процессов производства титана за счёт применения БМП и выбора параметров ПМП при индукционной плавке жаропрочных никелевых сплавов с целью препятствования образования оксидных плёнок на его поверхности или удаления их в процессе плавки.

Практическая значимость состоит в разработке вычислительных алгоритмов и программных комплексов, позволяющих прогнозировать отклик сложных технических гидродинамических систем, таких как реактор для производства титана или покрытый оксидной плёнкой металл в индукционной печи на параметры приложенного магнитного поля; в возможности приложения результатов, касающихся применения БМП в производстве губчатого титана для совершенствования технологии на предприятиях Пермского края ВСМПО «Ависма», г. Березники, ПАО «Соликамский магниевый завод», г. Соликамск; а относящихся к движению расплава в ПМП и его взаимодействия с поверхностной оксидной плёнкой для разработки эффективных режимов индукционной плавки в цехах точного литья ПАО «Протон – Пермские моторы», г. Пермь и других машиностроительных предприятий РФ. Внедрение предложенных технических решений позволит увеличить энергетическую эффективность производства жаропрочных никелевых сплавов при совершенствовании технологий точного литья.

#### Методология и методы исследования

Физическая составляющая разработанных моделей основана на законах электродинамики сплошных сред, гидродинамики, теплофизики и теории упругости. Осреднённые уравнения для джоулевой мощности тепловыделения и силы Лоренца получены аналитически с помощью метода многих масштабов. Вычислительная часть реализована в виде авторских программ; дифференциальные уравнения решались методом конечных разностей с применением методов переменных направлений, скалярной прогонки, последовательной верхней релаксации, LU-факторизации, для решения нелинейных уравнений применялись методы дихотомии и секущих. Проверка корректности алгоритмов и верификация моделей проводилась сравнением результатов расчёта с полученными автором аналитическими решениями и известными результатами других авторов. Представленные в диссертации расчетные поля физических величин получены методом прямого вычислительного эксперимента.

Положения, выносимые на защиту

• Метод эффективной теплопроводности, заключающийся в замене участков с радиационным теплообменом участками с эквивалентным диффузионным механизмом теплопереноса.

• Метод решения задачи о диффузии переменного магнитного поля в расплав с учётом осреднённых силовых и тепловых эффектов, позволяющий рассчитывать магнитные поля индукционных токов, осреднённые пространственные распределения силы Лоренца и источники джоулевой теплоты.

• Методика оценки стабильности оксидной плёнки, построенная на подобии структуры течений при одной частоте и пропорциональности скорости движения расплава напряжённости ПМП.

• Метод решения сопряжённой задачи взаимодействия тепломассопереноса в расплаве металла в условиях его нагрева и перемешивания переменным магнитным полем и упруго напряжённой поверхностной плёнки, тормозящей расплав и изменяющей тепловое излучение на поверхности.

• Математическая модель взаимодействия расплавленного металла в ПМП и тонкой плёнки на его поверхности, в которой расплав нагреваемый и перемешиваемый ПМП упругого деформирует плёнку, которая, в свою очередь, тормозит движение расплава и увеличивает тепловое излучение на его поверхности.

• Программный комплекс «Вычислительное моделирование движения расплава в переменном магнитном поле и его взаимодействие с поверхностной оксидной плёнкой», реализующие предложенную модель.

• Результаты моделирования перспективного реактора для производства титана, в котором реализовано электромагнитное перемешивание, физические эффекты, приводящие к положительным технологическим эффектам: применение БМП через управление течением расплава в реторте позволяет предотвратить перегрев верхней части реторты, продляя её рабочий ресурс, и устранить неразделение продуктов реакции, приводящее к остановке технологического процесса.

• Результаты математического моделирования течений расплавленного металла в ПМП, формирующие течения физические механизмы и области параметров, в которых доминирует тот или иной механизм.

• Результаты вычислительных экспериментов, в которых выявлены связи упруго напряжённого состояния поверхностной плёнки различных конфигураций с движением расплава в ПМП и с параметрами ПМП, определяющими это движение.

• Способы влияния на поверхностные течения, как методы воздействия на поверхностную плёнку: изменение структуры внешнего поля или частоты, оценки эффективности предлагаемых способов, сделанные на основе вычислительных экспериментов.

# Степень достоверности

Достоверность данных, представленных в диссертационной работе, подтверждается сравнением результатов тестирования отдельных блоков программ с аналитическими решениями [1, 8, 9], сравнением результатов вычислительных экспериментов с известными результатами других авторов, полученными как в натурных, так и в вычислительных экспериментах [8, 9]. Сходимость расчётов показана на сгущающихся сетках в работе [5].

# Апробация результатов

Основные результаты диссертационной работы обсуждались на Российской конференции по магнитной гидродинамике (Пермь, 2012), • XVIII Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 2013), • VIII-ой Всероссийском семинаре ВУЗов по теплофизике и энергетике (Екатеринбург, 2013), • Всероссийской научно-практической конференции «Актуальные задачи механики сплошных сред – 2014» (Пермь, 2014), • Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы современного машиностроения» (Югра, 2014), • XIX Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 2015), • І-ой Международной научно-технической конференции «Автоматизация в электроэнергетике и электротехнике», (Пермь, 2015), • Второй Российской конференции по магнитной гидродинамике (Пермь, 2015), • Международной научнотехнической конференции «СМЗ: 80 лет на службе отечества» (Пермский край, Соликамск, 2016), • 11-ой Европейской конференции по механике жидкости (Испания, Севилья, 2016), • XIX Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 2017), • Международном симпозиуме «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2017), • V-ой Всероссийской конференции с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения» (Пермь, 2018), • Третьей Российской конференции по магнитной гидродинамике (Пермь, 2018), • VI-ой Всероссийской конференции, посвященной памяти профессоров Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова «Пермские гидродинамические научные чтения» (Пермь, 2019), • VII-ой Всероссийская конференция с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения» (Пермь, 2020), • XXII-ой Зимней школы по механике сплошных сред (Пермь, 2021), • Четвёртой российской конференции по магнитной гидродинамике (Пермь, 2021), • Международном симпозиуме «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2021).

## Публикации

По теме диссертационного исследования опубликована 51 работа, из которых 16 в журналах, входящих в международные базы цитирования, из которых 4 написаны автором диссертации без соавторов, 3 в журналах из Перечня ВАК, из них 2 без соавторов, получено 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ, 1 патент на полезную модель.

## Личный вклад автора

В задаче [13], посвящённой модификации процесса восстановления титана (идея предложена проф. А.И. Цалиным), автором разработан модуль расчёта БМП, индукционных токов и силы Лоренца, возбуждаемых в расплаве (модуль конвекции расплава разработан В.Н. Нечаевым), рассчитаны частоты и мощности индуктора, позволяющие увеличить энергетическую эффективность процесса восстановления титана. Также автор диссертации принимал участие в обсуждении результатов моделирования и написания статьи.

Автор является инициатором работ, посвящённых проблемам очистки поверхности расплава *жаропрочных никелевых сплавов* от оксидных плёнок. В цикле работ [12,14–16,18] в соавторстве с А.В. Перминовым и А.И. Цаплиным предложена и развита оригинальная математическая модель диффузии магнитного поля в проводник; автор лично разработал теорию и реализовал вычислительный алгоритм расчёта магнитного поля индуктора, совместно с А.В. Перминовым разработал теорию расчёта магнитного поля индукционных токов, осреднённых объёмной силы Лоренца и источников джоулевой теплоты, лично разработал и реализовал вычислительный алгоритм решения задачи тепломассопереноса. Расчеты мощности тепловыделения и структуры течений при различных частотах проведены совместно с А.В. Перминовым.

В цикле работ [6,8,9,11,19], выполненных без соавторов, автор лично ставит задачи, разрабатывает методику вычислительных экспериментов, проводит их, обрабатывает и интерпретирует результаты. Здесь определены основные возможности воздействия на расплав с целью очистки поверхности от оксидной плёнки. В работе [19] разрабатывает метод эффективной теплопроводности. В работах [5,7] автор совместно с А.В. Перминовым автоматизировал проведение серийных вычислительных экспериментов и произвел обработку результатов и дал их интерпретацию.

Серия работ [1–4,17] выполнена при научном консультировании проф. В.А. Демина. Автором выведено и обобщено уравнение упруго-напряжённого состояния тонкой плёнки на поверхности расплава, реализован алгоритм расчёта взаимодействия расплава, перемешиваемого ПМП, и плёнки на его поверхности, сформулирован критерий, показывающий области обобщённых частот и напряжённостей ПМП, в которых оксидные плёнки на поверхности могут быть стабильными. Автор провел численное моделирование, предложил интерпретацию результатов, обсуждение которых происходило вместе с соавторами.

Помимо всего прочего, автором единолично выполнен обзор [17], на основании которого выработаны подходы к описанию моделируемых процессов. В патенте [22] выступал руководителем магистранта.

## Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, библиографического списка и двух приложений. Текст диссертации изложен на 306 страницах, содержит 86 рисунков и 25 таблиц, библиография содержит 234 источника.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

# ГЛАВА 1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМ «МЕТАЛЛ-НЕМЕТАЛЛ» И ДЕЙ-СТВИЕ НА НИХ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. МОДЕЛИ И ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Выполнен обзор моделей и экспериментов, в которых исследовалось действие на расплавленный металл магнитного поля при различных способах его приложения: постоянное, бегущее (БМП), вращающееся (ВМП) и переменное (ПМП). Выявлено три основных фактора, количественно определяющие это действие: пространственное распределение, напряжённость и частота. Пространственное распределение внешнего магнитного поля, которое в случае постоянного поля определяет распределение силы Лоренца в движущемся металле, а в случае изменяющегося во времени – распределение магнитных полей индукционных токов, сил Лоренца и джоулевых источников. Напряжённость магнитного поля характеризует силовой фактор действия и описывается числом Гартмана. Чем выше напряжённость (число Гартмана), тем выше стабилизирующее действие постоянного магнитного поля, поскольку магнитное поле не влияет на движение, сонаправленное с вектором магнитной индукции. Рост числа Гартмана для переменного магнитного поля приводит к росту скорости движения расплава, причём в широком диапазоне эта зависимость линейна. Частота магнитного поля характеризуется параметром диффузии переменного магнитного поля. Рост частоты приводит к вытеснению индукционных токов на поверхность проводника, следовательно, и источники джоулевой теплоты, и силы Лоренца действуют в этом слое.

