

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт механики сплошных сред  
Уральского отделения Российской академии наук

На правах рукописи



Мандрыкин Сергей Дмитриевич

**Течения жидких металлов в замкнутых полостях  
под действием электромагнитных сил  
и сил плавучести**

1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Фрик П. Г.

Пермь – 2021

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Обзор литературы</b> . . . . .	11
1. Особенности гидродинамики жидких металлов . . . . .	11
2. Конвекция жидких металлов в замкнутых полостях . . . . .	16
3. Электровихревые течения . . . . .	24
4. Численное решение задач гидродинамики . . . . .	28
<b>Глава 1. Конвекция жидкого натрия в коротком наклонном цилиндре</b> . . . . .	41
1.1. Введение . . . . .	41
1.2. Постановка задачи и численная модель . . . . .	42
1.3. Результаты . . . . .	47
1.3.1. Моделирование с применением LES-подхода . . . . .	47
1.3.2. Сравнение с результатами прямого численного моделирования . . . . .	57
1.4. Выводы по главе . . . . .	60
<b>Глава 2. Электровихревое течение жидкого металла в длинном цилиндре с боковым токоподводом</b> . . . . .	62
2.1. Введение. Постановка задачи . . . . .	62
2.2. Экспериментальная установка и методы измерения . . . . .	63
2.3. Математическая модель . . . . .	66
2.4. Результаты . . . . .	68
2.4.1. Лабораторный эксперимент . . . . .	68
2.4.2. Внешнее магнитное поле . . . . .	73
2.4.3. Численное моделирование . . . . .	75
2.4.4. Частотный анализ . . . . .	77

2.5. Выводы по главе . . . . .	80
<b>Глава 3. Электровихревое течение жидкого металла в цилиндрах различного аспектного отношения . . . . .</b>	<b>82</b>
3.1. Введение. Постановка задачи . . . . .	82
3.2. Математическая модель . . . . .	83
3.3. Результаты . . . . .	84
3.3.1. Зависимость структуры течения от силы тока для цилиндра с аспектным отношением $\Gamma = 1/2$ . . . . .	85
3.3.2. Цилиндры с различным аспектными отношениями . . . . .	87
3.4. Выводы по главе . . . . .	89
<b>Глава 4. Электровихревое течение в цилиндре в присутствии слабого магнитного поля . . . . .</b>	<b>91</b>
4.1. Введение. Постановка задачи . . . . .	91
4.2. Математическая модель . . . . .	92
4.3. Результаты . . . . .	94
4.3.1. ЭВТ в отсутствие внешнего магнитного поля . . . . .	94
4.3.2. Магнитное поле Земли . . . . .	96
4.3.3. Сильное вертикальное магнитное поле . . . . .	97
4.3.4. Анализ интегральных характеристик течения . . . . .	99
4.4. Выводы по главе . . . . .	101
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>105</b>

## Введение

### **Актуальность и степень разработанности темы исследования.**

Интенсивные течения жидких металлов (ЖМ) в замкнутых объемах, вызываемые большими градиентами температуры и/или интенсивными электромагнитными полями, возникают во многих современных технологических процессах (металлургия, жидкометаллические системы охлаждения), а также в перспективных технологиях, таких как термоядерные реакторы и жидкометаллические накопители энергии (батареи). Именно проблемы охлаждения токамаков в последнее десятилетие стимулировали активное исследование тепломассопереноса в присутствии сильных магнитных полей, а разработка интересных в прикладном плане крупномасштабных жидкометаллических батарей вызвала новый интерес к широкому спектру течений, обусловленных электровихревыми силами и силами плавучести в многослойных жидкометаллических системах.

Сложности экспериментальных исследований магнитоконвективных течений ЖМ связаны с физическими и химическими свойствами ЖМ (оптическая непрозрачность, химическая активность, высокая температура расплава и т. п.). Численное моделирование осложнено необходимостью решения электро- и гидродинамических задач, а также характерными для жидких металлов низкими числами Прандтля (высокая теплопроводность), то есть существенно более тонким динамическим пограничным слоем, по отношению к температурному. Как следствие, для корректного разрешения пограничных слоев необходимы сетки с большим числом узлов, что неизбежно ведет к существенным затратам ресурсов при численном моделировании.

В последние годы был достигнут существенный прогресс как в экспериментальных исследованиях конвективного тепломассопереноса, электровихревых течений и течений, порождаемых сильными электромагнитными полями, так и в развитии технологий численного моделирования. Последнее означает главным образом возможность изучать течения большей интенсивности. Это позволило

проводить более подробные лабораторные исследования, дополняемые численными экспериментами. Наиболее активно в экспериментальные исследования течений ЖМ вовлечены такие научные институты, как Institute of Fluid Dynamic (HZDR, Германия), University of Göttingen (Германия, г. Геттинген), ИМСС УрО РАН (Россия, г. Пермь), а также ОИВТ РАН (Россия, г. Москва). В численном моделировании таких процессов принимают участие ученые из LIMSI (Франция), институтов HZDR (Германия), Technische Universität Ilmenau (Германия), ИМСС УрО РАН (Россия, г. Пермь), ОИВТ РАН (Россия, г. Москва) и др.

Несмотря на большой прогресс в изучении конвекции и электровихревых течений жидких металлов, остаются нерешенные проблемы, связанные с различными осложняющими факторами, способными существенным образом менять структуру течения и играть ключевую роль в реальных устройствах. К таким факторам могут относиться различные геометрические особенности (аспектное отношение емкости, расположение электродов), либо дополнительные силы, обусловленные, например, отклонением ориентации полости от канонической постановки, наличием внешних силовых полей. Получение зависимости характеристик течения даже от одного из описанных факторов требует рассмотрения целого спектра конфигураций задачи. В то же время, даже с применением современных методов лабораторных и численных экспериментов данная задача часто оказывается затратной как по времени, так и экономически.

Совокупность данных лабораторных экспериментов и прямого численного моделирования актуализирует использование моделей турбулентности в задачах о течениях жидких металлов под действием электромагнитных сил и сил плавуности, так как обеспечивает все лучшую базу для верификации. Благодаря моделям турбулентности, становится возможным разрешение сложных течений жидких металлов на более грубых сетках, чем тех, что требуются при прямом численном моделировании. Все описанные выше факторы делают доступным нахождение в приемлемые сроки подробных зависимостей режимов течения от параметров задачи в ранее неизученных конфигурациях.

**Целью диссертационной работы** является численное и экспериментальное изучение влияния осложняющих факторов на течения жидких металлов в замкнутых полостях под действием электромагнитных сил или сил плавучести. В рамках поставленной цели решены следующие задачи:

1. о влиянии наклона емкости на конвекцию жидкого натрия в наклонном цилиндре единичного аспектного отношения;
2. об электровихревом течении (ЭВТ) жидкого металла в длинном цилиндре с боковым оппозитным токоподводом;
3. о зависимости характеристик ЭВТ жидкого металла от аспектного отношения цилиндра;
4. о влиянии слабого вертикального однородного магнитного поля на ЭВТ жидкого металла в цилиндре.

**Научная новизна** работы состоит в том, что в ней впервые

1. численно в трехмерной постановке исследована турбулентная конвекция жидкого натрия в цилиндре единичного аспектного отношения при ранее не рассмотренных значениях управляющих параметров (чисел Релея и Прандтля), при различных углах наклона емкости к направлению силы тяжести. Изучено влияние угла наклона цилиндра на теплоперенос и структуру течения. Использование метода крупных вихрей позволило в приемлемые сроки получить весь спектр результатов для полного диапазона наклонов (от 0 до 90 градусов с шагом 10 градусов);
2. экспериментально исследовано электровихревое течение галлиевой эвтектики ранее не рассматривавшейся конфигурации при несогласованных топологии течения и геометрии емкости. Экспериментально течение рассмотрено в отсутствие и присутствии внешнего магнитного поля, направление которого параллельно линии, соединяющей электроды. Также чис-

ленно изучено ЭВТ в отсутствие внешнего магнитного поля, поскольку в эксперименте полностью избавиться от внешних полей невозможно;

3. численно исследованы электровихревые течения жидкого металла в замкнутых цилиндрических полостях различного аспектного отношения, в том числе во внешнем однородном магнитном поле, коллинеарном оси симметрии цилиндра, либо направленным к ней под заданным углом. Показано, что электровихревое течение наиболее выражено при малых аспектных отношениях. Обнаружено, что внешнее аксиальное магнитное поле, генерирующее азимутальное течение жидкого металла, приводит к сильному подавлению полоидального электровихревого течения. В слабых магнитных полях подавление происходит не сразу, и имеет место переходный режим, характеризующийся энергиями, на два порядка превосходящими энергии в установившемся течении. Подобные режимы могут играть критическую роль в работе жидкометаллических батарей.

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты, полученные в первой главе, представляют фундаментальный интерес с точки зрения более глубокого понимания особенностей турбулентной конвекции жидких металлов при различных углах наклона между градиентом температуры и направлением силы тяжести. Материалы второй, третьей и четвертой глав дают представление о возможных механизмах управления пространственно-временной структурой электровихревых течений при использовании нестандартных конфигураций подвода тока, различных аспектных отношениях емкости, а также внешних магнитных полей.

С практической точки зрения результаты первой главы могут быть использованы при разработке технологических устройств, в которых используются жидкометаллические теплоносители. Результаты второй главы могут оказаться полезными при учете влияния вторичных течений, возникающих при боковом оппозитном токоподводе, на основное транзитное течение проводящей среды.

Материалы третьей и четвертой глав могут быть востребованы в металлургии и энергетике, в частности, при проектировании жидкометаллических батарей. Это обусловлено тем, что полученные результаты свидетельствуют о существовании режимов течения, способных критическим образом влиять на работу таких устройств. В том числе показано, что слабое внешнее магнитное поле способно привести к развитию сильного азимутального течения и подавлению изначально полоидального течения проводящей среды.

**Методология и методы диссертационного исследования.** Численное решение поставленных задач осуществлялось с использованием современных пакетов OpenFOAM и ANSYS. Экспериментальная часть работы выполнена на оборудовании лаборатории физической гидродинамики ИМСС УрО РАН.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Результаты численного исследования турбулентной конвекции жидкого натрия в замкнутой наклонной цилиндрической полости с длиной равной диаметру, в том числе зависимости чисел Нуссельта и Рейнольдса от угла наклона цилиндра.
2. Результаты численного и экспериментального исследований электровихревых течений в замкнутой цилиндрической полости, при боковом токоподводе двумя оппозитно локализованными электродами.
3. Результаты численного исследования электровихревых течений в цилиндрах различной высоты при локализованном токоподводе на нижнем торце и снятии тока на всем верхнем торце.
4. Результаты численного исследования электровихревых течений жидкого металла в цилиндрической емкости с высотой равной радиусу, в присутствии внешнего однородного вертикального магнитного поля.

**Достоверность результатов** обеспечивается тщательным тестированием методов измерений, использованием качественного измерительного оборудова-

ния, верификацией математических моделей на имеющихся экспериментальных данных и, где это возможно, сравнением с известными результатами других авторов.

**Аппробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: Третья Российская конференция конференция по магнитной гидродинамике, 18–21 июня, 2018, Пермь; XXVII Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках», 3–6 октября, 2018, Пермь; Седьмая российская национальная конференция по теплообмену, 22–26 октября, 2018, Москва; V-я Всероссийская конференция с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения», 26–29 сентября, 2018, Пермь; XXI Зимняя школа по механике сплошных сред, 18–22 февраля, 2019, Пермь; Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 19–24 августа, 2019, Уфа; V международная конференция «Актуальные вопросы электротехнологии», 1–2 октября, 2020; VII всероссийская конференция с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения», 22–24 октября, 2020.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 22 печатных работах: 6 статей в журналах, являющихся рецензируемыми научными изданиями, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук [1–6]; 1 статья в журнале, индексируемом системой РИНЦ [7]; 3 статьи в сборниках трудов конференций [8–10] и 12 тезисов докладов [11–22].

**Личный вклад автора.** Постановка задач, результаты исследования и их интерпретация обсуждались с научным руководителем П. Г. Фриком и И. В. Колесниченко. Автор лично участвовал в подготовке, сборке и наладке экспериментальной установки. Автор лично участвовал в анализе и интерпретации полученных данных. Подготовка и выполнение расчетов в задачах конвекции жидких металлов осуществлялись совместно с А. С. Теймуразовым. Расчеты

электродинамических задач выполнены И. В. Колесниченко. Расчеты гидродинамики в задачах электровихревых течений выполнены автором совместно с И. В. Колесниченко. Автор лично участвовал в обсуждении результатов и подготовке всех статей.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 4 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 118 страниц, из них 61 страница текста, включая 49 рисунков. Библиография включает 139 наименований на 14 страницах.

# Обзор литературы

## 1. Особенности гидродинамики жидких металлов

Жидкие металлы — оптически непрозрачные жидкости, обладающие одновременно как свойствами жидкости (текучесть), так и свойствами, характерными для твердых металлов (большие тепло- и электропроводность). При атмосферном давлении и комнатной температуре в жидком состоянии находится ртуть, а также низкотемпературные сплавы, например, галлиевый сплав GaSnZn.

Движение несжимаемой проводящей неизотермической жидкости описывается системой уравнений, включающей в себя уравнения Навье-Стокса, уравнение индукции магнитного поля в движущейся среде, уравнение теплопроводности, уравнение неразрывности и условие соленоидальности магнитного поля:

$$\begin{aligned}
 \rho(T) \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho(T) \mathbf{g} + \mathbf{f}_L, \\
 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) &= \nu_m \Delta \mathbf{B}, \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \chi \Delta T, \\
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\rho(T)$  — плотность,  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $\mathbf{B}$  — индукция магнитного поля,  $p$  — давление,  $\eta$  — динамическая вязкость,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $\mathbf{f}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$  — объемная сила Лоренца,  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока,  $\nu_m = 1/\mu\mu_0\sigma$  — магнитная вязкость,  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость среды,  $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}$  Н/А<sup>2</sup> — магнитная постоянная,  $T$  — температура,  $\chi$  — температуропроводность. Уравнения магнитной гидродинамики записаны в приближении, что токи смещения малы, а среда электрически нейтральна.

Рассмотрим далее основные критерии подобия, характерные для исследуемых задач: термогравитационной конвекции и магнитной гидродинамики.

Основными критериями подобия в задачах свободной конвекции являются число Грасгофа

$$\text{Gr} = \frac{g\alpha L^3 \Delta T}{\nu^2},$$

характеризующее отношение архимедовой силы к силам вязкости, и число Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi},$$

являющееся физическим параметром среды и не зависящим от конкретной задачи. Оно характеризует соотношение между интенсивностями молекулярного переноса количества движения и переноса теплоты теплопроводностью. Так, при высоких числах Прандтля (например, для воды  $\text{Pr} \approx 7$ ) перенос тепла за счет конвекции более выгоден, нежели теплопередача. И наоборот, при малых числах Прандтля (например, у жидких металлов  $\text{Pr} \sim 10^{-2}$ ) более выгоден перенос тепла за счет теплопередачи.

Помимо представленных безразмерных параметров в задачах тепловой конвекции часто задействуется число Релея, которое является произведением чисел Грасгофа и Прандтля:

$$\text{Ra} = \text{Gr Pr} = \frac{g\alpha L^3 \Delta T}{\nu\chi}.$$

Число Релея позволяет характеризовать сам конвективный процесс для конкретной жидкости. Если оно выше некоторого критического значения, то равновесие становится неустойчивым, и начинается конвективный процесс. Для задач конвекции жидких металлов типичные числа Релея составляют  $\text{Ra} \sim 10^7$  [23, 24].

Также важно упомянуть еще один критерий подобия — число Рейнольдса  $\text{Re}$ , определяющее отношение между инерционными и вязкими силами, т. е. отношение нелинейного к вязкому слагаемому в первом уравнении системы (2):

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu},$$

где  $U$  и  $L$  — характерные скорость и размер в данной задаче. Большие числа Рейнольдса отвечают процессам с развитой турбулентностью. Способы выбора

характерных размера и скорости зависят как от класса задач, так и от конфигурации конкретной задачи. Выделяют критическое число Рейнольдса  $Re_{cr}$ , так что для  $Re < Re_{cr}$  течение является ламинарным, а при превышении данного порогового значения оно может стать турбулентным. Например, для течения между плоскопараллельными пластинами  $Re_{cr} \approx 7700$  [25].

Еще одной интегральной характеристикой в задачах термогравитационной конвекции является число Нуссельта — безразмерный параметр, характеризующий теплоперенос в системе и выражающийся отношением интенсивностей теплообмена за счет конвекции и теплопроводности:

$$Nu = \frac{QL}{\chi \Delta T}.$$

Здесь  $Q$  — тепловой поток на единицу площади. Характерные значения числа Нуссельта в задачах свободной конвекции жидкостей с малым числом Прандтля обычно оказываются порядка  $\sim 10^2$  [23, 26].

Важным безразмерным параметром в задачах магнитной гидродинамики является магнитное число Рейнольдса  $Re_m \equiv LU/\nu_m$ , где  $L$  и  $U$  — характерные масштабы длины и скорости соответственно. Так, все процессы в магнитной гидродинамике можно условно разделить на характеризующие малой ( $Re_m \lesssim 1$ ) и большой ( $Re_m \gg 1$ ) электрической проводимостью среды. В предельном случае  $Re_m \rightarrow \infty$  Альвеном был показан так называемый эффект «вмороженности» магнитного поля в среду, заключающийся в том, что магнитные силовые линии перемещаются вместе с жидкими частицами, как если бы они были приклеены к ним. В случае малых  $Re_m \ll 1$  имеет место безындукционное приближение, которое заключается в том, что магнитное поле под действием движущейся электропроводной жидкости меняется мало и можно считать, что оно задается извне [27].

Типичные значения электропроводности жидких металлов составляют порядка  $\sigma \sim 10 \cdot 10^5$  См/м, а числа Прандтля для них —  $Pr \equiv \nu/\chi \ll 1 \sim 0.01$  [28, 29]. В лабораторных экспериментах и большинстве промышленных

устройств имеет место случай  $Re_m \ll 1$ . Например, в печах постоянного тока характерные сила тока, скорость течения и электропроводность составляют  $I = 8 \cdot 10^4$  А,  $v = 0.5$  м/с и  $\sigma = 0.9 \cdot 10^6$  С/м соответственно [30], что дает  $Re_m \approx 0.6$ . В активно разрабатываемых жидкометаллических батареях ожидается [31] ток порядка  $I = 10 \cdot 10^3$  А, скорость течения  $v = 0.001$  м/с, а электрическая проводимость типового материала — натрия — при рабочей температуре  $\sim 500$  °С составит  $\sigma = 3.3 \cdot 10^6$ , так что при характерном размере  $L = 2.4$  м магнитное число Рейнольдса для ЖМБ составит  $Re_m \approx 0.011$ .

При этом электропроводность жидкого металла примерно в два раза ниже, чем в его твердом состоянии. Поскольку теплопроводность металлов пропорциональна их электропроводности, изменение которой при их плавлении относительно мало, то теплопроводности жидких и твердых металлов одного порядка.

Порядок отношения электромагнитных сил к вязким определяется квадратом числа Гартмана

$$Ha^2 = \frac{\sigma B^2 L^2}{\rho \nu}.$$

Значение  $Ha \leq 1$  отвечает случаю, когда влияние магнитного поля на течение пренебрежимо мало. Характерные значения собственного магнитного поля для электровихревых течений в емкостях с масштабом длины  $L = 0.1$  м и силе постоянного тока  $I = 1000$  А составляют около 0.5 мТл [7], откуда следует  $Ha \approx 2$ .

Также при описании электровихревых течений используются параметр МГД-взаимодействия  $Hm$

$$Hm = \frac{\sigma B^2 L}{\rho U},$$

описывающий отношение электромагнитных сил к инерционным, и параметр ЭВТ

$$S = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 \rho \nu^2},$$

описывающий отношение между силами Лоренца и вязкими силами. Из при-

веденных выше значений материальных параметров следует, что характерные значения безразмерных параметров  $Nm$  и  $S$  оказываются порядка  $Nm \sim 0.01$  и  $S \sim 10^7$ .

Высокие теплопроводность и теплоемкость жидких металлов делают их привлекательными для использования в качестве теплоносителей. Так, например, наиболее изученные благодаря низким точкам плавления натрий и свинец. Такая область приложений обуславливает дополнительный интерес к конвекции жидких металлов, которая активно изучается как численно [24, 32], так и экспериментально [23, 33, 34].

Оптическая непрозрачность, температуропроводность, сравнимая с температуропроводностью теплообменников установки [23, 35], а также высокая агрессивность жидких металлов осложняют их экспериментальное исследование. В частности, становится невозможным использование цифровых трассерных методов (PIV — от англ. particles image velocimetry), а доплеровская анемометрия применима лишь в отдельных случаях (например, при исследовании галлиевых сплавов, находящихся в жидком состоянии при комнатной температуре). Если же изучается процесс теплопереноса в жидком металле, то поле скорости можно восстановить при помощи кросс-корреляционного анализа по сигналам с размещенных в металле термопар [23].

Особенностью конвективных течений жидких металлов является большое отношение температурного к динамическому пограничным слоям, то есть динамический пограничный слой имеет очень маленькую толщину. Это осложняет численное моделирование подобных задач, т.к. оно требует существенных вычислительных ресурсов: для одного и того же значения числа Релея необходимо тем большее пространственное разрешение в пограничном слое, чем меньше значения числа Прандтля.

Быстрый рост мощностей вычислительных машин позволяет производить достоверное численное моделирование течений жидких металлов, результаты которого дополняют лабораторные эксперименты. Однако малая толщина ди-

намического пограничного слоя приводит к увеличению времени расчета, по сравнению с моделированием гидродинамических задач для обычных жидкостей (вода, масло и т.п.). В связи с этим, актуальным представляется использование моделей турбулентности, например, метода крупных вихрей, LES (от англ. — large eddy simulation) [36].

## 2. Конвекция жидких металлов в замкнутых полостях

Термогравитационная конвекция — движение жидкости в поле сил тяжести, вызванное неоднородным ее нагревом, одно из наиболее распространенных явлений в природе [25]. Она встречается во многих областях: от фундаментальных процессов (движение среды в звездах и планетах, процессы в атмосфере и океане) до технологических приложений (движения воздушных потоков в системах вентиляции, а также различных расплавов при производстве и т.д.) [37]. Будем рассматривать развитую турбулентную конвекцию, то есть такие режимы течения, которые характеризуются наполненными пространственными и временными спектрами Фурье. При этом ограничимся лишь случаями, когда конвективный процесс протекает в области конечного объема. Наиболее популярной конфигурацией подобной емкости является цилиндр, отношение длины к диаметру которого  $\Gamma = L/D$  порядка единицы. Здесь и далее параметр  $\Gamma$  — аспектное отношение емкости.

Одним из простейших случаев термогравитационной конвекции является задача Релея-Бенара, в которой рассматривается плоский бесконечный слой жидкости, заключенный между двумя горизонтальными пластинами, создающими постоянный градиент температуры [38]. Движение среды в таком случае обусловлено силами плавучести: при нагревании жидкой частицы ее массовая плотность уменьшается. В случае, если возмущение достаточно велико и не может быть диссипировано за теплопроводности или сил вязкости, то нагретый объем всплывает [39].

Как правило, для описания конвекции Релея-Бенара несжимаемой жидкости в отсутствие внешних электрического и магнитного полей используют уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска, которое заключается в том, что жидкость полагается слабо сжимаемой, а зависимость ее плотности от температуры учитывается только в правой части уравнения для скорости. Тогда система уравнений (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + g \alpha T \mathbf{e}_z, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \chi \Delta T, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь  $t$  — время,  $\mathbf{v}$  — скорость движения жидкости,  $T$  — температура,  $P$  — давление,  $\rho_0$  — среднее значение плотности,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения,  $\chi$  — температуропроводность,  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор в направлении силы тяжести,  $g$  — ускорение свободного падения.

Ключевой вопрос в задачах конвекции Релея-Бенара заключается в том, чтобы установить, как зависит процесс от параметров задачи. Это означает, что требуется найти зависимости чисел Нуссельта  $Nu$  и Рейнольдса  $Re$  от чисел Релея  $Ra$  и Прандтля  $Pr$ . Существует ряд теорий, попытавшихся дать ответа на этот вопрос, подробный обзор которых произведен в работах [40, 41]. Для описания искомых зависимостей безразмерных параметров ранние теории предлагали степенные законы вида

$$Nu \sim Ra^{\gamma_{Nu}} Pr^{\alpha_{Nu}}, \quad Re \sim Ra^{\gamma_{Re}} Pr^{\alpha_{Re}}\tag{3}$$

Наиболее простой из ранних теорий является теория предельной устойчивости Малькуса 1954 года. Она основывается на предположении, что толщина температурного пограничного слоя принимает такое значение, что число Релея в погранслое оказывается критическим, что незамедлительно приводит к  $\gamma_{Nu} = 1/3$ . Однако последовавшие прорывные экспериментальные исследования

на жидком гелии [42–45] не подтвердили этот результат. А именно, группой чикагских экспериментаторов была предложена модель зоны смешения, которая позже была доработана [46] и дополнена зависимостью от числа Прандтля. В итоге, было получено значение  $\gamma_{Nu} = 2/7$ . Такое же значение было получено в теории пограничного слоя Shraiman и Siggia [47] в предположении, что пограничный слой является турбулентным. Однако положения, лежащие в основе этой теории, существенно отличаются от используемых в модели зоны смешения, что приводит к различию в показателях для зависимости от числа Прандтля. Кроме того, случай полностью турбулентного пограничного слоя оказывается далек от параметров режима, реализуемого в чикагских экспериментах.

Еще один класс теорий основывался на предположении о существовании предельного универсального режима сверхразвитой турбулентности, реализующегося при числах Релея [40, 41, 48] выше  $10^9$ . Суть такого предельного режима течения заключается в том, что тепловой и скоростной пограничные слои, а следовательно, и теплопроводность и кинематическая вязкость, не участвуют существенным образом в теплопереносе. Тепло переносится плюмами, движимыми гравитацией. В этом случае  $\gamma_{Nu} = 1/2$ , и теплоперенос должен быть более эффективным, чем в случае развитой конвекции ( $\gamma_{Nu} = 2/7$ ). Однако результаты этой теории оказались далеки от полученных в экспериментах, а исследование [49], проведенное в широком диапазоне чисел Релея, показало отсутствие перехода к режиму сверхразвитой турбулентности, и теория была признана несостоятельной.

Большое разнообразие экспериментальных работ, выполненных для конфигураций с различными параметрами, в том числе формами и размерами емкостей, сделали очевидным тот факт, что ни одна из ранее предложенных теорий не может универсально предсказать зависимости  $Nu(Ra, Pr)$  и  $Nu(Ra, Pr)$ . В частности, предсказанные в работах [46, 47] не согласовывались с экспериментальными и численными результатами.

Гроссман и Лозе в серии своих работ [50–53] попытались разработать уни-

версальную теорию, способную описать зависимости  $\text{Nu}(\text{Ra}, \text{Pr})$  и  $\text{Nu}(\text{Ra}, \text{Pr})$  в широком диапазоне значений параметров. В основе теории Гроссмана-Лозе лежат скорости диссипации кинетической и тепловой энергий  $\epsilon_u$  и  $\epsilon_\theta$  соответственно, точные выражения которых можно получить из уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, с учетом соответствующих граничных условий и условия статистической стационарности [47]. Далее, основная идея теории заключается в том, чтобы разделить осреднение по объему обеих скоростей диссипации энергии на две составляющие. Первая из них отвечает за диссипацию энергии в турбулентном ядре ( $\epsilon_\theta^{bulk}$ ), а вторая — в погранслоях ( $\epsilon_\theta^{BL}$ ):

$$\begin{aligned}\epsilon_\theta &= \epsilon_\theta^{bulk} + \epsilon_\theta^{BL}, \\ \epsilon_u &= \epsilon_u^{bulk} + \epsilon_u^{BL}.\end{aligned}$$

Такое разделение мотивировано фундаментальным различием физики во вкладах от турбулентного ядра и погранслоя в скорость диссипации энергии. Таким образом, в зависимости от того, где происходит основная диссипации энергии, выделяют четыре следующих режима:

$$\begin{aligned}\text{I} : & \quad \epsilon_\theta^{bulk} < \epsilon_\theta^{BL} & \quad \epsilon_u^{bulk} < \epsilon_u^{BL}, \\ \text{II} : & \quad \epsilon_\theta^{bulk} > \epsilon_\theta^{BL} & \quad \epsilon_u^{bulk} < \epsilon_u^{BL}, \\ \text{III} : & \quad \epsilon_\theta^{bulk} < \epsilon_\theta^{BL} & \quad \epsilon_u^{bulk} > \epsilon_u^{BL}, \\ \text{IV} : & \quad \epsilon_\theta^{bulk} > \epsilon_\theta^{BL} & \quad \epsilon_u^{bulk} > \epsilon_u^{BL}.\end{aligned}$$

Четыре приведенных режима могут быть дополнены еще несколькими разновидностями. Это деление основывается на соотношении толщин динамического  $\lambda_u$  и теплового  $\lambda_\theta$  погранслоев, а также от того, ламинарный это погранслой, или же турбулентный. В итоге, всего насчитывается девять основных режимов течения. Каждому из них соответствует область на фазовой диаграмме в координатах  $\text{Ra}-\text{Pr}$  (Рис. 1), отвечающая своим показателям в степенных законах (3). Полный перечень режимов, описанный в работе [51], приведен в Таблице 1.

Из Рис. 1 видно, что наиболее изученной является область для веществ с числами Прандтля  $\text{Pr} \gtrsim 1$ . В то же время, наименее изучена область с малыми

Таблица 1. Таблица степенных зависимостей для чисел Нуссельта  $Nu$  и Рейнольдса  $Re$ , в зависимости от режимов течения на плоскости  $Ra-Pr$  [51]

Режим	Преобладание	Погранслои	$Nu$	$Re$
$I_l$	$\epsilon_u^{BL}, \epsilon_\theta^{BL}$	$\lambda_u < \lambda_\theta$	$Ra^{1/4}Pr^{1/8}$	$Ra^{1/2}Pr^{-3/4}$
$I_u$		$\lambda_u > \lambda_\theta$	$Ra^{1/4}Pr^{-1/12}$	$Ra^{1/2}Pr^{-5/6}$
$I_\infty$		$\lambda_u = L/4 > \lambda_\theta$	$Ra^{1/5}$	$Ra^{3/5}Pr^{-1}$
$II_l$	$\epsilon_u^{bulk}, \epsilon_\theta^{BL}$	$\lambda_u < \lambda_\theta$	$Ra^{1/5}Pr^{1/5}$	$Ra^{2/5}Pr^{-3/5}$
$II_u$		$\lambda_u > \lambda_\theta$	$Ra^{1/5}$	$Ra^{2/5}Pr^{-2/3}$
$III_u$	$\epsilon_u^{BL}, \epsilon_\theta^{bulk}$	$\lambda_u > \lambda_\theta$	$Ra^{3/7}Pr^{-1/7}$	$Ra^{4/7}Pr^{-6/7}$
$III_\infty$		$\lambda_u = L/4 > \lambda_\theta$	$Ra^{1/3}$	$Ra^{2/3}Pr^{-1}$
$IV_l$	$\epsilon_u^{bulk}, \epsilon_\theta^{bulk}$	$\lambda_u < \lambda_\theta$	$Ra^{1/2}Pr^{1/2}$	$Ra^{1/2}Pr^{-1/2}$
$IV_u$		$\lambda_u > \lambda_\theta$	$Ra^{1/3}$	$Ra^{4/9}Pr^{-2/3}$

числами Прандтля. Такие числа Прандтля ( $Pr \ll 1$ ) характерны для жидких металлов [28, 29], как и малая толщина динамического пограничного слоя, в сравнении с тепловым. Таким образом, случай конвекции жидких металлов отвечает областям  $II_l$  и  $IV_l$ , то есть степенные законы запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 II_l : \quad Nu &\sim Ra^{1/5}Pr^{1/5}, \\
 IV_l : \quad Nu &\sim Ra^{1/2}Pr^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Необходимо напомнить об условиях применимости теории Гроссмана-Лозе и допущениях, лежащих в ее основе:

- должна существовать крупномасштабная циркуляция, характерная скорость которой определяет число Рейнольдса;
- динамический погранслои характеризуется толщиной, независимо от расположения в потоке вдоль теплообменников и стенок.

