

На правах рукописи



Шарифулин Вадим Альбертович

**КОНВЕКЦИЯ В ЖИДКОСТИ
СО СТЕПЕННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ПЛОТНОСТИ
ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ЗАДАННОМ ПОТОКЕ ТЕПЛА**

1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Пермь – 2022

Работа выполнена в Институте механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук – филиале Федерального государственного бюджетного учреждения науки Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель: **Любимова Татьяна Петровна**, доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты: **Бекежанова Виктория Бахытовна**, доктор физико-математических наук, заведующая отделом дифференциальных уравнений механики обособленного подразделения ФГБНУ ФИЦ КНЦ СО РАН "Институт вычислительного моделирования СО РАН", г. Красноярск.

Просвиряков Евгений Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных технологий и систем управления ФГАОУ ВО "Уральский федеральный университет им. Б.Н.Ельцина", г. Екатеринбург.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки "Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук", г. Новосибирск.

Защита состоится **17 ноября 2022 г. в 10:30** часов на заседании диссертационного совета Д 004.036.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки "Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук" (филиал – Институт механики сплошных сред УрО РАН) по адресу: 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1; тел: (342) 237-84-61; факс: (342) 237-84-87; сайт: www.icmm.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан « ____ » октября 2022 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, доцент



/ А.Л. Зуев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Процессы теплообмена в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей замкнутые полости представляют как теоретический, так и практический интерес. Жидкость при этом, как правило, нагревается или охлаждается через границы полости. Возникающее благодаря этому неравномерное распределение температуры приводит к перепадам плотности, которые при наличии гравитации благодаря подъемной силе вызывают течения, называемые свободной тепловой (естественной) конвекцией. Естественная конвекция зачастую играет ключевую роль в теплообмене в естественных и искусственных водоемах, шахтных выработках, корпусах электронных и технических устройств, салонах и контейнерах транспортных средств.

В большинстве теоретических и экспериментальных исследований тепловой конвекции полагают, что зависимость плотности жидкости от температуры линейна. Главной особенностью диссертационной работы является то, что в большинстве рассмотренных задач температурная зависимость плотности от температуры полагалась нелинейной степенной.

Примером жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры является самая распространенная на поверхности Земли жидкость – вода. Во многих геофизических и технических приложениях ее температура находится вблизи температуры максимума плотности (4°C), так называемой температуры инверсии плотности. При этом в области ниже температуры инверсии зависимость плотности от температуры аномальная, т.е. при увеличении температуры наблюдается не уменьшение, как для большинства других жидкостей и газов, а увеличение плотности. В отечественной и зарубежной литературе имеется большое число работ, относящихся к различным аспектам конвекции воды и некоторых других жидкостей со степенной зависимостью плотности от температуры в безграничной среде от локального источника тепла, в плоских слоях и др. В них показано, что степенная зависимость плотности от температуры, особенно при наличии температурной инверсии плотности, приводит к новым типам неустойчивости, усложняет вихревую структуру развитых нелинейных режимов конвективных течений, меняет структуру течения от локальных источников тепла.

Другой особенностью рассмотренных в диссертации задач является заданный вертикальный тепловой поток через слой жидкости. Рассматриваются два предельных случая подогрева снизу – локальный и равномерно распределенный. В первом случае в объеме жидкости с произвольной степенной зависимостью плотности от температуры располагается локальный источник тепла с постоянной мощностью, вызывающий направленный вверх поток жидкости (конвективный факел). Для таких плоских и осесимметричных конвективных факелов в случае жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры в

приближении пограничного слоя ранее были получены точные аналитические решения. Во втором случае вертикальный поток тепла через слой или замкнутую полость обеспечивается заданием его постоянного значения на нижней и верхней границах. Такие тепловые условия широко распространены в важных приложениях, но вопросы конвективной устойчивости при их реализации гораздо менее исследованы, чем для случая заданной температуры на границах.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию тепловой конвекции жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры при подогреве снизу с помощью локального или распределенного источника тепла заданной мощности.

Цель работы. Установить закономерности возникновения и развития тепловой конвекции в жидкостях со степенной зависимостью плотности от температуры в условиях локального и распределенного тепловых потоков на границах. Для достижения этой цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Аналитически в приближении пограничного слоя определить параметры конвективного факела от линейного источника тепла заданной мощности в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры, когда показателем в этой зависимости является произвольное действительное число.
2. Аналитически в приближении пограничного слоя определить параметры конвективного факела от точечного источника тепла заданной мощности в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры, когда показателем в этой зависимости является произвольное действительное число.
3. Аналитически исследовать линейную устойчивость механического равновесия жидкости с температурной инверсией плотности в плоском горизонтальном слое с заданным тепловым потоком на твердой нижней и свободной недеформируемой верхней границах относительно длинноволновых возмущений.
4. Численно исследовать устойчивость механического равновесия жидкости с температурной инверсией плотности в плоском горизонтальном слое с заданным тепловым потоком на твердой нижней и свободной недеформируемой верхней границах относительно возмущений с конечной длиной волны.
5. Определить влияние конечности длины горизонтальной прямоугольной полости на возникновение неустойчивости и плоские надкритические режимы конвекции жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры в условиях заданного теплового потока на горизонтальных границах.
6. Исследовать влияние положения точки инверсии на устойчивость механического равновесия и надкритические режимы конвекции в жидкости с температурной инверсией плотности в прямоугольной горизонтальной полости с аспектным отношением равным двум.

Методология и методы исследования. Изучение конвективных факелов проводилось аналитически в приближении пограничного слоя. При исследовании длинноволновой и ячеистой неустойчивости конвекции используются уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска с учетом квадратичной зависимости плотности от температуры. Линейная задача устойчивости механического равновесия относительно длинноволновых возмущений решалась аналитически методом разложения по малому параметру, относительно ячеистых – численно методом пристрелки. Решение нелинейных задач производилось численно методом конечных разностей в переменных функция тока – завихренность.