Выполнен обзор моделей, описывающих тонкие плёнки на поверхности жидкости. Выделено три основных подхода: молекулярно-динамический, термодинамический И континуальный. К достоинствам молекулярнодинамического можно отнести огромное разнообразие эффектов, которые можно описать, следя за движением отдельных атомов или молекул, к недостаткам – огромные объёмы вычислений, связанные с адекватным количеством структурных единиц и пико- и фемтосекундным шагом интегрирования уравнений движения. Термодинамический подход хорошо зарекомендовал себя при описании плёнок поверхностно-активных веществ, основное ограничение его применения заключается в том, что скорости конвективного движения растворителя и поверхностной диффузии сурфактанта должны быть величинами одного порядка. В континуальном подходе плёнки рассматриваются как сплошная среда, движение которой определяется тензором напряжений в каждой её точке. В рамках этого подхода можно учесть всё многообразие действующих на плёнку факторов, таких как переменное магнитное поле, тепловое расширение и вязкое трение на поверхности.

Выполнен обзор моделей, описывающих радиационный теплообмен. Предложен оригинальный *метод эффективной теплопроводности* для моделирования излучения. При решении задачи о нахождении температурного поля в системе отливка-форма возникает необходимость учета радиационного механизма теплообмена между закристаллизовавшейся поверхностью отливки и литейной формой. Для применения высокоэффективных методов сквозного счёта в таких системах радиационный и диффузионный механизмы теплообмена в различных частях отливки и формы можно представить единственным процессом диффузии теплоты, а излучение учесть введением виртуальных слоёв с эффективным коэффициентом теплопроводности  $\lambda_{eff}$ , обеспечивающих скачок температуры, соответствующий участкам радиационного теплообмена. Расчёт-

ная схема представлена на рис. 1. Для квазистационарных процессов условием теплового баланса является равенство удельных тепловых потоков  $q_l$  (Вт/м) в каждом из материалов с теплопроводностями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и зазоре между ними

$$q_{l} = \frac{2\pi\lambda_{1}(T_{1} - T_{2})}{\ln(r_{2}/r_{1})} = \frac{2\pi r_{2}\sigma_{B}(T_{2}^{4} - T_{3}^{4})}{\frac{1}{m_{1}} + \frac{r_{2}}{r_{3}}\left(\frac{1}{m_{2}} - 1\right)} = \frac{2\pi\lambda_{2}(T_{3} - T_{4})}{\ln(r_{4}/r_{3})}.$$
(1)

При этом система уравнений (1) с учётом второго начала термодинамики, записанного в виде  $q_l \in [0, 2\pi(T_1 - T_4) \cdot \min\{\lambda_1/\ln(r_2/r_1), \lambda_2/\ln(r_4/r_3)\}]$  имеет единственное действительное решение для внутренних температур  $T_2$ ,  $T_3$  и удельного потока  $q_l$ . Пренебрегая радиационными тепловыми потоками вдоль зазора в силу малости его толщины, значение эффективной теплопроводности вдоль зазора  $\lambda_{eff \parallel} \equiv 0$ , а поперёк

$$\lambda_{eff\perp} = \frac{q_l^* \cdot \ln(r_4/r_1)}{2\pi(T_1 - T_4)},\tag{2}$$

где  $q_l^*$  – удельный тепловой поток, найденный из решения системы уравнений (1). Таким образом, замещение участка с радиационным механизмом переноса тепловой энергии на область с эффективной теплопроводностью позволяет применять разностные схемы сквозного счета. Численная реализация метода обеспечивает хорошее сходство результатов расчета с аналитическими решениями [19].

На основании обзоров различных аспектов изучаемой проблемы выбрана методика описания её основных частей: уравнения Максвелла для описания диффузии магнитного поля в проводник, закон Джоуля-Ленца для расчёта теплового действия индукционных токов, силы Лоренца и Архимеда, разгоняющие движение расплавленного металла, уравнение Навье-Стокса для описа-



**Рис. 1.** Профиль температурного поля и наложение сетки на область с зазором:

физическая температура;

- , 
   коэффициенты теплопроводности в ортогональных направлениях;
- - $\lambda$  теплопроводность вдоль зазора  $\lambda_{eff}$ .

ния конвекции, уравнение Фурье-Кирхгофа для переноса тепловой энергии, закон Стефана-Больцмана для описания теплоотвода с поверхностей расплава в вакууме, закон вязкого трения Ньютона для взаимодействия текущего расплава и плёнки, классическая гипотеза Дюамеля-Неймана и закон Гука для описание напряжения в плёнке. Все вышеперечисленные законы будут связаны в едином вычислительном программном комплексе, решающем указанные уравнения численными методами конечных разностей с применением компьютерного решения нелинейных уравнений и численного интегрирования.

#### ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПЕРЕМЕ-ШИВАНИЯ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ТИТАНА Мали алимичи социал издали

# Математическая модель

Сформулирована математическая модель реактора для восстановления титана (рис. 2 (а)), альтернативная существующей конструкции (рис. 2 (б)). В модели сделаны некоторые допущения. Задача рассматривается в осесимметричной постановке. В расчётную область  $\Omega_{melt}$  включён только расплав магния, который считается однородным; влиянием на течение твёрдых частиц титана и жидкого магния хлорида пренебрегается. Экзотермическая реакция на поверхности магния и влияние стальной реторты учтено в граничных условиях. Поверхность магния считается плоской. Вклад подъёмной силы в конвекцию металла записан в приближении Буссинеска, сила Лоренца (действие БМП) принимается в безындукционном приближении. Расплав представляет собой парамагнетик. Свойства материалов постоянны.

Обобщённое уравнение переноса импульса, записанное в терминах завихренности и функции тока, имеет вид

$$\Omega \in \Omega_{melt} : \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi r) + v \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \nabla^2 \varphi - \frac{\varphi}{r^2} + \operatorname{Gr} \frac{\partial T}{\partial r} + GF_9, \\ u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \nabla^2 \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - e - r\varphi, \quad \varphi = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z}, \end{cases}$$
(3)

а тепловой энергии –

$$\Omega \in \Omega_{melt}: \ \frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\Pr} \nabla^2 T + \frac{Q}{\Pr} J^2,$$
(4)

где  $\varphi$  – безразмерная завихренность,  $\psi$  – безразмерная функция тока, t – время, r и z – радиальная и аксиальная координаты, u и v – радиальная и аксиальная компоненты скорости, T – температура,  $\nabla^2$  – оператор Лапласа,  $\text{Gr} = g\beta\Theta\ell^3/v^2$  – число Грасгофа, g – ускорение свободного падения,  $\beta$  – коэффициент объёмного расширения,  $\Theta$  – масштаб температуры,  $\ell$  – характерный линейный размер,  $G = f_{ref}\ell/(\rho v^2)$  – параметр силового воздействия,  $\rho$  – плотность, v – кинематическая вязкость,  $f_{ref} = \bar{\alpha}\mu_0\mu J_L^2/2$  – характерное значение объёмной силы Лоренца,  $\bar{\alpha} = \pi/\bar{p}$ ,  $\bar{p}$  – полюсное деление (м),  $J_L$  – амплитуда линейной токовой нагрузки (А/м),  $F_9$  – ротор силы Лоренца, которая для БМП в приближении трёхслойной схемы «индуктор-реторта-расплав» имеет вид

$$\Omega \in \Omega_{melt}: \mathbf{f} = f_{ref} \left( c_r \mathbf{e}_r + c_z \mathbf{e}_z \right) \cdot \exp\left\{ -c_\alpha \left( R_{ind} - r \right) \right\}$$
(5)

коэффициенты  $c_r$ ,  $c_z$  и  $c_{\alpha}$  являются результатом осреднения и зависят от координат,  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_z$  – орты осей,  $R_{ind}$  – радиус индуктора,  $\Pr = \nu/a$  – число Прандтля, a – температуропроводность,  $Q = J_{ref}^2 \ell^2 / (\zeta \lambda \Theta)$  – параметр тепловыделения, J – плотность индукционных токов,  $\zeta$  – электропроводность,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

Уравнение (3) решается при наложении условия прилипания на боковой границе и дне реторты (значение вихря аппроксимируется формулами Тома), на оси и на свободной поверхности  $\phi = 0$ . Уравнение (4) решается со следующими граничными условиями

$$\Gamma_{top} :- \frac{\partial T}{\partial z} = \Pr \frac{L_{exo} - L_{eva}}{\pi} M, \quad \Gamma_{cool} :- \frac{\partial T}{\partial r} = \operatorname{Nu} \left( T - T_{ret} \right),$$

$$\Gamma_{heat} :- \frac{\partial T}{\partial r} = \Pr \frac{P}{2\pi Z_{heat}}, \quad \Gamma_{bottom} :- \frac{\partial T}{\partial z} = \Pr \frac{P}{\pi}, \quad \Gamma_{axis} :\frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$
(6)

где M – обобщённый расход TiCl<sub>4</sub> в единицах  $\rho \nu \ell$ ,  $L_{exo}$ ,  $L_{eva}$  – значения удельной теплоты экзотермической реакции TiCl<sub>4</sub> + 2Mg  $\rightarrow$  2MgCl<sub>2</sub> + Ti и испарения титана тетрахлорида в единицах теплосодержания  $c\Theta$  (Дж/кг), P – мощность в единицах  $\rho \nu \ell c\Theta$ , Nu =  $\alpha \ell / \lambda$  – число Нуссельта.



нагрев реторты тепловым излучением

🛕 нагрев и перемешивание расплава

**Рис. 2.** Расчётные схемы существующей (*a*) и альтернативной (*б*) конструкций реактора для восстановления титана.

Математическая модель реализована в виде программного комплекса «Вычислительное моделирование неравновесных процессов тепломассопереноса в реакторе для получения пористого титана при осуществлении внешних электромагнитных воздействий».