Еще одно упрощение заключается в задании пределов значений безразмер-

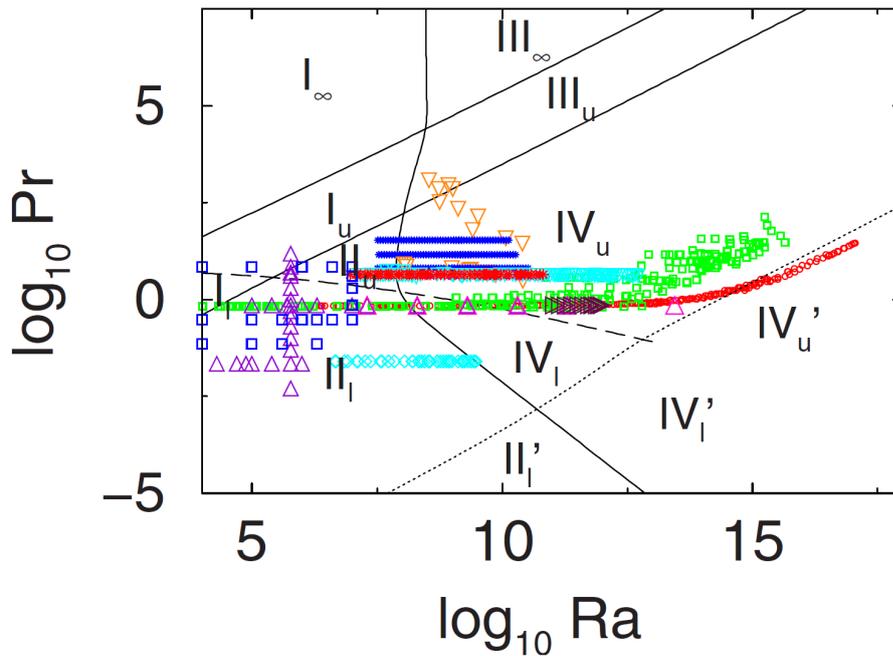


Рис. 1. Фазовая диаграмма на плоскости Ra–Pr (обзорная статья [54]). Символами обозначены рассмотренные режимы течения

ных параметров, для которых действует теория. При больших числах Релея перестает выполняться упрощение, связанное с использованием теории ламинарных пограничных слоев Прандтля–Блаузиуса, поскольку при таких значениях параметров погранслои становятся турбулентными. Эта граница представлена на Рис. 1 пунктирной линией. При этом отнесен к области  $IV_l$  процесс может быть не только вследствие наличия большого градиента температур, но и размера (аспектного отношения) емкости, как это происходит для цилиндра, у которого длина много больше диаметра.

Интерес к изучению задач тепломассопереноса в жидких металлах имеет не только фундаментальный, но и прикладной характер. Он подогревается использованием жидких металлов в качестве теплоносителей в современной атомной энергетике: ядерных [55, 56] и термоядерных [57, 58] реакторах, космических энергетических установках [59]. В подобных установках, в случае остановки циркуляции теплоносителя в контурах охлаждения, может возникнуть свободная конвекция этого теплоносителя. Это приводит к интенсификации переноса тепла, в сравнении со случаем, если бы жидкий металл был неподвижен. В итоге может

возникать плотностная стратификация самого теплоносителя, а также перепад температуры между участками установки, носящий позитивный характер.

В отличие от ядерных реакторов, где аспектное отношение исследуемого участка трубопровода — отношение длины к диаметру  $\Gamma \equiv L/D$  — составляет  $\Gamma \sim 100$  и более [60, 61], в задачах о конвекции Релея-Бенара в замкнутых полостях обычно рассматривается случай  $\Gamma \leq 1$ . Однако в последние несколько лет появились численные и экспериментальные исследования для набора аспектных отношений ( $\Gamma = 1; 5; 20$ ), включающего и бóльшие значения [23, 32–34, 62]. Результаты исследований свидетельствуют о том, что структура конвективного течения и интенсивность теплопереноса в цилиндрах с различным  $\Gamma$  значительно отличается как в случае жидких металлов [23, 33, 34, 63], так и в случае жидкостей с большими значениями числа Прандтля  $Pr$  [62].

Необходимо отметить, что прямые участки трубопровода в описанных выше установках не обязательно находятся в строго вертикальном (центральная ось симметрии коллинеарна вектору силы тяжести) или горизонтальном положениях.

Достижение наибольшего эффективного теплопереноса вдоль цилиндрического канала именно в наклонном положении емкости экспериментально показано в работе [34]. А именно, исследовалась конвекция жидкого натрия в цилиндрической емкости в аспектным отношением  $\Gamma = 20$ . Особое внимание авторы работы уделяют изучению крупномасштабной циркуляции (КМЦ), в которую течение самоорганизуется во всем диапазоне исследуемых параметров задачи, и ее влияния на теплоперенос. Отмечено, что именно КМЦ вносит основной вклад в перенос тепла вдоль оси цилиндра. При малых углах  $\beta$  наклона емкости турбулентные пульсации максимальны и вызывают ослабление потока тепла, а при бóльших наклонах — наоборот, основное течение доминирует, а пульсации малы. Максимальный эффективный теплоперенос, описываемый числом Нуссельта  $Nu$ , достигается при наклоне  $\beta = 65^\circ$ . С дальнейшим увеличением  $\beta$  данный параметр монотонно убывает.

Как и в случае аспектного отношения  $\Gamma = 20$ , для цилиндра  $\Gamma = 5$  авторами экспериментального [33] и численного [32] исследований было показано достижение максимального теплопереноса именно в наклонном положении. При этом максимальный теплоперенос осуществляется при близком к случаю  $\Gamma = 20$  наклоне  $\beta = 63^\circ$ .

Кроме того, внимание уделено важному вопросу о применимости различных типов граничных условий при численном моделировании задач свободной конвекции. Показано, что структура течения для случаев граничных условий первого (ГУ I) и второго рода (ГУ II) идентична. В то же время, интенсивность течения несколько выше в случае ГУ II, что также проявляется в бóльших потоке тепла и уровне пульсаций температуры. Авторы [32] отмечают, что наиболее близкие к полученным в экспериментах результаты дает численное моделирование с применением граничных условий первого рода.

Близкая к канонической конфигурация задачи изучена экспериментально в работе [23], в которой рассматривалась конвекция жидкого натрия в цилиндре с единичным аспектным отношением ( $\Gamma = 1$ ), при углах наклона емкости  $\beta$  в интервале  $0 \leq \beta \leq 90^\circ$ . Средняя температура натрия при этом составляла  $139.8^\circ\text{C}$ , что отвечает числу Прандтля  $\text{Pr} = 0.0094$ .

Несмотря на схожесть в зависимости характерных параметров течения от угла наклона с найденными в исследованиях для  $\Gamma = 20$  [34] и  $\Gamma = 5$  [32], конвекция в случае  $\Gamma = 1$  [23] имеет существенное отличие, заключающееся в сложной пространственно-временной структуре КМЦ при малых углах наклона  $\beta \leq 30^\circ$  [4, 23, 64]. В вертикальном положении цилиндра ( $\beta = 0^\circ$ ) направление КМЦ непостоянно [24]. При рассмотренных  $\beta \geq 10^\circ$  можно выделить плоскость КМЦ, которая совершает крутильные колебания относительно вертикальной оси симметрии цилиндра. Кроме того, наблюдается еще одна мода колебаний, проявляющаяся в периодическом плоскопараллельном смещении плоскости КМЦ относительно оси цилиндра — так называемый «слошинг» (от англ. sloshing — блуждание). С увеличением наклона течение стабилизируется и

колебания затухают, что проявляется в отсутствии доминирующей частоты у крупномасштабной циркуляции при  $\beta \geq 30^\circ$ .

Таким образом, наклон емкости по отношению к направлению силы тяжести является еще одним важным параметром задачи, наравне с градиентом температуры  $\Delta T$ .

Как уже было отмечено ранее, наименее изученной остается область малых чисел Прандтля и больших чисел Релея (см. Рис. 1). Имеющиеся экспериментальные данные [23] для случая  $\Gamma = 1$ ,  $Ra = 1.5 \cdot 10^7$ ,  $Pr = 0.0094$  позволяют произвести описание процесса с хорошей точностью. Тем не менее, в описанных выше экспериментах данные о скорости течения определяются по полученным с термопар сигналов путем кросс-корреляционного анализа, являющегося косвенным методом. Кроме того, набор достаточной статистики при проведении лабораторных экспериментов может быть крайне затратным по времени. Данные проблемы способно решить численное моделирование, дающее полное описание пространственно-временных характеристик течения, то есть позволяющее получить недоступную в экспериментальном исследовании информацию.

Наличие экспериментальных данных, в свою очередь, позитивно сказывается на численном моделировании. Вместо того, чтобы задействовать ресурсозатратное прямое численное моделирование и явно разрешать мелкомасштабную турбулентность, можно воспользоваться, например, методом крупных вихрей, верифицируя модель на результатах лабораторных экспериментов.

### 3. Электровихревые течения

Электровихревые течения (ЭВТ) возникают в результате взаимодействия электрического тока, протекающего через проводящую жидкую среду, и магнитного поля, создаваемого этим током [65] (см. Рис. 2). Необходимым условием возникновения таких течений являются как неоднородность распределения тока в объеме жидкости, так и отличие от нуля ротора электромагнитных сил.

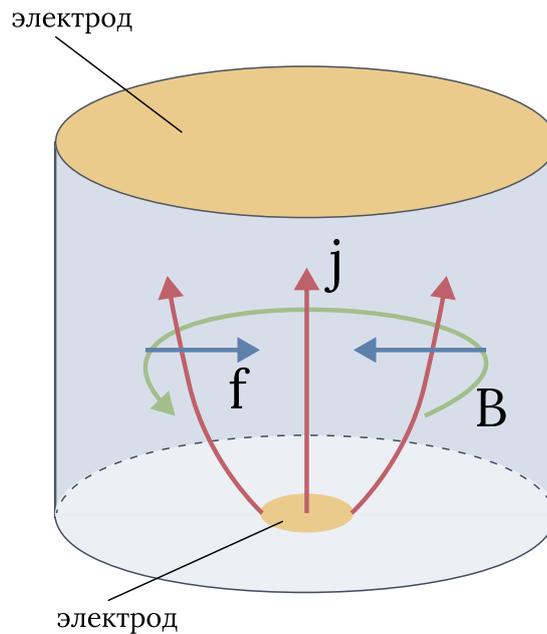


Рис. 2. Схема генерации ЭВТ в типовой конфигурации задачи

ЭВТ имеют место во многих технологических приложениях, большую часть которых составляют промышленная металлургия и современная энергетика. Например, они встречаются в дуговом перемешивателе, применяемом для улучшения кристаллической структуры металлов [66], дуговой печи для плавления металла [30, 67, 68], реакторах восстановления алюминия [69] и т. п.

Новый всплеск исследований данного вида течений обусловлен тенденциями в энергетике. В частности, повышенным интересом к так называемым «зеленым» источникам электроэнергии, неотъемлемой составляющей которых является система накопления энергии и поддержания заданной мощности.

Для решения данной проблемы были предложены жидкометаллические батареи (ЖМБ) — трехслойные системы, состоящие из расплавов двух металлов с разными плотностями, разделенных слоем электролита [31, 70, 71] (см. Рис. 3). Все три составляющие такой батареи оказываются разделены за счет разницы в плотностях. На сегодняшний день ЖМБ считаются перспективным решением для хранения энергии, т. к. они способны выдавать большой ток, имеют большой срок службы и сравнительно низкую стоимость производства [72, 73]. Необходимость в пободных устройствах обусловлена растущим интересом к

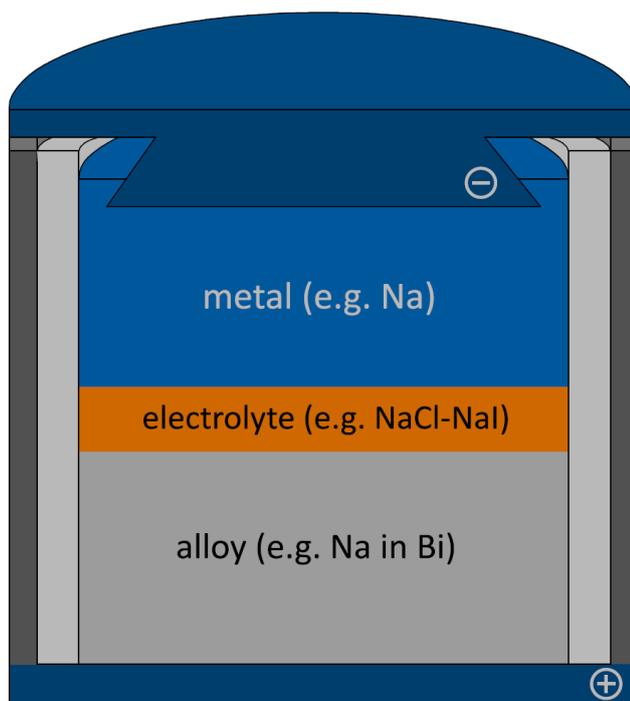


Рис. 3. Схематическое представление жидкометаллической батареи (рисунок из работы [31])

использованию возобновляемых источников энергии, которые требуют масштабируемых накопителей энергии [74, 75]. Как правило, такое устройство имеет цилиндрическую форму, однако возможны прямоугольная и прочие формы. Рабочая температура ЖМБ довольно высока, что обуславливается необходимостью поддерживать в расплавленном состоянии все три компонента. Например, это могут быть  $\text{Na}_2\text{S}_4$  и  $\text{NaNiCl}_2$ , разделенные расплавом некоторой соли. В процессе разряда батареи верхний слой металла отдает электроны. Ионы, проходя через слой электролита, переходят в нижний слой расплава. В отсутствие коррозии эта реакция должна быть полностью обратима [76]. Подробный обзор истории развития и функциональных особенностей ЖМБ приведен в [71].

Наличие нагрева, многокомпонентного состава среды, а также проходящего через нее постоянного электрического тока высокой плотности создают в таких системах возможности для развития целого ряда неустойчивостей, основные из которых: конвекция Релея-Бенара, конвекция Марангони, электровихревые течения, Тейлеровская неустойчивость, а также длинно- и коротковолновые неустойчивости [71]. Отдельно остановимся именно на ЭВТ.

Как уже было отмечено выше, жидкометаллические батареи рассчитаны на работу при очень высоких токах, характерные значения которых составляют тысячи ампер. Это неминуемо ведет к возникновению ЭВТ, которые при таких токах нестационарны, что создает опасность чрезмерной деформации утонения слоя электролита [77, 78], последующего короткого замыкания [76, 79, 80] и вывода батареи из строя. Таким образом, интерес представляет исследование возможности управления ЭВТ в конфигурации ЖМБ.

В то же время, полное устранение ЭВТ нежелательно, поскольку за счет них в жидкометаллических батареях осуществляется позитивная функция перемешивания расплава. Такое перемешивание позволяет выравнивать температурные неоднородности в расплаве, тем самым снижая вероятность возникновения термогравитационной конвекции [81] и подавляя формирование интерметаллидов, которые отрицательно сказываются на емкости батареи [82]. Это актуализирует вопрос об управлении структурой и интенсивностью электровихревых течений.

Хорошо изучены ЭВТ в ряде канонических постановок, реализующих локализованный токоподвод и обладающих осевой симметрией. К таким относятся, к примеру, полусферические чаши [30, 67, 83]. В отличие от канонических задачи, в реальных промышленных установках обычно имеют место случаи распределенного токоподвода [84, 85] и емкостей в виде плоских слоев [86–88].

Как правило, геометрия полости согласована с топологией возникающих ЭВТ: тороидальный вихрь заключен в полусфере или цилиндре, плоские вихри зажаты в слое и т. д. Однако меньшее внимание уделяется задачам, где топология возникающего ЭВТ противоречит «естественному» для полости течению жидкости. Например, если полость имеет форму цилиндра, и ток подводится не аксиально, а к его боковой стенке [2, 3, 7]. В таких постановках ЭВТ оказывается неустойчиво даже при сравнительно малой величине электрического тока [1].

Помимо описанных параметров (форма емкости, плотность электрического тока, вид токоподвода) на структуру и интенсивность ЭВТ может влиять внешнее магнитное поле [2, 83, 89]. Известно, что если внешнее магнитное поле

приложить к области, в которой локализованным токоподводом сгенерировано ЭВТ, то может возникнуть вторичное вихревое течение [83]. Его интенсивность зависит как от топологий внешнего поля и токоподвода. При этом воздействие внешнего поля оказывается существенным даже при его величине, сопоставимой с магнитным полем Земли [89]. Поэтому при разработке устройства, в котором реализуется ЭВТ, важно учитывать как внешние поля сопутствующего оборудования, так и географическое положение (магнитное поле Земли). В то же время, малоизученными остаются вопросы о влиянии на течение наклона внешнего однородного магнитного поля и зависимости интегральных характеристик процесса от величины приложенного магнитного поля.

Таким образом, интерес представляет изучение ЭВТ в постановках с несогласованными топологией возникающего течения и геометрии емкости, в которой находится жидкий металл, а также исследование устойчивости данного вида течений к воздействию внешнего однородного магнитного поля различных конфигураций.

#### **4. Численное решение задач гидродинамики**

Движение вязкой сплошной среды описывается уравнениями Навье-Стокса — нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, точное решение которых можно найти только в отдельных предельных случаях. Например, течение Пуазейля или течение Куэтта. Однако в реальных задачах структура течения часто устроена более сложным образом. Кроме того, из экспериментальных исследований не всегда удается получить весь спектр информации об изучаемом процессе. Некоторые лабораторные исследования могут быть крайне сложны, а в отдельных случаях вообще нереализуемы, особенно если речь идет об экспериментальной магнитной гидродинамике. Таким образом, необходимым и важным является численное решение задач гидродинамики [90].

Сегодня, благодаря быстрому росту доступных вычислительных мощностей

и программного обеспечения с открытым исходным кодом, открывается все больше возможностей для численного моделирования задач гидродинамики, в том числе сложных турбулентных течений.

Основы экспериментальной и теоретической гидродинамики были заложены еще в 19 веке [90]. С ростом вычислительной мощности компьютеров во второй половине 19 века, эти два основных подхода были дополнены третьим — численным моделированием, что дало начало вычислительной гидродинамике (CFD — от англ. computational fluid dynamics) [90].

Развитие CFD активно стимулировалось прикладными задачами, востребованными во многих промышленных направлениях. Начиная с 1980-х годов вычислительная гидродинамика становится одной из составляющих процесса проектирования высокотехнологичного оборудования. Компьютерное моделирование задачи позволяет значительно сократить финансовые и временные затраты на получение характеристик устройства. Это, в свою очередь, привело к появлению индустрии коммерческих CFD пакетов, например, ANSYS, FLUENT, COMSOL. Однако не меньшую популярность имеют пакеты с открытым исходным кодом. Наиболее известные из них — OpenFOAM, Nek5000, Elmer, TARANG.

Сегодня вычислительная магнитная гидродинамика активно используется в таких областях как промышленная металлургия, атомная энергетика, аэрокосмическая промышленность, автомобилестроение, строительная индустрия, техническая химия, электроника, экология, кораблестроение, машиностроение, энергетика, астрофизика и др. [91]

Старт к быстрому развитию вычислительной гидродинамики был дан с появлением компьютеров в 50-х годах XX века. Довольно скоро стало понятно, что аппроксимирующие дифференциальные уравнения и конечно-разностные схемы могут быть неустойчивыми, это дало начало развитию теории устойчивости и сходимости разностных схем. Теорема Лакса — необходимое и достаточное условие сходимости дифференциальных уравнений — была сформулирована

одновременно несколькими учеными с разных позиций, в дополнение к уже предложенному в 1928 году в работе Р. Куранта [92] условию устойчивости разностных схем для решения уравнений гиперболического типа.

В середине 1950-х годов Дж. Дугласом, Д. Писменом и Г. Рэчфордом был предложен метод переменных направлений решения многомерных задач, который оказал большое влияние на развитие алгоритмов в различных областях прикладной математики. В это же время Н. Булеевым велась разработка метода неполной факторизации, положившего начало новому направлению эффективных итерационных алгоритмов решения систем уравнений с разреженными матрицами. Большой вклад в развитие современных методов вычислительной гидродинамики был внесен Лос-Аламосской лабораторией США, которой были разработаны такие методы как методы частиц в ячейках (Ф. Харлоу), элейровы методы, лагранжевы методы и др. А. Самарским [93, 94] и другими советскими математиками были разработаны методы расщепления, сводящие одну многомерную задачу к нескольким одномерным. Еще один метод — метод дифференциального приближения — для анализа аппроксимации и устойчивости конечно-разностных схем, был сформулирован Н. Яненко и Ю. Шокиным [95].

Начало развития многосеточных методов, являющихся сегодня одними из наиболее эффективных итерационных методов решения уравнений переноса, было положено в методе, предложенном Р. Федоренко. В конце 60 – начале 70-х гг. группой Д. Сполдинга, исследующей процессы горения, была разработана модель обрыва вихря (Eddy-Break-Up) турбулентного горения. На основе работ А. Колмогорова эта группа развила  $k$ - $\varepsilon$  модель турбулентности, известную сейчас как стандартная  $k$ - $\varepsilon$  модель Лаундера-Сполдинга. Важно также отметить метод SIMPLE (полуявный метод для уравнений со связью по давлению, от англ. Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) численного решения уравнений Навье-Стокса, предложенный С. Патанкармом [96], который до сих пор используется в большинстве современных CFD-пакетов. В дальнейшем участниками данной группы (Б. Лаундер, С. Поуп и др.) был внесен значительный вклад

в развитие современных моделей турбулентности, таких как дифференциальные и алгебраические модели переноса напряжений Рейнольдса [91].

Численное решение задачи начинается с ее дискретизации, которая может производиться различными способами. Это подразумевает построение сетки, которая делит область решения задачи на множество подобластей [97]. Для дискретизации уравнений гидродинамики используются метод конечных разностей, метод конечных элементов, конечных объемов, а также спектральные методы.

Метод конечных разностей является наиболее простым и давно известным методом численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Это наиболее сподручный в реализации метод для случаев простой геометрии.

В первую очередь выполняется дискретизация задачи, то есть область непрерывного изменения аргументов заменяется дискретным множеством точек (узлов), которое называется сеткой. Функции непрерывного аргумента тогда становятся функциями дискретного аргумента. В каждой точке полученной расчетной сетки дифференциальное уравнение (ДУ) представляется с помощью замены частных производных конечными разностями. Таким образом, исходное ДУ преобразуется в систему из  $N$  алгебраических уравнений, где  $N$  — число узлов сетки. Для представления производной в виде конечной разности обычно используется разложение рассматриваемой функции в ряд Тейлора вблизи заданной точки. Различные конечно-разностные аппроксимации имеют разный порядок точности. Выбор той или иной из них определяется задачей. Рассмотрим в качестве примера простейший одномерный случай. Произведем разложение некоторой искомой функции  $f(x)$  конечным числом членов ее разложения в ряд Тейлора в окрестности данного узла сетки:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + h_{i+1}f'(x_i) + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}h_{i+1}^n f^{(n)}(x_i) + O(h^n) + \dots,$$

где  $x_i = ih_i$ ,  $h_i$  — шаг сетки в данном узле,  $i = 0, 1, \dots, N$ . В простейшем случае

для равномерной сетки  $h_i = h_{i+1} = \dots = h_N = h$  получим

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h),$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)}{2h} + O(h^2), \dots$$

Данный метод прост в реализации и эффективен в случае, если используется структурированная сетка, то есть такая, в которой каждый узел однозначно определяется своими индексами (к примеру,  $i, j, k$ ) и соответствующими координатами. Однако недостатком метода конечных разностей является трудность реализации на нерегулярной сетке, а также то, что в общем случае он не консервативен, то есть не обеспечивает выполнения интегральных законов сохранения, справедливых для исходных ДУ [94, 98, 99].

Метод конечных элементов позволяет решать задачи с произвольными сложными геометриями, что делает его популярным для использования в теории упругости, механике твердого деформируемого тела [100]. Однако в вычислительной гидродинамике он оказывается менее привлекательным, по сравнению с методом конечных объемов или спектральными методами.

Расчетная область разбивается на конечное число подобластей (элементов), каждая из которых аппроксимируется непрерывной кусочно-гладкой финитной функцией. Соответственно, каждая такая функция отлична от нуля только в том интервале, на котором она определена, т. е. на данном конечном элементе. В качестве аппроксимирующих (базисных) функций обычно используют полиномы, которые определяются с помощью узловых значений исходной непрерывной величины. При этом полином выбирается так, чтобы вдоль границ элемента сохранялась непрерывность этой величины. Число базисных функций равно числу узлов полученной сетки, для различных узлов они обладают свойством ортогональности. Метод конечных элементов — вариационный метод, он опирается на вариационную задачу о минимуме аппроксимации исходного решения базисными функциями. Ортогональность невязки аппроксимации к базисным функциям является критерием «правильности» выбора решения [101, 102].

Метод конечных объемов, как и прочие численные методы, используемые для моделирования течений жидкости, преобразует исходную систему ДУ в частных производных к системе линейных алгебраических уравнений. Данный метод начинается с интегральной записи законов сохранения. Расчетная область разбивается на конечное число подобластей, называемых контрольными объемами (КО), для каждого из которых записываются законы сохранения. При этом вычислительный узел устанавливается в центре КО (также можно сначала определить вычислительные узлы, а уже затем построить КО вокруг них). Далее, аппроксимируются квадратурами объемные и поверхностные интегралы. В результате всех описанных преобразований получаем систему линейных алгебраических уравнений, каждое из которых соответствует одному КО.

Данный метод подходит как для регулярных, так и для нерегулярных сеток, для различных геометрий, а также он консервативен. Однако, в сравнении с методом конечных разностей, в трехмерном случае метод конечных объемов оказывается более сложным, т. к. в нем требуется три уровня аппроксимации — интерполяция, дифференцирование и интегрирование [97, 103]. Этот метод также известен как интегроинтерполяционный [104]. С помощью метода конечных объемов можно получить монотонные схемы высокого порядка точности для уравнения конвекции-диффузии [105]. Главным преимуществом этого метода перед методом конечных разностей является возможность работы с уравнениями, имеющими кусочно-непрерывные коэффициенты, поэтому он часто используется как основной метод дискретизации уравнений вычислительной гидродинамики [91].

В спектральном методе используется тот же вид приближенного решения, что и в методе конечных элементов. Основное различие этих методов состоит в том, что в спектральном методе, в отличие от МКЭ, аппроксимации отличны от нуля не только на своем конечном элементе, но и во всей расчетной области. Это так называемый глобальный подход. Если решение достаточно гладкое, то спектральные методы сходятся очень хорошо [106].

Прямое численное моделирование (DNS — от англ. direct numerical simulation) подразумевает решение уравнений Навье-Стокса на сетке с шагами, достаточно малыми для точного разрешения всех турбулентных вихрей. Таким образом, шаг сетки должен быть порядка колмогоровского масштаба

$$\eta_k = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4},$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\varepsilon$  — скорость диссипации кинетической энергии. При этом вычислительные затраты пропорциональны количеству узлов в каждом направлении и количеству шагов по времени, то есть  $\sim \eta_k \sim \nu^{-3} \sim Re^3$ . Таким образом, даже при низких числах Рейнольдса  $Re$  вычислительные затраты DNS крайне высоки. Для чисел Рейнольдса, встречающихся в промышленных приложениях, прямое численное моделирование оказывается слишком затратным для современных суперкомпьютеров. Несмотря на такой существенный недостаток, DNS активно используется в фундаментальных исследованиях турбулентности. Так, оказывается возможным производить «численные эксперименты», извлекать из них информацию, которую сложно или практически невозможно получить из лабораторного эксперимента, тем самым давая наиболее подробное понимание изучаемого явления. Кроме того, DNS оказывается крайне полезным при разработке моделей турбулентности для практических приложений (их верификации), например, подсеточных моделей для метода крупных вихрей (LES) и моделей турбулентной вязкости для уравнений Рейнольдса (RANS).

На сегодняшний день численное решение задач гидродинамики с использованием DNS является своего рода стандартом качества, а возможности вычислительной техники позволяют использовать расчетные сетки, насчитывающие 10 и более миллиардов узлов [24].

Метод среднего поля Рейнольдса (RANS — от англ. Reynolds-averaged Navier-Stokes) для описания турбулентных течений был предложен Рейнольдсом в 1895 году. Он заключается в разделении входящих в уравнения движения

величин на среднее и пульсации произвольной амплитуды. При этом осреднение может производиться по ансамблю, по времени, по пространству. Важно, чтобы период осреднения был много больше максимального периода турбулентных пульсаций. Так, к примеру, скорость и давление можно записать в виде

$$u_i(\mathbf{r}, t) = U_i(\mathbf{r}, t) + u'_i(\mathbf{r}, t), \quad p(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}, t) + p'(\mathbf{r}, t),$$

где штрихами обозначены пульсационные составляющие, а заглавными символами — средние значения. При этом предполагается, что

$$\begin{aligned} \langle u_i \rangle &= U_i, & \langle U_i \rangle &= U_i, & \langle u'_i \rangle &= 0, \\ \langle p \rangle &= P, & \langle P \rangle &= P, & \langle p' \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Используя такое разложение в уравнении Навье-Стокса получаем уравнение Рейнольдса

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= -\rho^{-1} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \langle u_j u_i \rangle}{\partial x_j} + F_i, \\ \frac{\partial U_k}{\partial x_k} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\tau_{ij} = \langle u_j u_i \rangle$  — тензор напряжений Рейнольдса. Данная система уравнений не замкнута, поскольку тензор  $\tau_{ij}$  нельзя выразить через осредненные характеристики турбулентных полей. Если попытаться записать для него уравнение эволюции, то это приводит к цепочке уравнений Фридмана-Келлера, которая также является незамкнутой.

Для того, чтобы замкнуть систему уравнений и оборвать цепочку, используют модели турбулентности, в том числе и полуэмпирические. Это означает, что в таких представлениях тензора  $\tau_{ij}$  присутствуют константы, которые необходимо находить из эксперимента. Разработка и использование моделей турбулентности начались в 60-е годы XX века. В 1970-х годах появилась  $k$ - $\varepsilon$  модель, а также большое количество ее модификаций. Она является одной из наиболее используемых в вычислительной гидродинамике для моделирования средних характеристик

турбулентного потока. Как и  $k-\omega$  модель, это модель с двумя уравнениями. В 1980-х годах было предложено множество новых полуэмпирических моделей турбулентности, однако универсальная RANS модель так и не была создана. В 2000-е годы интерес начал смещаться в сторону вихреразрешающих методов.

Самые простые модели — первого порядка, т.е. такие, которые выражают тензор напряжений Рейнольдса через характеристики среднего поля скорости [107, 108]. Практически во всех них используется идея *турбулентной вязкости*  $\nu_t$ , предложенная впервые Буссинеском в 1877 году. Для замыкания системы уравнений Буссинеск предложил связать турбулентные напряжения со средним потоком:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{3} \langle u_i^2 \rangle \delta_{ij} - \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Турбулентная вязкость отлична от кинематической. Она является свойством процесса, а не самой жидкости. При этом она может быть разной в различных точках течения.

*Гипотеза пути смешения Прандтля* основана на аналогии молекулярного и турбулентного переноса. Как правило, она применяется к таким задачам как свободный слой со сдвигом, турбулентный пограничный слой, течение в открытом канале. Под длиной пути смешения понимается расстояние, проходимое жидкой частицей поперек потока, прежде чем происходит ее смешение с окружающей жидкостью. Это понятие выходит из аналогии между турбулентным перемешиванием и молекулярным переносом в газах, когда характеристики молекул остаются постоянными в промежутках между соударениями. Тогда, если принять  $\mathbf{U} = (U_x, 0, 0)$ , то тензор напряжений Рейнольдса

$$\langle u_x u_z \rangle = -l^2 \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2,$$

где  $l$  — характерный линейный размер. На модели Прандтля основываются алгебраические модели турбулентности. Также известны дифференциальные модели турбулентности, например, модель Спаларта-Аллмареса или модель Секундова « $\nu_t-92$ ».