Основные положения выносимы на защиту:

1. В приближении пограничного слоя получены новые точные решения задач о конвективном факеле жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры над точечным и линейным источниками тепла для произвольного показателя температурной инверсии плотности и избранных значений числа Прандтля.
2. Ячеистая неустойчивость слоя жидкости с температурной инверсией плотности с заданным тепловым потоком на свободной верхней и твердой нижней границах, невозможная в отсутствие инверсии плотности, существует, если неустойчиво стратифицированный слой достаточно тонок. Определены условия устойчивости равновесия по отношению к ячеистым возмущениям.
3. Гистерезис между одно-, двух- и трехвихревыми надкритическими движениями в прямоугольной полости, заполненной жидкостью с линейной зависимостью плотности от температуры, существует, если полость достаточно вытянута в горизонтальном направлении.
4. Гистерезис между ячеистыми многовихревыми режимами в прямоугольной полости с жидкостью с температурной инверсией плотности существует, если неустойчиво стратифицированный слой достаточно тонок.

Научная новизна работы состоит в том, что в ней впервые:

1. В приближении пограничного слоя найдены новые точные решения задач о конвективном факеле над линейным и точечным источниками тепла в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры при фиксированных значениях числа Прандтля и произвольном степенном показателе.
2. Корректно решена задача о возникновении естественной конвекции в горизонтальном слое жидкости с температурной инверсией плотности при постоянном тепловом потоке на твердой нижней и свободной верхней границах, аналитически определены границы длинноволновой неустойчивости. Численно обнаружена и исследована область ячеистой неустойчивости, невозможная в жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры.
3. Численно определено влияние конечности длины горизонтальной прямоугольной полости на возникновение неустойчивости и плоские

надкритические режимы конвекции жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры в условиях заданного теплового потока на твердой нижней и свободной верхней границах.

4. Определено влияние положения точки инверсии на устойчивость механического равновесия и надкритические режимы конвекции жидкости с тепловой инверсией плотности в прямоугольной горизонтальной полости с аспектным отношением равным двум.

Достоверность результатов обусловлена использованием апробированных подходов механики сплошных сред при разработке математических моделей, а также согласием результатов в предельных случаях с экспериментальными и теоретическими работами других авторов. Проведен анализ сходимости результатов численных расчетов при изменении шага расчетной сетки.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные результаты важны для понимания особенностей проникающей конвекции в прудах, озерах, недрах планет и звезд. Они могут быть использованы при проектировании технических устройств, использующих жидкости с температурной инверсией плотности, такие как талая вода, жидкий висмут, жидкий гелий и парогазовая смесь кислорода и циклогексана. Полученные точные решения могут быть использованы при тестировании численных алгоритмов.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались на –10-й Всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках», Пермь, октябрь, 2001; International conference —Advanced problems in thermal convection, Perm, November, 2003; XXXVI Summer School – Conference —Advanced Problems in Mechanics, St. Petersburg (Repino), July, 2008; Пермских гидродинамических чтений имени профессоров Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова, декабрь 2014, декабрь 2015, ноябрь 2019; XX Зимней школе по механике сплошных сред. Пермь. 13–16 февраля 2017 г.

Полностью диссертация обсуждалась на Пермском гидродинамическом семинаре и научном семинаре ИМСС УрО РАН. Часть исследований выполнена в рамках российско-германского проекта РФФИ 20-51-12010 ННИО_а и гранта FSNM-2020-0026 Министерства науки и ВО РФ.

Публикации. Материалы диссертации изложены в 7 статьях в журналах из списка ВАК [1-7] (индексированы в международных базах данных Scopus и Web of Science) и трудах Всероссийских и международных конференций [8-11].

Личный вклад автора. Автором диссертации проведены все аналитические и численные вычисления. Постановка задач, обсуждение и анализ результатов осуществлены совместно с научным руководителем Т.П. Любимовой. и соавтором публикаций Д.В. Любимовым.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения, содержит 145 страниц, 40 рисунков, 1 таблицу, библиографию из 138 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, определены цели и задачи исследования, показана научная новизна и обоснована достоверность результатов, описана их практическая и теоретическая значимость.

В первой главе представлен обзор публикаций о конвективных факелах от точечных и линейных источников тепла, а так же о возникновении конвекции в бесконечном горизонтальном плоском слое жидкости с заданным вертикальным потоком тепла на его границах. Рассмотрены работы, посвященные нелинейным режимам конвекции жидкости с тепловой инверсией плотности в замкнутых полостях различной формы.

Из обзора следует, что исследования конвективного факела от линейного и точечного источников тепла с заданной мощностью тепловыделения в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры проводились только численно, но имеется метод расчета позволяющий получить точное решение задачи для случая линейной зависимости плотности от температуры. Принципиальный вопрос о возникновении конвекции в подогреваемой снизу жидкости с инверсией плотности для случая свободной верхней и твердой нижней границ с заданным тепловым потоком остался не изученным, в работе, содержащей попытку решить эту задачу, были допущены ошибки при выводе уравнений. Остался не исследованным вопрос о влиянии положения точки инверсии на структуру надкритических режимов проникающей конвекции в прямоугольной полости конечных размеров с заданным тепловым потоком на горизонтальных границах.

Вторая глава посвящена поиску точных решений задачи о конвективном факеле от линейного и точечного источников тепла с заданной мощностью тепловыделения в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры. До работ автора такие решения не были получены.

Полагается, что вязкая несжимаемая жидкость заполняет пространство над горизонтальным линейным источником тепла, кинематическая вязкость, температуропроводность, ускорение свободного падения постоянны, а зависимость плотности от температуры имеет степенной вид (Gebhart&Mollendorf,1978):

$$\rho(T) = \rho_m \left(1 - \alpha_\gamma |T - T_i|^\gamma\right), \quad (1)$$

где ρ_m – максимальная плотность, α_γ – коэффициент теплового расширения, T_i – температура инверсии плотности, γ – показатель температурной инверсии плотности. Для нахождения плоского решения задачи вводится декартова система координат (x, y) , ось x направлена вверх в плоскости симметрии факела, в начале координат расположен горизонтальный

линейный источник тепла постоянной мощности. Полагается, что на бесконечном удалении от факела, т.е. при $y \rightarrow \infty$ $T_\infty = T_i$. Используются уравнения, описывающие стационарное конвективное движение в приближении пограничного слоя, в форме, полученной в (Mollendorf, Jonson & Gebhart, 1981):

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g \alpha_\gamma T_\infty^\gamma \theta^\gamma, \\ \text{Pr} \left(v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь v_x и v_y - компоненты скорости, а θ - безразмерная температура, связанная с локальной температурой $T(x, y)$ и температурой вдали от факела $T_\infty = T_i$ соотношением:

$$\theta = (T - T_\infty) / T_\infty. \quad (3)$$

ν - кинематическая вязкость, g - ускорение силы тяжести, $\text{Pr} = \nu / \chi$ - число Прандтля.