### Результаты моделирования

Две конструкции реактора для восстановления титана существующая (а) и альтернативная (б) смоделированы для параметров  $\ell = 0,775$  м; Z = 3,3;  $Z_{heat} = 2,31;$   $Z_{cool} = 0,996;$   $Gr = 2.10^{11};$   $G = 2,4.10^{13};$   $Q = 9,15.10^{-2};$  Pr = 0,015; $L_{exo} = 9,6$ ;  $L_{exo} = 2,8$ ; M = 137; Nu = 0,04; P = 4900;  $\Theta = 50$  K, результаты представлены на рис. 3. Видно, что двухконтурное течение с малоинтенсивным верхним вихрем (*ψ* рис. 2*a*), характерное для существующей схемы, можно превратить в одноконтурное с помощью БМП (у рис 36). При этом достигаются два положительных технологических эффекта. 1) поверхность магния непрерывно обновляется и очищается от продуктов реакции. Таким образом, исключается ситуация, при которой поверхность магния покрыта магния хлоридом, и реакция восстановления титана прекращается. 2) «избыточное» тепло, выделяющееся на поверхности (поле T, рис. 3a), переносится вглубь расплава течением (поле Т, рис. 36), навязанным силой Лоренца, и поддерживает его температуру. Управлять интенсивностью одновихревого течения можно частотой БМП и изменением его направления, которое приведёт к реверсу течения. Применение БМП в технологии производства титана позволит сэкономить значительное количество энергии и сократить выбросы в атмосферу.



**Рис. 3.** Структура течений и распределение температуры в существующей (*a*) и альтернативной (б) конструкциях реактора для восстановления титана

Оценки показывают, что можно экономить от 10% энергии за счёт использования энергии реакции для нагрева магния, до 40% за счёт уменьшения теплоотвода из верхней зоны реторты, которая не будет перегреваться при конвективном отводе тепла реакции в объём; т.е. 2,42...9,5 ГДж в сутки с одного реактора.

# ГЛАВА 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВИ-ЖЕНИЯ МЕТАЛЛА В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И ТОНКОЙ ПЛЁНКИ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

Разработана математическая модель диффузии переменного магнитного поля (ПМП) в металлический расплав и движения расплава в ПМП. Такое движение реализуется при индукционной плавке жаропрочных никелевых сплавов в технологии точного литья деталей газотурбинных двигателей. В модели сделан ряд допущений. Задача о проникновении магнитного поля и движении рас-

плава рассматривается в осесимметричной постановке, расчётная схема представлена на рис. 4. Индуктор аппроксимирован системой кольцевых токов. Рассматриваются установившиеся процессы. Этап плавления не рассматривается, описываемые процессы относятся к расплавленному металлу. Поскольку для рассматриваемых процессов магнитное Рейнольдса число  $\operatorname{Re}_{m} = \mu \mu_{0} \zeta R u \ll 1$  течение расплава не оказывает влияние на распределение магнитного поля индукционных токов. Поверхность расплава плоская и недеформируемая. Это приближение справедливо, когда ПМП недостаточно сильное для того, чтобы сила Лоренца заметно искривила мениск, кроме того, металлы имеют большое поверхностное



**Рис. 4.** Схема расчётной области с указанием граничных условий

натяжение. В расчётную область включены ограниченный тиглем металлический расплав и пространство вокруг металла, необходимое для корректного учёта затухания на бесконечности магнитного поля токов, индуцированных в металле. Влияние тигля и вакуумной камеры учитывается в граничных условиях. Свойства материалов постоянны, расплав – парамагнетик µ ≈ 1.

Разработан метод моделирования диффузии переменного магнитного поля в проводник, включающий магнитостатическую и электродинамическую подзадачи, а также расчёт осредненных силы Лоренца и мощности джоулевых источников.

#### Магнитостатическая подзадача

Индуктор создаёт гармонически изменяющееся магнитное поле

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) \cos \omega t \,, \tag{7}$$

где **r** – радиус вектор,  $\omega$  – циклическая частота ПМП индуктора, t – время. Амплитуда ПМП рассчитывается по закону Био-Савара-Лапласа

$$\mathbf{H}_{0}(\mathbf{r}) = \left(\frac{IR_{coil}}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} \int_{0}^{2\pi} \frac{(z-z_{k})\cos \theta}{\left(R_{coil}^{2} + r^{2} + (z-z_{k})^{2} - 2R_{coil}r\cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} d\theta \right) \mathbf{e}_{r} + \left(\frac{IR_{coil}}{4\pi} \sum_{k=1}^{N} \int_{0}^{2\pi} \frac{R_{coil} - r\cos \theta}{\left(R_{coil}^{2} + r^{2} + (z-z_{k})^{2} - 2R_{coil}r\cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} d\theta \right) \mathbf{e}_{z},$$
(8)

где I – сила тока индуктора,  $R_{coil}$  – радиус витка индуктора, N – число витков,  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_z$  – орты вдоль осей r и z соответственно, k и  $z_k$  – номер и z-координата кольца индуктора,  $\vartheta$  – азимутальный угол.

#### Электродинамическая подзадача

Уравнения Максвелла:  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  и

закона Ома  $\mathbf{J} = \zeta \mathbf{E}$  в приближении  $\operatorname{Re}_m \ll 1$  могут быть преобразованы в уравнение диффузии ПМП

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{v}_m \nabla^2 \mathbf{H},\tag{9}$$

где  $v_m$  – магнитная вязкость. Представив магнитное поле суперпозицией внешнего поля **H**<sub>0</sub> и поля индукционных токов **H**<sub>eddy</sub>

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{eddy},\tag{10}$$

и подставив (7) и (10) в (9) приходим к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{eddy}}{\partial t} = \mathbf{v}_m \nabla^2 \mathbf{H}_{eddy} + \mathbf{H}_0 \sin \omega t \,. \tag{11}$$

Разложив поле индукционных токов на гармоники

$$\mathbf{H}_{eddv} = \mathbf{H}_{1} \sin \omega t - \mathbf{H}_{2} \cos \omega t \,, \tag{12}$$

получим систему уравнений

$$-\frac{\mathbf{v}_m}{\omega}\nabla^2 \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_2, \quad -\frac{\mathbf{v}_m}{\omega}\nabla^2 \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1, \quad (13)$$

которая при введении масштабов длины  $\ell$  (внутренний радиус тигля) и напряжённости ПМП  $H_{ref} = NI / (4\pi\ell)$  приобретает окончательный безразмерный вид

$$\begin{cases} -\nabla^2 \mathbf{H}_1 = \varpi \left( \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_2 \right), \\ -\nabla^2 \mathbf{H}_2 = \varpi \mathbf{H}_1, \end{cases} \qquad \Gamma_{axis} \colon H_r = \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0; \ \Gamma_{\infty} \colon \mathbf{H} = 0, \tag{14}$$

где <br/>
т – параметр диффузии ПМП:

$$\boldsymbol{\varpi} = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}_0 \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\ell}^2. \tag{15}$$

Граничные условия для системы уравнений (14) учитывают отсутствие радиальной компоненты магнитного поля и плотности тока на оси симметрии, а также затухание магнитного поля на бесконечности. Значение параметра диффузии ПМП  $\varpi$  в системе уравнений (14) определяет распределение амплитуд гармоник магнитных полей индукционных токов **H**<sub>1</sub> и **H**<sub>2</sub> при заданном распределении внешнего магнитного поля индуктора **H**<sub>0</sub>.

### Осреднённые сила Лоренца и источники джоулева тепла

Гармоническое представление магнитных полей  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  (12) и плотности тока  $\mathbf{J}_{eddy} = \nabla \times \mathbf{H}_{eddy}$  при  $\omega \gg 1$  позволяет применить *метод многих масштабов* к объёмной силе Лоренца  $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mu \mu_0 \mathbf{H}$  и плотности источников джоулевой теплоты  $q_V = J^2 / (\zeta \rho c)$  и выделить *осреднённые не зависящие от времени* слагаемые  $\mathbf{f}$  и  $\overline{q}_V$ 

$$\overline{\mathbf{f}} = \frac{\mu\mu_0}{2} \left( \left( \mathbf{H}_1 \cdot \nabla \right) \mathbf{H}_1 + \left( \mathbf{H}_2 \cdot \nabla \right) \mathbf{H}_2 - \frac{1}{2} \nabla \left( \mathbf{H}_1^2 + \mathbf{H}_2^2 \right) \right),$$

$$\overline{q}_V = \frac{1}{2\zeta\rho c} \left( \left( \nabla \times \mathbf{H}_1 \right)^2 + \left( \nabla \times \mathbf{H}_2 \right)^2 \right),$$
(16)

около которых колеблются с много меньшими амплитудами зависящие от времени слагаемые. В формулах (16) ∇ – оператор набла.

#### Подзадача тепломассопереноса

При  $\text{Re}_m \ll 1$  движение расплава не влияет на распределение магнитного поля индукционных токов, а при  $\omega \gg 1$  можно выделить осреднённые объёмные силу Лоренца и источники джоулева тепла. Таким образом, уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска и переноса тепла имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} (1 - \beta (T - T_L)) + \frac{1}{\rho} \overline{\mathbf{f}},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = a \nabla^2 T + \overline{q}_V,$$
(17)

где p – давление, **g** – ускорение свободного падения,  $\beta$  – коэффициент объёмного расширения расплава,  $T_L$  – температура ликвидус сплава,  $\overline{\mathbf{f}}$  и  $\overline{q}_V$  определены соотношениями (16).