Метод крупных вихрей (LES — от англ. large eddy simulation) [109] — промежуточный подход между RANS и DNS. Суть этого метода заключается в разделении крупных и мелких вихрей. Здесь размер вихря определяется некоторым параметром  $\Delta$ , который выбирается для конкретной задачи. Такое разделение осуществляется путем математической фильтрации уравнений

$$\overline{f(r, t)} = \int_D G(r - r', \Delta) f(r', t) dr'^3,$$

в результате которой крупные вихри (больше  $\Delta$ ) разрешаются точно. Здесь  $D$  — область решения,  $G$  — функция фильтра,  $\Delta$  — ширина фильтра. При этом требуется выполнение функцией фильтра условия нормировки

$$\int_D G(r - r', \Delta) dr'^3 = 1,$$

которое гарантирует формальный переход от LES к DNS при  $\Delta \rightarrow 0$ .

Наиболее часто используются фильтры:

- фильтр Гаусса  $G(x - x', \Delta) = \sqrt{\frac{6}{\pi\Delta^2}} \cdot \exp\left[-6\left(\frac{|x - x'|}{\Delta}\right)^2\right],$
- коробчатый фильтр  $G(x - x', \Delta) = \begin{cases} 1/\Delta, & |x - x'| \leq \Delta/2 \\ 0, & |x - x'| > \Delta/2 \end{cases},$
- фильтр Фурье  $\tilde{G}(k) = \begin{cases} 1, & k \leq \pi/\Delta \\ 0, & k > \pi/\Delta \end{cases},$

где

$$\tilde{G}(k) = \int_D G(r - r', \Delta) \exp(-ikr') dr'^3$$

— Фурье-образ функции фильтра.

После применения процедуры фильтрации к уравнениям Навье-Стокса получаем отфильтрованные уравнения, где появляются дополнительные подсеточные напряжения

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j},$$

которые обычно делят на 3 части  $\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}$ :

$L_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$  — напряжения Леонарда (взаимодействие между разрешаемыми масштабами),

$C_{ij} = \overline{u_i u'_j} - u'_i \overline{u_j}$  — смешанные напряжения (взаимодействия между разрешаемыми и неразрешаемыми масштабами),

$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$  — напряжения Рейнольдса (взаимодействие между неразрешаемыми масштабами).

Система отфильтрованных уравнений незамкнута, т.к. нет никакой информации о подсеточных масштабах (о мелких вихрях). Для замыкания системы отфильтрованных уравнений используются *подсеточные модели турбулентности* [110, 111]. Чтобы добиться максимально надежного моделирования вихрей, граница между крупными и мелкими вихрями должна лежать в автомоделльной области спектра; обычно полагают, что в ней справедлив закон « $-5/3$ ». В отличие от RANS, влияние модели турбулентности на результат в LES менее существенно. Помимо расчета течений в замкнутых полостях, LES успешно применяется в геофизических [112] и инженерных [113] задачах.

При использовании достаточно мелких сеток и хороших схем LES может обеспечить высокую точность расчета. Однако он требует решения трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса на подробных сетках, что приводит к значительным затратам. Еще одним недостатком является то, что при приближении к стенке существенно возрастают требования к сетке и, как следствие, вычислительные затраты. Это связано с тем, что вблизи стенки уменьшается характерный размер вихрей.

Подсеточные модели турбулентности можно условно разделить на три категории: модели вихревой (подсеточной) вязкости, модели близких масштабов, смешанные модели. Модели вихревой вязкости также включают в себя алгебраические, динамические и дифференциальные модели.

В таких моделях тензор подсеточных напряжений представляется в виде

$$\tau_{ij} = 2\nu_t S_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{ll},$$

где  $\nu_t$  — вихревая вязкость, которую необходимо определить каким-либо образом.

*Подсеточная модель Смагоринского* наиболее часто используется при построении LES расчетов. Она основана на гипотезе Буссинеска и представляет подсеточную вязкость в виде

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 |S|, \quad \Delta = (\Delta_x \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z)^{1/3} = V^{1/3}, \quad |S| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}},$$

где  $C_s$  — константа Смагоринского. Поскольку для корректной работы LES необходимо обеспечить выполнение закона « $-5/3$ », то  $\nu_t \sim \varepsilon^{1/3} \Delta^{4/3}$ .

Константу Смагоринского можно оценить из энергетического спектра Обухова

$$E(k) = C_k \varepsilon^{-2/3} k^{-5/3}, \quad C_k \approx 1.4 \div 2.2 \Rightarrow C_s = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{3C_k} \right)^{3/4} \approx 0.13 \div 0.18.$$

Конкретное значение константы Смагоринского зависит от текущей задачи. На основе модели Смагоринского впоследствии было создано несколько более сложных моделей.

*Подсеточная модель WALE* (от англ. Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity) — модификация модели Смагоринского. А именно, модификация заключается в замене тензора  $S$  на такую величину, которая обладала бы следующими свойствами:

- тензорная инвариантность
- легко определяема на сетке любого типа (нет старших производных)
- равна 0 на стенке и не требует демпфирования ( $\nu_t \sim y^3$  у стенки)

Таким образом, искомый тензор принимает вид

$$S_{ij}^d = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij},$$

а подсеточная вязкость

$$\nu_t = (C_w \Delta)^2 \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(S_{ij} S_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}}.$$

Калибровка константы модели показывает, что  $C_w \approx 0.47$ .

Прямое численное моделирование (DNS) является наиболее популярным и авторитетным подходом при численном моделировании задач конвекции [24, 26, 82, 114–116] и электровихревых течений [31, 76, 89, 117, 118] жидких металлов. Именно моделирование при помощи DNS нередко называют «численным экспериментом» и используют для верификации моделей турбулентности, даже при имеющихся результатах лабораторных экспериментов. Данный подход играет важную роль в задачах тепловой конвекции жидких металлов, поскольку они имеют сложно устроенный динамический пограничный слой [24, 115].

Как уже было отмечено ранее, DNS расчеты оказываются весьма ресурсозатратными, что обусловлено необходимостью использовать очень подробные расчетные сетки и малый шаг по времени. В итоге, требуется как большое число процессоров для достижения необходимой вычислительной мощности, так и существенный объем хранилищ данных для накопления результатов. Поэтому не менее популярно использование подходов к моделированию турбулентности. Например, RANS [67, 68] и LES подходов [36], в том числе предлагаются новые основанные на RANS [119, 120] и гибридные LES/DNS методы [121].

При выборе методов численного решения той или иной задачи, необходимо учитывать как специфику самой проблемы, так и возможности верификации построенной модели. Так, верифицированная на результатах прямого численного моделирования модель с применением LES-подхода способна в приемлемые сроки получить требуемый набор данных [1, 4].

## Глава 1

# Конвекция жидкого натрия в коротком наклонном цилиндре

## 1.1. Введение

Помимо плоских слоев ( $H \ll D$ ) наиболее популярными геометриями в задачах термогравитационной конвекции являются цилиндр с единичным аспектным отношением и куб. Несмотря на то, что доступные на сегодняшний день вычислительные мощности позволяют выполнять прямое численное моделирование с высоким разрешением и сетками, насчитывающими миллиарды узлов [24], расчеты большого спектра параметров одной конфигурации задачи могут занимать весьма длительное время. Кроме того, частое сохранение мгновенных полей требует больших объемов хранилищ данных. Поэтому по-прежнему актуальными остаются модели турбулентности, позволяющие использовать более грубую сетку.

Интерес к расчетам конвекции жидкого металла в цилиндре с единичным аспектным отношением при различных наклонах к направлению силы тяжести вызван отсутствием подобных численных исследований для приближенных к реальным параметрам задачи. Благоприятным для данного исследования также является наличие результатов прямого численного моделирования для конвекции в наклонных цилиндрах [26], выполненное для схожих режимов, а также результаты лабораторных экспериментов по конвекции жидкого натрия [23] в интересующей постановке. Совокупность имеющихся данных представляет хорошую основу для верификации численной модели и открывает возможности для использования подходов к моделированию турбулентности.

## 1.2. Постановка задачи и численная модель

В главе численно изучается конвекция жидкого натрия ( $Pr = 0.0093$ ), возникающая в цилиндрической полости единичного аспектного отношения ( $\Gamma = 1$ ), один торец которой нагревается, а другой охлаждается. Данный раздел посвящен описанию математической модели и численного алгоритма, применяемых при решении данной задачи.

Целью исследования является изучение зависимости интегральных характеристик течения от угла наклона цилиндра, а также анализ поведения и структуры крупномасштабной циркуляции (КМЦ). Число Релея составляет  $Ra = 1.5 \cdot 10^7$ . Этот режим течения ранее численно не исследовался. Расчетная область представляет собой цилиндр с размерами  $L = D = 0.214$  м (Рис. 1.1). Здесь  $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$  — угол отклонения оси центральной симметрии цилиндра от вертикали, который задает ориентацию полости относительно вектора силы тяжести, а поворот цилиндра осуществляется в плоскости  $yOz$ .

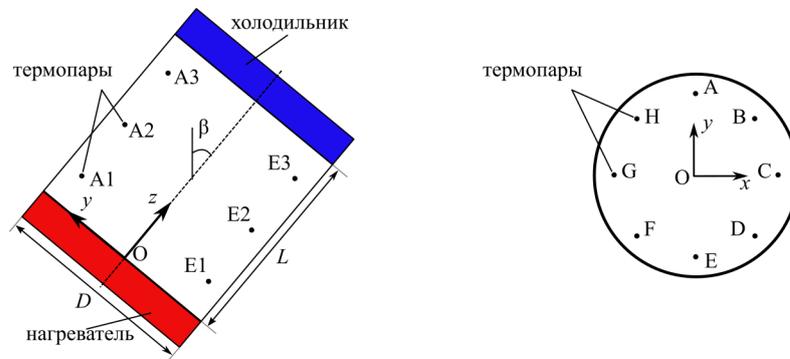


Рис. 1.1. Схема расчетной области с изображением мест установки термопар в эксперименте [23]: сечение  $yOz$ ; сечение  $xOy$ , вид со стороны «холодного» торца. Всего в емкости в трех кольцах расположено 24 термопары, то есть по 8 в каждом

Для макроскопического описания движения жидкости применяется система уравнений гидродинамики, включающей в себя уравнения Навье-Стокса, уравнение переноса тепла и уравнение неразрывности. В данной модели жидкость считается несжимаемой. Движение жидкости происходит в поле тяжести и вызвано разностью температур между горячим и холодным торцами цилиндри-

ческой емкости. Емкость может находиться под различным углом к направлению силы тяжести.

Используется приближение Буссинеска, которое заключается в том, что жидкость полагается слабо сжимаемой, а зависимость ее плотности от температуры учитывается в правой части уравнения для скорости. В приближении Буссинеска система уравнений тепловой конвекции имеет вид (2).

Представим эти уравнения в безразмерном виде. Для этого выберем в качестве единиц измерения длины, температуры и скорости величины  $L$ ,  $\Delta$  и  $\sqrt{\alpha g L \Delta}$  соответственно. Тогда безразмерные температура, скорость и время примут вид  $\tilde{T} = T/\Delta$ ,  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/\sqrt{\alpha g L \Delta}$  и  $\tilde{t} = t\sqrt{\alpha g L \Delta}/L$ , а система (2) запишется как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} &= -\nabla P + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \Delta \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{T} \mathbf{e}_z, \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} &= \frac{1}{\sqrt{\text{RaPr}}} \Delta \tilde{T}, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Задача решалась в нестационарной постановке. Трехмерная математическая модель основана на уравнениях термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска (1.1). Для моделирования мелкомасштабной турбулентности используется LES подход, позволяющий воспроизводить характерные особенности турбулентной конвекции на относительно грубой расчетной сетке [32], с моделью Смагоринского, в которой выбрана константа Смагоринского  $C_s = 0.17$  и турбулентное число Прандтля  $\text{Pr}_t = 0.9$ . Эта модель применяется для описания однородной и изотропной турбулентности, которая в данном случае ожидается в ядре течения. Значения турбулентной вязкости уменьшаются по мере приближения к границам полости по причине измельчения сетки. В вязком подслое, где она должна стремиться к нулю, турбулентная вязкость снижается по экспоненциальному закону при приближении к границе расчетной области, в соответствии с предложенной Ван Дристом (Van Driest) демпфирующей функцией.

Несмотря на то, что на каждом временном шаге LES подход оказывается

более ресурсозатратным, нежели DNS, поскольку в нем не требуется разрешение мелких масштабов, что и дает возможность использовать более грубые расчетные сетки. Таким образом, верифицированная на экспериментальных данных и данных DNS модель с применением LES подхода дает возможность получать надежные результаты быстрее, чем прямое численное моделирование.

Для скорости были выбраны условия прилипания на всех границах ( $\mathbf{v} = 0$ ), на торцах цилиндра температура считалась фиксированной  $T|_{z=0} = T_+$ ,  $T|_{z=L} = T_-$ , боковые стенки теплоизолированы ( $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$ ), где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности.

Для расчетов используется пакет программ с открытым исходным кодом OpenFOAM 4.1 [122], в котором дискретизация уравнений производится по методу конечных объемов. Задействуется решатель *buoyantBoussinesqPimpleFoam*. Система уравнений решается согласно алгоритму PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) [123], в котором на каждом шаге по времени сначала по неявной схеме решается уравнение движения с известным с предыдущего шага полем давления, а затем поля давления и скорости корректируются с учетом уравнения неразрывности. Сетка содержит совмещенные узлы, то есть значения всех переменных вычисляются в одних и тех же узлах [124]. Слагаемые с производными по времени дискретизируются с помощью неявной схемы Эйлера. Для диффузионных слагаемых применяется схема с центральными разностями, которая в случае конечного объема называется *linear*, т. к. подразумевает линейную интерполяцию значений из центра объемов на грани соседних объемов. Вычисление конвективных слагаемых производится по схеме *filteredLinear*, предназначенной специально для LES расчетов и обеспечивающей наилучший баланс между точностью и устойчивостью. Для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), полученной для уравнения коррекции давления, используется метод сопряженных градиентов (Preconditioned Conjugate Gradient, PCG). Для остальных переменных СЛАУ решается методом бисопряженных градиентов (Preconditioned Biconjugate Gradient Method, PBiCG) [124, 125].

Расчеты выполнены на суперкомпьютере «Тритон» (ИМСС УрО РАН, г. Пермь). Для адекватной оценки средних полей и статистических характеристик пульсаций требовался интервал осреднения не менее 600 с (или 325 в безразмерных единицах времени). Число Куранта не превышало 0.5.

Параметры расчетов выбирались таким образом, чтобы максимально соответствовать условиям экспериментального исследования [23]. А именно, число Прандтля для натрия  $Pr = 0.0093$ ; кинематическая вязкость  $\nu = 6.17 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ; коэффициент температурного расширения  $\alpha = 2.56 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$ ; что соответствует средней температуре металла в  $140^\circ \text{ С}$ . Температуры нижнего и верхнего торцов цилиндра фиксируются при  $153.4$  и  $128.3^\circ \text{ С}$  соответственно, то есть разница температур между ними составляет  $\Delta = 25.1^\circ \text{ С}$ , а число Релея  $Ra = 1.5 \cdot 10^7$ .

Для проверки сходимости численного решения были проведены сравнения интегральных характеристик течения. Сравнивались числа Нуссельта  $Nu$  и Рейнольдса  $Re$  при  $\beta = 40^\circ$  на трех сетках с различным количеством узлов:  $N = 1.6 \cdot 10^6$ ,  $N = 2.9 \cdot 10^6$ ,  $N = 6.4 \cdot 10^6$ . Показано, что при  $N = 1.6 \cdot 10^6$  —  $Re = 17100$ ,  $Nu = 11.75$ ; при  $N = 2.9 \cdot 10^6$  —  $Re = 17230$ ,  $Nu = 11.71$ ; при  $N = 6.4 \cdot 10^6$  —  $Re = 17450$ ,  $Nu = 11.67$ .

На Рис. 1.2 представлены осредненные по времени профили температуры и компоненты скорости  $U_y$  вдоль центральной оси цилиндра в пограничном слое ( $x = y = 0$ ), полученные в расчетах на указанных сетках при  $\beta = 40^\circ$ . В данном случае тепловой пограничный слой имеет бóльшую толщину (0.10, или 21 мм в размерном виде), чем динамический (0.018, или 4 мм в размерном виде). Для корректного разрешения пограничных слоев распределение узлов на сетке задавалось таким образом, чтобы максимальное их число оказывалось вблизи стенок цилиндра. Это количество зависит как от самой КМЦ, так и от числа Релея [114, 126, 127]. При этом основные трудности заключаются в разрешении динамического пограничного слоя, из-за его малой толщины. Показано, что при вычислениях на выбранной в качестве основной сетке с  $2.9 \cdot 10^6$  узлами в динамическом пограничном слое находится не менее 12 точек,

которые обозначены на Рис. 1.2 квадратами.

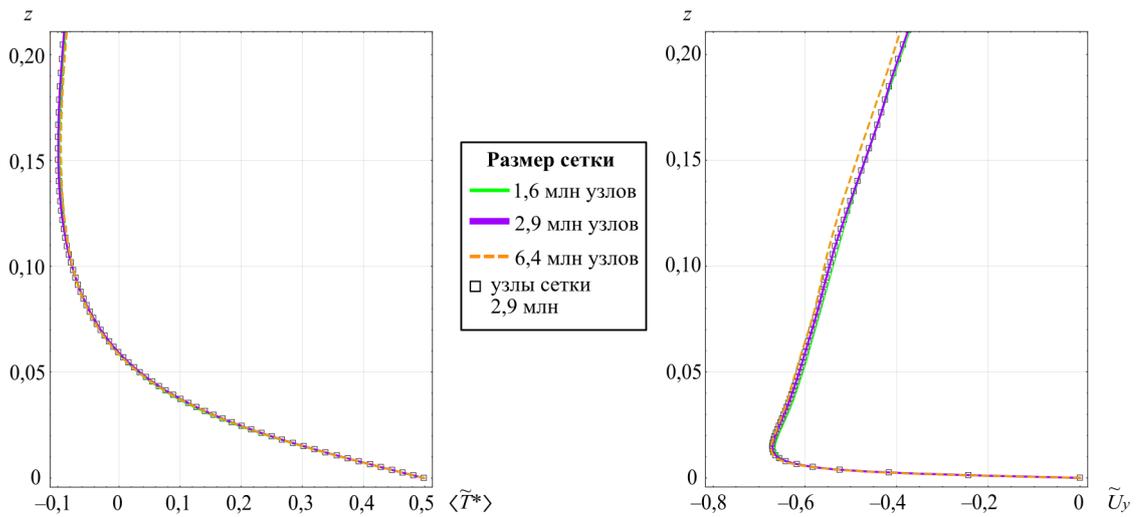


Рис. 1.2. Осредненные по времени профили температуры и компоненты скорости  $U_y$  вдоль центральной оси цилиндра в пограничном слое ( $x = y = 0$ ), полученные в расчетах на разных сетках при  $\beta = 40^\circ$

Используемая математическая модель дополнительно верифицировалась путем расчета двух режимов течения в цилиндре с единичным аспектным отношением, исследовавшихся в [24, 26] методом прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS). В таблице 1.1 приведены интегральные характеристики течения, рассчитанные в данной работе и в [24, 26]. В работе [26] применялся код GOLDFISH, реализующий метод конечных объемов, а сетка насчитывала  $N = 37.8 \cdot 10^6$  узлов. Различие между результатами данной работы и [26] составляет менее 1%. В [24] использовался код Nek5000, основанный на методе спектральных элементов, сетка содержала  $N = 10^{10}$  узлов. Полученные значения интегральных характеристик течения отличаются от значений из [24] менее чем на 5%. Таким образом, полученные данные позволяют заключить, что

Таблица 1.1. Числа Нуссельта и Рейнольдса, полученные в данной работе, в [24] и [26]

Режим	Nu		Re	
$Pr = 0.1, Ra = 10^6, \beta = 45^\circ$	$\approx 8.56$ [26]	8.56	$\approx 1000$ [26]	1040
$Pr = 0.005, Ra = 10^7, \beta = 0^\circ$	$8.7 \pm 0.7$ [24]	7.14	$20800 \pm 160$ [24]	20440

выбранная математическая модель и неравномерная блочно-структурированная сетка с  $2.9 \cdot 10^6$  узлов адекватны для рассматриваемой в данной главе задачи.

## 1.3. Результаты

### 1.3.1. Моделирование с применением LES-подхода

Рассмотрены режимы течения, реализующиеся при  $\beta$  в пределах  $0 \leq \beta \leq 90^\circ$  с интервалом 10 градусов. На Рис. 1.3 представлены изоповерхности мгновенной температуры в цилиндре при различных  $\beta$ . Во всех рассмотренных случаях на фоне турбулентного течения присутствует КМЦ со средним периодом обращения  $5.4 \div 7.8$ . Наибольшая скорость среднего течения соответствует наклону в  $50^\circ$ , а наименьшая — наклону в  $90^\circ$ . При вертикальном положении цилиндра наблюдается сложная трехмерная динамика КМЦ, а именно: изменение плоскости выделенного направления вращения, инверсии, низкочастотные колебания угла ориентации. Эти особенности течения были выявлены в [23] при помощи подробного анализа долговременного поведения КМЦ. При отклонении цилиндра от вертикального положения появляется выделенное направление КМЦ, и она ориентируется вдоль плоскости наклона  $yOz$ . По мере приближения к горизонтальному положению цилиндра среда становится все сильнее стратифицированной по температуре, и турбулентные пульсации затухают.

В экспериментальном исследовании [23] информация о течении могла быть получена только путем анализа показаний 24 термопар. Для этого использовался представленный в работе [46] метод количественного описания КМЦ по показаниям системы термопар, расположенных по окружности. А именно, авторами [46] использовалось разложение  $T = \bar{T} + \delta \cos(\theta - \theta_0)$ , где  $\delta$  характеризует интенсивность КМЦ, а  $\theta_0$  — ее ориентацию. Данная процедура задействуется применительно к результатам численного моделирования, для сравнения с экспериментальными результатами. Для этого в расчетной области выбирают точки, в которых в эксперименте [23] были установлены термопары. Эти

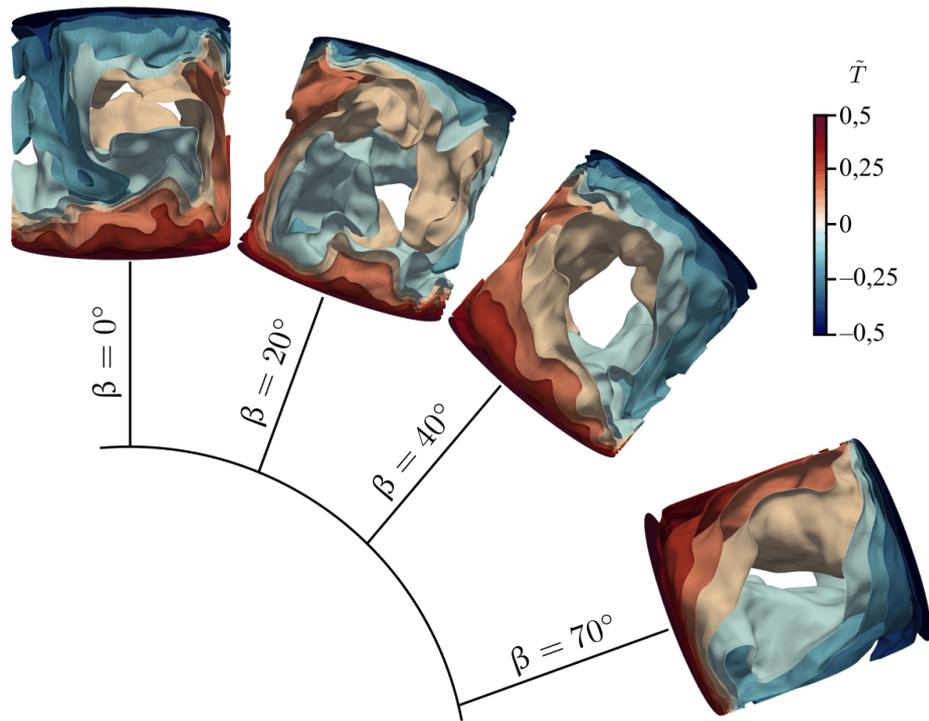


Рис. 1.3. Изоповерхности мгновенной температуры

точки располагаются в трех окружностях, лежащих в параллельных торцам плоскостях, в каждой из которых находится по 8 равномерно распределенных точек (см. Рис. 1.1). Плоскость, лежащая ближе к горячему торцу, считается первой, второй — в центре, а третьей — плоскость у холодного торца. Если в цилиндре присутствует КМЦ, то в 8 точках каждой окружности температура будет существенно различаться: она будет выше и ниже некоторого среднего значения в области подъемного и опускного течений соответственно. Для каждого момента времени вычитая это среднее значение и аппроксимируя получившееся распределение температуры по азимутальной координате первой модой косинуса, найдем параметры  $\delta$  и  $\theta_0$ . Присутствие колебательных движений оси КМЦ выразится в изменении  $\theta_0$ . Мгновенное значение фазы показывает, на какой угол относительно вертикальной плоскости отклоняется ось КМЦ в данный момент. Мгновенное значение амплитуды  $\delta$  характеризует наибольший перепад температуры в данной плоскости. Таким образом, данная процедура позволяет получить для каждой из трех окружностей эволюции амплитуды и фазы. С помощью Фурье анализа из них можно оценить меру колебаний оси КМЦ ко-

личественно. А именно, присутствие на спектрах выраженного пика говорит о наличии доминирующей частоты осцилляций угла ориентации КМЦ.

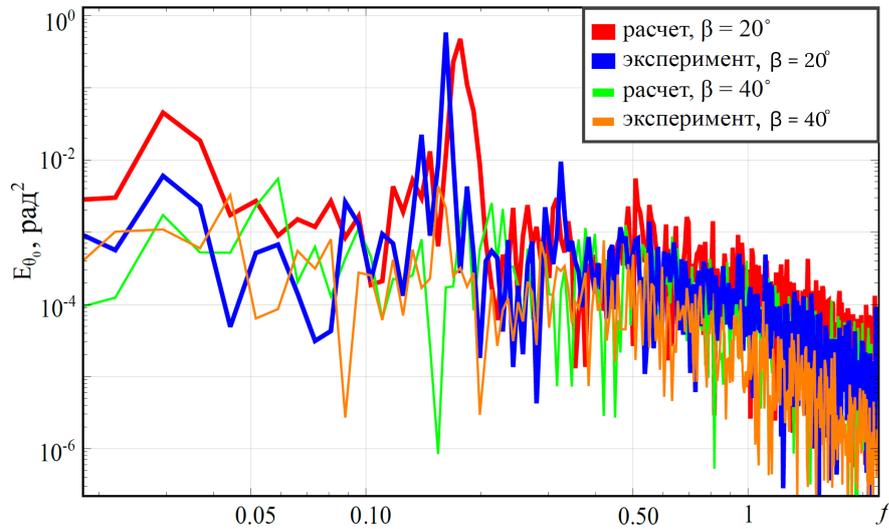


Рис. 1.4. Спектральная плотность энергии пульсаций угла ориентации КМЦ. Экспериментальные данные [23]

На Рис. 1.4 изображена спектральная плотность энергии пульсаций угла  $\theta_0$  для первого кольца термопар, при углах наклона 20 и 40 градусов. Спектр заполнен во всем диапазоне, что говорит о существовании хаотических колебаний. Можно видеть, что при  $\beta = 20^\circ$  имеется выраженный пик на частоте  $f \approx 0.17$  (0.09 Гц в размерном виде), в то время как при  $\beta = 40^\circ$  доминирующие частоты отсутствуют. Это говорит о том, что при малых углах наклона КМЦ осциллирует с выделенной частотой, а с ростом  $\beta$  — стабилизируется. На рисунке для сравнения также приведены данные из экспериментального исследования [23], где при  $\beta$  также виден пик на близкой частоте, а при  $\beta = 40^\circ$  наблюдается слабо выраженный пик на частоте около 0.15 – 0.17, однако из-за его сравнительно небольшого размера говорить о наличии характерной частоты нельзя.

Как было отмечено, при  $\beta = 0^\circ$  направление КМЦ непостоянно, поэтому сложно разделить поля скорости и температуры на средние и пульсационные. Такой анализ можно осуществить с помощью специальных техник выделения КМЦ, как это сделано, к примеру, в работе [24]. В данной работе он не прово-

дился, а основное внимание уделено изучению структуры течения в наклонном положении цилиндра.

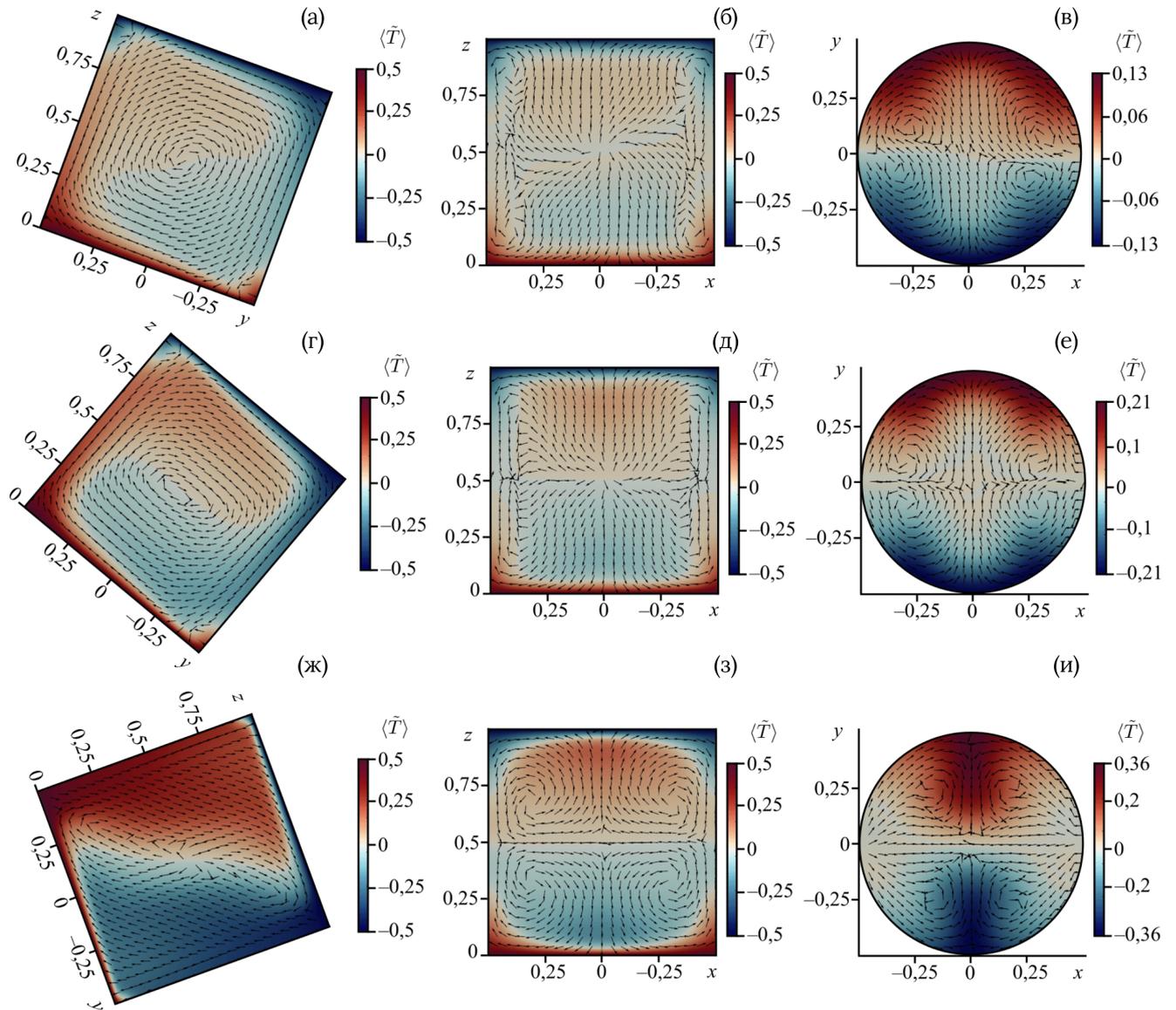


Рис. 1.5. Поля температуры и скорости, осредненные по времени, в сечениях  $yOz$  (а, г, ж),  $xOz$  (б, д, з) и в плоскости  $\{x, y\}$  при  $z = 0.5$  (в, е, и) для углов наклона  $\beta = 20^\circ$  (а, б, в),  $40^\circ$  (г, д, е),  $70^\circ$  (ж, з, и)

На рисунке 1.5 представлены осредненные по времени поля температуры (изображены цветом) и скорости (изображено стрелками) для наклонов 20, 40 и 70 градусов, в трех ортогональных сечениях. Как и на Рис. 1.3, при малых наклонах здесь видно присутствие КМЦ в плоскости  $yOz$ . Среднее течение при  $\beta = 20^\circ$  и  $40^\circ$  имеет похожую структуру, однако следует отметить, что при  $\beta = 20^\circ$ , из-за осцилляций  $\theta_0$ , получение надежных средних характеристик

требует значительно большего времени осреднения, по сравнению с  $\beta = 40^\circ$ . В ортогональной плоскости поворота сечения  $xOz$  наблюдаются вторичные течения вблизи стенок полости (см. Рис. 1.5(б), (д)). Поля температуры в плоскости  $\{x, y\}$  на Рис. 1.5(в), (е) показывают, что восходящий (горячий) и нисходящий (холодный) потоки располагаются вблизи «верхней» и «нижней» боковых стенок цилиндра. Кроме того, хорошо видны вторичные течения. С увеличением наклона до  $\beta = 70^\circ$  структура течения существенно меняется: среда становится сильно стратифицированной по температуре, а восходящий и нисходящий потоки сдвигаются от краев цилиндра ближе к центральной плоскости (Рис. 1.5(и)).