Граничные условия на плоскости симметрии и вдали запишем в виде:

$$\text{при } y = 0: v_y = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \text{при } y \rightarrow \infty: v_x \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0. \quad (4)$$

Введем автомодельную переменную η и автомодельные функции $f(\eta)$ и $p(\eta)$ в соответствии с (Brand & Lahey, 1967). Тогда функция тока ψ , температура θ будут связаны с f и τ следующими выражениями:

$$\eta = ax \frac{-1+\gamma}{4+\gamma}, \quad \psi = avx \frac{3}{4+\gamma} f, \quad \theta = \left(a^4 \nu^2 (g \alpha_\gamma T_\infty^\gamma)^{-1} \right)^{1/\gamma} p(\eta) x \frac{-3}{4+\gamma}.$$

Для получения точного решения задачи удобно вести в рассмотрение новую функцию τ , связанную с p , соотношением $\tau = p^\gamma$.

Тогда задача (2)-(4) может быть переписана в виде:

$$f''' + \frac{3}{4+\gamma} f f'' - \frac{2-\gamma}{4+\gamma} (f')^2 + \tau = 0, \quad \tau' + \frac{3\text{Pr}\gamma}{4+\gamma} f \tau = 0, \quad (5)$$

Граничные условия для f и τ запишутся в виде:

$$f = f'' = \tau' = 0 \text{ при } \eta = 0, \quad f' \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Задача (5)-(6) аналогична, задаче сформулированной в работе (Mollendorf, Jonson & Gebhart, 1981) но содержащей дополнительную константу, затрудняющую получение точного решения. Точные решения (5)-

(6) получим с помощью подстановки $\tau = \frac{5-\gamma}{4+\gamma} (f')^2 + b \left((f')^2 + f f'' \right)$, пот-

ребовав эквивалентность уравнений в системе (5). Эта эквивалентность для каждого γ возможна для двух избранных таким путем значений числа Прандтля.

Первое решение для $Pr = \frac{2}{\gamma}$ имеет вид:

$$f(\eta) = \tanh\left(\frac{3}{2(4+\gamma)}\eta\right), \quad \tau(\eta) = \frac{9(5-\gamma)}{4(4+\gamma)^3} \operatorname{sech}^4\left(\frac{3}{2(4+\gamma)}\eta\right). \quad (7)$$

Второе решение для $Pr = \frac{4+\gamma}{9\gamma}$:

$$f = \tanh\left(\frac{1}{6}\eta\right), \quad \tau = \frac{5-\gamma}{54(4+\gamma)} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{6}\eta\right). \quad (8)$$

Для проверки полученных точных решений задача (5)-(6) решалась нами и численно для широкого набора чисел Прандтля при $\gamma = 2$ и $\gamma = 3$ (см. рис.1, соответствующий $\gamma = 3$). Видно, что точное решение находится в хорошем согласии с численным.

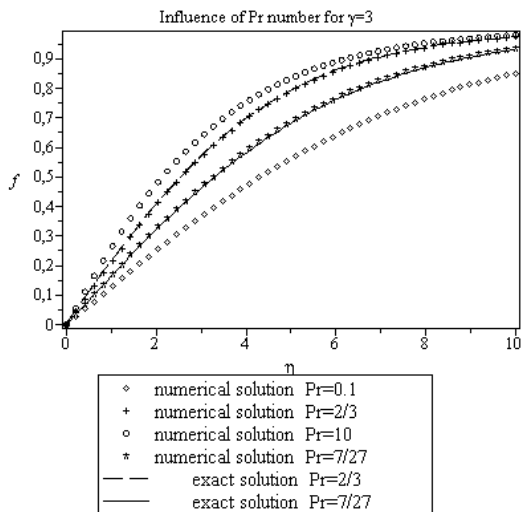


Рис.1. Зависимость функции f от автомодельной переменной η при показателе инверсии $\gamma = 3$ для различных значений числа Прандтля. Сравнение результатов численного и точного аналитического решений.

Для осесимметричного конвективного факела над точечным источником тепла для жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры (1) также были получены точные решения. Нами использовались уравнения, описывающие стационарное конвективное движение над точечным источником тепла в приближении пограничного слоя, в форме, полученной в работе (Mollendorf, Jonson & Gebhart, 1981) и методика работы (Brand&Lahey, 1967). Как и в рассмотренном выше плоском факеле, для каждого значения показателя инверсии γ точное решение возможно для двух избранных значений числа Прандтля.

Первое решение для $Pr = \frac{3+\gamma}{4\gamma}$ имеет вид

$$f(\eta) = \frac{24\eta^2}{24 + (3+\gamma)\eta^2}, \quad \tau(\eta) = 18432 \frac{3-\gamma}{(3+\gamma)^3} \left(\frac{24}{3+\gamma} + \eta^2\right)^{-3}. \quad (9)$$

$$\text{Второе решение для } Pr = \frac{2}{\gamma} : \quad f = \frac{4\eta^2}{4 + \eta^2}, \quad \tau = 512(3-\gamma)(4 + \eta^2)^{-4} \quad (10)$$

Из (7)-(10) видно, что точное решение плоского (осесимметричного) факела имеет физический смысл, лишь если $\gamma < 5$ ($\gamma < 3$).

В третьей главе рассматривается возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости с температурной инверсией плотности в соответствии с формулой (1) при $\gamma = 2$ в условиях заданного теплового

потока (рис.2). Формулируется краевая задача для амплитуд возмущений вертикальной скорости W и температуры θ :

$$\lambda \Delta W \frac{1}{Pr} = \Delta^2 W - k^2 Ra(z_i - z)\theta, \quad \lambda \theta = \Delta \theta + W. \quad (11)$$

С граничными условиями:

$$z=0: W' = 0, W = 0, \theta' = 0; \quad z=1: W'' = 0, W = 0, \theta' = 0 \quad (12)$$

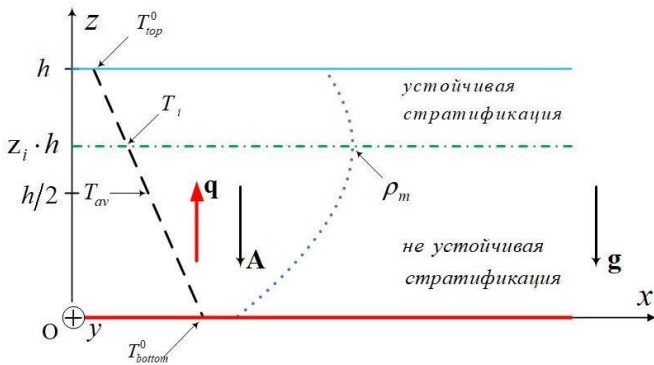


Рис.2. Геометрия задачи о начале конвекции талой воды в бесконечном горизонтальном слое. Введена декартова система координат (x, y, z) . Верхняя граница свободная и недеформируемая, нижняя твердая. z_i - безразмерная толщина неустойчиво стратифицированного слоя в состоянии механического равновесия. Пунктирной(точечной) линией показано распределение температуры(плотности) в состоянии механического равновесия.