Никелевый сплав имеет следующие свойства  $a = 19,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , c = 655 Дж/(кг·K), степень черноты m = 0,15,  $\beta = 38,5 \cdot 10^{-6} 1/\text{K}$ ,  $\zeta = 0,85 \cdot 10^6 \text{ См/м}$ ,  $\lambda = 12 \text{ Bt/(м·K)}$ ,  $\nu = 0,528 \cdot 10^{-6} \text{ M}^2/\text{c}$ ,  $\rho = 7900 \text{ кг/м}^3$ ,  $T_L = 1773 \text{ K}$ . Характерные масштабы определены следующим образом: для длины  $\ell = R_{melt}$  (0,1 м), времени  $t_{ref} = \ell^2 / \nu$ , скорости  $u_{ref} = \nu / \ell$ , температуры  $\Theta = q_{ref} \ell / \lambda$ , плотности потока энергии  $q_{ref} = C_{ref} \left(T_L^4 - T_{cham}^4\right)$ . Здесь  $C_{ref} = 3,372 \cdot 10^{-10} \text{ Bt} / (\text{м}^2 \cdot \text{K}^4)$  – коэффициент излучения, вычисленный по определенной методике,  $T_{cham} = 323 \text{ K}$  – температура камеры. Уравнения движения (17) в терминах вихря и функции тока имеют вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r\varphi)}{\partial r} - u\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} - v\varphi \right) + \operatorname{Gr} \frac{\partial T}{\partial r} + \operatorname{Ha}_{m}^{2} F_{9},$$

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial^{2} \psi}{\partial r^{2}} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^{2} \psi}{\partial z^{2}} = r\varphi,$$

$$a\beta a \quad \ell^{4}$$
(18)

где Gr =  $\frac{g\beta q_{ref}\ell}{\lambda v^2}$  – число Грасгофа, Ha<sub>m</sub> – модифицированное число Гартмана:

$$Ha_m = H_{ref} \ell \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\rho \nu^2}}, \qquad (19)$$

показывающее силовое действие ПМП,  $F_9$  – азимутальная проекция ротора силы Лоренца (градиентное слагаемое (16) обратилось в ноль после применения операции ротор)

$$F_{\vartheta} = \left[\nabla \times \mathbf{f}\right]_{\vartheta}, \quad \nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times \frac{1}{2} \left( \left(\mathbf{H}_{1} \cdot \nabla\right) \mathbf{H}_{1} + \left(\mathbf{H}_{2} \cdot \nabla\right) \mathbf{H}_{2} \right). \tag{20}$$

Система уравнений (18) решается с краевыми условиями, которые учитывают непроницаемость всех границ ( $\Gamma_{\forall}$ ), отсутствие завихренности на оси симметрии и свободной поверхности и условие полного прилипания на твёрдых стенках (вихрь аппроксимируется формулами Тома):

$$\Gamma_{\forall}: \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} = 0; \quad \left(\Gamma_{axis}, \Gamma_{top}\right): \varphi = 0; \quad \left(\Gamma_{wall}, \Gamma_{bottom}\right): \varphi_{\Gamma} = -\frac{2}{r} \frac{\Psi_{\Gamma-1}}{h}, \quad (21)$$

где индексы Г и Г – 1 обозначают граничный и приграничный узлы сетки.

Уравнение переноса тепловой энергии принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\Pr} \frac{\partial T}{\partial r} - urT \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Pr} \frac{\partial T}{\partial z} - vT \right) + \frac{Q}{\Pr} \cdot J^2,$$
(22)

где  $Q = \frac{H_{ref}^2}{\zeta \ell q_{ref}}$  – тепловой параметр,  $J^2$  определяет распределение источников

джоулевого тепла

$$J^{2} = \frac{1}{2} \left( \left( \nabla \times \mathbf{H}_{1} \right)^{2} + \left( \nabla \times \mathbf{H}_{2} \right)^{2} \right).$$
(23)

Граничные условия для уравнения (22) учитывают радиационное охлаждение на свободной поверхности расплава и отсутствие потоков тепла на оси симметрии и через теплоизолированный тигель

$$\Gamma_{top}: -\frac{\partial T}{\partial z} = \operatorname{Bi}_{rad} \cdot \left(T^4 - T^4_{cham}\right); \quad (\Gamma_{axis}, \Gamma_{wall}, \Gamma_{bottom}): \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0, \tag{24}$$

$$C_{rad} q_{rad}^3 \ell^4$$

где Bi<sub>rad</sub> =  $\frac{C_{ref}q_{ref}^{3}\ell^{4}}{\lambda^{3}}$  – радиационное число Био.

# Подзадача деформации поверхностной плёнки

Задача решается в осесимметричной постановке. Анализируются стационарные состояния. В расчётную область включены объём расплава и плёнка на его поверхности (схема расчётной области приведена на рис. 5). Поверхность расплава предполагается плоской и недеформируемой. Плёнка представляет собой диэлектрик и парамагнетик. Плёнка моделируется диском равной толщины радиусом *R* в центре поверхности расплава либо кольцом с внутренним ра-

диусом R, прикреплённым к стенке тигля внешним краем. Движение плёнки по поверхности не рассматривается. Оксидная пленка - непрерывная однородная упругая среда. Сдвиговые деформации в ней отсутствуют в силу малости толщины плёнки. Локальная температура Z плёнки совпадает с таковой расплава, находящегося под плёнкой. Анализ литературных данных и проведённых оценок показал, что упругие свойства различных плёнок описываются эластичностью е (силой, необходимой для растяжения плёнки на единицу длины, которая лежит в



**Рис. 5.** Схема расчётной области с указанием граничных условий

пределах  $29 \le e \le 230$  мH/м). Разрушение плёнки наступает при относительной деформации растяжения  $\varepsilon_r^{rupt} = 0,015...0,025$ .

Дополнительно к граничным условиям (21) и (24) накладывается условие полного прилипания расплава на плёнке, а также учитывается разная степень черноты расплава и плёнки. На свободной поверхности расплава учитывается конвекция Марангони

$$\Gamma_{film}: \mathbf{u}_{\Gamma} = 0; \quad \Gamma_{melt}: \phi_{\Gamma} = \mathrm{Ma} \frac{\partial T_{\Gamma}}{\partial r}; \quad (\Gamma_{film}, \Gamma_{melt}): -\frac{\partial T_{\Gamma}}{\partial z} = m_{rel} \mathrm{Bi}_{rad} \left( T^{4} - T_{cham}^{4} \right), \quad (25)$$

где Ма =  $\Theta b\ell / (\rho v^2)$  – число Марангони, b – температурный коэффициент поверхностного натяжения H/(м·K),  $m_{rel} = m_{local} / m_{melt}$  – отношение локальной степени черноты к таковой расплава.

В приближении сплошной среды существует три механизма деформации плёнки: действие ПМП (не вызывает радиальных деформаций), температурное расширение и действие вязких сил со стороны движущегося расплава. Уравнение баланса сил в плёнке  $\frac{\partial (r \cdot \sigma_r)}{\partial r} - \sigma_9 + r \cdot f_V = 0$  с учётом определения деформаций  $\varepsilon_r = \partial \xi / \partial r$  и  $\varepsilon_9 = \xi / r$ , напряжений по классической теории Дюамеля-Неймана  $\sigma_r - \gamma \sigma_9 = Y(\varepsilon_r - \kappa \Delta T), \sigma_9 - \gamma \sigma_r = Y(\varepsilon_9 - \kappa \Delta T)$ , силы, действующей на единицу поверхности плёнки  $\Gamma_{film}$ :  $f_s = -\rho v (\partial u / \partial z)_{\Gamma_{film}}$  и её связи с объёмной силой  $f_V = f_s / d$ , при введении эластичности e = Yd, принимает вид

$$\Omega_{film}: \quad r^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \xi}{\partial r} - \xi = r^2 \Biggl( (1+\gamma) \cdot \kappa \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1-\gamma^2}{e} \cdot \rho v \Biggl( \frac{\partial u}{\partial z} \Biggr)_{\Gamma_{film}} \Biggr), \tag{26}$$

где  $\sigma_r$  и  $\sigma_9$  – нормальные механические напряжения (Па),  $f_V$  – объемная радиальная сила (Н/м<sup>3</sup>),  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_9$  – радиальная и азимутальная нормальные деформации, к – коэффициент линейного температурного расширения плёнки (1/К),  $\Delta T$ – перепад температур (К), *Y* – модуль Юнга (Па),  $\gamma$  – коэффициент Пуассона,  $\xi$ – смещение (м). Граничными условиями для уравнения (26) будут отсутствие смещений в центре ( $\Gamma_0$ ) для дискообразной плёнки или на закреплённом внешнем крае ( $\Gamma_1$ ) для кольцеобразной, а также отсутствие радиального напряжения на свободном крае ( $\Gamma_R$ ) в равновесии:

$$\Gamma_0$$
 либо  $\Gamma_1: \xi_{\Gamma} = 0; \quad \Gamma_R: (\sigma_r)_{\Gamma} = 0, \text{ т.e. } \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)_{\Gamma} + \gamma \frac{\xi_{\Gamma}}{R} = (1+\gamma) \kappa \Delta T.$  (27)

Используя масштабы, введенные в главе 3, уравнение (26) и граничные условия (27) приобретают вид

$$\Omega_{film}: r^{2} \frac{\partial^{2} \xi}{\partial r^{2}} + r \frac{\partial \xi}{\partial r} - \xi = r^{2} \left( K \frac{\partial T}{\partial r} + \operatorname{Ve} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\Gamma_{film}} \right),$$

$$\Gamma_{0} \ \pi u \delta \sigma \ \Gamma_{1}: \xi_{\Gamma} = 0, \ \Gamma_{R}: \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)_{\Gamma} + \gamma \frac{\xi_{\Gamma}}{R} = K \Delta T,$$

$$1 \qquad 2 \qquad 2$$

$$\Gamma_{0} \ \mu = 0, \ \Gamma_{R}: \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)_{\Gamma} + \gamma \frac{\xi_{\Gamma}}{R} = K \Delta T,$$

$$\Gamma_{R}: \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)_{\Gamma} + \gamma \frac{\xi_{\Gamma}}{R} = K \Delta T,$$

где  $K = (1+\gamma)\kappa\Theta$  – параметр температурного расширения,  $Ve = \frac{1-\gamma^2}{e} \cdot \frac{\rho\nu^2}{\ell}$  –

вязкоэластичный параметр.

По смещениям рассчитываются деформации и исходный размер плёнки  $R_0$  и интегральная деформация  $\Delta R$ 

$$R_0 = R - \int_{\Omega_{film}} \varepsilon_r \, dr, \quad \Delta R = R - R_0.$$
<sup>(29)</sup>

## Численная реализация

Выполнена в виде авторской программы на языке программирования FORTRAN-95. На заданную расчётную область  $\Omega_{melt} + \Omega_{vac}$  (см. рис. 3) накладывается квадратная сетка с шагом h=1/n, где п – число узлов сетки. Магнитостатическая подзадача (расчёт H<sub>0</sub>) для области  $\Omega_{melt}$  решается при заданных геометрических параметрах расплава и индуктора. В узлах стеки уравнение (8) интегрируется методом трапеций, итерационный процесс дробления шага и интегрирования продолжается по достижению заданной точности  $|1-\mathbf{H}_0^{(k)}/\mathbf{H}_0^{(k-1)}| \leq \Xi$ , здесь k – номер итерации,  $\Xi = 10^{-4}$  – точность расчёта.