Изображенные на Рис. 1.6 поля среднеквадратичного отклонения (СКО) температуры свидетельствуют о том, что наибольшие температурные пульсации имеют место при меньших наклонах цилиндра. Для всех изображенных  $\beta$  области с интенсивными пульсациями сосредоточены вдоль верхнего и нижнего торцов, а их максимальные значения — вблизи боковых стенок, где встречаются горячий и холодный потоки жидкости. С удалением от стенок цилиндра интенсивность пульсаций падает, причем тем быстрее, чем больше наклон. Кроме того, с ростом  $\beta$  увеличивается степень локализации пульсаций в пространстве. При наклоне  $20^\circ$  области с интенсивными пульсациями температуры, располагающиеся вдоль боковых стенок полости, занимают гораздо больший объем, нежели при наклоне в  $40^\circ$  и, тем более, при  $70^\circ$ . В последнем случае вдоль боковых стенок пульсации температуры практически отсутствуют. Рис. 1.6(и) показывает, что при  $\beta = 70^\circ$  распределение пульсаций температуры в плоскости  $\{x, y\}$  при  $z = 0.5$  существенным образом отличается от такового при меньших наклонах (Рис. 1.6(в), (е)). Однако при этом амплитуда пульсаций оказывается сравнительно небольшой.

На рисунках 1.7, 1.8 изображены профили осредненного по времени поля температуры и поля пульсаций температуры вдоль линий, на которых были установлены термопары (см. Рис. 1.1) в экспериментальном исследовании [23].

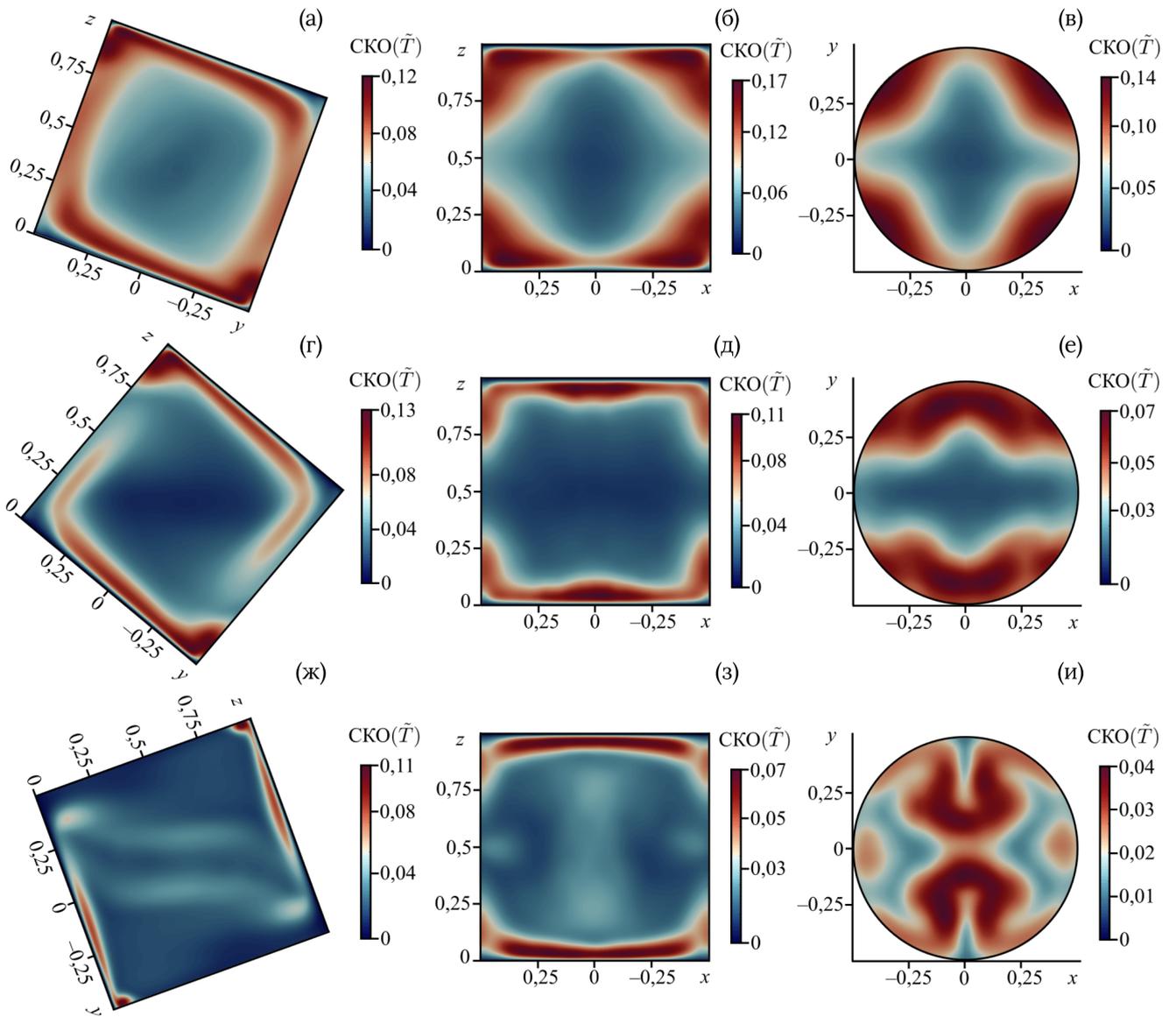


Рис. 1.6. Поля пульсации температуры в сечениях  $yOz$  (а, г, ж),  $xOz$  (б, д, з) и в плоскости  $\{x, y\}$  при  $z = 0.5$  (в, е, и) для углов наклона  $\beta = 20^\circ$  (а, б, в),  $40^\circ$  (г, д, е),  $70^\circ$  (ж, з, и)

Экспериментальные данные также приведены на рисунках и изображены символами. Зависимости температуры от координаты  $z$  построены относительно среднего по объему значения в численном моделировании и по всем термопарам в эксперименте.

Как можно видеть из Рис. 1.7, при наклоне  $20^\circ$  в области расположения термопар температура не сильно отклоняется от ее среднего значения, то есть существенная неоднородность температуры наблюдается только в тепловом пограничном слое, а в ядре течения градиент температуры мал. С ростом наклона цилиндра среда становится все более стратифицированной по температуре, что

хорошо видно при сравнении профилей вдоль линий А и Е для различных  $\beta$ . Имеет место хорошее соответствие расчетных и экспериментальных (из [23]) данных.

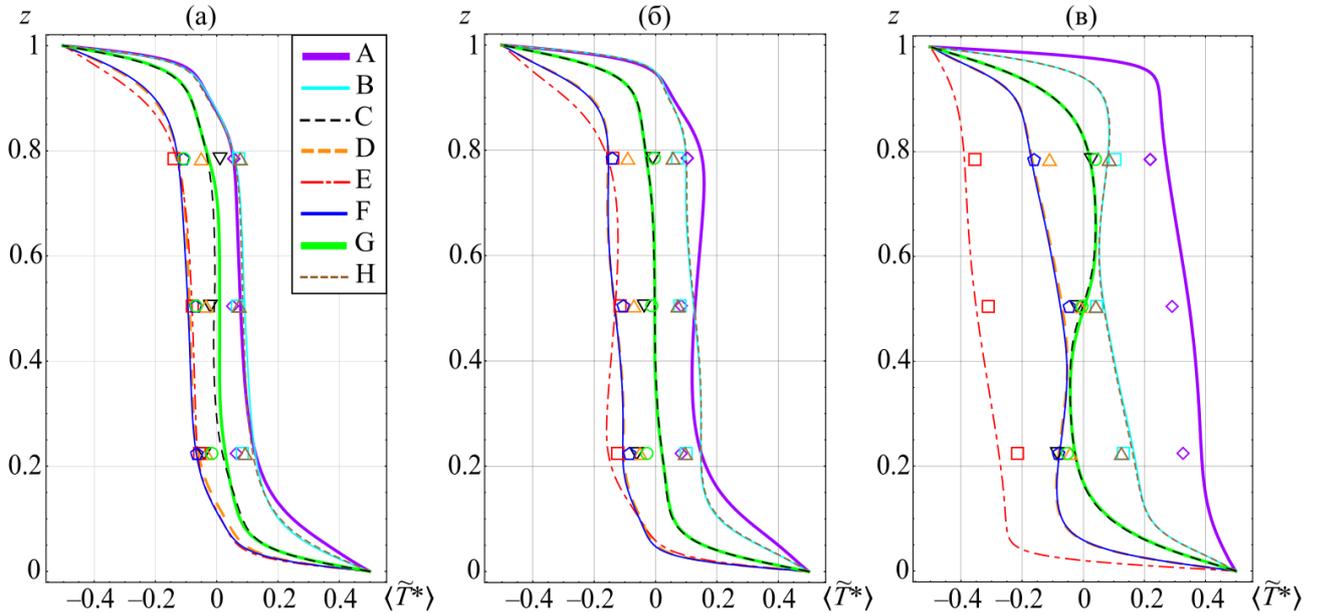


Рис. 1.7. Профили осредненных по времени полей температуры вдоль линий расположения термопар (см. Рис. 1.1) при различных углах наклона  $\beta$ : 20° (а), 40° (б) и 70° (в); символами обозначены экспериментальные данные из [23]

Рис. 1.8, как и Рис. 1.6 показывает, что максимальные пульсации температуры сосредоточены в тепловом пограничном слое, и с ростом угла наклона цилиндра  $\beta$  происходит уменьшение амплитуды пульсаций. При этом уровень пульсаций, полученный в численном моделировании, оказывается выше уровней, измеренных в эксперименте. Похожая тенденция уже отмечалась в работе [32], где также рассматривалась турбулентная конвекция жидкого натрия в наклонном цилиндре, но с бóльшим аспектным отношением  $\Gamma = 5$ . При этом хорошо заметно, что в области максимальных пульсаций в экспериментах [23] термопары отсутствуют. То есть в точках, где возможны сравнения, общий уровень пульсаций низок.

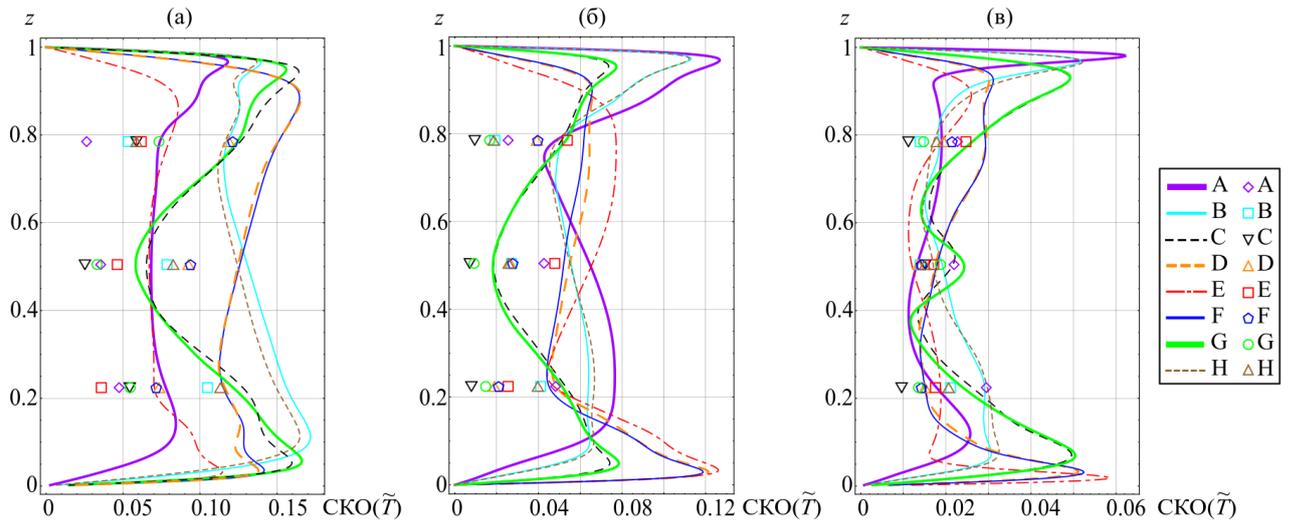


Рис. 1.8. Профили пульсаций температуры вдоль линий расположения термопар (см. Рис. 1.1) при различных углах наклона  $\beta$ :  $20^\circ$  (а),  $40^\circ$  (б) и  $70^\circ$  (в); символами обозначены экспериментальные данные из [23]

В отличие от численного моделирования, дающего возможность получить поле скорости напрямую, в экспериментальных исследованиях поле скорости находится косвенным методом. А именно, в работе [23] применялся метод кросс-корреляционного анализа [23, 128], с помощью которого оценивалась средняя скорость жидкого металла между соседними термопарами вдоль линий А и Е. Экспериментальные данные обозначены на Рис. 1.9 символами и приведены вместе с профилями средней по времени скорости  $\tilde{U}_z$ , полученными в численном моделировании. Как и на предыдущих рисунках, здесь прослеживается изменение структуры течения с ростом угла наклона цилиндра. Для  $20^\circ$  и  $40^\circ$  кривые похожи, в то время как для  $\beta = 70^\circ$  структура течения оказывается отличной от остальных. Несмотря на то, что применяемый в экспериментальном исследовании кросс-корреляционный метод дает статистическую оценку скорости в областях между парами соседних термопар, в данном случае его точность оказывается достаточно высокой, что подтверждается наличием хорошего соответствия между экспериментальными [23] данными и результатами расчета.

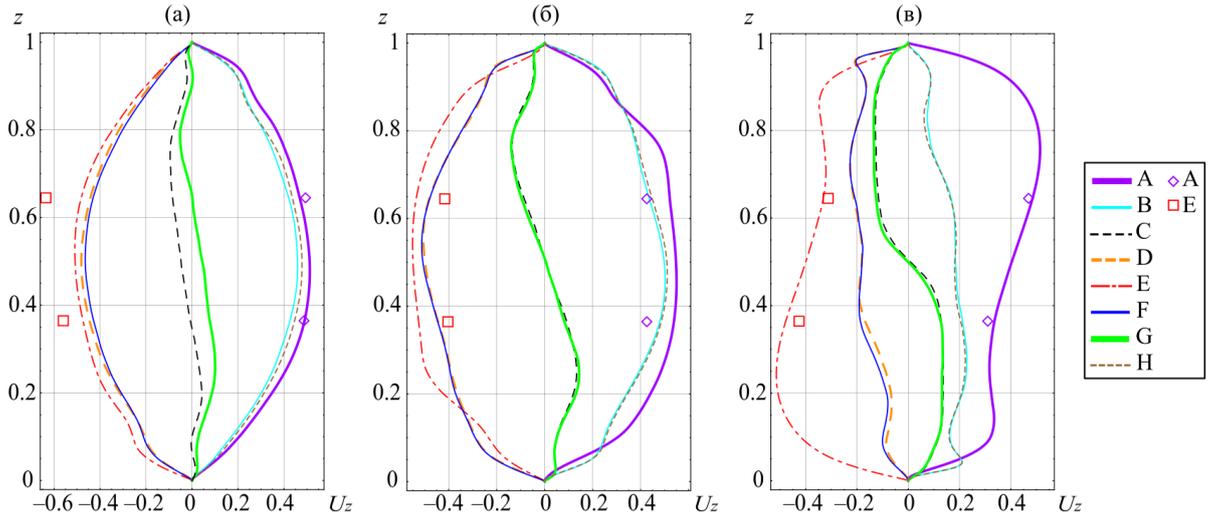


Рис. 1.9. Профили осредненных по времени полей скорости вдоль линий расположения термопар (см. Рис. 1.1) при различных углах наклона  $\beta$ :  $20^\circ$  (а),  $40^\circ$  (б) и  $70^\circ$  (в); символами обозначены экспериментальные данные из [23]

Важными интегральными характеристиками конвективных процессов, описывающими интенсивность течения и эффективный теплоперенос, являются числа Рейнольдса  $Re$  и Нуссельта  $Nu$ . В отличие от экспериментальных исследований, где доступна информация о процессе лишь в отдельных точках, численное моделирование позволяет использовать данные о полях скорости и температуры во всей расчетной области.

Для того, чтобы разделить вклады в кинетическую энергию конвективного течения крупномасштабной циркуляции и турбулентных пульсаций, поле скорости может быть представлено в виде двух частей:  $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ , где  $\mathbf{U} = \langle \mathbf{v} \rangle_t$  — вектор средней скорости,  $\mathbf{u}' = \mathbf{v} - \mathbf{U}$  — вектор пульсации скорости, а  $\langle \cdot \rangle_t$  означает осреднение по времени. Тогда полное число Рейнольдса запишется как

$$Re_{tot} = \sqrt{\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle} L / \nu,$$

а два дополнительных числа: «крупномасштабное» —  $Re_U$  (характеристика среднего течения), и «мелкомасштабное» —  $Re_u$  (характеристика мелкомасштабной турбулентности), будут определяться по формулам:

$$Re_U = \sqrt{\langle \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \rangle} L / \nu, \quad Re_u = \sqrt{\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' \rangle} L / \nu.$$

Здесь  $\langle \cdot \rangle$  означает осреднение по всему объему.

Зависимости чисел Рейнольдса от угла наклона цилиндра представлены на Рис. 1.10(a). Для случая  $\beta = 0^\circ$  вычислялось только  $Re_{tot}$ . Это связано с тем, что, как уже отмечалось ранее, направление КМЦ в этом случае непостоянно, поэтому разделение на  $Re_U$  и  $Re_u$  не проводилось. Рисунок показывает, что крупномасштабное  $Re_{tot}$  растет при увеличении наклона от 0 до  $20^\circ$  (на 8%) и достигает максимального значения, а затем, с дальнейшим ростом  $\beta$ , уменьшается. Число Рейнольдса для среднего течения  $Re_U$  при переходе от  $20^\circ$  к  $50^\circ$  демонстрирует рост на 10% и имеет максимум при наклоне  $50^\circ$ , но затем падает до минимального значения при  $\beta = 90^\circ$ . При этом по убывающему с ростом угла наклона  $Re_u$  можно видеть монотонное снижение уровня пульсаций с увеличением наклона.

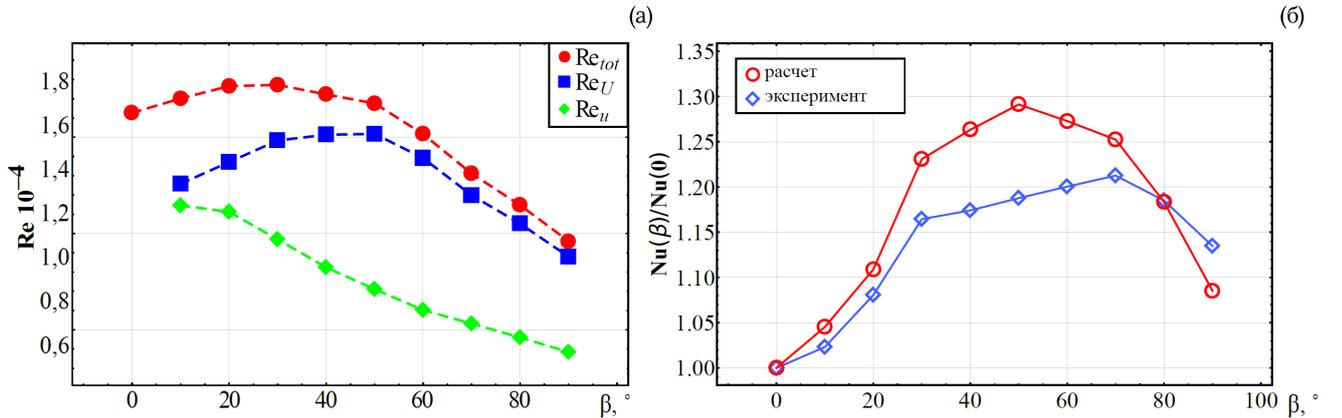


Рис. 1.10. Зависимости числа Рейнольдса (а) и нормированного числа Нуссельта  $Nu(\beta)/Nu(0)$  (б) от угла наклона цилиндра  $\beta$ ; представлены экспериментальные данные из [23]

Число Нуссельта определяется как [54]

$$Nu(z) \equiv \frac{\langle v_z T \rangle_z - \chi \partial_z \langle T \rangle_z}{\chi \Delta L^{-1}} = \text{const}(z),$$

где  $\langle \cdot \rangle_z$  означает осреднение по любой поверхности  $z = \text{const}$  и по времени.

Зависимость нормированного числа Нуссельта  $Nu(\beta)/Nu(0)$  от угла наклона цилиндра представлена на Рис. 1.10(б). По данным расчетов, при вертикальном положении цилиндра число Нуссельта составляет  $Nu(0) = 9.27$ , что является

наименьшим значением. С ростом угла наклона от  $0^\circ$  до  $50^\circ$  число Нуссельта растёт, что говорит об увеличении интенсивности теплового потока. Значения числа Нуссельта при  $\beta = 40^\circ$  и  $70^\circ$  близки друг к другу и превышают  $Nu(0)$  на 26% и 25% соответственно. Максимальное значение числа Нуссельта отмечается при наклоне  $\beta = 50^\circ$ , оно выше значения в вертикальном положении на 29%.

На соответствующей кривой, построенной по данным из экспериментов [23], видно монотонное возрастание  $Nu$  с увеличением угла наклона до  $70^\circ$ , после чего его величина начинает снижаться с дальнейшим ростом наклона. Расчетные значения оказываются выше, чем в эксперименте [23], особенно в диапазоне  $30 \div 60^\circ$ . Расхождение численных и экспериментальных данных на Рис. 1.10, возможно, обусловлено неидеальным совпадением в расчетах и экспериментах граничных условий и физических параметров среды. Это может быть вызвано тем, что поддержание постоянной температуры на торцах цилиндра в лабораторной установке является сложной задачей, т. к. появление сравнительно интенсивного теплового плюма приводит к изменению температуры в локализованной области на пластине, что, в свою очередь, выражается в более низком среднем тепловом потоке. Кроме того, существует вероятность того, что перепад температур  $\Delta$  может отличаться от реального, поскольку отсутствует возможность точного прямого измерения температуры на поверхностях медных теплообменников.

### 1.3.2. Сравнение с результатами прямого численного моделирования

Впервые часть представленных результатов численного моделирования с применением LES подхода была опубликована в работе автора [1]. Позднее L. Zwierner было проведено прямо численное моделирование (DNS) данной задачи, а сравнение численных и экспериментальных результатов представлено в [4]. Несмотря на то, что в DNS [4] число Релея  $Ra = 1.67 \cdot 10^7$ , против  $Ra = 1.5 \cdot 10^7$  в данной работе, режимы течения оказываются достаточно близки. В данном разделе приводится сравнение авторских расчетов с применением LES подхода и DNS [4], выполненных L. Zwierner. Результаты сравнения приведены в работе [4].

Сравним сначала интегральные характеристики процесса — числа Нуссельта  $Nu$  и Рейнольдса  $Re$ . Данные, полученные в DNS и LES расчетах, оказываются близки [4]: для случая конвекции Релея-Бенара ( $\beta = 0^\circ$ ) отличие в значениях  $Nu$  составляет менее 1%, в то время как отличие в числе Рейнольдса — около 5%, что является очень хорошим результатом (см. Рис. 1.10(a)). При этом между результатами прямого численного моделирования [4] и экспериментальными данными [23] наблюдается различие в примерно 35%.

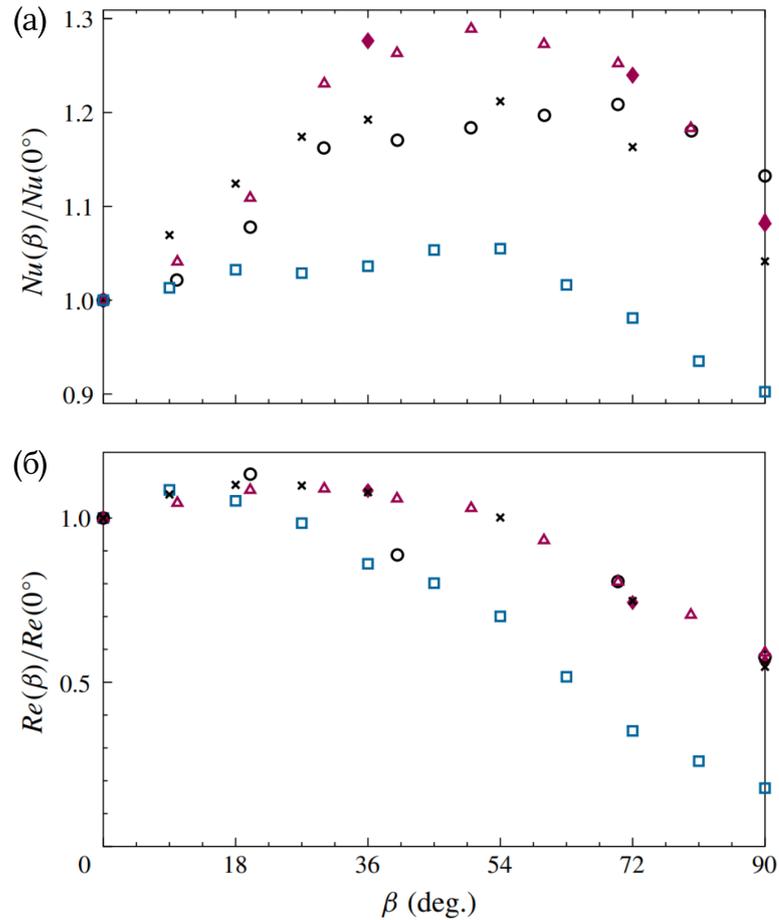


Рис. 1.11. Зависимости нормированного числа Нуссельта (а) и числа Рейнольдса (б) от угла наклона цилиндра  $\beta$ . Закрашенными ромбами изображены результаты DNS [4] для  $Ra = 1.67 \cdot 10^7$ ,  $Pr = 0.0094$ , LES ( $Ra = 1.5 \cdot 10^7$ ,  $Pr = 0.0093$ ) — треугольниками, эксперимент [23] ( $Ra = 1.42 \cdot 10^7$ ,  $Pr \approx 0.0093$ ) — кругами, DNS [4] для  $Ra = 1.42 \cdot 10^7$ ,  $Pr \approx 0.0093$  — квадратами

На Рис. 1.12 представлены осредненные по времени профили температуры вдоль линеек термопар, полученные прямым численным моделированием [4] (жирные линии) и с применением метода крупных вихрей (тонкие линии), а

символами обозначены экспериментальные данные из [23]. Здесь на Рис. 1.12(а) изображены зависимости для углов наклона  $\beta = 36^\circ$  (DNS) и  $40^\circ$  (LES и эксперимент [23]). На Рис. 1.12(б) — для  $\beta = 72^\circ$  (DNS) и  $70^\circ$  (LES и эксперимент [23]). Рисунок свидетельствует о том, что все три изображенных набора данных находятся в хорошем согласии.

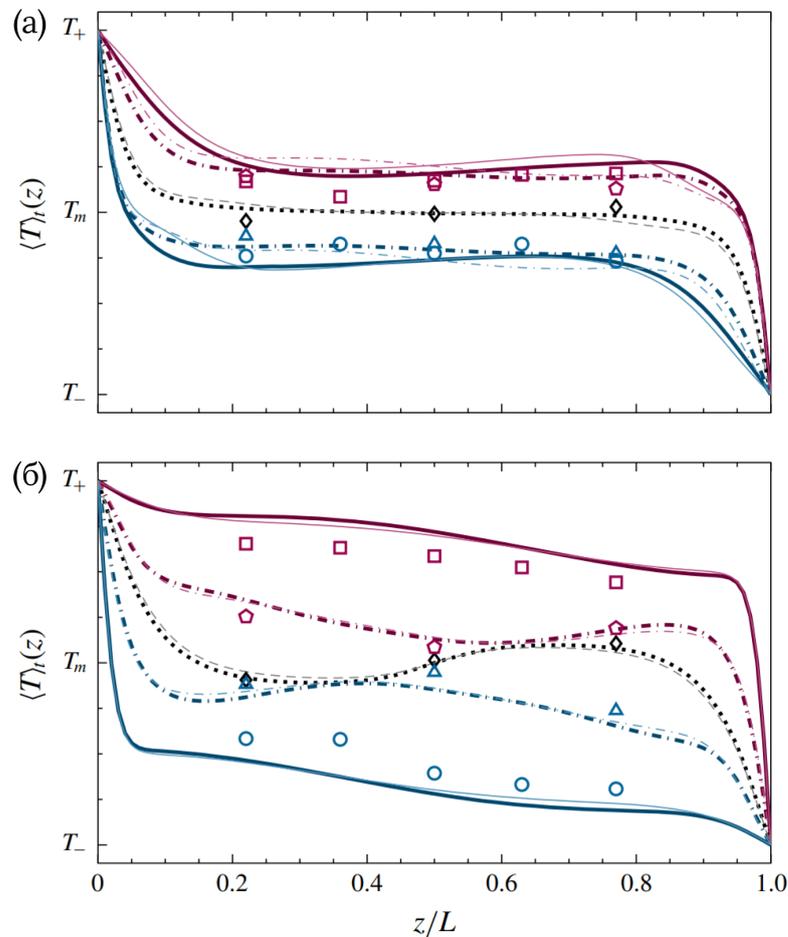


Рис. 1.12. Осредненные по времени профили температуры вдоль линеек термопар, полученные в результате численного моделирования DNS [4] и LES. Здесь угол наклона  $\beta$ : (а) —  $36^\circ$  (DNS) и  $40^\circ$  (LES), (б) —  $72^\circ$  (DNS) и  $70^\circ$  (LES). Символами отмечены экспериментальные данные из [23] для наклонов  $40^\circ$  (а) и  $70^\circ$  (б)

Аналогично рисунку 1.12 на Рис. 1.13 изображены осредненные по времени профили скорости вдоль линеек термопар. Здесь также можно видеть хорошее согласие экспериментальных данных и результатов численного моделирования DNS и LES, однако наименьшее отклонение наблюдается на Рис. 1.13(б). В то же время, на этом рисунке разница в наклонах между DNS и LES расчетами [4]

составляет всего  $2^\circ$ , против  $6^\circ$  на Рис. 1.13.