Задача (11)-(12) решалась аналитически в длинноволновом приближении путем разложения по малому параметру k^2 (квадрату волнового числа) и численно методом пристрелки с использованием метода Рунге-Кутта-Фельберга для возмущений с конечной длиной волны.

Для нейтральной кривой длинноволновых возмущений получена формула:

$$Ra_{cr}(0) = \frac{320}{z_i - 5/9} \quad (13)$$

Отсюда видно, что длинноволновые возмущения существуют лишь при $z_i > 5/9$ (≈ 0.56), т.е. когда неустойчиво

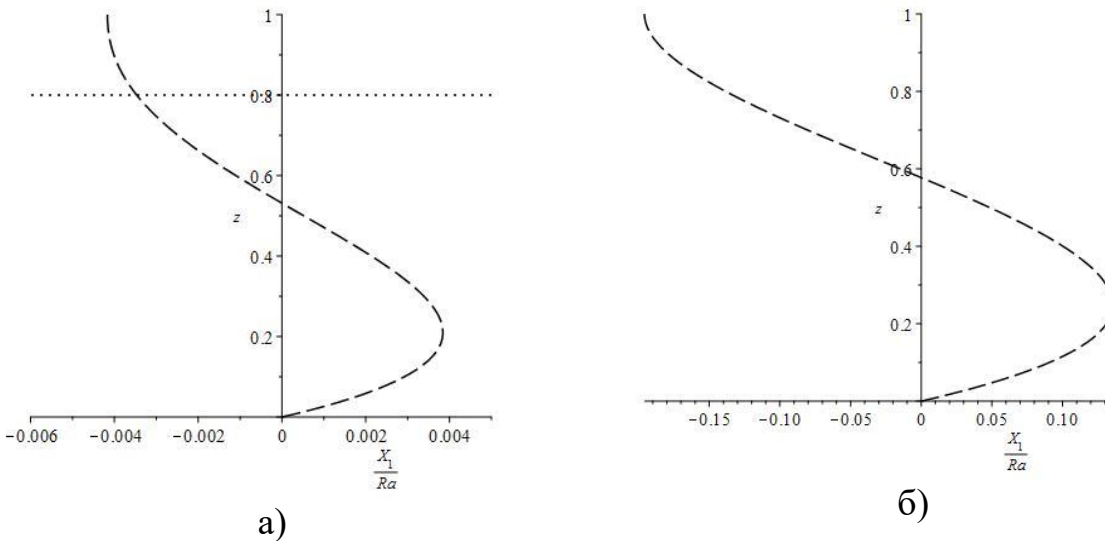


Рис.3. Профиль нормированной на число Релея Ra горизонтальной скорости нейтрального длинноволнового возмущения при $z_i = 0.8$ (а) и $z_i = 10$ (б). Точечной горизонтальной линией отмечена верхняя граница неустойчиво стратифицированного слоя.

стратифицированный слой в 1.25 раза или более толще устойчиво стратифицированного. Анализ разложения инкремента λ по k^2 позволяет получить, что при $z_i < 0.61$ ячеистые возмущения становятся наиболее опасными. Анализ первого члена X_1 разложения возмущения горизонтальной скорости длинноволнового возмущения по k^2 позволяет проследить влияние положения точки инверсии z_i на структуру критического длинноволнового возмущения (рис.3). Рис.3а соответствует ситуации, когда толщина неустойчиво стратифицированного слоя ($z_i = 0.8$)

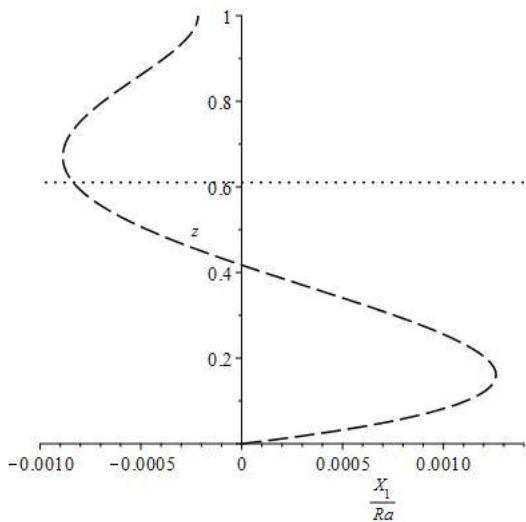


Рис.4. Профиль нормированной на число Релея Ra горизонтальной скорости нейтрального длинноволнового возмущения при $z_i = 0.6104$. Точечной горизонтальной линией отмечена верхняя граница неустойчиво стратифицированного слоя.

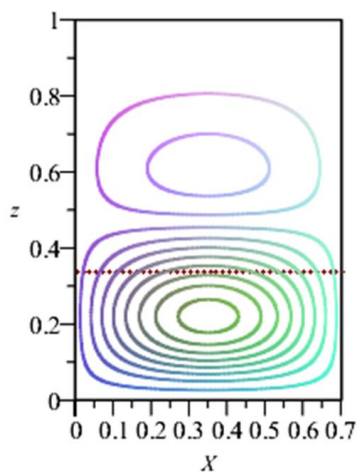


Рис. 5. Функция тока критического конечноволнового возмущения при $z_i = 0.333$. Пунктирной линией отмечена верхняя границы неустойчиво стратифицированной области слоя.