Электродинамическая подзадача (расчёт H<sub>1</sub> H<sub>2</sub>, F<sub>9</sub> и  $J^2$ ) решается в области  $\Omega_{\text{melt}} + \Omega_{\text{vac}}$  методом конечных разностей. Уравнения системы (14) дополнены слагаемым  $\partial \mathbf{H}_{1,2} / \partial \tau$ , где  $\tau$  – фиктивное время, и решается методом установления до выполнения условия  $\partial \mathbf{H}_{1,2} / \partial \tau \rightarrow 0$ , поля H<sub>1,2</sub> на каждой итерации находятся методом переменных направлений. Конечно-разностные аналоги уравнений (14) имеют второй порядок точности по координате и первый по времени, они сводятся к системам линейных уравнений с трёхдиагональными матрицами коэффициентов и решаются методом скалярной прогонки. Точность завершения расчёта  $H_1$  и  $H_2 - \Xi = 10^{-4}$ .  $F_9$  и  $J^2$  рассчитываются по формулам (20) и (23) второго порядка точности аппроксимации.

Подзадача тепломассопереноса решается с известными и постоянными F<sub>9</sub> и  $J^2$  на разнесённой сетке (узлы скорости смещены относительно узлов температуры). Численные методы, реализующие решение задачи тепломассопереноса (18) – (24) те же, что и для магнитного поля: метод установления, метод переменных направлений, метод скалярной прогонки. Уравнение Пуассона в (18) решается методом последовательной верхней релаксации с точностью  $\Xi = 10^{-4}$ . Граничное условие для температуры (24) на  $\Gamma_{\rm top}$  сведено к условию Дирихле, при этом температура на границе  $T_{\Gamma}$  является действительным корнем нелинейного уравнения –  $(T_{\Gamma} - T_{\Gamma-1})/h = {\rm Bi}_{rad} (T_{\Gamma}^4 - T_{cham}^4)$  на интервале [ $T_{\rm cham}$ ,  $T_{\Gamma-1}$ ], которое решается методом касательных.

Решение подзадачи *деформации* (28) происходит после решения *магнитостатической* (8), электродинамической (14) подзадач и расчета *тепломассопереноса* с помощью (18), (22) с граничными условиями (21), (24), (25). Блоксхема алгоритма приведена на рис. 6. Расчёт деформаций происходит в неподвижной плёнке, находящейся в равновесии с движущимся расплавом. Край которой находится в узле сетки, как это показано на рис. 7.

Настоящая математическая модель реализована в виде программы для ЭВМ «Вычислительное моделирование движения расплава в переменном магнитном поле и его взаимодействие с поверхностной оксидной плёнкой».

#### Верификация модели.

Вычислительный алгоритм протестирован на задачах, имеющих аналитическое решение. Для установления корректности моделирования турбулентных течений без использования k-ɛ, k-ю моделей турбулентности и LES, RANS подходов сравниваются результаты моделирования и натурного эксперимента, проведённого в лаборатории Физической гидродинамики Института механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь.

Проведено сравнение расчётов с опубликованными расчётными и экспериментальными данными по конвекции в ПМП. На рис. 8. приведён пример сравнения результатов расчёта структуры течений в сплаве GaInSn, полученных учёными Лаборатории магнитной гидродинамики Гельмгольц центра Дрезден-Россендорф и автором диссертации. Видно, что расчётные поля скоростей хорошо согласуются. Сходимость решения проверена на сгущающихся сетках. Результаты верификации модели опубликованы в работах [1, 7, 9, 13].

Оценка точности метода показала, что ошибка определения  $\xi$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_{\vartheta}$  не превышают 0,1 % абсолютной величины.



**Рис. 6.** Блок-схема алгоритма решения сопряжённой задачи тепломассопереноса и деформации плёнки на поверхности расплава в ПМП.



**Рис. 7.** Схема совмещения сеток подзадач тепломассопереноса и деформации с указанием границ. Индексом Г обозначены граничные узлы, Г-1 – приграничные.



Рис. 8. Сравнение структур течения, рассчитанных Крамером с соавторами в работе [Cramer A., Galindo V., Zennaro M. Frequency dependence of an alternating magnetic field driven flow // Magnetohydrodynamics. 2015. No. 1 (51), pp. 133-147.] и автором диссертации, для различных значений ω.

# ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВИ-ЖЕНИЯ РАСПЛАВА В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И ДЕФОР-МАЦИИ ПЛЁНКИ

# Варьирование частоты

Моделирование тепломассопереноса проведено для следующей геометрии индукционной печи: внутренний радиус тигля  $\ell = 0,1$  м, радиус витка индуктора  $R_{coil} = 150$ , вертикальный размер индуктора  $Z_{coil} = 0,35$  м, высота столба расплава  $Z_{melt} = 0,2$  м, вертикальное расстояние «дно тигля – нижний виток индуктора»  $\Delta Z = 0,075$  м, расстояние «поверхность расплава – камера»  $Z_{cham} = 0,5$  м, число витков индуктора N = 10, ток индуктора I = 250...350 А, частота тока индуктора f = 1...2 кГц. Безразмерные параметры процесса:  $\text{Bi}_{rad} = 4,81 \cdot 10^{-8}$ ,  $\text{Ha}_m = 4,58 \cdot 10^3$ ,  $\text{Gr} = 3,26 \cdot 10^7$ , Pr = 0,0269, Q = 0,0177,  $\varpi = 1...150$ .

На рис. 9 показаны компоненты  $\mathbf{H}_0$  и  $\mathbf{H}_1$ ;  $\mathbf{H}_1$  рассчитана для значений  $\boldsymbol{\varpi} = 10$  и 60. Из сравнения магнитуд  $H_{0r}$  и  $H_{0z}$  видно, что осевая составляющая значительно больше радиальной и максимальна около плоскости симметрии ин-

дуктора ближе к боковой стенке металла в центральной части индуктора, тогда как радиальная часть равна нулю в плоскости симметрии индуктора и возрастает к торцам и боковой стенке металла. Видно, что с ростом  $\varpi$  поля индукционных токов вытесняются из объёма к поверхности проводника и постепенно меняют структуру, следует отметить, что при Re<sub>m</sub> «1 можно пренебречь вкладом в магнитное поле электрических токов, связанных с течением проводящей жидкости. Следовательно, поле силы Лоренца (20) и объёмные источники теплоты (23) также остаются постоянными в рассматриваемом процессе и не зависят от конвекции металла.



**Рис. 9.** Безразмерные распределения компонент внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0(a)$  и гармоники  $\mathbf{H}_1$  поля индукционных токов, рассчитанные при различных параметрах  $\boldsymbol{\varpi} = 10$  (б) и  $\boldsymbol{\varpi} = 10$  (в). Серая область на (б) и (в) – тигель с расплавом, белая – вакуум.

На рис. 10 показаны безразмерные распределения осреднённых объёмной мощности источников джоулева тепла  $QJ^2$  / Pr (*a*) и силового слагаемого Ha<sub>m</sub><sup>2</sup>F<sub>9</sub> (б-г). С ростом  $\varpi$  источники теплоты концентрируются около стенки,



**Рис. 10.** Безразмерные распределения мощности источников джоулева тепла  $QJ^2$  / Pr силового слагаемого Ha<sup>2</sup><sub>m</sub>F<sub>9</sub> при различных значениях  $\varpi$ .

занимая меньший объём, и их мощность возрастает. В результате действия указанных механизмов зависимость общей мощности от частоты имеет максимум в районе  $10 \le \varpi \le 20$ . Источники теплоты, сконцентрированные у боковой стенки металла, приводят к дополнительному нагреву этой области и возникновению подъёмной силы. При вытеснении индукционных токов к поверхности проводника с ростом  $\varpi$  распределение силового фактора  $\operatorname{Ha}_m^2 F_9$  претерпевает структурные изменения. При *«малых»* то ротор силы Лоренца *F*<sub>9</sub> распределяется с разными знаками в две области (рис. 6б), которые обеспечивают одинаковую закрутку расплава в каждой из них (при  $F_{\vartheta} > 0$  имеет место течение против часовой стрелки); при «больши́х» т имеются четыре обширные области разных знаков, «прижатые» к торцам и боковым стенкам, (рис. 6г) они обозначены изолиниями  $\pm 2.10^8$ . Существует также промежуточный диапазон  $\varpi$ , в котором реализуется также четыре области, организованные иначе, чем при «больших»  $\varpi$  (рис. 6в). Почти три четверти верхней половины занимает  $F_{\vartheta} > 0$ , а  $F_{\vartheta} < 0$  локализован в правом верхнем углу, распределение в нижней половине зеркально симметрично.

На рис. 11 показаны смоделированные поля температуры и скорости, соответствующие  $\varpi = 10, 30$  и 60, видно, что поля скорости и температуры коррелируют с полями  $\operatorname{Ha}_m^2 F_9$  и  $QJ^2 / \operatorname{Pr}$ . Симметричное расположение «индукторметалл» даёт симметричные магнитные поля  $\operatorname{H}_0$ ,  $\operatorname{H}_1$  и  $\operatorname{H}_2$ , которые, в свою очередь, дают симметричные распределения  $\operatorname{Ha}_m^2 F_9$  и  $QJ^2 / \operatorname{Pr}$ , эта симметрия просматривается в полях температуры и скорости. Поля скорости в объёме металла в основном определяются распределением силы Лоренца  $\operatorname{Ha}_m^2 F_9$  и в рассматриваемом случае практически симметричны относительно горизонтальной плоскости; слабо различимая асимметрия связана, во-первых, с различными условиями на торцах области: свободное течение на верхнем и полное прилипание на нижнем, во-вторых, с действием источников теплоты, которые делают подъёмные движения около боковой стенки более выгодными за счёт подъёмной силы, действующей на более нагретый металл.

С ростом  $\varpi$  распределение  $F_9$  изменяет свою структуру, синхронно меняется и структура течения. При значениях частотного параметра  $\varpi \leq \varpi_{low} \approx 18$  распределение  $\operatorname{Ha}_m^2 F_9$  имеет структуру с двумя областями (рис. 66), в этом диапазоне  $\varpi$  реализуются *двухтороидальные* течения (рис. 7*a*). При  $\varpi > \varpi_{high} \approx 52$  структура ротора силы Лоренца (рис. 6*c*) приводит к *четырёхвихревому* течению (рис. 7*b*). В интервале значений  $\varpi_{low} < \varpi \leq \varpi_{high}$  течение также можно считать четырёхвихревым (рис. 76), но структура его иная. Вихревое течение металла против часовой стрелки в верхней половине, вызванное  $F_9 > 0$ , выходит на поверхность и вызывает на ней направленное к центру течение, которое может способствовать накоплению и устойчивости оксидных плёнок.