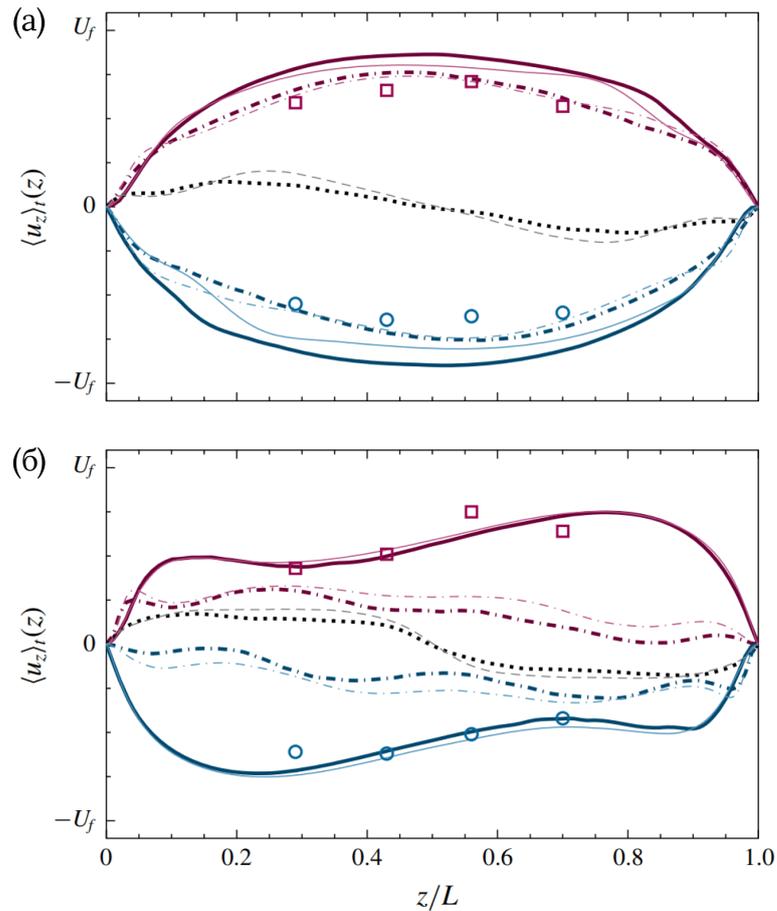


Рис. 1.13. Осредненные по времени профили скорости вдоль линеек термопар, полученные в результате численного моделирования DNS [4] и LES. Здесь угол наклона  $\beta$ : (а) —  $36^\circ$  (DNS) и  $40^\circ$  (LES), (б) —  $72^\circ$  (DNS) и  $70^\circ$  (LES). Символами отмечены экспериментальные данные из [23] для наклонов  $40^\circ$  (а) и  $70^\circ$  (б)

## 1.4. Выводы по главе

- Построена численная модель турбулентной термогравитационной конвекции жидкого натрия в наклонном цилиндре с аспектным отношением  $\Gamma \equiv L/D = 1$ , с применением метода крупных вихрей (LES) и модели Смагоринского. Проведена серия расчетов для выбора оптимальной расчетной сетки. Верификация модели осуществлена на результатах прямого численного моделирования [24, 26], а также данных экспериментального исследования [23]. Сравнение подтвердило корректность модели [4].

- Обнаружено, что в цилиндре возникает крупномасштабная циркуляция (КМЦ), угол ориентации которой при малых углах наклона непостоянен, а его изменения носят колебательный характер. А именно, при умеренных наклонах полости (до  $20^\circ$ ) наблюдается доминирующая частота осцилляций угла ориентации КМЦ, значение которой  $f \approx 0.17$  согласуется с экспериментом [23]. По мере увеличения наклона до  $40^\circ$  КМЦ стабилизируется, а доминирующая частота пропадает.
- Наибольшие температурные пульсации наблюдаются при малых наклонах цилиндра. Области с интенсивными пульсациями при всех  $\beta$  сосредоточены у нижнего и верхнего торцов цилиндра, а пульсации с максимальными значениями расположены вблизи боковых стенок, где встречаются горячий и холодный потоки жидкости. Также с увеличением  $\beta$  растет степень локализации пульсаций.
- Число Рейнольдса, характеризующее полную энергию течения, достигает максимума при наклоне  $\beta = 20^\circ$ , а затем, с последующим увеличением  $\beta$ , монотонно уменьшается. Среднее течение имеет максимальную интенсивность при  $\beta = 50^\circ$ . Интенсивность пульсаций скорости монотонно убывает с увеличением угла наклона цилиндра.
- Наибольший теплоперенос, характеризуемый числом Нуссельта, наблюдается в наклонном положении емкости при  $\beta = 50^\circ$  и составляет  $Nu = 11.97$ , что на 29% выше, чем в вертикальном положении.
- В коротком цилиндре при наклоне поток тепла увеличивается не так существенно, как в длинных цилиндрах ( $\Gamma = 5$ ,  $\Gamma = 20$ ) [32, 34, 128].

## Глава 2

# Электровихревое течение жидкого металла в длинном цилиндре с боковым токоподводом

### 2.1. Введение. Постановка задачи

Электровихревые течения хорошо изучены в канонических постановках [65], в которых реализуется локализованный токоподвод, а емкость обладает осевой симметрией. Такие конфигурации имеют место и в реальных промышленных приложениях, равно как и случай многоэлектродного токоподвода [30, 66, 69, 87]. Во всех описанных случаях возникающие вихри оказываются либо заключены в полусфере, либо зажаты в плоском слое и т. д. Однако практически не изучены такие постановки задач об электровихревых течениях (ЭВТ), в которых геометрия полости не согласована с топологией возникающих вихрей.

В данной главе численно и экспериментально исследуется электровихревое течение в цилиндрическом объеме жидкого металла при локализованном токоподводе к боковой стенке двумя оппозитными электродами. Для случая цилиндра «естественным» был бы аксиальный подвод тока, при котором торoidalные вихри образуются вблизи торцов цилиндра. В рассматриваемом случае возникающие вихри не соответствуют геометрии, то есть ось симметрии гидродинамического течения не совпадает с осью симметрии канала (осью симметрии цилиндра). В итоге, ожидаемо возникновение неустойчивости генерируемого ЭВТ, в силу внесения возмущений в поток стенками цилиндрической емкости.

Выбор описанной геометрии также обусловлен фундаментальной задачей о влиянии на поток жидкого металла спиральных магнитных полей [129]. Генерация спирального гидродинамического поля спиральным магнитным является антиподом известного альфа-эффекта, лежащего в основе большинства моделей генерации космических полей (подробный обзор приведен в [130]). Таким

образом, подобная конфигурация задачи позволяет не только изучать ЭВТ в цилиндре, но и в перспективе исследовать обратный альфа-эффект в постановке, аналогичной работе [129], однако уже при существенно более интенсивных течениях.

## 2.2. Экспериментальная установка и методы измерения

Экспериментальная установка (Рис. 2.1, 2.2) состоит из цилиндрического канала 1 длиной  $L = 204$  мм и внутренним диаметром  $D = 68$  мм, выполненного из нержавеющей стали. К боковым стенкам канала оппозитно подведены цилиндрические медные электроды 2 диаметром 20 мм, подключенные к источнику постоянного тока 7. Торцы электродов 2, вступающих в контакт с жидким металлом, повторяют внутреннюю поверхность цилиндра. Эти торцы были облужены оловом для обеспечения наилучшего электрического контакта электродов с жидким металлом.

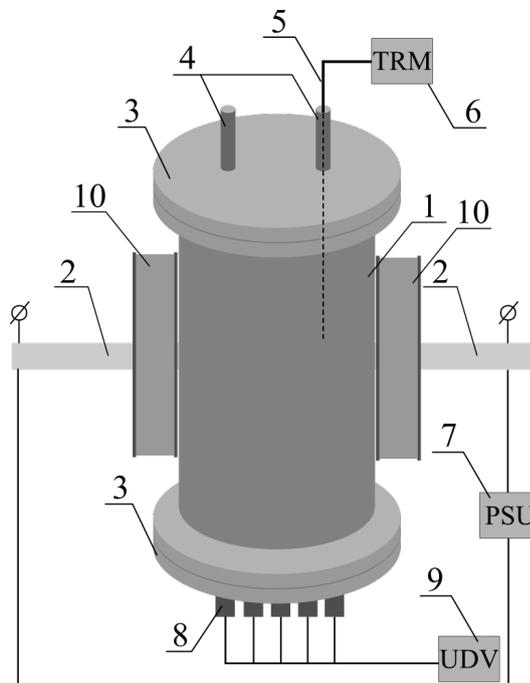


Рис. 2.1. Схема эксперимента. 1 — цилиндрический канал из нержавеющей стали, 2 — электроды, 3 — плексигласовые торцы, 4 — заливочные порты, 5 — термопара, 6 — цифровой термометр, 7 — источник постоянного тока, 8 — датчики УДА, 9 — УДА Dop-2000, 10 — катушки Гельмгольца

Торцевые стенки установки 3 изготовлены из плексигласа и соединены с каналом при помощи фланцев с силиконовым уплотнением. На верхнем торце размещены штуцеры 4 для заполнения установки жидким металлом. Через один из них вводится термопара 5, подключенная к цифровому термометру Sanwa RD701. Во время работы установки ее боковые стенки и верхняя крышка теплоизолируются при помощи стекловаты толщиной около 100 мм, чтобы избежать возникновения тепловой конвекции вследствие нагрева металла джоулевым теплом. К электродам 2 через медные клеммы подключен источник питания 7, состоящий из трехфазного источника тока FNEХ TSGC-2 и трехфазного выпрямителя. Места контакта клемм и электродов были также облужены оловом. Источник питания позволяет создавать в цепи постоянный ток величиной до 800 А. Сила тока измеряется токовыми клешнями АКТАКОМ-2250. Погрешность измерения величины тока составляет менее 1%.

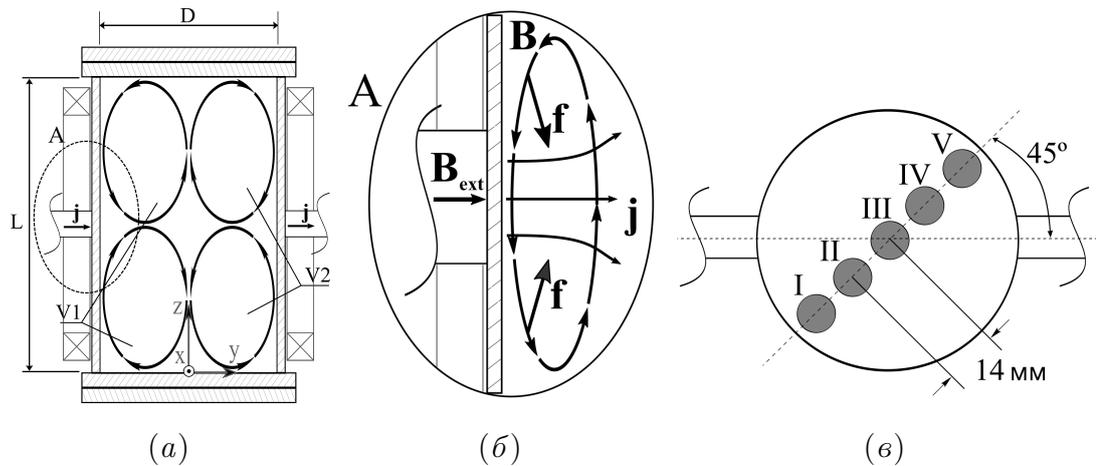


Рис. 2.2. (а) — схема генерации течения в сечении  $yOz$ ; (б) — детализация области А; (в) — схема расположения ультразвуковых датчиков

Катушки Гельмгольца 10 размещены соосно электродам и используются для создания внешнего магнитного поля, величина которого измеряется при помощи тесламера Lake Shore 421 Gaussmeter. Катушки могут работать в сонаправленном и противоположном режимах. Канал заполняется жидкой галлиевой эвтектикой  $87\% \text{ Ga} + 10.5\% \text{ Sn} + 2\% \text{ Zn}$  со следующими материальными параметрами: плотность  $\rho = 6265 \text{ кг/м}^3$ , электропроводность  $\sigma = 3.56 \cdot 10^6 \text{ См/м}$ ,

кинематическая вязкость  $\nu = 3.1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ , скорость звука в среде  $c = 2828 \text{ м/с}$ .



Рис. 2.3. Фотоизображение установки, заполненной галлиевой эвтектикой, в отсутствие теплоизоляции

Экспериментальные исследования течений жидких металлов ограничиваются методическими факторами. Жидкие металлы — непрозрачные агрессивные среды, поэтому использование современных полевых методов анализа течений, таких как PIV, не представляется возможным. Для измерения скорости течения жидкого металла использовался ультразвуковой доплеровский анемометр (УДА) Dop-2000, Signal Processing, Switzerland, отмеченный на Рис. 2.1 номером 9. К УДА подключались пять ультразвуковых датчиков 8, расположенных на внешней стороне нижнего торца установки, как показано на Рис. 2.2(в). Датчики крепились при помощи шаблона из оргстекла, позволяющего задать их положение с точностью до 0.5 мм.

Принцип работы УДА основан на излучении ультразвуковых импульсов и фиксации отраженного от движущейся среды эха [131]. Измеряется изменение частоты ультразвука между последовательно излученными и отразившимися от частиц в движущейся среде импульсами. По времени между излучением и регистрацией ультразвуковых импульсов определяется пространственное положение точки, в которой измеряется скорость течения. В галлиевом сплаве в качестве звукоотражающих частиц выступают оксиды галлия, образующиеся

при контакте металла с атмосферным воздухом. Частицы оксидов, увлекаемые течением жидкости, несут информацию о локальной скорости в точках их расположения. Для предотвращения контакта с кислородом во время экспериментов, в заливочные трубки и штуцеры был залит слой силиконового масла. Таким образом, УДА дает информацию о пространственно-временном распределении компоненты скорости, направленной вдоль ультразвукового луча. В результате обработки могут быть получены средние по времени профили скорости и уровень пульсаций скорости относительно среднего значения.

Ожидается, что в равновесном состоянии в цилиндре возникают два торoidalных вихря  $V_1$  и  $V_2$ , как показано на Рис. 2.2(а), (б). На рисунке линии тока вихрей изображены эллипсами, а стрелки указывают направление движения.

### 2.3. Математическая модель

Ультразвуковой доплеровский анемометр дает хоть и неполную, но весьма ценную информацию о структуре течения. Для получения полной картины о структуре течения и характере процесса используется численное моделирование. Верификация модели происходит на основе полученных в ходе экспериментов профилей скорости. При построении модели делаются следующие допущения:

- Задача считается изотермической, то есть отсутствует как выделение тепла в результате протекания электрического тока через жидкий металл, так и теплопоток через стенки емкости, нет тепловой конвекции.
- Боковая стенка и торцы цилиндра считаются изолирующими.
- Влияние магнитного поля Земли, а также магнитного поля токоподводящих жил считается пренебрежимо малым и не учитывается в расчетах.
- Внешнее магнитное поле катушек Гельмгольца считается постоянным и однородным.

- Поскольку магнитное число Рейнольдса  $Re_m \equiv UL/\nu_m \approx 0.045 \ll 1$  мало, то используется безындукционное приближение. Это означает, что поле электромагнитных сил вычисляется лишь единожды и считается неизменным в ходе дальнейших расчетов.

В случае течения проводящей несжимаемой изотермической жидкости под действием силы Лоренца система уравнений (1) запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}_L}{\rho},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\mathbf{f}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}_j + \mathbf{j} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$  — объемная сила Лоренца [132]. Здесь  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока,  $\mathbf{B}_j$  — собственное магнитное поле тока,  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  — внешнее магнитное поле.

Плотность электрического тока находится из решения уравнений для электрического потенциала:

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \varphi, \quad \Delta \varphi = 0.$$

Далее, магнитное поле находится из закона Био-Савара. Граничные условия для электрического потенциала на аноде и катоде задаются фиксированными электрическими потенциалами, а для изолирующих частей:  $\partial \varphi / \partial \mathbf{n} = 0$ . Для скорости на всех границах задаются условия прилипания.

Численное решение задачи осуществляется в пакете программ Ansys. Электромагнитная часть (вычисление поля силы Лоренца) решается в Ansys Emag, а гидродинамическая — в Ansys Fluent. Расчетная область представляет собой цилиндр с размерами, идентичными внутренним размерам канала экспериментальной установки. Используется неравномерная блочно-структурированная сетка, насчитывающая около 150 тысяч элементов. Центральная часть сетки состоит из тетраэдральных элементов, линейный размер которых не превышает 4 мм. В пристеночной области используются пирамидальные элементы, так что

в радиальном направлении реализуется равномерная сетка из прямоугольных элементов, характерный размер которых уменьшается по мере приближения к границе расчетной области. Все расчеты начинаются из состояния равновесия.

Для решения уравнений гидродинамики применяется RNG  $k$ - $\varepsilon$  модель турбулентности [133] с константами  $C_\mu = 0.0845$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1.42$  и  $C_{\varepsilon 2} = 1.68$ ; задействуется SIMPLE решатель. Описанная модель верифицировалась на полученных в экспериментальных исследованиях данных.

## 2.4. Результаты

### 2.4.1. Лабораторный эксперимент

Перед проведением экспериментов было произведено измерение магнитного поля, создаваемого проходящим через металл током, при помощи тесламера Lake Shore 421 Gaussmeter. Щуп тесламера помещался в заполненный металлом канал. Измерения показали, что число Гартмана  $Na = BD(\sigma/\nu\rho)^{1/2}$ , определяемое через диаметр цилиндра, достигает  $Na = 1.7$  при максимальном магнитном поле в канале  $B = 0.6$  мТл. Такое значение числа Гартмана говорит о слабом влиянии собственного магнитного поля тока на течение.

Рассматривались течения, порождаемые токами в диапазоне от 200 до 500 А, что соответствует значениям параметра ЭВТ в диапазоне  $S = (0.2 \div 1.3) \cdot 10^7$ . Минимальное значение тока определялось чувствительностью УДА, поскольку прибор не позволяет разрешать течения со скоростями меньше 10 мм/с.

Для описания и представления результатов используется Декартова система координат, начало которой расположено в центре нижнего торца цилиндра, а ось  $Oy$  параллельна линии, соединяющей электроды.

Сначала изучено ЭВТ в отсутствие внешнего магнитного поля катушек Гельмгольца. Полученные в ходе экспериментов данные показывают, что интенсивность ЭВТ оказывается невысока — не более 40 мм/с, в то время как само течение нестационарно даже при наименьшем из рассмотренных токов (200 А).

Соответствующее число Рейнольдса, определяемое через диаметр цилиндра  $Re = \langle V \rangle D / \nu$  находится в интервале  $Re = 1096 \div 4830$ .

В ходе эксперимента возникает нагрев жидкого металла, из-за протекания через него электрического тока, что может приводить к возникновению термогравитационной конвекции. Чтобы оценить вклад конвекции, по завершении серий экспериментов были произведены измерения после выключения питания (Рис. 2.4). Характерное время рассасывания тепловых неоднородностей на масштабах диаметра цилиндра составляет около 371 с. Таким образом, проведенные измерения охватывали период релаксации градиентов температуры. Измерения показывают, что после выключения тока течение присутствует, однако его средняя скорость оказывается на порядок меньше той, что наблюдается при токе 479 А. Следовательно, вклад тепловой конвекции в течение представляется слабым, однако полностью исключать ее нельзя.

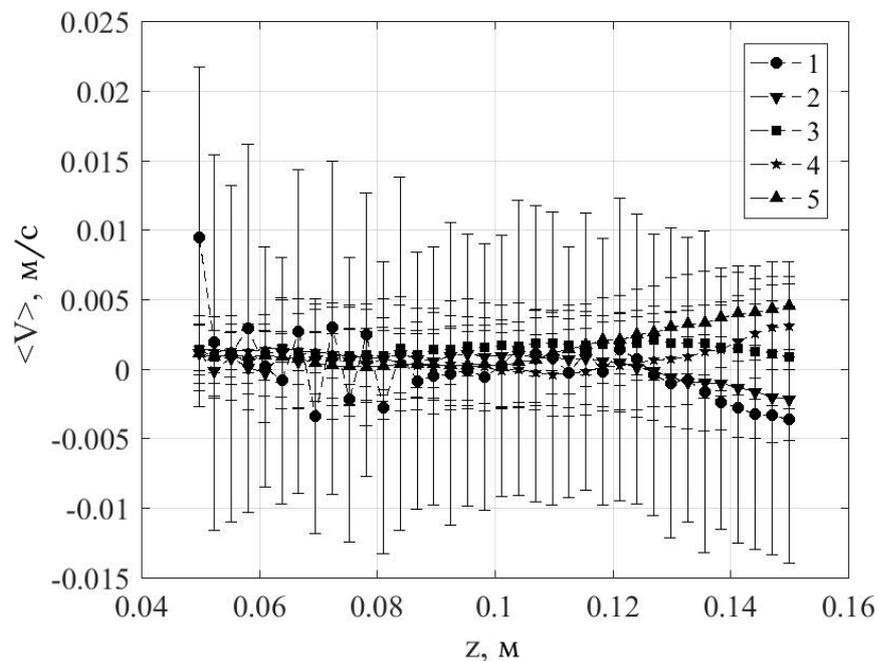


Рис. 2.4. Профили течения галлиевого сплава справа после отключения тока. Цифры соответствуют номерам датчиков на Рис. 2.2(в), линиями обозначено среднеквадратичное отклонение

Профили скорости течения галлиевого сплава вдоль оси цилиндра для шести различных токов представлены на Рис. 2.5(а). Профили показывают,

что в нижней части цилиндра имеет место опускное течение (отрицательное значение скорости означает движение в сторону датчика УДА), в то время как в верхней части — подъемное. Это означает, что данные профили течения отвечают двухтороидальному вихревому движению, обозначенному как  $V_1$  и  $V_2$  на Рис. 2.2(а). Максимальная средняя скорость течения составляет около 20 мм/с при токе 479 А. При этом пульсации скорости, изображенные на Рис. 2.5(а) вертикальными линиями, довольно сильные: их амплитуда достигает 50 мм/с. Таким образом, в отсутствие внешнего магнитного поля ЭВТ в исследуемой конфигурации имеет существенно нестационарный двухвихревой характер.

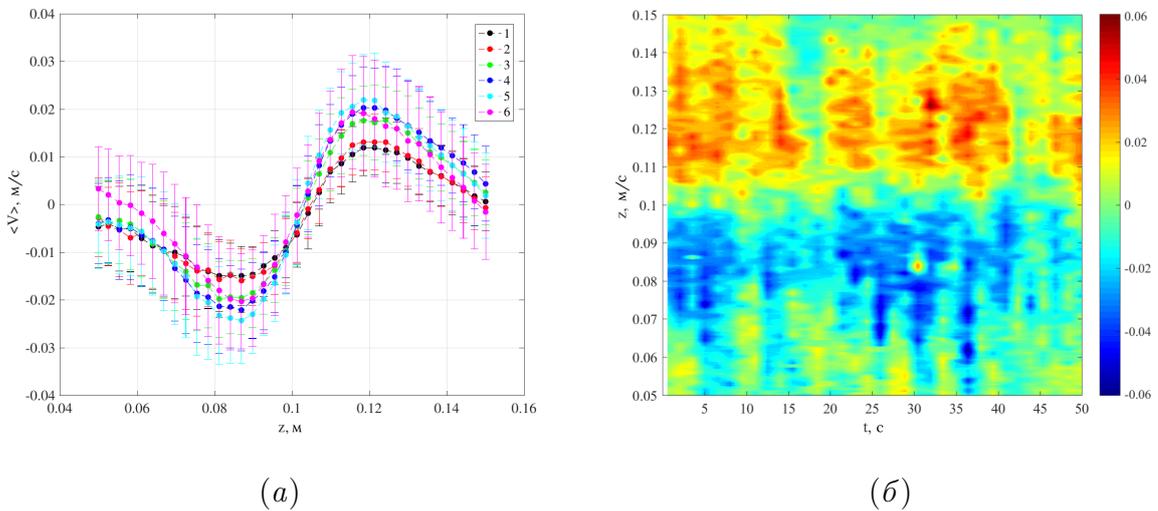


Рис. 2.5. (а) — осредненные по времени профили скорости жидкого металла вдоль центральной оси симметрии цилиндра. Здесь ток 1 —  $I = 209$  А, 2 —  $I = 239$  А, 3 —  $I = 302$  А, 4 —  $I = 348$  А, 5 —  $I = 404$  А, 6 —  $I = 465$  А, а вертикальные линии отмечают пульсации скорости. (б) — пространственно-временная карта течения вертикальной компоненты скорости вдоль оси симметрии цилиндра. Здесь ток  $I = 465$  А, датчик III

Пространственно-временная карта для профиля вертикальной компоненты скорости на оси цилиндра (получено датчиком III) показана на Рис. 2.5(б) для тока  $I = 479$  А. Как и предыдущий результат, рисунок свидетельствует о наличии пульсаций скорости высокой интенсивности во всей области измерений, что говорит о нестационарном характере исследуемого процесса. Как было отмечено ранее, в состоянии равновесия ожидается возникновение двух крупномасштабных

тороидальных вихрей, как отмечено на Рис. 2.2(а)  $V_1$  и  $V_2$ . Однако результаты проведенных экспериментов демонстрируют несимметричные профили средней скорости, что означает отличный от ожидаемого вид течения. В верхней области цилиндра течение представлено двумя крупномасштабными вихрями большой интенсивности, сохраняющимися в ходе всего эксперимента.

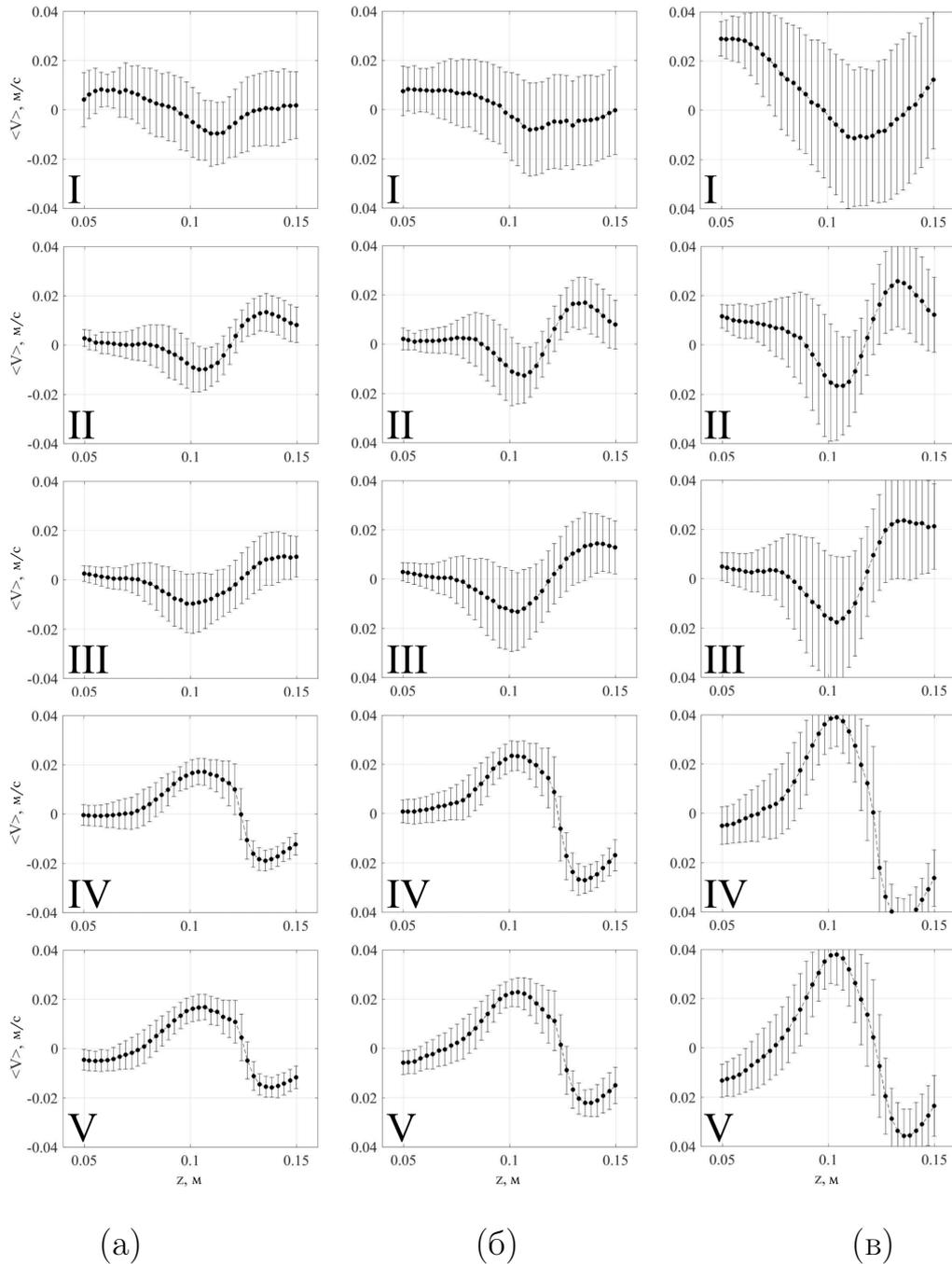
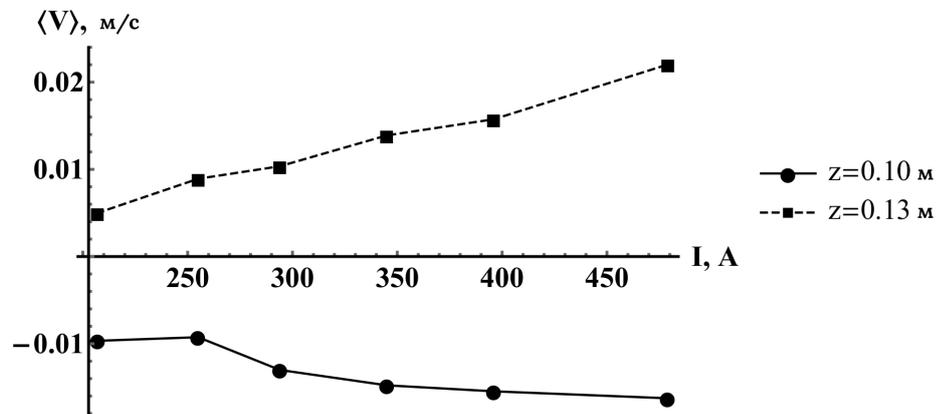


Рис. 2.6. Профили течения галлиевой эвтектики, полученные пятью датчиками. Сила тока в цепи: (а) —  $I = 207$  А, (б) —  $I = 294$  А, (в) —  $I = 479$  А

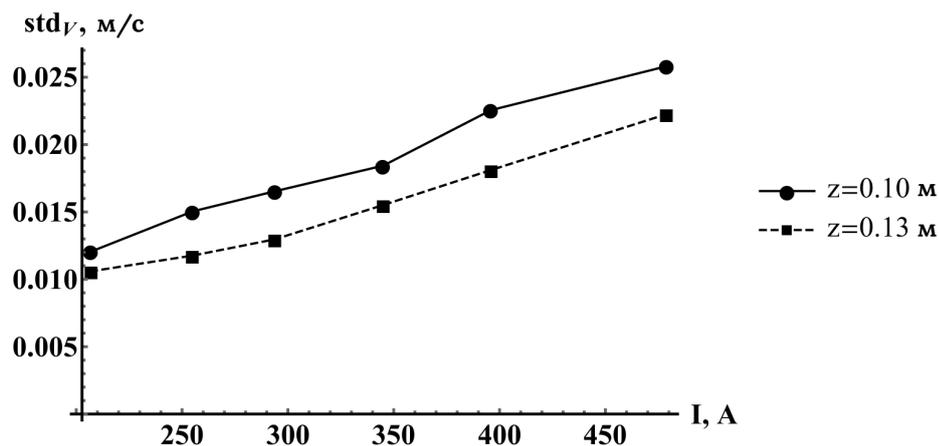
Асимметрия структуры ЭВТ и смещение двух крупных вихрей в верхнюю

область также хорошо различимы на осредненных по времени профилях скорости, построенных для всех пяти датчиков при трех различных значениях тока (Рис. 2.6).