в 4 раза превосходит толщину устойчиво стратифицированного слоя ($1 - z_i = 0.2$). Видно, критическое возмущение имеет вид двух примерно равных по толщине встречных потоков. Такое течение можно интерпретировать как бесконечно вытянутый по горизонтали вихрь. Причем видно, что максимальная скорость течения достигается на свободной поверхности.

Рис. 3б соответствует случаю, когда весь слой неустойчиво стратифицирован и зависимость плотности жидкости от температуры практически линейна. Из рис.3 видно, что уменьшение толщины неустойчиво стратифицированного слоя приводит к уменьшению скорости на поверхности. С приближением z_i к значению 0.61, соответствующему поро-

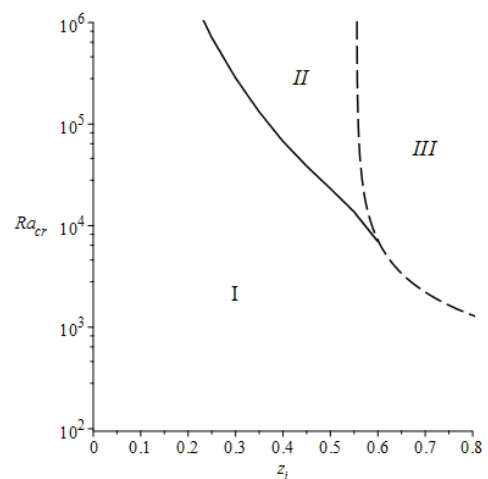


Рис. 6. Границы устойчивости равновесия относительно длинноволновых (штриховая линия) и коротковолновых (сплошная линия) возмущений.

гу возникновения ячеистых возмущений, скорость на свободной поверхности приближается практически к нулю (рис.4). Вид критического ячеистого возмущения представлен на рис. 5. Критическое вихревое возмущение проникает глубоко в устойчиво стратифицированную область слоя. Над интенсивным вихрем располагается слабый вихрь, занимающий практически половину ячейки по высоте. Видно, что скорость жидкости на свободной поверхности мала. На рис.6 приведена карта устойчивости состояния механического равновесия (покоя) слоя относительно рассмотренных типов возмущений. В области I состояние механического равновесия устойчиво. В области II оно неустойчиво относительно ячеистых возмущений, а в области III – относительно длинноволновых.

В четвертой главе сначала в параграфе 4.1 анализируется влияние конечности длины (аспектного отношения) прямоугольной горизонтальной полости на возникновение неустойчивости и возникающих плоских надкритических режимов. Верхняя граница полости полагается свободной, а остальные границы твердыми. На горизонтальных границах (твердой нижней и свободной верхней) задан постоянный тепловой поток, боковые полагаются теплоизолированными, полагается, что плотность жидкости линейно зависит от температуры (рис.7). Для воды такие условия выполняются при температуре, близкой к комнатной, число Прандтля полагалось $Pr = 7$.

В пп. 4.1.1 приведены результаты расчетов надкритических течений в интервале до сорока надкритичностей $r = Ra/Ra_c$. Рассмотрены полости с

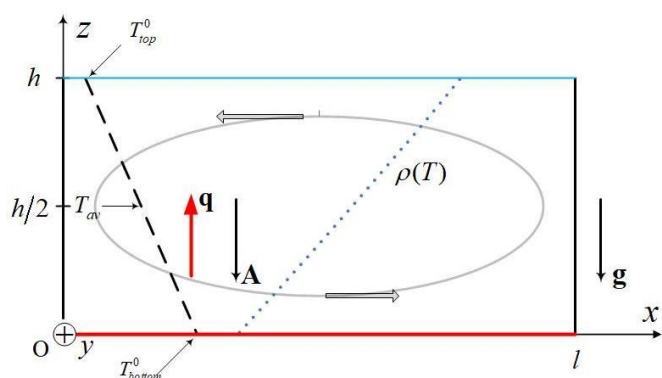


Рис. 7. Геометрия задачи о возникновении конвекции воды в вытянутой по горизонтали прямоугольной полости. Верхняя граница свободная и недеформируемая, нижняя твердая, а боковые – твердые и теплоизолированные.

отношениями длины к высоте от 1:1 до 5:1, т.е. с аспектным отношением $L = l/h = 1, 2, 3, 4$ и 5. В состоянии покоя в полости установится равномерное распределение:

$$T = Ah - Az, \quad (14)$$

где A – величина заданного постоянного градиента температуры, порождаемого вертикальным потоком тепла \mathbf{q} .

Уравнения свободной тепловой конвекции вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска для переменных (ψ, φ, T) могут быть записаны в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Delta \varphi - Gr \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\Delta T}{Pr}, \quad \Delta \psi + \varphi = 0. \quad (15)$$

Термокапиллярным эффектом, эффектами испарения и излучения на верхней свободной границе пренебрегаем. Нижняя граница считается твердой. Тогда граничные условия запишутся в виде:

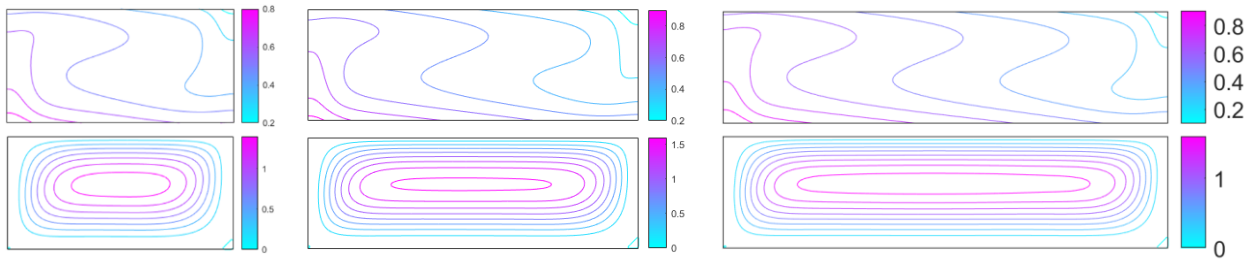
$$z=0: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -1, \quad z=1: \quad \psi = \varphi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -1. \quad (16)$$

Задача (15)-(16) при любых значениях числа Грасгофа Gr , Прандтля Pr и аспектного отношения L имеет решение, соответствующее состоянию механического равновесия:

$$\psi^0 = \varphi^0 = 0, \quad T^0 = 1 - z. \quad (17)$$

Задача (15)-(16) решалась численно конечно-разностным методом, все пространственные производные аппроксимировались центральными разностями на равномерной сетке. В большинстве расчетов шаг сетки полагался равным $h = 1/64$. Рассмотрены полости с аспектным отношением от $L=1$ до $L=5$. Была использована явная схема с постоянным шагом по времени $h^2/10$. Уравнение Пуассона для функции тока решалось методом последовательной верхней релаксации. Значения завихренности на твердых гранях (нижней и двух боковых) получались по формуле Тома. На свободной верхней границе завихренность полагалась равной нулю.