Зависимости от  $\varpi$  максимальной скорости течения в единицах скорости Альфвена  $u_A = B_{ref} \cdot (\mu \mu_0 \rho)^{-1/2}$  и относительной мощности тепловыделения показаны на рис. 7г и 7д. Температурные поля на рис. 7 асимметричны в силу радиационного охлаждения поверхности металла, конвекции и действия тепловых источников. Однако, абсолютные перепады температуры не превышают 1 К в режиме с  $\varpi = 10$  и ещё меньше для  $\varpi = 30$  и 60.



Рис. 11. Поля температуры и скорости (a-b), относительная мощность тепловыделения (*г*) и максимальные скорости течения (*д*) при различных значениях  $\varpi$ .

## Сравнение вкладов теплового и лоренцева механизмов

Структура течения определяется двумя физическими механизмами – подъёмной силой, вызываемой неоднородностью температурного поля  $Gr(\partial T / \partial r)$ , и объёмной силой Лоренца  $Ha_m^2 F_9$ . Относительный вклад этих механизмов в результирующее движение может быть записан как отношение полных мощностей сил Лоренца (числитель) и плавучести (знаменатель)

$$\Phi = \frac{\operatorname{Ha}_{m}^{2}}{2} \int_{V} \left( F_{\vartheta} \cdot \varphi \right) dV / \operatorname{Gr}_{V} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \varphi \right) dV.$$
(30)

Изменение  $\Phi$  с ростом  $\text{Ha}_m$  коррелирует с изменением скорости: когда  $\Phi > -1$ , суммарная мощность силы Лоренца становится сравнимой с таковой для подъёмной силы, и магнитное поле начинает навязывать структуру течения, об этом говорит линейный участок на графике скорости (рис. 12*a*). При  $\Phi < -1$  на течение больше влияет тепловая конвекция. Обобщение зависимостей рис. 8*a* для разных  $\varpi$  даёт карту устойчивых режимов (рис. 8*b*).



**Рис. 12.** Зависимости отношения мощностей  $\Phi$  и модуля максимальной скорости  $|\mathbf{u}_{max}|$  от модифицированного числа Гартмана На<sub>*m*</sub>, рассчитанные при различном частотном параметре  $\varpi = 7$  (*a*), карта устойчивых режимов (*б*): *I* – течения определяются тепловой конвекцией, *II* – двухвихревое течение (рис. 7*a*), *III* – четырёхвихревое (рис. 7*b*), *IV-VI* – четырёхвихревое (рис. 7*b*).

Для режимов с преобладающим лоренцевым механизмом формирования течения характерно быстрое установление структуры течения, отвечающее пространственному распределению силового слагаемого  $\text{Ha}_m^2 F_9$ .

## Влияние свойств расплава

Исследовано влияние на течение числа Прандтля в диапазоне 0...0,1. Зависимости максимальной скорости от Ha<sub>m</sub>, рассчитанные при  $\varpi = 7$  для различных Pr, показаны на рис. 13*a*. Видно, что до некоторого Ha<sub>m</sub> Pr влияет на скорость (область *I*), с ростом Ha<sub>m</sub> эта зависимость пропадает, что объясняется преобладанием вынужденной конвекции над тепловой при формировании структуры течения. Карта зависимости чувствительности течения к Pr на плоскости параметров  $\varpi$ -Ha<sub>m</sub> показана на рис. 136.

# Влияние геометрии «индуктор-расплав»

Показано, что высота столба жидкого металла Z и вертикальное смещение тигля в индукторе  $\Delta Z$  определяет структуру ПМП, распределение силового  $\operatorname{Ha}_m^2 F_9$  и теплового  $QJ^2$  / Pr слагаемых, а также структуру течений в расплаве. Определено, что в зависимости от высоты Z реализуются различные структуры течения; профили скорости на поверхности приведены на рис. 14. Рассматривая плёнку как систему маленьких несвязанных кусочков, переносимых течением расплава, можно утверждать, что кусочки плёнки будут скапливаться на поверхности около оси симметрии, если в центральной области скорости направлены к центру (u < 0). Такую область можно назвать зоной скопления плёнок (ЗСП). Выявлено, что ЗСП не возникает, если горизонтальная плоскость симметрии индуктора расположена ниже плоскости симметрии расплава, в противном случае ЗСП увеличивается с ростом  $\Delta Z$ .



**Рис. 13.** Зависимости максимальной скорости в расплаве  $|\mathbf{u}_{max}|$  от модифицированного числа Гартмана  $\operatorname{Ha}_m$  при  $\varpi = 7$  и различных значениях  $\operatorname{Pr}(a)$  и карта, показывающая области чувствительности течений к  $\operatorname{Pr}$ . В области *I* течения определяются тепловой конвекцией,  $\operatorname{Pr}$  влияет на течение; в области *II* – силой Лоренца, течения не зависят от числа Прандтля.

Влияние частоты ПМП на размер ЗСП при различных  $\Delta Z$  показано на рис. 15. Ниже некоторой частоты  $\varpi \leq \varpi_{low} \approx 16$  (маркер «*a*» на рис. 15) сила Лоренца разгоняет двухтороидальное течение (рис. 11*a*), при котором скорости на поверхности направлены от центра, поэтому ЗСП отсутствует.

В диапазоне  $\varpi$ , где существует ЗСП (маркер «б»), потоки определяются как лоренцевым, так и тепловым механизмами; здесь реализуются четыре вихря (рис. 11б), один из которых выходит на поверхность и создаёт на ней направленное к центру движение расплава. Когда  $\varpi \ge \varpi_{high} \approx 51$  (маркер «в») течение определяется лоренцевым механизмом и становится четырёхвихревым без ЗСП (рис. 11в). Течения в интервалах  $\varpi < \varpi_{low}$  и  $\varpi > \varpi_{high}$  способствуют очистке поверхности от оксидных плёнок; при  $\varpi_{low} < \varpi < \varpi_{high}$ , где на лоренцев механизм формирования течения накладывается тепловой, создаются ЗСП. Таким образом, перестраивая структуру течения во время плавки, можно устранить ЗСП.

#### Управление течениями для очистки поверхности

При  $\varpi_{low} < \varpi < \varpi_{high}$  течение на части поверхности расплава направлено к центру и создаются ЗСП. Предложено устройство индуктора (рис. 16) и режим его работы, которые позволят очищать поверхность расплавленных металлов в процессе плавки. В режиме нагрева работают оба индуктора:  $I_1 = I_2 = 250$  A, в режиме очистки – только нижний:  $I_1 = 0$ ,  $I_2 = 300$  A. Действие устройства смоделировано для никеля массой 50 кг и тигля радиусом  $\ell = 125$  мм,  $\omega/2\pi = 2$  кГц; число витков в индукторах  $N_1 = N_2 = 5$ , безразмерные параметры: Z = 1,05;  $R_{coil} = 1,34; Z_{coil} = 2,8; \Delta Z = 0; Pr = 0,0269; Gr = 5,31 \cdot 10^5; Bi_{rad} = 2,15 \cdot 10^{-9}; \varpi = 39; h = 0,01.$  Нагрев – На<sub>m</sub> = 4790,  $Q = 1,27 \cdot 10^{-2}$ , очистка – На<sub>m</sub> = 2400, Q = 3, 73 · 10<sup>-3</sup>.



Рис. 14. Профили радиальной скорости при  $\varpi = 25$  на поверхности расплава для различных высот столба расплава Z (и масс сплава):  $1 - Z_1 = 0,41$  (10 кг);  $2 - Z_2 = 0,82$ (20);  $3 - Z_3 = 1,23$  (30);  $4 - Z_4 = 1,64$ (40);  $5 - Z_5 = 2,05$  (50). Кусочки плёнки скопятся у оси если u < 0.



Рис. 15. Размеры ЗСП при различных значениях  $\varpi$  и вертикальных смещений «индуктор-расплав»  $\Delta Z$ :

 $1 - \Delta Z = -0,725; 2 - \Delta Z = -0,363;$  $3 - \Delta Z = 0; 4 - \Delta Z = 0,181;$  $5 - \Delta Z = 0,725.$ 

Буквы на маркерах показывают тип течения на рис. 7.

В режиме нагрева на поверхности имеется ЗСП, занимающая около половины радиуса (рис. 126), при включении режима очистки структура течения трансформируется, и через некоторое время реверсирования  $t_{rev}$  скорости на поверхности направлены к стенке тигля (рис. 12*в*); здесь  $t_{rev} \approx 3$  с.

Время, за которое перестроившееся течение расплава отнесёт кусочек оксидной плёнки из центра поверхности до стенки тигля (и прикрепится к ней) является временем очистки поверхности *t*<sub>clean</sub> и рассчитывается как

$$t_{clean} = t_{rev} + \int_{0}^{1} \frac{dr}{u(r)} \,. \tag{31}$$

Расчетное время очистки для данного процесса составило 32 с. Температура снижается в режиме очистки поверхности из-за меньшего выделения тепла за счет ослабления поля. Это снижение составляет менее 3 К.

#### Анализ возможностей очистки поверхности от плёнок

На рис. 17. показана частотно-геометрическая карта режимов поверхностных течений. На ней выделены две области параметров: в области *I* течения на всей поверхности направлены от центра – ЗСП нет, в области *II* ЗСП присутствует. Видно, что для некоторых исходных состояний с ЗСП, существует три возможности перестройки режимов течения: 1) изменение геометрии ПМП (например, применением двойного индуктора (рис. 16)), 2) понижение частоты

 $\varpi < \varpi_{low} \approx 16$  и 3) её повышение  $\varpi > \varpi_{high} \approx 51$ . Все три варианта основаны на перестройке структуры силового слагаемого  $\operatorname{Ha}_m^2 F_{\vartheta}$ .



**Рис. 16.** Конструкция индукторной печи (*a*), исходный режим течения (*б*) и течения в режиме очистки после  $\Delta t = 3$  с (*в*): 1 и 2 – верхний и нижний индукторы, 3 и 4 – источники тока верхнего и нижнего индукторов.