На Рис. 2.7 изображены зависимости среднего значения (а) и среднеквадратичного отклонения (б) скорости в двух заданных точках на оси симметрии цилиндра от тока. Полученные зависимости (а) свидетельствуют, что средняя скорость течения в верхней части цилиндра растет с увеличением тока, в то время как в центре емкости — падает. Нормированное значение пульсаций (отношение амплитуды пульсаций к значению средней скорости) растет с увеличением тока в каждой из двух выбранных точек ( $z = 0.10$  м и  $z = 0.13$  м).



(а)



(б)

Рис. 2.7. Зависимости от тока: (а) — среднего значения скорости; (б) — среднеквадратичного отклонения в различных точках на оси симметрии канала

### 2.4.2. Внешнее магнитное поле

Изучим теперь ЭВТ в цилиндре с оппозитным токоподводом в присутствии внешнего магнитного поля, генерируемого катушками Гельмгольца 10 (см. Рис. 2.1). А именно, рассматривались два случая: сонаправленные и противоположные магнитные поля двух катушек. Во всех случаях ток на катушках был фиксирован и равнялся  $I_c = 1$  А. Рис. 2.8, 2.9 показывают, что приложение внешнего магнитного поля существенным образом меняет структуру среднего течения и амплитуду пульсаций скорости. Заметим, что на Рис. 2.8, 2.9, в отличие от Рис. 2.5(а), изображены профили средней скорости для датчиков II и IV, т. к. они наиболее репрезентативны при анализе структуры течения в случае отсутствия внешнего магнитного поля.

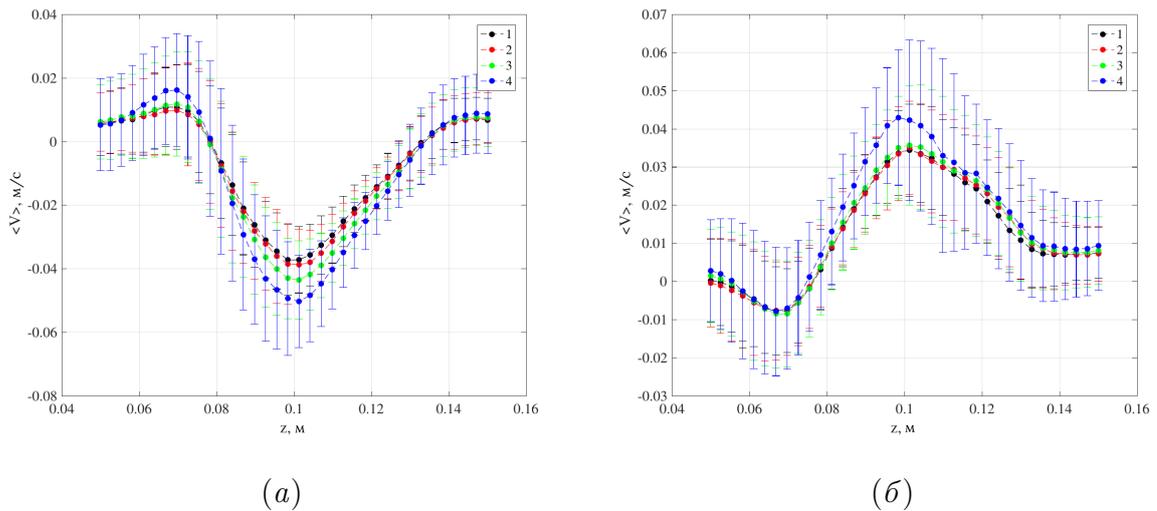


Рис. 2.8. Осредненные по времени профили скорости течения жидкого металла в присутствии внешнего магнитного поля; реализуется течение в виде одного крупномасштабного вихря. (а) — датчик II, (б) — датчик IV. 1 —  $I = 201$  А, 2 —  $I = 238$  А, 3 —  $I = 309$  А, 4 —  $I = 409$  А

Рис. 2.8 отвечает случаю, когда магнитные поля обеих катушек сонаправлены. Профили скорости при этом имеют отличный друг от друга изгиб, то есть жидкий металл вдоль датчиков II и IV движется в противоположных направлениях. Это говорит о существовании одного крупномасштабного вихря в цилиндре. Ось вращения этого вихря практически совпадает с линией, соединяющей электроды. Схематическое представление такого течения приведено

на Рис. 2.10: вихри  $V_3$  и  $V_4$  вращаются в одном направлении (одновихревое течение).

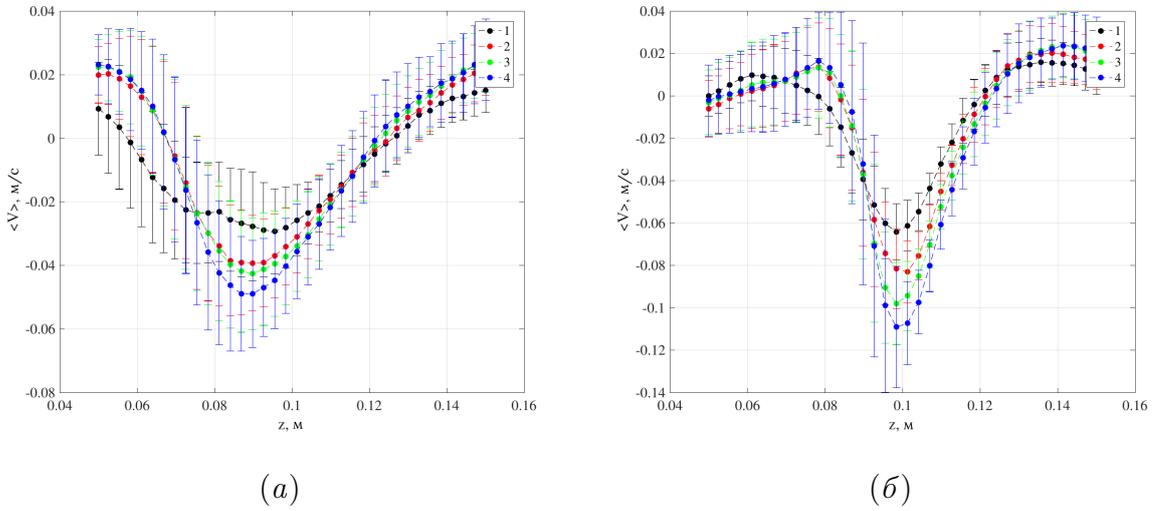


Рис. 2.9. Осредненные по времени профили скорости течения жидкого металла в присутствии внешнего магнитного поля; реализуется течение в виде двух противонаправленных вихрей. (а) — датчик II, (б) — датчик IV. 1 —  $I = 209$  А, 2 —  $I = 304$  А, 3 —  $I = 353$  А, 4 —  $I = 408$  А

На Рис. 2.9 профили скорости вдоль тех же датчиков II и IV, но уже в случае противонаправленных магнитных полей катушек. В этом случае оба профиля вогнутые, то есть вихри  $V_3$  и  $V_4$  вращаются в противоположных направлениях. В обоих описанных случаях пульсации скорости оказываются существенными (обозначены на рисунках вертикальными линиями).

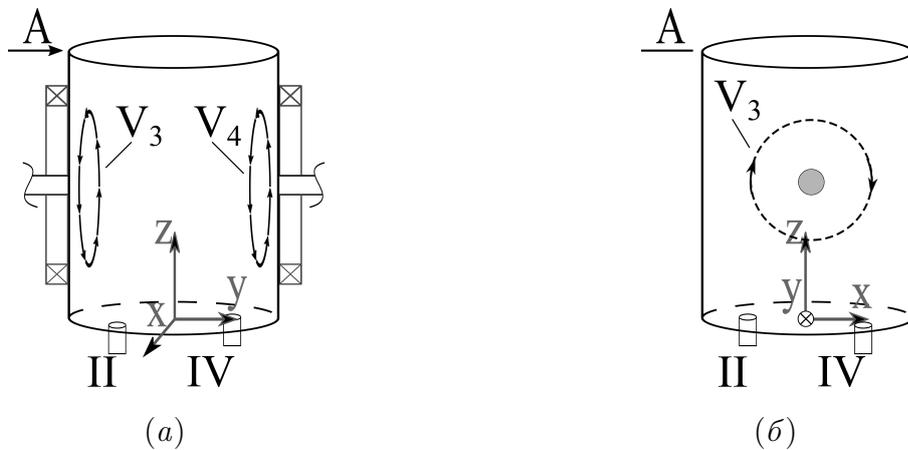


Рис. 2.10. Схематическое представление вихрей в присутствии внешнего магнитного поля. (а) — вид спереди, (б) — вид сбоку

### 2.4.3. Численное моделирование

В результате численного моделирования были получены трехмерные поля скорости течения жидкого металла в цилиндре, в зависимости от величины электрического тока, который изменялся в пределах от 50 до 1000 А. Соответственно, параметр МГД-взаимодействия находился в диапазоне  $S = (0.01 \div 5.29) \cdot 10^7$ , а число Рейнольдса —  $Re = 440 \div 27000$ . Полученные результаты, как и данные экспериментальных исследований, свидетельствуют о слабой интенсивности ЭВТ. А именно, максимальная средняя скорость течения не превышает 12 см/с для наибольшего из рассмотренных токов 1000 А.

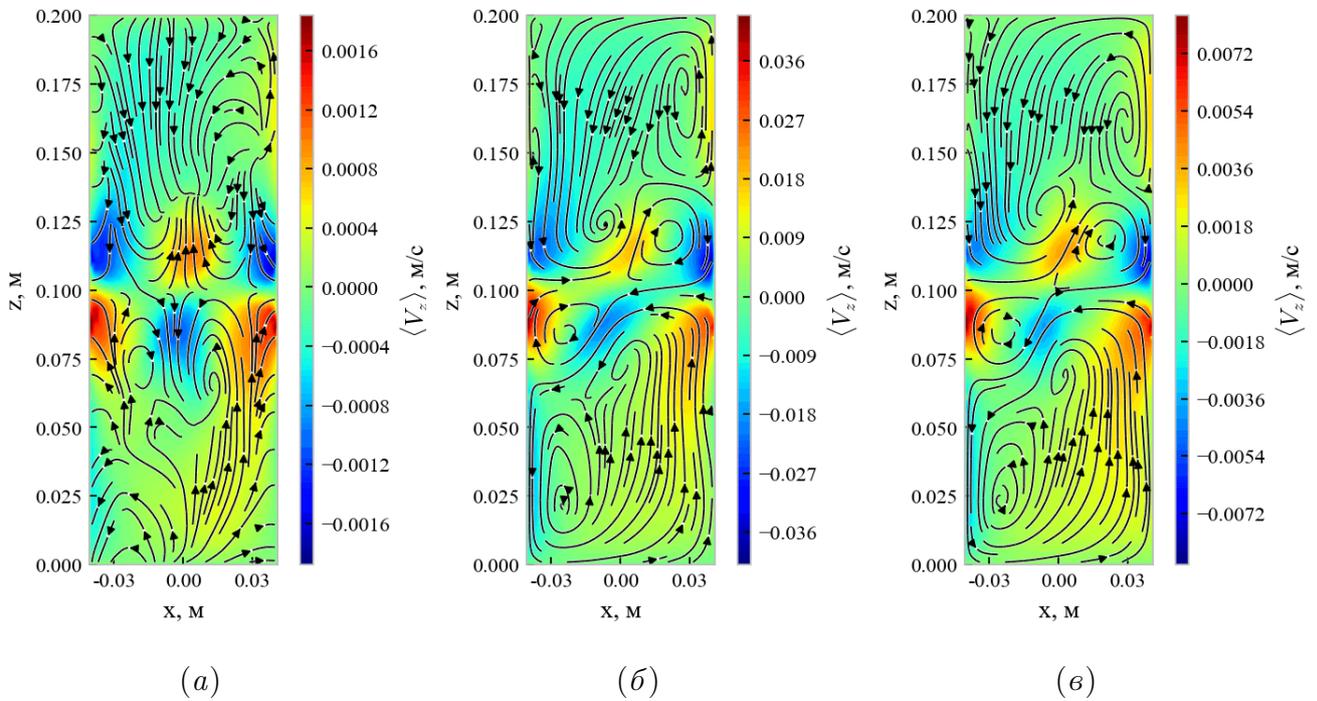


Рис. 2.11. Осредненные по времени поля  $z$ -компоненты скорости в сечении  $zOx$  для токов 50 А (а), 200 А (б), 1000 А (в)

На Рис. 2.11 представлены визуализации осредненных по времени полей  $z$ -компоненты скорости в сечении  $zOx$ , для токов 50 А (а), 200 А (б) и 1000 А (в). Здесь цветом изображена величина  $z$ -компоненты скорости, а линиями со стрелками показано векторное поле скорости в данном сечении. что максимальные значения вертикальной компоненты скорости локализуются в области электродов. Также отчетливо различим искаженная двухвихревая структура течения.

Причем наблюдаемая несимметрия прослеживается даже при минимальном исследованном токе 50 А.

На Рис. 2.12 изображены осредненные по времени профили  $z$ -компоненты скорости течения галлиевого сплава, построенные вдоль оси симметрии цилиндра для трех значений тока. Вертикальными линиями обозначены пульсации скорости. Данные профили свидетельствуют о двухвихревой структуре течения во всем рассматриваемом диапазоне токов, что согласуется с экспериментальными результатами на Рис. 2.5. Кроме того, по обозначенным вертикальными линиями пульсациям скорости можно судить о сильной нестационарности процесса.

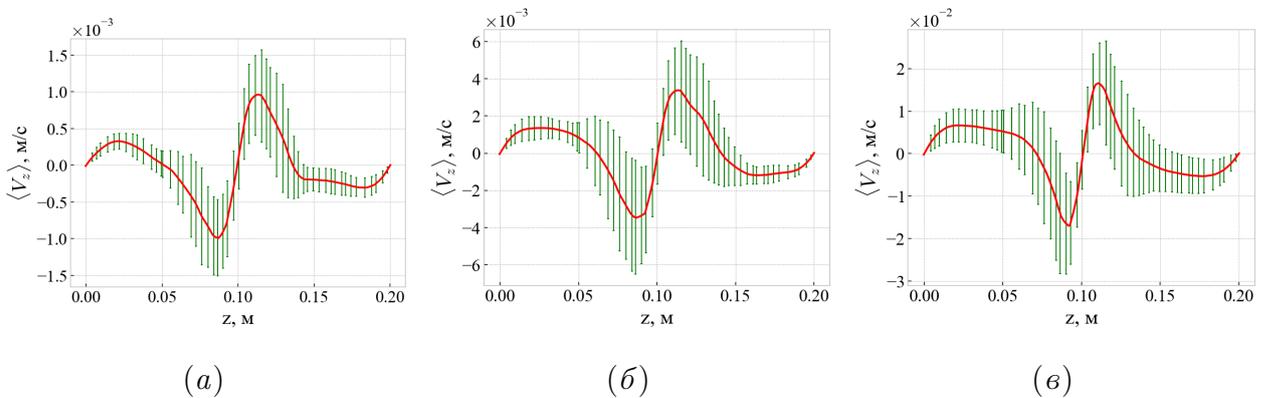


Рис. 2.12. Осредненные по времени профили  $z$ -компоненты скорости течения жидкого металла вдоль оси симметрии цилиндра; ток (а) — 50 А, (б) — 200 А, (в) — 1000 А. Вертикальными линиями изображено среднеквадратичное отклонение

Пространственно-временные карты  $z$ -компоненты скорости течения вдоль оси цилиндра (Рис. 2.13) позволяют получить представление о динамике течения. Из рисунков следует, что течение нестационарно даже при минимальном из рассмотренных токов (50 А, Рис. 2.13(а)). Наибольшая интенсивность течения наблюдается в области электродов ( $z = 0.1$  м). При этом с ростом тока растет как частота, так и амплитуда пульсаций скорости.

Оценка максимальной средней скорости течения (Рис. 2.14) демонстрирует монотонный рост интенсивности ЭВТ с увеличением тока. В рассмотренном интервале токов полученная зависимость хорошо описывается квадратичным трендом. Из рисунка также видно, что максимальное значение средней скоро-

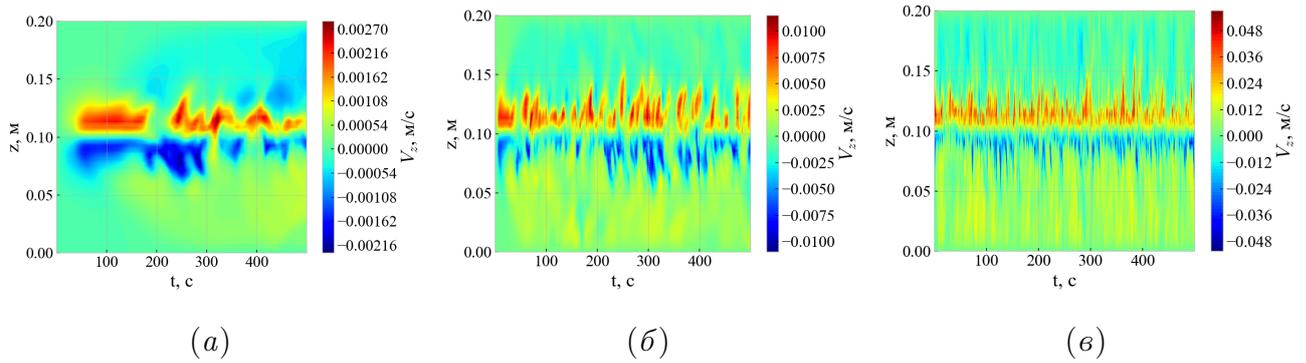


Рис. 2.13. Пространственно-временные карты  $z$ -компоненты скорости течения жидкого металла вдоль оси симметрии цилиндра; ток (а) — 50 А, (б) — 200 А, (в) — 1000 А

сти составило 12 см/с при наибольшем исследованном токе 1000 А. Значения средней скорости оказываются несколько выше, чем те, что были получены в экспериментах. Это обусловлено тем, что оценка производится по всему объему, а не вдоль профилей.

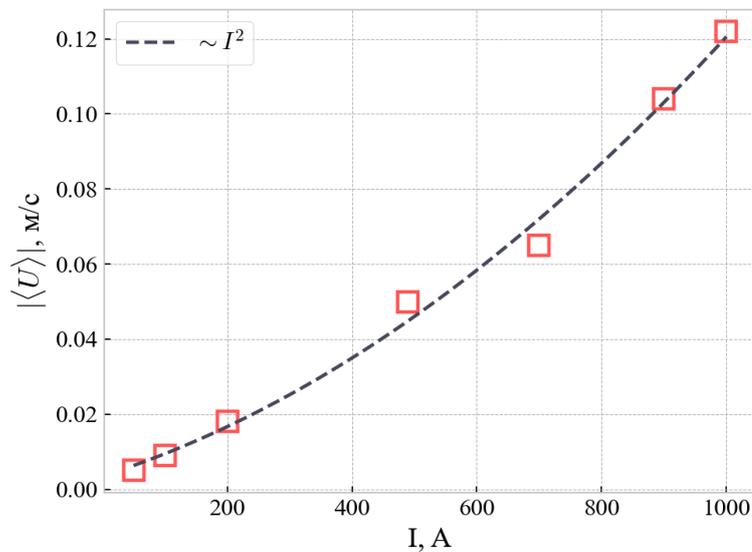


Рис. 2.14. Зависимость максимальной средней скорости в цилиндре от величины электрического тока

#### 2.4.4. Частотный анализ

Оценка колебательных характеристик течения производилась с применением вейвлет-анализа [134], поскольку пространственно-временные карты течения (Рис. 2.13) свидетельствуют о нерегулярных пульсациях вертикальной скорости

в приэлектродной области.

Вейвлет-преобразование переводит одномерный временной ряд  $f(t)$  в двумерную частотно-временную плоскость  $(\nu, t)$ , так что

$$W(\nu, t) = \sqrt{\nu} \int f(\tau) \psi(\nu(\tau - t)) d\tau,$$

где  $\psi(t)$  — вещественная или комплексная функция, называемая анализирующим вейвлетом.

Существует множество анализирующих вейвлетов, каждый из которых выбирается в зависимости от конкретной задачи. Наиболее популярными являются комплексный вейвлет Морле

$$\psi(t) = \exp[-t^2/2\sigma^2] \exp[i2\pi t]$$

и действительный вейвлет «мексиканская шляпа»

$$\psi(t) = (1 - t^2) \exp[-t^2/2\sigma^2].$$

Здесь  $\sigma$  — параметр, варьируя который можно добиться оптимального частотно-го и временного разрешений вейвлета. Малые значения  $\sigma$  позволяют получить лучшее временное разрешение, в то время как увеличение  $\sigma$  дает большее частотное разрешение. Однако неограниченный рост  $\sigma$  нежелателен, поскольку предел  $\sigma \rightarrow \infty$  отвечает случаю Фурье-преобразования.

Как уже было отмечено ранее, исследуемое электровихревое течение изобилует нерегулярными всплесками. Поэтому в качестве анализирующего вейвлета был выбран вейвлет «мексиканская шляпа», хорошо локализующий одиночные события в сигнале.

В качестве исходного сигнала для вейвлет-анализа использовалась временная зависимость  $z$ -компоненты скорости течения в точке  $(0; 0; 0.11)$  м, то есть вблизи центра вертикальной оси цилиндра. Для примера на Рис. 2.15 представлены эволюция  $z$ -компоненты скорости, полученная при токе  $I = 700$  А, и вейвлет-диаграмма данного сигнала. На диаграмме хорошо различимы две

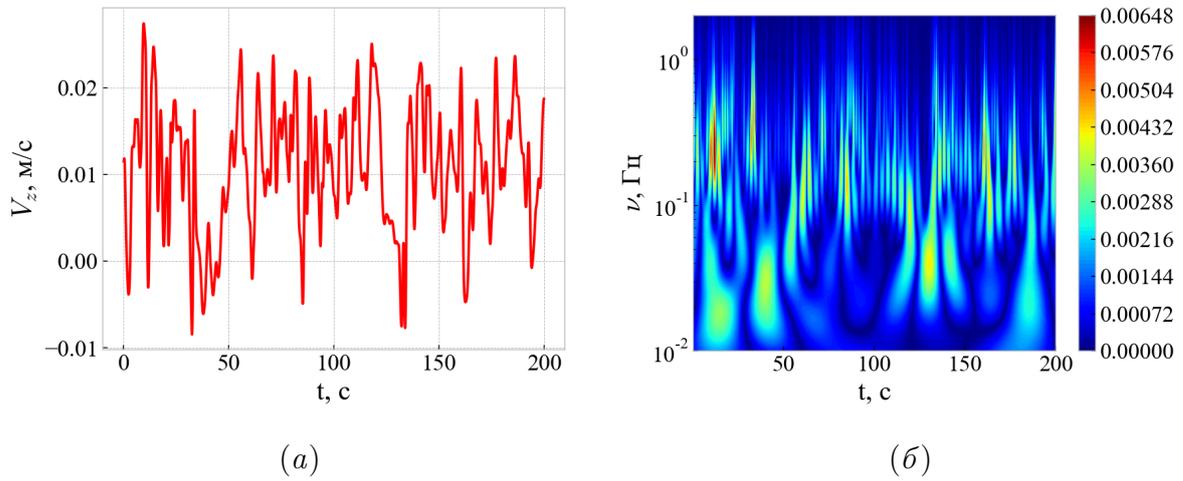


Рис. 2.15. (а) — эволюция  $z$ -компоненты скорости течения в точке  $(0; 0; 0.11)$  м; (б) — вейвлет-диаграмма сигнала

частоты пульсации скорости в рассматриваемой точке, визуально наблюдаемые на Рис. 2.15(а).

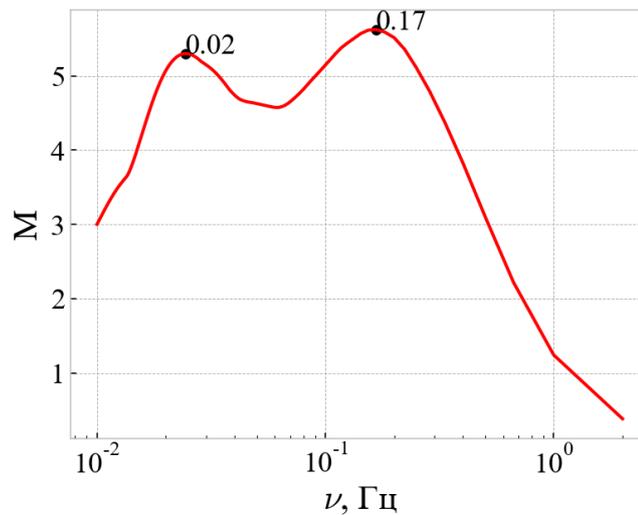


Рис. 2.16. Интегральный спектр вейвлет-преобразования, построенный по данным на Рис. 2.15(б)

Вейвлет-диаграмма позволяет оценить, события с какой характерной частотой имели место в исследуемом сигнале. Для реальных сигналов диаграмма  $W(\nu, t)$  часто сложно устроена, поэтому для лучшей ее интерпретации удобно воспользоваться интегральным спектром вейвлет-преобразования

$$M(\nu) = \int |W(\nu, t)| dt.$$

Тогда для изображенного на Рис. 2.15(а) сигнала интегральный спектр демонстрирует два хорошо различимых пика, отвечающих частотам 0.02 и 0.17 Гц (см. Рис. 2.16).

Совместный анализ вейвлет-диаграмм и интегральных спектров для вертикальной компоненты скорости течения в точке  $(0; 0; 0.11)$  м позволил получить зависимость доминирующей частоты пульсации скорости течения от силы тока, представленную на Рис. 2.17. Рисунок свидетельствует о том, что для всех рассмотренных токов имеют место пульсации скорости, однако для токов меньше 200 А значение частоты невелико. Как уже было показано на Рис. 2.13, с ростом силы тока наблюдается монотонное увеличение частоты пульсаций. При наибольшем из рассмотренных токов 1000 А ее значение составило 0.35 Гц.

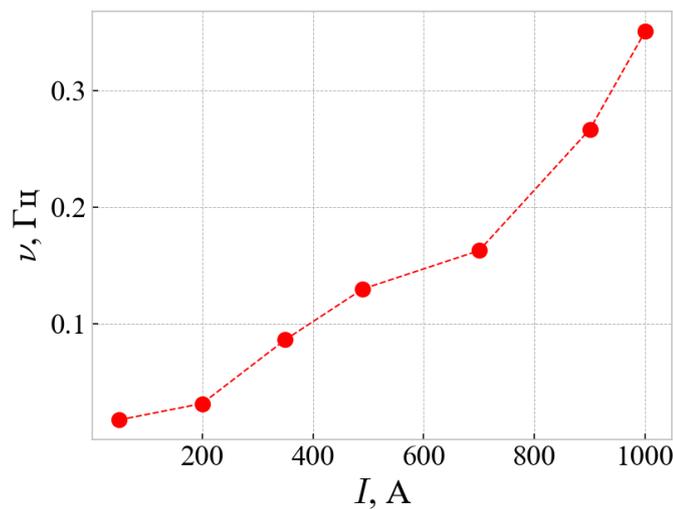


Рис. 2.17. Характерная частота пульсаций скорости течения в точке  $(0; 0; 0.11)$  м при различной силе тока

## 2.5. Выводы по главе

- Спроектирована и изготовлена экспериментальная установка для исследования электровихревых течений в цилиндре с токоподводом локализованными на боковой стенке оппозитными электродами.
- Торoidalный вихрь, генерируемый в области вогнутой цилиндрической

поверхности, оказывается неустойчивым даже при минимальном токе 50 А в расчете и 200 А в эксперименте, что существенно ниже представляющих интерес в большинстве фундаментальных и прикладных работ значений токов.

- В отсутствие внешнего магнитного поля течение представлено двумя крупномасштабными вихрями, смещенными в верхнюю часть цилиндра. При наложении магнитного поля, направление которого параллельно линии, соединяющей электроды, течение меняется существенным образом: появляются дополнительные вихри в приэлектродной области. В зависимости от того, сонаправлены или противоположены поля каждой из двух используемых катушек, течение принимает одно- или двухвихревой характер. Приложение магнитного поля увеличивает как общую интенсивность течения, так и пульсации скорости.
- Построена численная модель, соответствующая конфигурации задачи в экспериментальном исследовании в отсутствие внешнего магнитного поля. Корректность модели подтверждена полученными в экспериментах данными. Проведена серия расчетов для большего диапазона токов, позволивших оценить структуру ЭВТ в цилиндре при меньших и больших токах, чем в экспериментальном исследовании, где величина тока ограничивалась снизу разрешающей способностью УДА, а верхняя — источником тока.

## Глава 3

# Электровихревое течение жидкого металла в цилиндрах различного аспектного отношения

### 3.1. Введение. Постановка задачи

Электровихревое течение (ЭВТ) жидкого металла в цилиндре с аксиальным токоподводом — распространенная конфигурация задачи для изучения ЭВТ, схожая с каноническими постановками [65]. В последнее время подобные конфигурации привлекли дополнительное внимание благодаря тому, что они близки к жидкометаллическим батареям (ЖМБ) [31, 70, 71], в которых электровихревые течения неизбежно возникают. ЭВТ большой интенсивности в таких устройствах нежелательны, поскольку они могут приводить к чрезмерному утонению слоя электролита и выхода батареи из строя [76, 79, 80]. В то же время, ЭВТ умеренной интенсивности выполняют полезную функцию перемешивания расплава, тем самым выравнивая неоднородности температуры и уменьшая вероятность возникновения тепловой конвекции, а также образование интерметаллидов, негативным образом сказывающихся на емкости батареи.

Очевидным управляющим параметром ЭВТ является сила тока. Однако не менее важной является геометрия самой емкости, в которой течение создается. В данной главе численно рассматривается электровихревое течение галлиевого сплава, помещенного в цилиндрические емкости различного аспектного отношения  $\Gamma = H/D$ , созданное постоянным электрическим током. При этом фактически варьируется лишь высота емкости, а диаметр  $D$  остается постоянным. Катодом является локализованный в центре нижнего торца цилиндрический электрод, установленный вровень с внутренней поверхностью емкости. В качестве анода выступает вся поверхность верхнего торца цилиндра.

## 3.2. Математическая модель

Расчетная область представляет собой цилиндр высотой  $H$  и диаметром  $D = 200$  мм (см. Рис. 3.1). Высота цилиндра варьируется и принимает значения  $H = 50, 100, 150$  и  $200$  мм; диаметр электрода на нижнем торце  $D_c = 40$  мм.

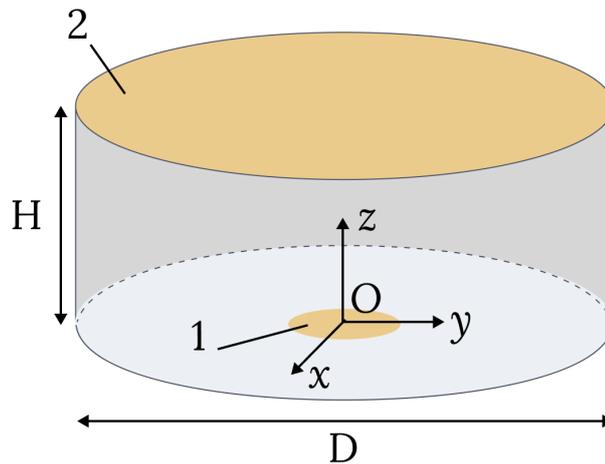


Рис. 3.1. Схема расчетной области. Здесь 1 и 2 — электроды,  $H$  — высота цилиндра,  $D$  — диаметр

При построении численной модели делаются следующие допущения:

- Задача изотермическая, то есть отсутствует как тепловыделение вследствие протекания электрического тока, так и отток и приток тепла через границы.
- Боковая стенка и часть нижнего торца, отличная от электрода, считаются изолирующими.
- Используется безындукционное приближение.

Используемый инструментарий и методика решения идентичны описанным в разделе 2.3, за исключением модели турбулентности и расчетной сетки. Задействуется стандартная  $k-\omega$  модель [135], без использования коррекции для малых чисел Рейнольдса. Вместо неструктурированной сетки применяется блочно-структурированная сетка с гексаэдральными элементами, максимальный

линейный размер которых не превышает 5.24 мм. Количество элементов сетки для каждой конфигурации цилиндра приведено в Таблице 3.1.