Расчеты для $L = l/h = 1, 2, 3, 4$ всегда приводили к надкритическому крупномасштабному одновихревому течению (рис.8).



а) $L = 2$

б) $L = 3$

в) $L = 4$

Рис. 8. Изотермы и линии тока надкритического конвективного течения в полостях с различным аспектным отношением значения числа Грасгофа $Gr = 3000$.

Это является проявлением длинноволновой природы неустойчивости, т.к. в бесконечном слое, т.е. при $L = \infty$, наиболее опасны длинноволновые возмущения. Однако если $L = 5$, длинноволновая природа неустойчивости проявляется не так прямолинейно. Хотя и в этом случае крупномасштабное одновихревое течение наиболее предпочтительно, оно устанавливается путем ряда гистерезисных переходов между трехвихревыми и двухвихревыми надкритическими течениями (рис.9).

Таким образом, длинноволновая природа неустойчивости в жидкости без тепловой инверсии плотности проявляется уже в умеренно вытянутой полости с аспектным отношением $L = 2$.

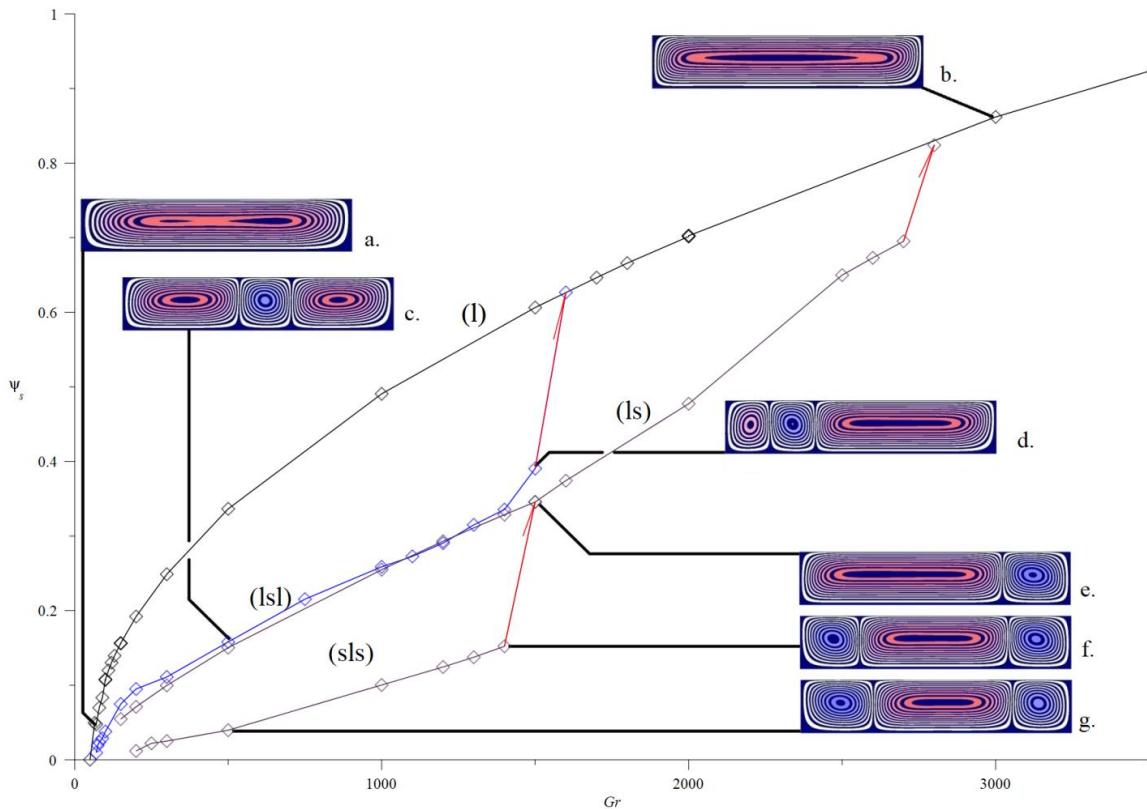


Рис. 9. Зависимости функции тока ψ_s четырех типов надкритических стационарных конвективных течений в полости с $L=5$. Переходы между течениями отмечены стрелками. В результате переходов устанавливается крупномасштабное одновихревое течение.

В параграфе 4.2 приводится постановка задачи о конвекции в горизонтальной полости для случая когда плотность жидкости зависит от температуры по

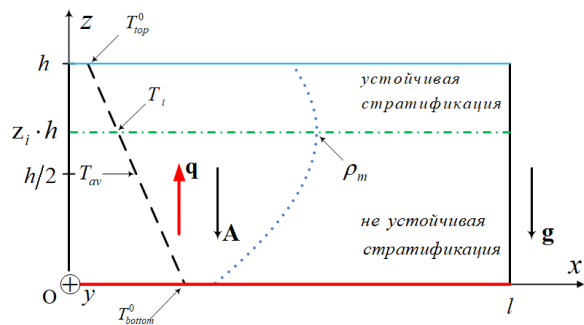


Рис. 10. Геометрия задачи. Верхняя граница свободная и недеформируемая, нижняя твердая, а боковые – твердые и теплоизолированные. Равновесное распределение температуры $T^0(z)$ показано пунктирной линией, а распределение плотности в состоянии механического равновесия $\rho^0(z)$ – точечной.