На рис. 18 показано время реверса и очистки, рассчитанное по формуле (31). По минимумам кривых видно, что существуют значения  $\varpi_1 = 7 < \varpi_{low}$  и  $\varpi_2 = 120 > \varpi_{high}$ , при которых времена реверса и очистки минимальны. Повышение  $\varpi$  очищает поверхность не для всех положений «индуктор-расплав».



**Рис. 17.** Частотная карта режимов поверхностных течений. В области *I* ЗСП нет, в *II* есть



**Рис. 18.** Зависимости времён реверсирования и очистки от параметра  $\varpi: 1 - \Delta Z = 0, 2 - \Delta Z = -0,725$ 

Показано, что понижение параметра  $\varpi$  быстрее очищает поверхность ( $t_{rev} = 0,4$  с,  $t_{clean} = 1,0$  с), чем его повышение ( $t_{rev} = 0,8$  с,  $t_{clean} = 2,1$  с) или изменение геометрии поля ( $t_{rev} = 10$  с,  $t_{clean} = 14,3$  с). Понижение  $\varpi$  представляется наиболее перспективным: в отличие от изменения геометрии поля оно не связано с изменением тоководов и системы их охлаждения. Недостаток повышения  $\varpi$  заключается в том, что при возрастании частоты ток вытесняется на поверхность проводника и повышается тепловыделение в подводящих проводах.

## Моделирование деформированного состояния плёнки

На рис. 19 приведён алгоритм решения полной задачи, связывающей параметры магнитного поля и деформации в плёнке. На рис. 20. приведён пример расчёта профиля скорости на поверхности (*a*), соответствующие ему профили локальной радиальной деформации  $\varepsilon_r$ , рассчитанные для плёнок различного радиуса ( $\delta$ ). Видно, что расходящиеся на поверхности течения в диапазоне  $\varpi_{low} \leq \omega \leq \omega_{high}$  приводят к небольшой деформации сжатия для плёнок с  $R < R_{3C\Pi}$ , и к деформации растяжения для больши́х радиусов. В случае однонаправленного движения при  $\omega \leq \omega_{low}$  или  $\omega_{high} \leq \omega$  наблюдается только деформация растяжения.

Расчёты проведены со следующими параметрами:  $\gamma = 0,35$ , e = 100 мH/м,  $\kappa = 5,4 \cdot 10^{-6}$  1/К, критическая деформация  $\varepsilon_r^{rupt} = 0,025$ ,  $\text{Bi}_{rad} = 1,24 \cdot 10^{-7}$ , Gr = 4,13 \cdot 10^7,  $\varpi = 1...150$  Ha<sub>m</sub> = 1618...8091, Q = 0,014,  $K = 2,34 \cdot 10^{-4}$ , Ma = 2,31 \cdot 10^5, Pr = 0,0269, Ve = 2,57 \cdot 10^{-7}, m\_{rel} = 1/1,77 (расплав/плёнка).

На рис. 21 показаны исходные радиусы R<sub>0</sub> плёнки и интегральные деформации  $\Delta R$ . Видно, что чем больше радиус плёнки, тем больше её деформация. Для расходящихся на поверхности течений (рис. 116 и 19a) возможны радиусы плёнок, для которых деформации сжатия и растяжения компенсируются, и нагруженная плёнка оказывается в целом недеформированной ( $R = R_0$ ), причём  $R > R_{u<0}$ . Анализ локальных и интегральных деформаций плёнки показывает, что понятие ЗСП, как область с направленными к центру скоростями на поверхности, может быть расширено: ЗСП – область, деформации плёнки не приводят к её разрыву ( $\varepsilon_r < \varepsilon_r^{rupt}$ ). Результаты вычислительных экспериментов обобщены на картах, пример которой приведён на рис. 18. Исследованы деформации в дискообразной и кольцеобразной плёнках, варьировалась геометрия «индуктор-расплав». Показаны диапазоны параметров, *ω* в которых могут быть стабильными плёнки определённого радиуса *R*. Так размер дискообразных плёнок с нулевой локальной деформацией на оси в диапазоне  $16 \le \varpi \le 51$  может достигать 0,6*ℓ*, если горизонтальные плоскости симметрии индуктора и расплава совпадают. Применение геометрии с общим дном (рис. 18) плёнка значительно более устойчива: расширяется и частотный диапазон ( $15 \le \omega \le 75$ ), таки и размеры плёнки, вплоть до полного покрытия поверхности.

#### Методика прогнозирования стабильности плёнки

Оценить стабильность плёнки в процессе с параметрами Ha<sub>m</sub>,  $\varpi$  возможно, основываясь на следующих соображениях. Деформация на оси плёнки пропорциональна интегральной поверхностной силе  $\varepsilon_r^{axis} \propto \operatorname{Ve} \int_0^R \frac{\partial u_{\varpi}}{\partial z} dr$  (см. уравнение

(28) и рис. 196). Структура течений определяется частотой ПМП ( $\varpi$ ) (см. рис. 11*а-в*), магнитуда скорости – напряжённостью (На<sub>*m*</sub>). Отношение  $u/u_A$  весьма универсально ( $u_A$  – альфвеновская скорость) (см. рис. 11*д*).



Рис. 19. Блок схема вычислительного эксперимента.



**Рис. 20.** Профиль скорости расплава вблизи поверхности (*a*) для  $\varpi = 30$ , радиальные деформации в пленке на поверхности расплава (б). Цифры по-казывают радиус пленки

Безразмерная альфвеновская скорость  

$$\tilde{u}_{A} = u_{A} / (\nu/\ell) = \left( B_{ref} / \sqrt{\mu\mu_{0}\rho} \right) \cdot (\ell/\nu) \equiv \text{Ha}_{m}. \text{ Таким образом, имеем}$$

$$\varepsilon_{r}^{axis} = \chi \left( \Psi + \Psi_{0} \right), \ \Psi = \text{Ve} \cdot \text{Ha}_{m} \Upsilon_{\varpi} \left( R \right), \ \Upsilon_{\varpi} \left( R \right) = \int_{0}^{R} \upsilon_{\varpi} dr, \quad \upsilon_{\varpi} = \frac{1}{\tilde{u}_{A}} \frac{\partial u_{\varpi}}{\partial z}, \quad (32)$$

где  $\chi$  – эффективная податливость плёнки,  $\Psi$ – интегральное усилие,  $\Psi_0$  – таковое при нулевой деформации (для расходящегося на поверхности течения),  $\Upsilon_{\varpi}$  – безразмерная функция усилия,  $\upsilon_{\varpi}$  – градиент скорости в единицах  $\tilde{u}_A$ , индекс  $\varpi$  означает, что величины определяются для конкретного значения  $\varpi$ . Принимая критической деформацию  $\varepsilon_r^{nupt} = 0,025$ , значение интегрального усилия, разрывающего плёнку, оказывается постоянным как для однонаправленного течения  $\Psi_1 = 0,040$ , так и для расходящегося  $\Psi_2 = 0,034$ . Иными словами, при  $\Psi < \Psi_{1,2}$  плёнка не разрушается, т.е. стабильна, и наоборот. Таким образом, это действи-

тельно интегральный критерий стабильности плёнки. На рис. 19 показана возможность оценки напряжённого состояния плёнки интегральным критерием По рассчитанным для  $Ha_m =$ 4581 распределениям скорости  $u_{\varpi}$ степенными рядами аппроксимирова-

ны функции 
$$\upsilon_{\varpi} = \sum_{n=0}^{N} c_n r^n$$

$$\Upsilon_{\varpi}(R) = \sum_{n=0}^{N} \frac{c_n R^{n+1}}{n+1},$$
 это позволили

определить  $\Psi$  и  $\varepsilon_r^{axis}$  для других значений На<sub>*m*</sub>, при этом результаты оценок по формуле (32) хорошо согласуются с расчётом полной задачи.



**Рис. 21.** Зависимости начального радиуса плёнки  $R_0$  и её интегральной деформации пленки  $\Delta R$  от конечного установившегося радиуса R



**Рис. 22.** Карты интегральной деформации пленки  $\Delta R$  и радиальной деформации  $\varepsilon_r$  на плоскости параметров R- $\varpi$  (установившийся радиус плёнкипараметр диффузии ПМП).



Рис. 23. Карта стабильности плёнки на плоскости параметров на плоскости параметров *R*- $\varpi$  (установившийся радиус плёнкипараметр диффузии ПМП), показывающая интервалы, в которых плёнка не деформирована на оси – кривая «О», и, в которых деформация плёнки не приводит к её разрушению – ниже кривых «0,025». Все кривые построены решением полной задачи о деформировании плёнки, точки – расчёт по формулам (32)

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

• Разработана <u>математическая модель</u> перспективного реактора для восстановления титана с индуктором бегущего магнитного поля, реализованная в виде <u>программного комплекса</u> «Вычислительное моделирование неравновесных процессов тепломассопереноса в реакторе для получения пористого титана при осуществлении внешних электромагнитных воздействий». <u>Методами вычислительного эксперимента показано</u>, что применением БМП достигаются следующие положительные эффекты: тепло экзотермической реакции восстановления титана можно использовать для поддержания температуры расплава магния, на поверхности которого протекает реакция; эффективный отвод тепла от поверхности в объём расплава магния позволяет снизить тепловую нагрузку на реторту в зоне реакции и продлить срок её службы; понижение температуры реторты приводит к уменьшению интенсивности необходимого охлаждения и выбросу тепла в атмосферу; интенсивное перемешивание магния обеспечивает подвод чистого металла к поверхности и удалению с неё магния хлорида, что обеспечит непрерывное протекание реакции восстановления титана.

• Разработан <u>метод решения задачи о диффузии переменного магнитно-</u> го поля в расплав и учёте осреднённых силовых и тепловых эффектов. В приближении  $\text{Re}_m \ll 1$ , позволяющая рассчитывать по пространственному распределению и частоте внешнего ПМП амплитуды компонент магнитных полей индукционных токов, плотности этих токов, объёмные мощность тепловыделения и силу Лоренца. Применение метода многих масштабов к гармонически изменяющимся силе Лоренца и мощности джоулевых источников позволило выделить не зависящие от времени осреднённые компоненты, которые удобно использовать в уравнениях переноса импульса и энергии. Показано, что с ростом пропорционального частоте параметра диффузии ПМП  $\varpi$  джоулевы источники тепла локализуются у поверхности, а распределение ротора силы Лоренца значительно изменяет структуру; совместное действие указанных механизмов определяет структуру течения расплава металла в ПМП.