Таблица 3.1. Число элементов сетки  $N$  для конфигураций с различными высотами цилиндра  $H$

$H$ , мм	50	100	150	200
$N$	272000	268800	280800	315000

Сила постоянного электрического тока менялась в пределах от 10 до 1000 А, что соответствует параметру ЭВТ в диапазоне  $S = 5.29 \cdot 10^3 \div 5.29 \cdot 10^7$ . В расчетах и при интерпретации результатов используется Декартова система координат, начало которой совпадает с центром нижнего торца цилиндра, а ось  $z$  коллинеарна оси цилиндра, как показано на Рис. 3.1. Все расчеты начинаются из состояния равновесия.

### 3.3. Результаты

Проведено численное моделирование ряда режимов течения галлиевой эвтектики в замкнутых цилиндрических полостях различной высоты  $H = 50, 100, 150$  и  $200$  мм. Получены трехмерные поля скорости течения жидкого металла в цилиндре [6].

Полученные результаты показывают, что ЭВТ возникает при всех рассмотренных параметрах системы. Течение имеет полоидальный вид, что связано с формированием крупномасштабного вихря тороидальной формы. Расчеты также показали существование квазистационарного режима течения, реализующегося при токах ниже некоторого значения, зависящего от аспектного отношения полости. Этот режим выражается в сохранении в среднем формы крупномасштабного вихря на протяжении всего времени численного эксперимента, при этом характерные времена изменений течения оказываются много меньше характерных времен процесса (периода оборота вихря). Оценка основных

характеристик течения происходит по величине  $z$ -компоненты скорости, поскольку именно ее позволяет измерить ультразвуковой доплеровский анемометр в экспериментальных исследованиях [7].

### 3.3.1. Зависимость структуры течения от силы тока для цилиндра с аспектным отношением $\Gamma = 1/2$

Изучим сначала, как зависит структура течения от величины электрического тока. Для простоты зафиксируем аспектное отношение емкости  $\Gamma = 0.5$ . На Рис. 3.2 изображены визуализации мгновенных полей скорости в сечении  $zOy$ , для токов 10, 200 и 750 А. Цветом обозначена величина  $z$ -компоненты скорости. Рисунок показывает, что течение имеет полоидальный вид. Для малых токов (10 А) не отмечается существенных искажений крупномасштабного вихря. Однако при токе 200 А и выше (Рис. 3.2(б), (в)) уже видна асимметрия течения, проявляющаяся в искажении формы вихря и смещении его оси.

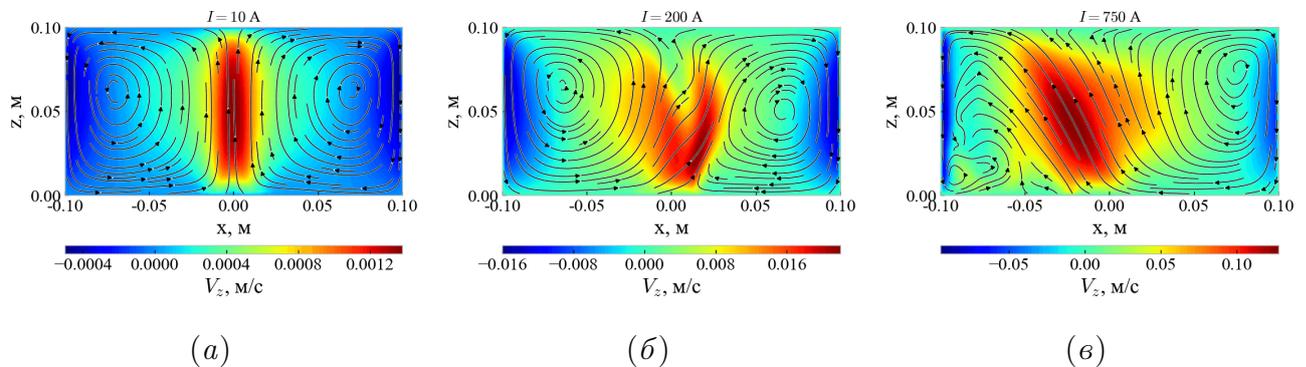


Рис. 3.2. Визуализации мгновенных полей скорости в сечении  $zOy$ . Цветом обозначена величина  $z$ -компоненты скорости. Здесь  $\Gamma = 0.5$ , (а) — ток  $I = 10 \text{ А}$ , (б) —  $I = 200 \text{ А}$ , (в) —  $I = 750 \text{ А}$

Важно отметить, что описанная асимметрия течения не является стационарным состоянием системы. Это означает, что при изменении тока от малого к большому, процесс переходит из квазистационарного режима (в котором характерное время изменения скорости течения мало, в сравнении с периодом оборота крупномасштабного вихря) в нестационарный. Кроме того, с дальнейшим ро-

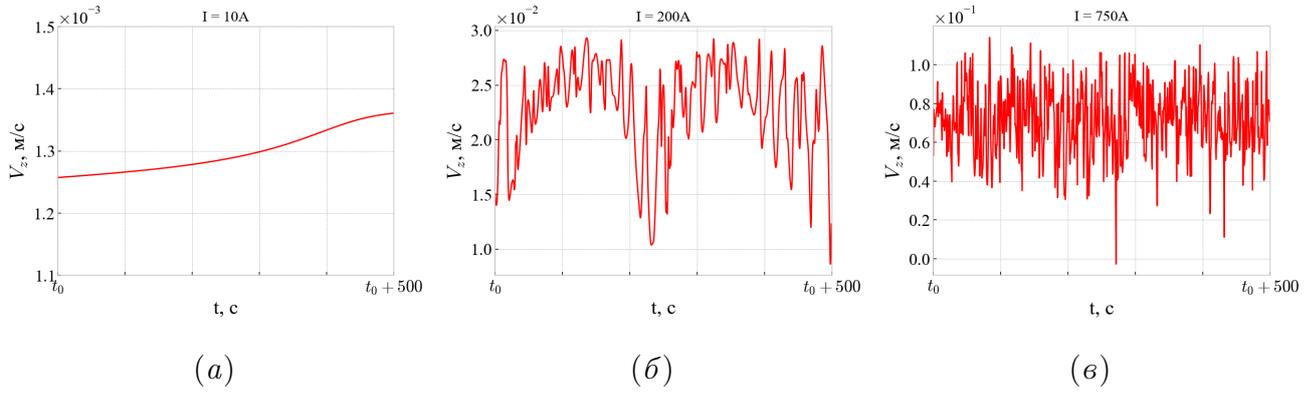


Рис. 3.3. Временные зависимости  $z$ -компоненты скорости течения в центре цилиндра. Аспектное отношение  $\Gamma = 0.5$ , сила тока (а) —  $I = 10$  А, (б) —  $I = 200$  А, (в) —  $I = 750$  А

с ростом тока нестационарный характер течения усиливается. Это хорошо видно из Рис. 3.3, на котором для случая  $\Gamma = 0.5$  представлены временные зависимости  $z$ -компоненты скорости течения в центре цилиндра, то есть в точке  $(0; 0; H/2)$ , для токов 10, 200 и 750 А. С ростом тока интенсивность подъемного течения монотонно увеличивается, достигая значения 0.11 м/с при максимальном из рассмотренных токов 1000 А (см. Рис. 3.4(а)).

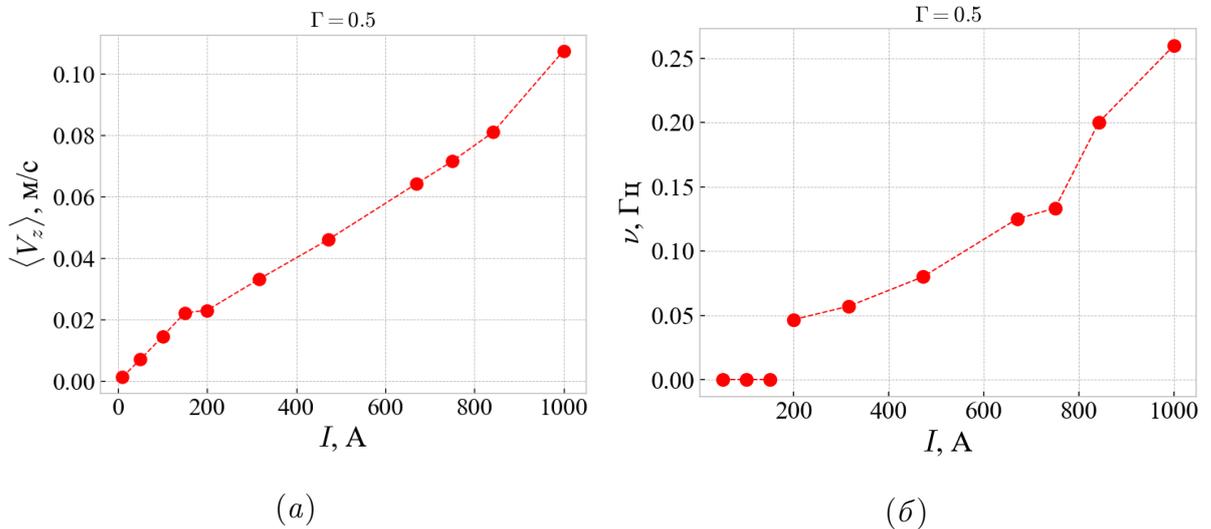


Рис. 3.4. Зависимости осредненной по времени величины (а) и частоты пульсации (б)  $z$ -компоненты скорости в точке  $(0; 0; H/2)$  от силы тока;  $\Gamma = 0.5$

Количественная оценка пульсационных характеристик течения осуществлялась при помощи вейвлет-анализа с применением вейвлета Морле [134]. На Рис. 3.4(б) показан результат анализа для случая  $\Gamma = 0.5$ . В качестве исходного

сигнала использовалась временная зависимость  $z$ -компоненты скорости течения в центре цилиндра. Результаты позволили выделить доминирующую частоту пульсаций скорости течения для токов более 200 А, в то время как для всех исследованных меньших токов характерных частот не наблюдалось. В этом случае реализуется квазистационарный режим течения. С ростом силы тока наблюдается монотонное увеличение значения частоты.

### 3.3.2. Цилиндры с различным аспектным отношениями

Зафиксируем теперь силу тока при 1000 А и будем изменять высоту цилиндра. А именно, рассмотрим аспектные отношения  $\Gamma = 0.25, 0.5, 0.75$  и 1.

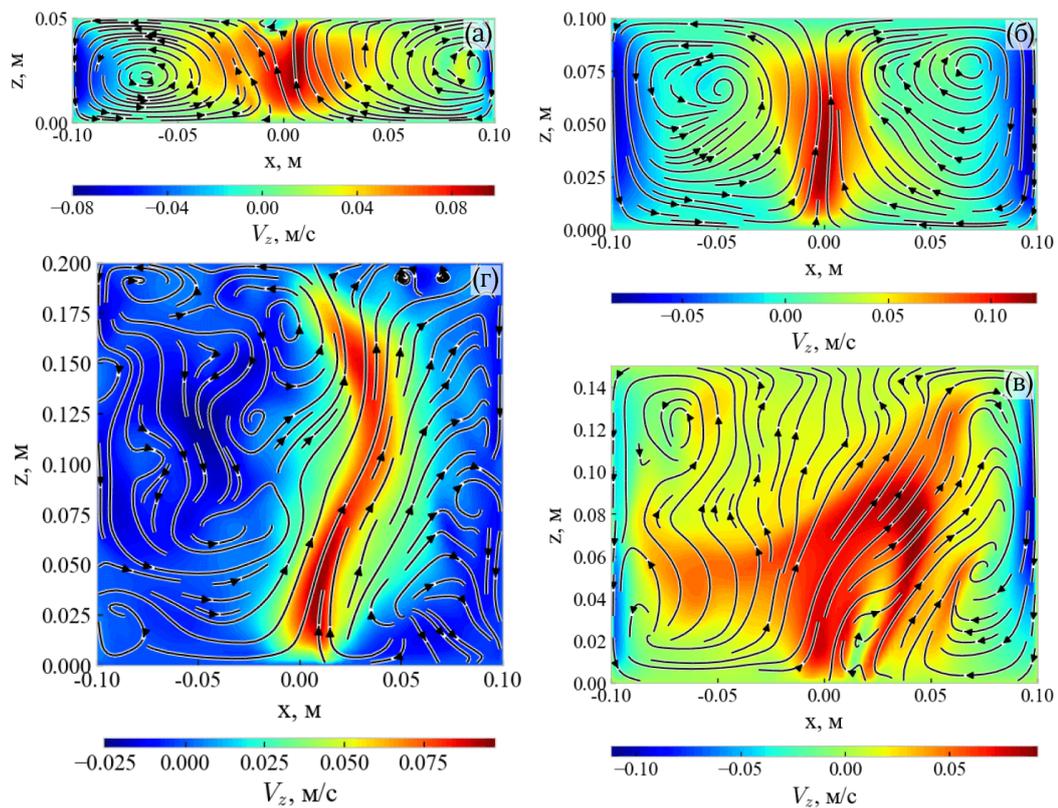


Рис. 3.5. Мгновенные поля скорости в сечении  $zOy$ . Цветом обозначена  $z$ -компонента скорости течения, а линии со стрелками визуализируют течение в данном сечении. Аспектное отношение  $\Gamma$ : (а) — 0.25, (б) — 0.5, (в) — 0.75, (г) — 1. Сила тока 1000 А для всех представленных случаев

Мгновенные поля скорости в сечении  $zOy$  на Рис. 3.5 показывают, что при наименьшем из рассмотренных  $\Gamma = 0.25$  (Рис. 3.5(а)) основной вихрь имеет

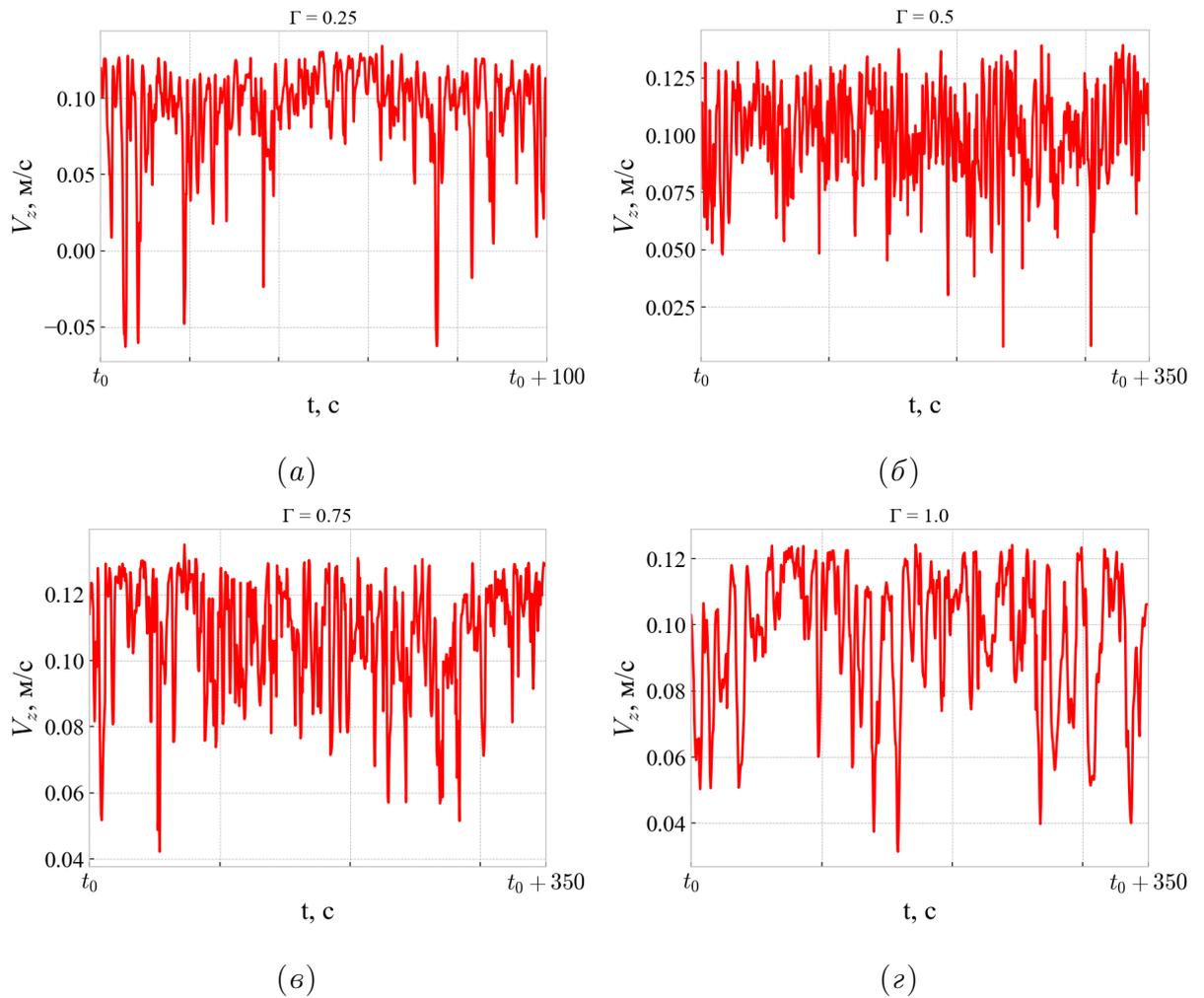


Рис. 3.6. Временные зависимости  $z$ -компоненты скорости в точке  $z = (0; 0; 0.025)$  м. Ток 1000 А, aspectное отношение  $\Gamma$ : (а) — 0.25, (б) — 0.5, (в) — 0.75, (г) — 1

тороидальную форму и зажат между торцами цилиндра. В этом случае ЭВТ наиболее выражено. По мере увеличения высоты цилиндра вихрь деформируется и проявляется мелкомасштабная вихревая структура течения, хорошо различимая на Рис. 3.5(г).

Оценка характеристик течения при различных aspectных отношениях производилась в точке  $z = (0; 0; 0.025)$  м, отвечающей центру цилиндра с  $\Gamma = 0.25$ . Временные зависимости  $z$ -компоненты скорости для различных  $\Gamma$  на Рис. 3.6 свидетельствуют о спадании значения доминирующей частоты пульсаций скорости течения с ростом параметра aspectного отношения. Зависимость осредненной по времени скорости течения от aspectного отношения емкости носит немонотонный характер (Рис. 3.7(а)), а минимальное значение  $\langle V_z \rangle$  отвечает случаю

$\Gamma = 0.25$ . С дальнейшим увеличением  $\Gamma$  до 0.75 средняя скорость растет, а при  $\Gamma = 1$  вновь падает. Такой вид зависимости  $\langle V_z \rangle(\Gamma)$  связан с тем, что при малом аспектном отношении полоидальное течение сильно нестационарно, в результате чего подъемный и опускной потоки смещаются со временем. В этом случае может реализовываться такое состояние системы, в котором опускное течение расположено вблизи оси цилиндра, то есть значение скорости в наблюдаемой точке становится отрицательным. В итоге среднее значение скорости оказывается мало.

Результаты частотного анализа показали, что наибольшая частота пульсаций  $z$ -компоненты скорости отвечает случаю наименьшего  $\Gamma$ , и с ростом аспектного отношения емкость ее значение монотонно убывает (Рис. 3.7(б)).

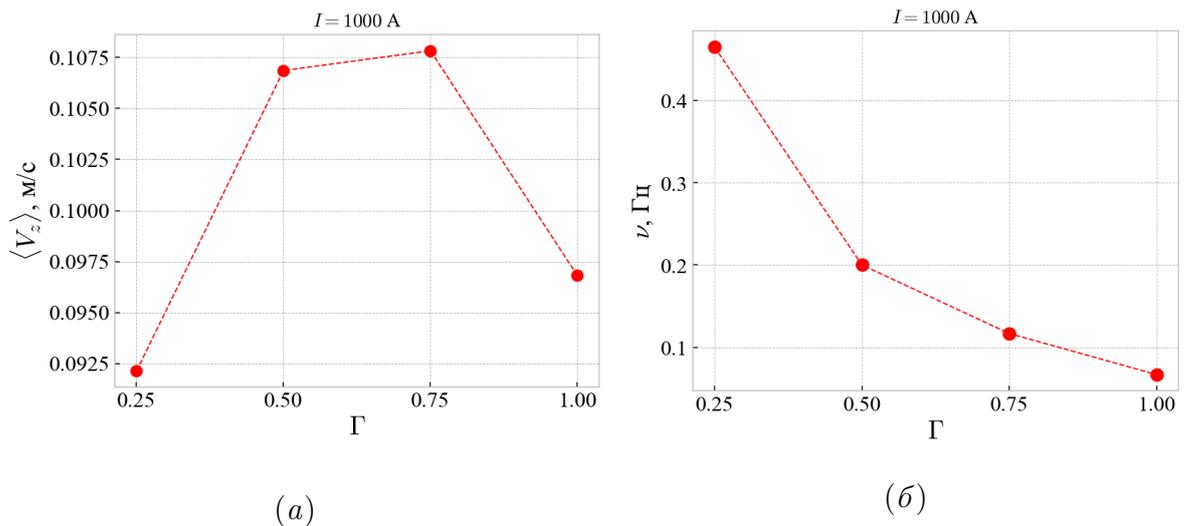


Рис. 3.7. Зависимости осредненного по времени значения (а) и частоты пульсации (б) вертикальной компоненты скорости течения жидкого металла в точке  $z = (0; 0; 0.025)$  м от аспектного отношения  $\Gamma$ . Сила тока фиксирована и составила  $I = 1000$  А

### 3.4. Выводы по главе

- Построена численная модель для исследования электровихревых течений жидкого металла в цилиндрах различного аспектного отношения.
- Обнаружено, что при аспектных отношениях  $\Gamma = 0.25, 0.5, 0.75$  и 1 во всем

рассмотренном диапазоне токов от 10 до 1000 А в емкости возникает ЭВТ в виде крупномасштабного вихря тороидальной формы. При малых токах ( $\lesssim 100$  А) крупномасштабный вихрь стабилен. Однако для интересующего интервала токов (более 500 А) течение нестационарно, что проявляется в искажении формы основного вихря и сложном осциллирующем характере смещения его оси. Максимальная средняя скорость течения составила 0.11 м/с при наибольшем из исследованных токе 1000 А.

- Показано, что изменение аспектного отношения цилиндра оказывает влияние на все параметры течения — его структуру, интенсивность, а также пульсационные характеристики. При наименьшем из рассмотренных  $\Gamma = 0.25$  основной крупномасштабный вихрь наиболее выражен. С ростом  $\Gamma$  его тороидальный вид становится менее выраженным, появляются вторичные мелкомасштабные вихри в угловых областях емкости. Таким образом, увеличение высоты цилиндрической емкости при сохранении силы тока в цепи позитивно сказывается на подавлении ЭВТ. То есть, если в конкретном устройстве ЭВТ нежелательны, то предпочтительно использование вытянутых цилиндрических емкостей.

## Глава 4

## Электровихревое течение в цилиндре в присутствии слабого магнитного поля

### 4.1. Введение. Постановка задачи

Силы, ответственные за создание ЭВТ, изначально создают полоидальные течения. В осесимметричной постановке в отсутствие внешнего магнитного поля это приводит к образованию крупномасштабного вихря тороидальной формы. Так, первые экспериментальные исследования ЭВТ на ртути не показали каких-либо отличных от полоидальных течений [136]. Однако последующие работы показали [83, 137], что ЭВТ в полусферической емкости закручивается под действием внешнего магнитного поля.

Примечательно, что вращение развивается даже в слабых магнитных полях, при которых силы, лежащие в природе ЭВТ, по своей величине на порядки превосходят силы, вызывающие азимутальное движение [138]. Объяснение такому явлению было предложено авторами работы [138], которые предположили, что формирование существенного вращения может в итоге приводить к возникновению центробежных сил, компенсирующих создающие ЭВТ силы. Тогда полоидальное течение сводится в основном к экмановской подкачке, ограниченной тонкой границей вращательного потока.

Экмановская подкачка имеет место при дифференциальном вращении между вязкой жидкостью и твердой границей [139]. Данный эффект заключается в следующем. Возникающая при вращении жидкости центробежная сила приводит радиальному оттоку жидкости. Вследствие закона сохранения массы, происходит «подкачка» среды в центральную область, проявляющаяся в виде вторичного полоидального течения. Учет экмановской подкачки важен, к примеру, при магнитном перемешивании частично затвердевших слитков [139].

Механизм полоидального подавления ЭВТ [138] естественным образом приводит к следующим положениям, требующим проверки. Во-первых, в случае большого соотношения между объемными полоидальными и центробежными силами ожидается существование переходного процесса от полоидального к азимутальному течению. Во-вторых, должен существовать порог, ниже которого центробежные силы не могут доминировать над ЭВТ. В-третьих, подавление полоидального течения не зависит от направления исходного течения, которое может как сходиться, так и расходиться на свободной поверхности. Наконец, в режиме полоидального подавления, обусловленного экмановской подкачкой, для кинетической энергии азимутального течения ожидается выполнение степенной зависимости вида  $F_{az}^{10/9}$  [138] от силы, его вызывающей.

В главе численно изучается подавление полоидального течения, возникающего вследствие развития ЭВТ в замкнутом цилиндрическом объеме жидкого металла, азимутальным течением, генерируемым внешним магнитным полем.

## 4.2. Математическая модель

Расчетная область представляет собой цилиндр (см. Рис. 4.1(а)) высотой  $H = 100$  мм и диаметром  $D = 200$  мм. В центре нижнего цилиндра размещен электрод 1 диаметра  $D_c = 30$  мм. В качестве второго электрода выступает вся боковая стенка 2 емкости. Цилиндр заполняется галлиевой эвтектикой, материальные параметры которой изложены в разделе 2.2. Схема генерации течения в данной постановке изображена на Рис. 4.1(б).

При построении модели делаются следующие допущения:

- Задача считается изотермической: отсутствует выделение тепла при протекании тока через жидкий металл, а также нет потока тепла через границы емкости.
- Верхний торец цилиндра и отличная от электрода часть нижнего торца

считаются изолирующими.

- Используется безындукционное приближение, так что поле электромагнитных сил считается постоянным и вычисляется один раз в начале расчетов.
- Верхняя граница области считается не свободной поверхностью, а жесткой стенкой. Это допущение накладывает ограничение на режимы течения, а именно, модель неприменима в случае существенных деформаций свободной поверхности жидкого металла.

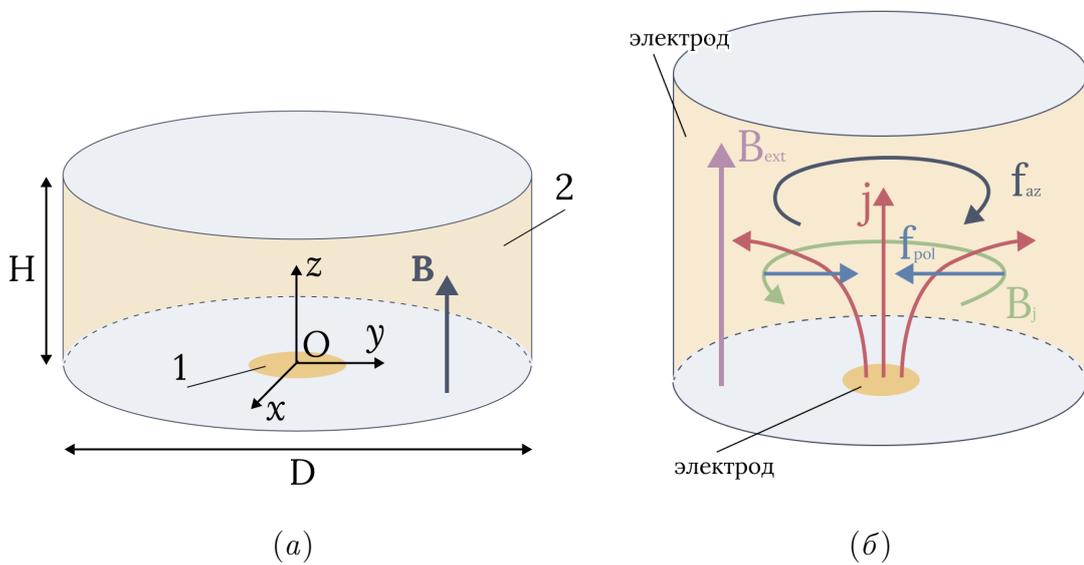


Рис. 4.1. Схемы расчетной области (а) и генерации течения (б)

Система уравнений и граничные условия для электрического потенциала и скорости, а также методика решения аналогичны описанным в разделе 3.2, для конфигурации с высотой области  $H = 100$  мм. Отличным является поле электромагнитных сил, ввиду иного расположения второго электрода, в качестве которого выступает боковая стенка цилиндра, а не верхний торец. Во всех расчетах сила тока фиксирована и составляет 1000 А. Расчеты начинаются из состояния равновесия.

В численном моделировании и при представлении результатов используется декартова система координат, начало которой находится в центре нижнего торца цилиндра, а ось  $z$  совпадает с осью симметрии цилиндра.

## 4.3. Результаты

### 4.3.1. ЭВТ в отсутствие внешнего магнитного поля

Изучим сначала течение в отсутствие внешнего магнитного поля. При этом рассмотрим различные режимы течения, реализуемые для токов в диапазоне от 50 до 1000 А.

В результате численного моделирования получены поля скорости течения жидкого металла в цилиндрическом объеме. Для описания искомого полоидальное и азимутальное течения удобно использовать соответствующие компоненты скорости

$$v_{\text{pol}} = \sqrt{v_r^2 + v_z^2}, \quad v_\varphi = \sqrt{v_\varphi^2},$$

где  $v_r$  и  $v_\varphi$  — радиальная и угловая компоненты скорости течения. Количественная оценка течения осуществляется при помощи энергии полоидальной и азимутальной компонент, определяемых как

$$E_{\text{pol}} = \int_V (v_r^2 + v_z^2) dV, \quad E_{\text{az}} = \int_V v_\varphi^2 dV.$$

Соответственно, полная энергия течения вычисляется как  $E_{\text{tot}} = E_{\text{pol}} + E_{\text{az}}$ .

В отсутствие внешнего магнитного поля в объеме возникают только силы, генерирующие полоидальное ЭВТ (см. Рис. 4.1(б)). Срезы мгновенных полей полоидальной скорости на Рис. 4.2(а) свидетельствуют о том, что при наименьшем из рассмотренных токов 50 А течение квазистационарно. А именно, течение представлено одним радиально симметричным крупномасштабным вихрем тороидального вида, занимающим всю полость, при этом подъемное течение стабильно и направлено вдоль оси симметрии цилиндра. Данный крупномасштабный вихрь доминирует при всех рассмотренных токах, однако с ростом тока течение становится нестационарно (Рис. 4.2(б), (в)), область подъемного течения расширяется, а центральная часть вихря смещается вниз.

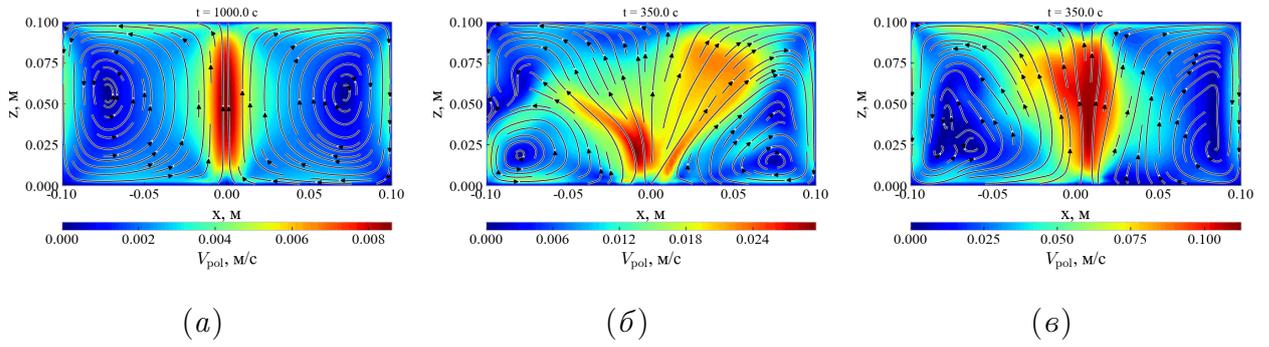


Рис. 4.2. Мгновенные поля полоидальной скорости течения в сечении  $xOz$ , в отсутствие внешнего магнитного поля. Цветом обозначена величина полоидальной компоненты скорости, а линии со стрелками визуализируют векторное поле скорости в данном сечении. Ток (а) — 50 А, (б) — 250 А, (в) — 750 А. Здесь для случая 50 А представлен срез в более поздний момент времени 1000 с, так как интенсивность течения при данном токе мала и для установления течения требуется большее время, чем при бoльших токах

Уширение области подъемного течения жидкого металла хорошо различимо на осредненных по времени полях полоидальной скорости в сечении  $xOz$ , изображенных на Рис. 4.3. Для наименьшего из рассмотренных токов 50 А среднее поле полоидальной скорости (Рис. 4.3(а)) практически идентично мгновенному на Рис. 4.2(а), что также говорит об устойчивости данного режима течения.