квадратичному закону в соответствии с формулой (1) при $\gamma=2$. Для воды такая зависимость выполняется при температуре, близкой к 4°C , число Прандтля в расчетах полагалось $\text{Pr}=10$, а аспектное отношение было равно двум (рис.10). Состояние механического равновесия, когда жидкость покоится, в новых переменных и безразмерной форме запишется в виде:

$$\psi^0 = \varphi^0 = 0, \quad T^0 = z_i - z \quad (18)$$

Решалась задача, отличающаяся от (15)-(16) заменой члена $\text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x}$ на

$$\text{Gr} \cdot T \frac{\partial T}{\partial x} :$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Delta \varphi - \text{Gr} T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\Delta T}{\text{Pr}}, \quad \Delta \psi + \varphi = 0. \quad (19)$$

Задача (19),(16) с начальными условиями (18) решалась численно конечно-разностным методом, описанным выше. Аспектное отношение полагалось равным двум ($L=2$). Рассмотрено два значения равновесной толщины неустойчиво стратифицированного слоя - $z_i=0.5$ (равная толщина устойчиво и неустойчиво стратифицированных слоев) и $z_i=0.75$ (толщина неустойчиво стратифицированного слоя в три раза больше толщины устойчиво стратифицированного).

Расчеты показали, что в случае $z_i=0.5$ последовательное увеличение числа Грасгофа приводит к двум видам надкритического течения: I - четырехвихревому (рис.11а и рис.11б) и II - восьмивихревому (рис.11в и рис.11г). Переход от режима I к II и обратно происходит гистерезисным образом (кинетическая энергия (максимальное значение функции тока) представлена на рис.12а (рис.12б)). Пунктирной линией на рис.12а указана линейная зависимость $E = 2.66 \cdot 10^{-5} \cdot (Gr - 2.56 \cdot 10^3)$, экстраполируя эту зависимость на ноль, получаем критическое значение числа Грасгофа $Gr_{cr}(2;0.5) = 2.56 \cdot 10^3$. Критическое число Грасгофа для бесконечного слоя, полученное в линейной теории главы 3, равно $Gr_c(\infty;0.5) = Ra_c(\infty;0.5)/Pr = 2320$.

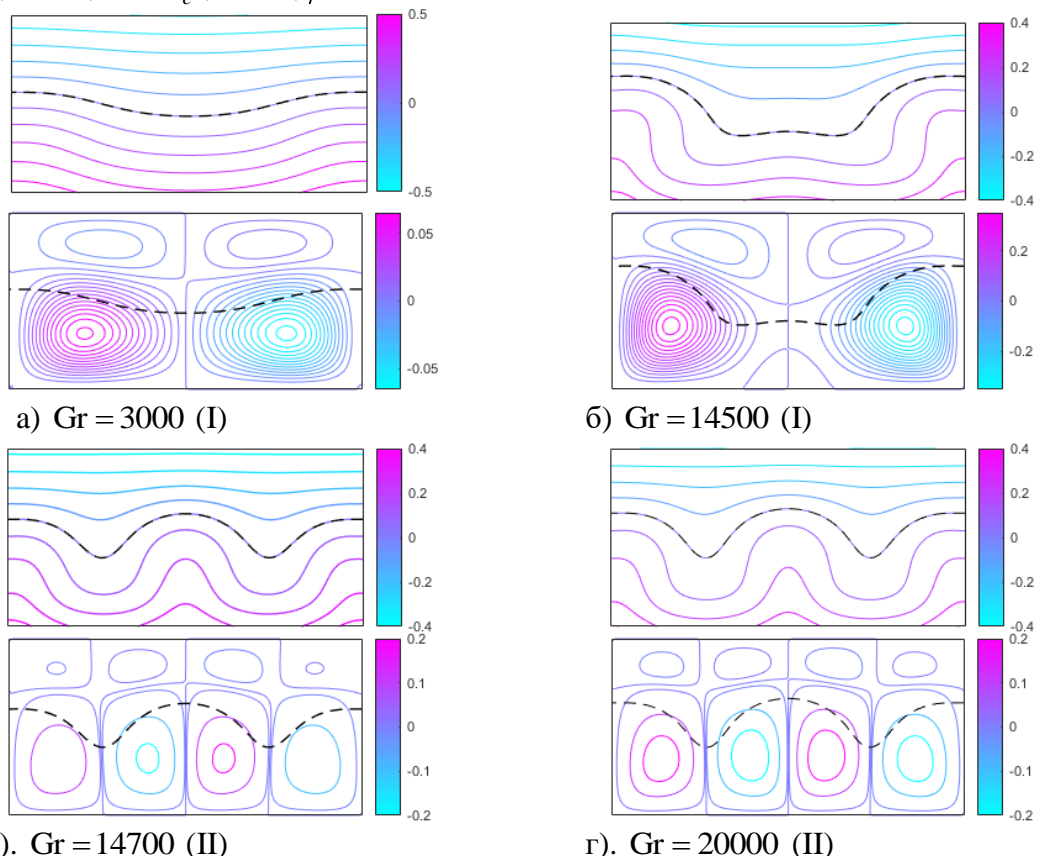


Рис. 11. Изотермы и линии тока режимов I и II надкритического конвективного течения при $z_i=0,5$ для различных значений числа Грасгофа.

Видно, что критические числа для бесконечного слоя и для умеренно вытянутой полости отличаются примерно на 10%. Соплассуются и виды ячеек надкритического течения (рис.11а) и критического возмущения

ячеистой неустойчивости (рис.5) полученного в линейной теории.

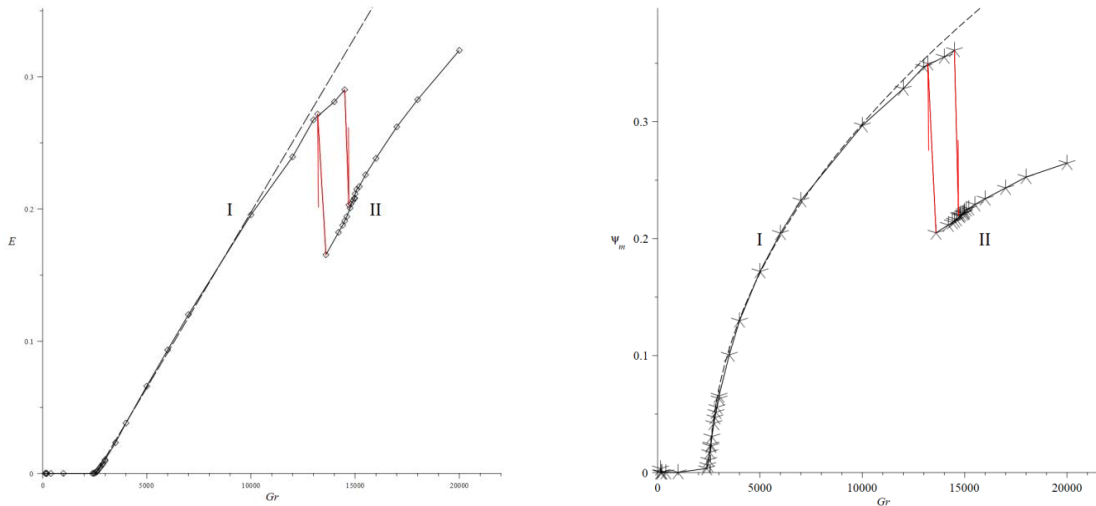


Рис.12. Зависимости кинетической энергии (а) и максимальной функции тока (б) режимов I и II стационарного надкритического конвективного движения в полости для $z_i = 0.5$.