• Разработан <u>метод эффективной теплопроводности</u>, заключающийся в замене участков с радиационным теплообменом участками с эквивалентным диффузионным механизмом теплопереноса.

• Разработана комплексная математическая модель взаимодействия расплавленного металла в ПМП и тонкой плёнки на его поверхности. Модель включает 1) расчёт пространственного распределения магнитного поля индуктора, 2) задачу о диффузии переменного магнитного поля в расплав и учёте осреднённых силовых и тепловых эффектов – вычисление пространственных распределений магнитных полей индукционных токов, осреднённых сил Лоренца и осреднённой мощности источников джоулевой теплоты, 3) решение уравнений движения и переноса тепловой энергии в расплаве металла с учётом осреднённых полей силы Лоренца и джоулева тепла, теплового излучение с поверхности, вклада в движение расплава сил Архимеда и Марангони, 4) упруго деформированного состояние плёнки на поверхности, напряжения в которой создаются вязкими силами со стороны движущегося под плёнкой расплава, плёнка в свою очередь, тормозит движение расплава и увеличивает тепловое излучение на его поверхности. Показано, что основным механизмом, деформирощим плёнку, является вязкое трение со стороны движущегося расплава.

• Комплексная математическая модель *реализована в виде программного* комплекса «Вычислительное моделирование движения расплава в переменном магнитном поле и его взаимодействие с поверхностной оксидной плёнкой», реализующие предложенную модель.

• <u>Методами вычислительного эксперимента изучены</u> течения металла в ПМП. Показано, что структура течений зависит от σ и геометрии «индукторрасплав», определяющей распределение магнитных полей; определён интегральный критерий Ф показывающий отношение объёмных мощностей сил Лоренца и подъёмной, при Φ > 1 конвекцию можно рассматривать как чисто вынужденную; интенсивная вынужденная конвекция эффективно выравнивает температуру в расплаве; возможны комбинации геометрии и π, при которых течения расплава на поверхности направлены к центру, в таких областях может формироваться оксидная плёнка.

• <u>Численно исследованы</u> зависимости локальных и интегральных деформаций плёнки различных форм при вариациях геометрии ПМП и  $\varpi$ . Показано, что в диапазоне  $16 \le \varpi \le 51$ , где течения на поверхности направлены к центру, возможны ситуации, при которых плёнка нагруженная плёнка в целом не будет деформирована.

• <u>На основе вычислительных экспериментов</u> выявлены способы воздействия ПМП на поверхностные течения, позволяющие во время индукционной плавки изменять структуру течения на поверхности с целью удаления с неё плёнок: изменение структуры внешнего поля или частоты. Оценки эффективности предлагаемых способов, сделанные на основе моделирования, показали, что понижение то наиболее перспективно с точки зрения очистки поверхности.

• <u>Разработана методика</u> оценки стабильности оксидной плёнки, построенная на подобии структуры течений при одной частоте и пропорциональности скорости движения расплава напряжённости, построенная на подобии течений при фиксированной частоте и пропорциональности скорости движения расплава напряжённости ПМП. Определён универсальный критерий  $\Psi$  как безразмерная интегральная нагрузка плёнки вязкими силами со стороны расплава, разгоняемого ПМП. Для режимов конвекции, определяемых силой Лоренца,  $\Psi$ позволяет прогнозировать деформацию в плёнке. Показано, что для однонаправленных на поверхности течений плёнка стабильна при  $\Psi < 0,040$ , а для расходящихся – при  $\Psi < 0,034$ ; эти значения – критерий стабильности плёнки заданных свойств.

Результаты диссертации могут применяться для разработки перспективных устройств и режимов их работы, позволяющих очищать поверхность расплавленного металла от неметаллических включений, повышая этим энергетическую эффективность процесса и выход годного.

# СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

# Публикации в журналах, входящих в международные базы цитирования Web of Science и SCOPUS

1) *И.Л. Никулин, В.А. Демин* Математическая модель деформирования оксидной плёнки на поверхности металлического расплава в переменном магнитном поле // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 2022, № 1, С. XX–XX, DOI:

2) *I.L. Nikulin, V.A. Demin, A.V. Perminov* Surface film deformation by melt moving in an alternating magnetic field and the integral criterion of such film stability // *Fluid Dynamics Research*, 2022, Vol, 54, № 2, P. 1-17.

3) *I.L. Nikulin, V.A. Demin* Simulation of the metal melt convection and its viscoelastic interaction with dielectric film in an alternating magnetic field / *Metals and Materials International*, DOI 10.1007/s12540-021-01131-2

4) *I.L. Nikulin, V.A. Demin, A.V. Perminov* Movement of a melt and elasticstressed state of its oxide film in the process of induction melting // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2021, Vol. 94, № 6, Р. 1444-1455. **Перевод** на англ. *И.Л. Никулин, В.А. Демин, А.В. Перминов* Движение металлического расплава и упруго-напряженные состояния оксидной пленки при индукционной плавке // Инженерно-физический журнал, 2021, Т. 94, № 6, С. 1477-1488.

5) *I.L. Nikulin, A.V. Perminov* Simulation of the Averaged Flow of a Metal Melt in an Alternating Magnetic Field with Variable Amplitude and Frequency // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2020, Vol. 93, № 3, Р. 556-566. **Перевод** на англ. *И.Л. Никулин, А.В. Перминов* Моделирование осредненного течения расплава металла при варьировании амплитуды и частоты переменного магнитного поля // Инженерно-физический журнал, 2020, Т. 93, № 3, С. 577-586.

6) *I.L. Nikulin* Analysis of AMF Impact on Oxide Scab Rupture and Surface Cleaning in Induction Melting Technology // *Magnetohydrodynamics*, 2019, Vol. 55, № 1/2, P. 141-148.

7) *I.L. Nikulin, A. V. Perminov* Mathematical modelling of frequency and force impacts on averaged metal flows in alternating magnetic field // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2019, Vol. 128, P. 1026-1032.

8) *I.L. Nikulin* Analisys of possibilities of melt surface cleaning by controlling AMF frequency and distribution // *Magnetohydrodynamics*, 2017, Vol. 53, № 3, P. 537-546.

9) *I.L. Nikulin* Mathematical modelling of AMF geometry and frequency impacts on volume and surface melt flows at induction melting // *Magnetohydrodynamics*, 2016, Vol. 52, № 4, P. 513-526.

10) *I.L. Nikulin, A.V. Perminov* Numerical investigation of electromagnetic effects and averaged metal melt flows generated by high frequency alternating magnetic field // *Magnetohydrodynamics*, 2016, Vol. 52, № 1/2, P. 135–143.

11) *I.L. Nikulin* Numerical simulation of melt flow control by controlling averaged electromagnetic forces generated in high frequency magnetic field // *Magnetohydrodynamics*, 2016, Vol. 52, № 4. P. 527-534.

12) *A.V. Perminov, I.L. Nikulin* Mathematical Model of the Processes of Heat and Mass Transfer and Diffusion of the Magnetic Field in an Induction Furnace // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2016, Vol. 89, No 2, P. 397-409. **Перевод** на англ. *А.В. Перминов, И.Л. Никулин* Математическая модель процессов тепломассопереноса и диффузии магнитного поля в индукционной печи // Инженерно-физический журнал, 2016, Vol. 89, No 2, C. 388–399.

13) *A.I. Tsaplin, I.L. Nikulin, V.N. Nechaev* Modelling of Electromagnetic Actions in Sponge Titanium Production // *Magnetohydrodynamics*, 2015, Vol. 51, № 4, P. 749-756.

14) *I. Nikulin, A. Perminov* The Mathematical Model of Metal Melt State Under Induction Melting // *Applied Mechanics and Materials*, 2015, vol. 770, P. 242-247.

15) *I.L. Nikulin, A.V. Perminov, A. I. Tsaplin* Mathematical model of conducting fluid convection in a non-uniform alternating magnetic field // *Magnetohydrodynamics*, 2013, Vol. 49, № 1/2, P. 3-9.

16) *I.L. Nikulin, A.V. Perminov* The mathematical model of nickel melt convection in the induction melting. The solving of the magnetic subproblem // *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, № 3, Р. 200-218. **Перевод** на англ. *И.Л. Никулин, А.В. Перминов* Математическая модель конвекции никелевого расплава при индукционном переплаве. Решение магнитной подзадачи // Вестник ПНИПУ. Механика, 2013, № 3, С 192-209. http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-

84893609000&partnerID=40&md5=be0ee56b1806cc68b67c0a0875ebfc40

# Публикации в журналах, входящих в Перечень ВАК

17) *И.Л. Никулин* Силовые и энергетические воздействия магнитного поля на проводящую среду. Модели и эксперименты // Вестник Пермского университета. Физика, 2020, Вып. 2, С. 10-37.

18) *И.Л. Никулин, А.В. Перминов* Моделирование индукционных процессов в проводящем цилиндре, помещенном в неоднородное переменное магнитное поле. // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физикоматематические науки, 2013, № 1(165), С. 188-195.

19) **И.Л. Никулин** Применение сквозного счета к составным системам, содержащим участки с радиационным теплообменом / // Математическое моделирование, 2009, Т. 21, № 10, С. 3-6.

Свидетельства защиты прав РИД

20) *И.Л. Никулин, А.В. Перминов, В.А. Демин* Вычислительное моделирование движения расплава в переменном магнитном поле и его взаимодействие с поверхностной оксидной плёнкой. // *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022617351* (2022 г.)

21) **В.Н. Нечаев, А.И. Цаплин, И.Л. Никулин** Вычислительное моделирование неравновесных процессов тепломассопереноса в реакторе для получения пористого титана при осуществлении внешних электромагнитных воздействий. // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016616960 (2016 г.)

22) *И.Р. Дроздов. И.Л. Никулин* Волоконно-оптический датчик температуры // Патент на полезную модель №140576 (2014 г.)

> Подписано в печать 01.09.2022. Тираж 100 экз. Усл. печ. л. 2,0. Формат 60×84/16. Заказ № 123456

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии издательства Пермского национального исследовательского политехнического университета 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к. 113. Тел. (342) 219-80-33