В случае $z_i = 0.75$ (тонкий устойчиво стратифицированный подслоя поверх толстого неустойчиво стратифицированного подслоя) пошаговое увеличение числа Грасгофа от $Gr = 300$ до $Gr = 20000$ не приводит к качественному изменению структуры надкритического течения. Оно остается одновихревым, что подтверждает его длинноволновую природу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В приближении пограничного слоя получены новые точные решения задач о конвективных факелах от линейного и точечного источников тепла в жидкостях со степенной зависимостью плотности от температуры при произвольном показателе степени в уравнении состояния и избранных значениях числа Прандтля.

Впервые корректно решена задача о возникновении свободной конвекции в горизонтальном слое жидкости с температурной инверсией плотности при постоянном тепловом потоке на твердой нижней и свободной верхней границах. Получено аналитическое выражение для зависимости критического числа Рэлея для длинноволновой неустойчивости от безразмерной координаты точки инверсии z_i . Показано, что такая неустойчивость возможна лишь при значениях z_i , больших $5/9$ (≈ 0.56).

Обнаружена и исследована область ячеистой неустойчивости, невозможная в жидкостях с линейной зависимостью плотности от температуры. Показано, что ячеистые возмущения являются наиболее опасными при z_i , меньших 0.61 .

Численно исследована надкритическая конвекция жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры в вытянутых горизонтальных полостях с аспектным отношением $L = 1, 2, 3, 4$ и 5 при

заданном вертикальном тепловом потоке на свободной верхней и твердой нижней границах. Показано, что длинноволновая неустойчивость механического равновесия, характерная для таких тепловых условий на границах, в большей степени проявляется в не слишком вытянутых полостях. В полости с отношением сторон $L=5$ при увеличении числа Грасгофа в начале возникает трехвихревое движение, затем оно перестраивается в двухвихревое, а после этого в одновихревое, либо сразу в одновихревое. Эти переходы сопровождаются гистерезисом.

Численно исследована надкритическая конвекция жидкости с квадратичной зависимостью плотности от температуры в вытянутой горизонтальной полости с отношением сторон $L=2$ при заданном вертикальном тепловом потоке на свободной верхней и твердой нижней границах. Рассмотрено влияние положения точки инверсии на структуру надкритического конвективного течения. Показано, что в случае, когда толщины устойчиво и неустойчиво стратифицированных слоев одинаковы ($z_i = 0.5$), после потери устойчивости механического равновесия возникает конвективное движение с двумя крупными вихрями большой интенсивности, охватывающими весь неустойчиво стратифицированный слой и нижнюю часть устойчиво стратифицированного слоя и двумя меньшими и более слабыми в устойчиво стратифицированном слое. При увеличении числа Грасгофа число вихрей по горизонтали удваивается. При $z_i = 0.75$ возникающее надкритическое движение имеет простую одновихревую структуру.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы: На основе результатов исследования в дальнейшем можно рекомендовать проведение прямого численного моделирования конвективных факелов от локальных источников тепла в трехмерной постановке. При этом важно рассмотреть такие условия нагрева, когда точка инверсии будет располагаться внутри полости. Целесообразно также исследовать возникновение и надкритические режимы проникающей тепловой конвекции в вытянутых по горизонтали полостях с заданным вертикальным тепловым потоком на границах с учетом термокапиллярного эффекта на свободной верхней границе.

**ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ ИЗЛОЖЕНО
В СЛЕДУЮЩИХ ПУБЛИКАЦИЯХ:**

(публикации из списка ВАК выделены жирным шрифтом)

- 1. Шарифулин В.А. Конвективный факел от линейного источника тепла в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 6. С. 27-30.**
- 2. Шарифулин В.А. Осесимметричный конвективный факел в жидкости со степенной зависимостью плотности от температуры // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 1. С.125-127.**

3. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Шарифулин В.А. Возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости с инверсией плотности в условиях заданного теплового потока на границах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 4. С. 23-29.
4. Шарифулин В.А., Любимова Т.П. Надкритические конвективные течения талой воды в открытой горизонтальной прямоугольной области с заданным вертикальным тепловым потоком //Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14. №. 4. С. 472-484.
5. Sharifulin V.A., Lyubimova T.P. Supercritical Convection of Water in an Elongated Cavity at a Given Vertical Heat Flux //Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2021. Vol. 14. №. 2. P. 186-194.
6. Sharifulin V.A., Lyubimova T.P. A hysteresis of supercritical water convection in an open elongated cavity at a fixed vertical heat flux //Microgravity Science and Technology. 2021. Vol. 33. №. 3. P. 1-9.
7. Sharifulin V.A., Lyubimova T.P. Structure of critical perturbations in a horizontal layer of melted water with the prescribed heat flux at the boundaries // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol.208. 012025
8. Sharifulin. V.A. The heated laminar vertical jet in a liquid with power-law temperature dependence of density // Proceedings, International Conference “Advanced problems in thermal convection”, Perm, 2004. P.67-72.
9. Lyubimov D.V., Sharifulin V.A. Onset of convection in a liquid with temperature inversion of density.// Conference “Advanced Problems in Mechanics” July 6 – 10, – 2008. St. Peterburg (Repino), Proceedings, Russia, – P. 431-437.
10. Шарифулин В.А. Структура плоских конвективных факелов в жидкостях с различными степенными зависимостями плотности от температуры. Материалы конференции «Пермские гидродинамические научные чтения–2015» (на CD). Пермь. 2015. С. 56–57.
11. Шарифулин В.А., Любимова Т.П. Надкритическая конвекция воды в вытянутой горизонтальной полости при заданном тепловом потоке на границах. // Материалы Всероссийской конференции «Пермские гидродинамические научные чтения». Пермь. 2019. С. 194-196.