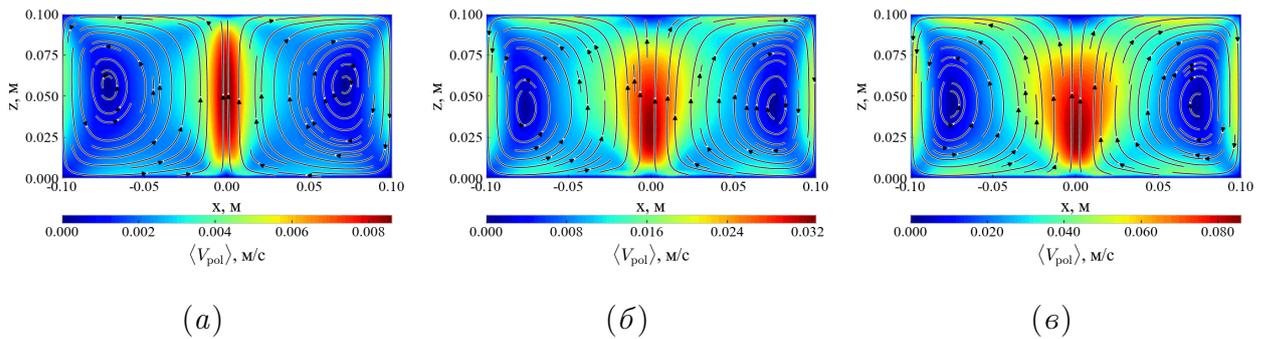


Рис. 4.3. Осредненные по времени поля полоидальной скорости течения в сечении  $xOz$ , в отсутствие внешнего магнитного поля. Цветом обозначена величина полоидальной компоненты скорости, а линии со стрелками визуализируют векторное поле скорости в данном сечении. Ток (а) — 50 А, (б) — 250 А, (в) — 750 А.

Известно, что для электровихревых течений при больших токах ожидается линейная зависимость скорости течения от силы тока, то есть зависимость числа

Рейнольдса от параметра ЭВТ описывается законом  $Re \sim S^{1/2}$  [65]. Полученные в численном моделировании результаты удовлетворяют данной зависимости (см. Рис. 4.4).

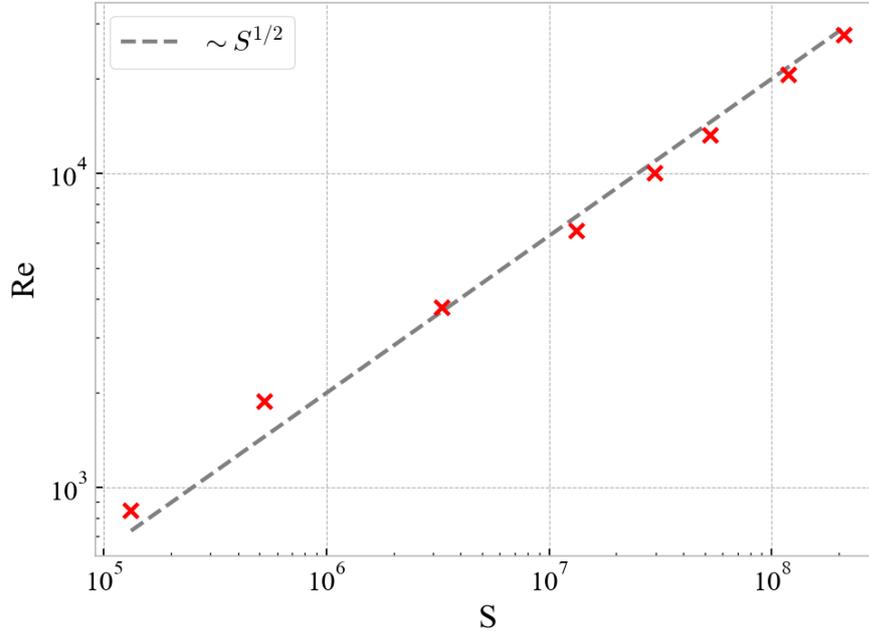


Рис. 4.4. Зависимость числа Рейнольдса от параметра ЭВТ

### 4.3.2. Магнитное поле Земли

Зафиксируем силу тока при 1000 А и приложим к системе внешнее однородное вертикальное магнитное поле, по своей конфигурации идентичное магнитному полю Земли  $B_{\text{ext}} = (0; 0.015; 0.05)$  мТл. Для сравнения на Рис. 4.5(а) и Рис. 4.6(а) изображены срезы полей скорости течения в отсутствие внешнего магнитного поля. Как уже было показано ранее, в отсутствие внешнего магнитного поля полоидальное ЭВТ представлено одним крупномасштабным вихрем. В данном случае отсутствует какое-либо стабильное азимутальное течение и на визуализации поля скорости отмечаются лишь флуктуации основного полоидального вихря.

Результаты показывают, что даже слабое внешнее магнитное поле Земли является достаточным для развития азимутального течения, способного су-

ществленным образом подавить полоидальное ЭВТ (см. Рис. 4.5(б)). При этом вращение является сильно неоднородным — области наиболее его максимальной интенсивности сосредоточены в кольце вблизи электрода, что хорошо видно на Рис. 4.6(б).

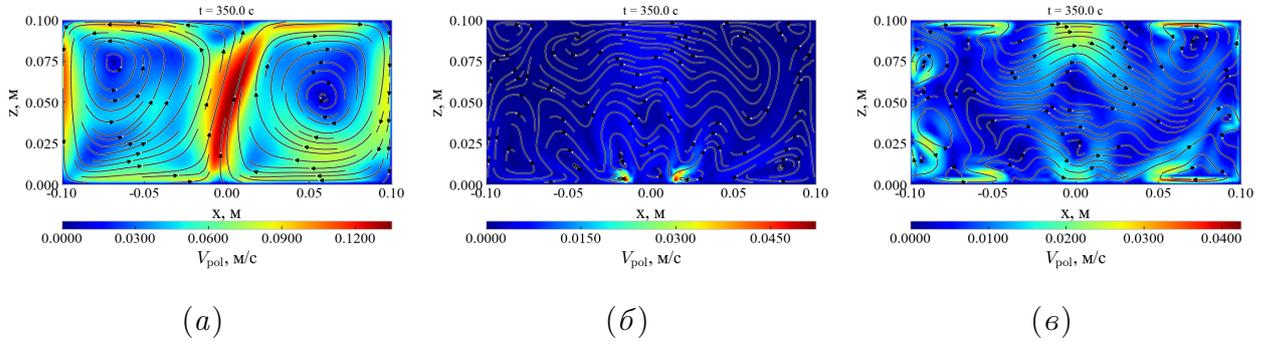


Рис. 4.5. Мгновенные поля полоидальной скорости течения в сечении  $xOz$  при различных конфигурациях внешнего магнитного поля. Цветом обозначена величина полоидальной компоненты скорости, а линии со стрелками визуализируют векторное поле скорости в данном сечении. (а) — нет внешнего магнитного поля, (б) — магнитное поле Земли, (в) — сильное вертикальное магнитное поле 1 мТл

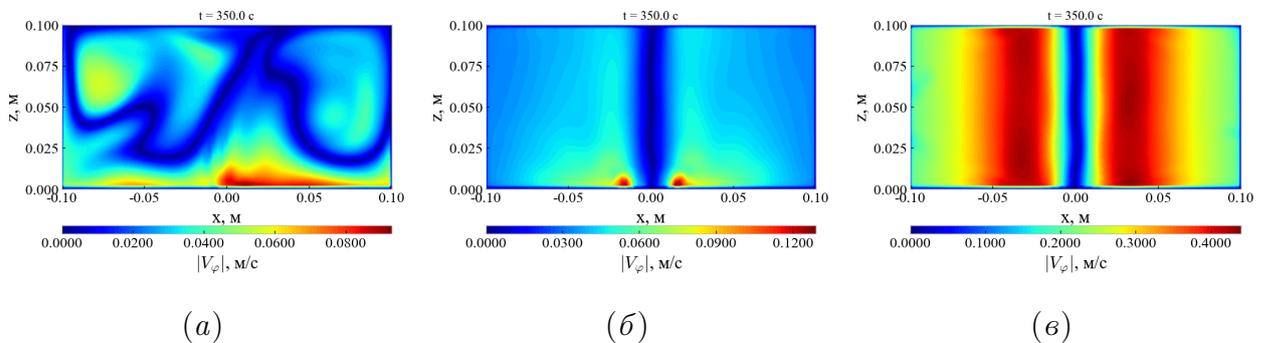


Рис. 4.6. Мгновенные поля модуля азимутальной скорости течения в сечении  $xOz$  при различных конфигурациях внешнего магнитного поля. (а) — нет внешнего магнитного поля, (б) — магнитное поле Земли, (в) — сильное вертикальное магнитное поле 1 мТл

### 4.3.3. Сильное вертикальное магнитное поле

Поместим теперь систему во внешнее сильное вертикальное магнитное поле 1 мТл. В данном случае влияние магнитного поля оказывается достаточно сильным для того, чтобы интенсивное вращение развилось по всей высоте

цилиндра (см. Рис. 4.6(в)). При этом полоидальное течение полностью подавлено и представлено лишь двумя парами мелкомасштабных вихрей вблизи верхнего и нижнего торцов цилиндра (см. Рис. 4.5(в)). Слабое полоидальное течение в угловых областях цилиндра обусловлено Экмановской накачкой, вызванной неоднородностью распределения центробежной силы по высоте, поскольку у торцов азимутальное течение тормозится.

Важным является вопрос о том, как влияет наклон вектора магнитного поля на результирующее течение. Для этого были построены зависимости числа Рейнольдса от величины и направления магнитного поля, как показано на Рис. 4.7. Из полученных зависимостей следует, что определяющим является воздействие именно вертикальной компоненты магнитного поля, которая направлена вдоль оси симметрии цилиндра, а влияние горизонтальной компоненты пренебрежимо мало.

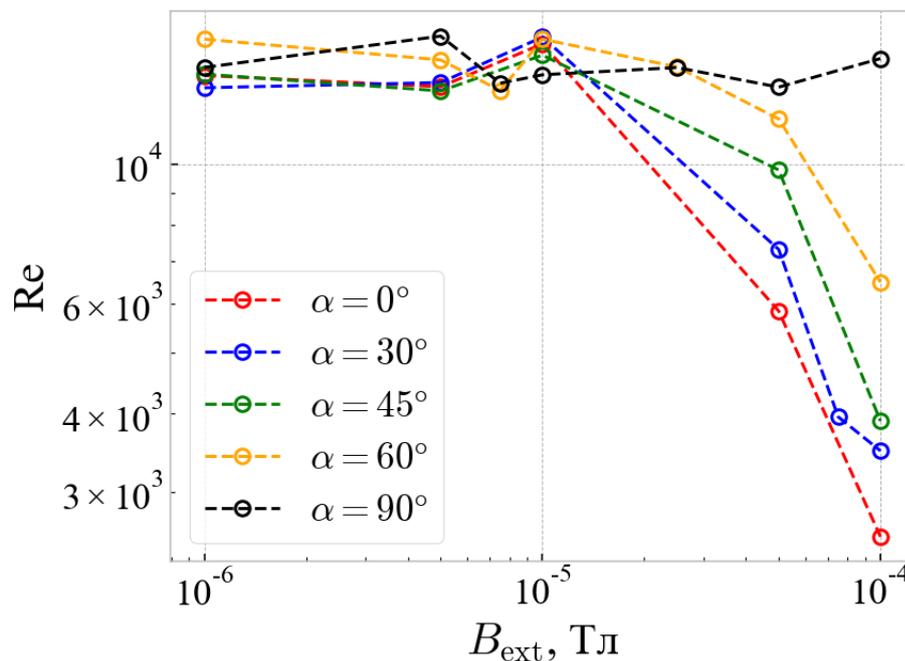


Рис. 4.7. Зависимость числа Рейнольдса от величины внешнего магнитного поля, при различных наклонах этого поля от вертикали

#### 4.3.4. Анализ интегральных характеристик течения

Изучим, как зависят режимы течения от внешнего магнитного поля. Для этого рассмотрим эволюцию энергий полоидального и азимутального течений при различных магнитных полях.

На Рис. 4.8 изображены зависимости энергий  $E_{\text{pol}}$  и  $E_{\text{az}}$  от времени для трех случаев: внешнее магнитное поле отсутствует (а), магнитное поле Земли (б) и сильное вертикальное магнитное поле 1 мТл (в). В случае «чистого» ЭВТ энергия полоидального течения в 10 раз превышает энергию азимутального. В магнитном поле Земли обе величины растут, однако затем энергия полоидального течения резко уменьшается, становясь на два порядка меньше энергии  $E_{\text{az}}$ . В сильном магнитном поле 1 мТл интенсивное вращение развивается настолько быстро, что полоидальное течение не формируется вовсе.

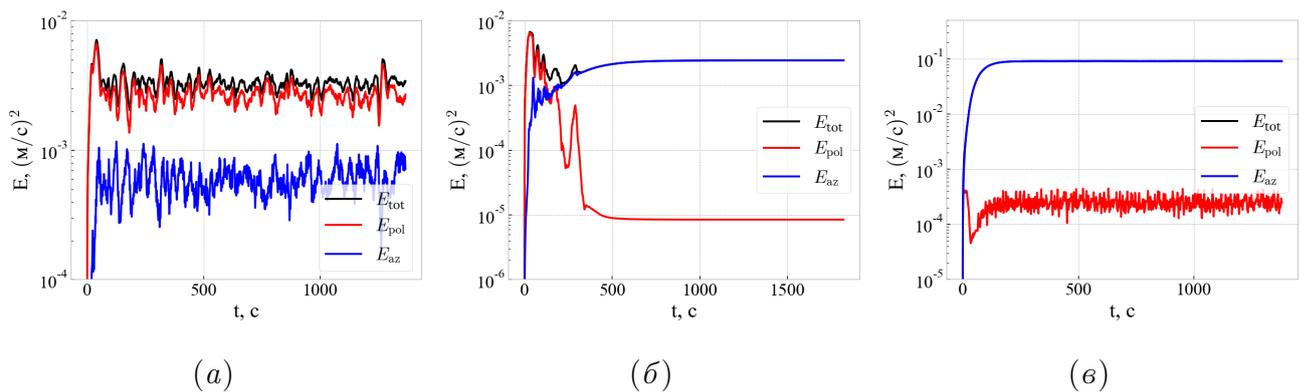


Рис. 4.8. Эволюции полоидальной и азимутальной энергий течения. (а) — нет внешнего магнитного поля, (б) — магнитное поле Земли, (в) — сильное вертикальное магнитное поле 1 мТл

Полученные зависимости также свидетельствуют о том, что во всех случаях со временем энергия течения стремится к некоторому конечному значению. Таким образом, вычислив средние по времени значения  $E_{\text{pol}}$  и  $E_{\text{az}}$  компонент энергии на некотором временном интервале для установившегося течения при различных магнитных полях, можно найти зависимость режима течения от магнитного поля.

Энергии полоидального и азимутального течений как функции магнитного

поля изображены на Рис. 4.9. За исключением энергии азимутального течения  $E_{az}$  в области малых  $B_{ext}$ , характер зависимостей близок с представленным на Рис. 5 в работе [138]. Из рисунка видно, что существует критическое значение магнитного поля (около 0.02 мТл), при превышении которого имеет место полоидальное подавление. Для режима полоидального подавления получен степенной закон зависимости азимутальной энергии от магнитного поля, описываемый трендом, лежащим между  $B_{ext}^{10/9}$ , предложенным в [138], и  $B_{ext}^{4/3}$ , полученным в работе [118]. Необходимо заметить, что схожесть Рис. 4.9 и Рис. 5 из работы [138] не является очевидным результатом, поскольку в исследуемой конфигурации ЭВТ дивергентно на верхнем торце, в то время как в [138] — конвергентно. Тем не менее, это подтверждает гипотезу о том, что полоидальное подавление обусловлено главным образом уравновешиванием сил ЭВТ и центробежных сил вращательного потока.

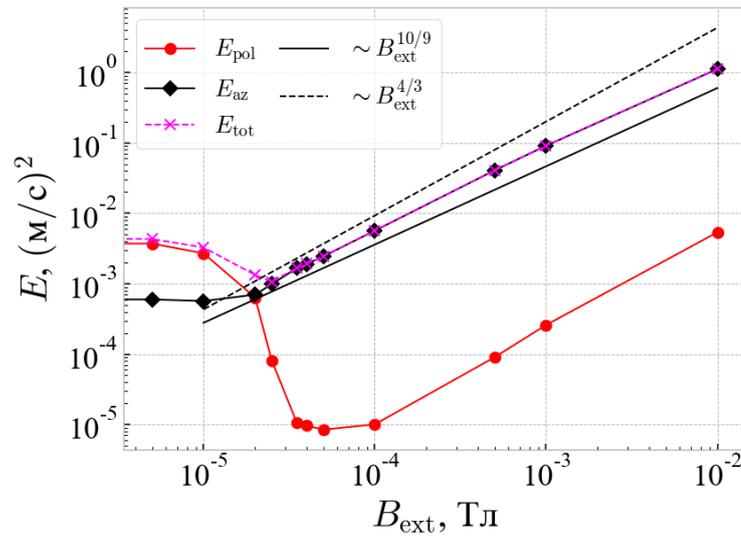


Рис. 4.9. Полоидальная, азимутальная и полная компоненты энергии течения как функции внешнего вертикального магнитного поля

Численное моделирование показало, что полоидальное течение при таких числах Рейнольдса устойчиво к азимутальным возмущениям. Данное утверждение следует из Рис. 4.9: в слабых магнитных полях (менее  $2 \cdot 10^{-5}$  Тл), при которых также мала азимутальная сила, энергия азимутального течения  $E_{az}$

обусловлена мелкомасштабными азимутальными возмущениями и не включает собственно вращательное течение.

#### 4.4. Выводы по главе

- Построена численная модель электровихревого течения (ЭВТ) галлиевой эвтектики в замкнутом цилиндрическом объеме с аспектным отношением  $\Gamma \equiv H/D = 0.5$ , в присутствии внешнего магнитного поля.
- Рассмотрено внешнее магнитное поле в конфигурации магнитного поля Земли, а также вертикальное магнитное поле величиной до  $10^{-2}$  Тл.
- Численно подтвержден механизм подавления полоидального течения, изложенный в работе [138], несмотря на то, что в численном исследовании электровихревое течение на верхнем торце емкости дивергентное, в то время как в работе [138] конвергентное.
- Определено пороговое значение внешнего магнитного поля, при котором происходит подавление полоидального течения. Установлен степенной закон для энергии азимутального течения, сопоставимый с  $F_{az}^{10/9}$  в работе [138].
- При проектировании и работе с установками, реализующими электровихревые течения, необходимо учитывать влияние даже слабых магнитных полей, в том числе магнитном поле Земли, поскольку они могут оказывать определяющее воздействие на структуру течения и, как следствие, связанный с установкой технологический процесс.

## Заключение

### Итоги выполненного исследования

1. По результатам численного моделирования термогравитационной конвекции жидкого натрия в цилиндре с аспектным отношением  $\Gamma \equiv L/D = 1$  проведен анализ зависимости пространственно-временной структуры течения от угла  $\beta$  между осью цилиндра и направлением силы тяжести. Показано, что в цилиндре возникает крупномасштабная циркуляция (КМЦ), угол ориентации которой при малых углах наклона непостоянен, а его вариации носят колебательный характер с доминирующей частотой. По мере увеличения угла наклона КМЦ стабилизируется, а при углах  $\beta > 30^\circ$  доминирующая частота пропадает. Обнаружена нелинейная немонотонная зависимость интенсивности циркуляции натрия (числа Рейнольдса) и эффективного теплопереноса (числа Нуссельта) от наклона цилиндра. Энергия течения максимальна при  $\beta = 20^\circ$ , причем среднее течение имеет максимальную интенсивность при  $\beta = 50^\circ$ , а интенсивность пульсаций скорости монотонно убывает с увеличением угла наклона цилиндра. Максимальный теплоперенос наблюдается при угле  $\beta \approx 50^\circ$ . Отмечено, что в случае  $\Gamma = 1$  с увеличением наклона число Нуссельта растет не так существенно, как в длинных цилиндрах.
2. На основании данных экспериментальных и численных исследований показано, что возникающее в цилиндрической полости с боковым оппозитным токоподводом электровихревое течение (ЭВТ) жидкого металла нестационарно во всем рассмотренном диапазоне силы тока (от 200 до 500 А в лабораторном эксперименте и от 50 до 1000 А — в численном). В отсутствие внешнего магнитного поля течение представлено двумя тороидальными вихрями, смещенными в верхнюю часть цилиндра. Наложение магнитного поля, направление которого параллельно линии, соединяющей электроды,

приводит к закрутке металла вблизи электродов и увеличивает как общую интенсивность течения, так и пульсации скорости.

3. Показано, что в вертикальном цилиндре с локализованным осевым токоподводом на торцевой поверхности возникающее в жидком металле ЭВТ в виде одного крупномасштабного вихря тороидальной формы доминирует во всем диапазоне рассмотренных токов (от 10 до 1000 А) и аспектных отношений ( $\Gamma = H/D = 0.25; 0.50; 0.75; 1$ ). При малых токах вихрь стационарен, а критическое значение силы тока, определяющее границу перехода к нестационарному режиму течения, зависит от аспектного отношения цилиндра. При больших токах, увеличение  $\Gamma$  способствует развитию мелкомасштабной (турбулентной) структуры течения.
4. Обнаружено, что внешнее аксиальное магнитное поле, генерирующее азимутальное течение металла, приводит к сильному подавлению полоидального электровихревого течения. Показано, что механизм подавления основан на балансе сил, создающих ЭВТ, и центробежных сил вращающегося потока и в целом соответствует теории, предложенной в работе [138]. Показано, что в слабых магнитных полях менее  $2 \cdot 10^{-5}$  Тл время развития общего вращения металла существенно превосходит время развития ЭВТ, что приводит к формированию переходного режима, характеризуемого энергиями, на два порядка превосходящими энергии в установившемся течении. Такие переходные режимы могут быть критичны для работы жидкометаллических батарей.

### **Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы**

Представленные результаты позволяют оценить вклад того или иного механизма воздействия на течения жидких металлов, вызванные силами Архимеда и электромагнитными силами. Они могут быть дополнены путем изучения задач, в которых реализуются сразу несколько перечисленных внешних воздействий. Например, термогравитационная конвекция в присутствии внешнего магнитного

поля. Полученные данные могут иметь большую практическую значимость при разработке новых перспективных энергетических устройств.

## Список литературы

1. Мандрыкин С. Д., Теймуразов А. С. Турбулентная конвекция жидкого натрия в наклонном цилиндре с единичным аспектным отношением // [Вычислительная механика сплошных сред](#). 2018. Т. 11, № 4. С. 417–428.
2. Mandrykin S., Kolesnichenko I., Frick P. Electrovortex flows generated by electrodes localized on the cylinder side wall // [Magnetohydrodynamics](#). 2019. Vol. 55, no. 1-2. P. 115–124.
3. Mandrykin S., Ozernykh V., Kolesnichenko I. Numerical study of electro-vortex flow in long cylinder with localized current supply // [IOP Conference Series: Materials Science and Engineering](#). 2019. Vol. 581. P. 012009.
4. Zwirner L., Khalilov R., Kolesnichenko I., Mamykin A., Mandrykin S., Pavlinov A., Shestakov A., Teimurazov A., Frick P., Shishkina O. The influence of the cell inclination on the heat transport and large-scale circulation in liquid metal convection // [Journal of Fluid Mechanics](#). 2019. Vol. 884. P. A18.
5. Kolesnichenko I., Frick P., Eltishchev V., Mandrykin S., Stefani F. Evolution of a strong electrovortex flow in a cylindrical cell // [Phys. Rev. Fluids](#). 2020. Vol. 5. P. 123703.
6. Mandrykin S., Ozernykh V., Kolesnichenko I. Electro-vortex flow of liquid metal in a cylindrical cell with localized current supply and variable aspect ratio // [Magnetohydrodynamics](#). 2020. Vol. 56, no. 2–3. P. 81–90.
7. Мандрыкин С. Д., Колесниченко И. В., Лосев Г. Л., Фрик П. Г. Электровихревое течение жидкого металла в цилиндрическом канале // [Вестник Пермского университета. Физика](#). 2018. № 2. С. 20–27.
8. Мандрыкин С. Д., Теймуразов А. С. Метод крупных вихрей для расчета конвекции жидкого металла в коротком наклонном цилиндре // [Материалы XXVII Всероссийской школы-конференции молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках»](#). Пермь: 2018. С. 166–169.

9. Мандрыкин С. Д., Теймуразов А. С., Колесниченко И. В. Численное исследование турбулентной конвекции жидкого натрия в наклонном цилиндре единичного аспектного отношения с использованием метода крупных вихрей // Труды Седьмой Российской национальной конференции по теплообмену: в 3 томах. Т. 1. Москва: Издательский дом МЭИ, 2018. С. 69–71.
10. Мандрыкин С. Д., Озерных В. С., Колесниченко И. В. Электровихревые течения в цилиндрах с различным аспектным отношением при локальном токоподводе // Материалы XXVIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках». Пермь: 2019. С. 98–102.
11. Мамыкин А. Д., Мандрыкин С. Д., Теймуразов А. С., Фрик П. Г. Турбулентная конвекция жидкого натрия в коротком наклонном цилиндре // Тезисы V-ой всероссийской конференции «Пермские гидродинамические научные чтения». Пермь: 2018. С. 192–194.
12. Mandrykin S., Kolesnichenko I., Losev G., Frick P. Experimental study of the electrovortex flow generated by opposing point electrodes in a vertical cylindrical cell // Book of abstracts III Russian Conference on Magnetohydrodynamics. Perm: 2018. P. 83.
13. Mandrykin S., Teimurazov A. Numerical study of turbulent liquid metal convection in inclined cylinder of unit aspect ratio using large-eddy-simulation approach // Book of abstracts III Russian Conference on Magnetohydrodynamics. Perm: 2018. P. 84.
14. Мандрыкин С. Д., Теймуразов А. С. Естественная конвекция жидкого металла в цилиндре единичного аспектного отношения при различных наклонах к направлению силы тяжести // XXI Зимняя Школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. Пермь: 2019. С. 190.
15. Колесниченко И. В., Халилов Р. И., Мандрыкин С. Д. Вихревое течение жидкого металла, вызванное действием электромагнитной силы // XXI Зимняя Школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. Пермь: 2019.

- С. 147.
16. Колесниченко И. В., Мандрыкин С. Д., Озерных В. С., Ельтищев В. А., Халилов Р. И., Павлинов А. М., Лосев Г. Л., Фрик П. Г. Структура и поведение нестационарного электровихревого течения в цилиндрической ячейке // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. Уфа: 2019. С. 117.
  17. Фрик П. Г., Ельтищев В. А., Лосев Г. Л., Мандрыкин С. Д., Колесниченко И. В., Халилов Р. И., Стефани Ф., Вебер Н. Электровихревые течения в контексте проблемы создания жидкометаллических батарей // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. Уфа: 2019. С. 128.
  18. Мандрыкин С. Д., Теймуразов А. С. Естественная конвекция жидкого натрия в наклонном цилиндре квадратного сечения // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. Уфа: 2019. С. 120.
  19. Колесниченко И. В., Халилов Р. И., Мандрыкин С. Д. Вихревое течение жидкого металла, вызванное действием электромагнитной силы // XXI Зимняя Школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. Пермь: 2019. С. 147.
  20. Колесниченко И. В., Ельтищев В. А., Мандрыкин С. Д., Лосев Г. Л., Озерных В. С., Фрик П. Г. Гидродинамические процессы в ячейке с локализованным подводом тока в контексте проблемы создания жидкометаллических батарей // II International conference «Problems of Thermonuclear Power and Plasma Technology». Book of abstracts. Moscow: 2019. С. 110.
  21. Мандрыкин С. Д., Ельтищев В. А., Колесниченко И. В. Подавление полоидальных электровихревых течений жидкого металла внешним магнитным полем // Тезисы XXIX Всероссийской конференции «Математическое моделирование в естественных науках». Пермь: 2020. С. 71.
  22. Мандрыкин С. Д., Колесниченко И. В., Фрик П. Г. Динамика полоидаль-

- ных электровихревых течений жидкого металла в слабом внешнем магнитном поле // Тезисы VII-ой всероссийской конференции с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения». Пермь: 2020. С. 281–284.
23. Khalilov R., Kolesnichenko I., Pavlinov A., Mamykin A., Shestakov A., Frick P. Thermal convection of liquid sodium in inclined cylinders // [Physical Review Fluids](#). 2018. Vol. 3, no. 4. P. 043503.
24. Scheel J. D., Schumacher J. Predicting transition ranges to fully turbulent viscous boundary layers in low Prandtl number convection flows // [Physical Review Fluids](#). 2017. Vol. 2, no. 12.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 томах. Том 06. Гидродинамика. ФИЗМАТЛИТ, 2001. ISBN: [5-9221-0053-X](#).
26. Shishkina O., Horn S. Thermal convection in inclined cylindrical containers // [Journal of Fluid Mechanics](#). 2016. Vol. 790. P. R3.
27. Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. Мир, 1967.
28. Кириллов П. Л., Денискина Н. Б. Теплофизические свойства жидкометаллических теплоносителей. ЦНИИАтоминформ, 2000. 42 с.
29. Fazio C. Handbook on lead-bismuth eutectic alloy and lead properties, materials compatibility, thermal-hydraulics and technologies. OECD, 2015.
30. Kazak O. V., Semko A. N. Electroconvective motion of a melt in dc furnaces with a bottom electrode // [Journal of Engineering Physics and Thermophysics](#). 2011. Vol. 84, no. 1. P. 223–231.
31. Weber N., Galindo V., Priede J., Stefani F., Weier T. The influence of current collectors on Tayler instability and electro-vortex flows in liquid metal batteries // [Physics of Fluids](#). 2015. Vol. 27, no. 1. P. 014103.
32. Teimurazov A., Frick P. Thermal convection of liquid metal in a long inclined cylinder // [Physical Review Fluids](#). 2017. Vol. 2, no. 11.
33. Frick P., Khalilov R., Kolesnichenko I., Mamykin A., Pakholkov V., Pavlinov A., Rogozhkin S. Turbulent convective heat transfer in a long cylinder with liquid

- sodium // [Europhysics Letters](#). 2015. Vol. 109, no. 1. P. 14002.
34. Vasil'ev A. Y., Kolesnichenko I. V., Mamykin A. D., Frick P. G., Khalilov R. I., Rogozhkin S. A., Pakholkov V. V. Turbulent convective heat transfer in an inclined tube filled with sodium // [Technical Physics](#). 2015. Vol. 60, no. 9. P. 1305–1309.
35. Kolesnichenko I., Khalilov R., Teimurazov A., Frick P. On boundary conditions in liquid sodium convective experiments // [Journal of Physics: Conference Series](#). 2017. Vol. 891, no. 1. P. 012075.
36. Prinz S., Boeck T., Schumacher J. Large eddy simulation of hydrodynamic and magnetohydrodynamic channel flows with a collocated finite-volume scheme and improved subgrid-scale modeling // [European Journal of Mechanics - B/Fluids](#). 2018. Vol. 72. P. 189–198.
37. Chilla F., Schumacher J. New perspectives in turbulent Rayleigh-Benard convection // [European Physical Journal E](#). 2012. Vol. 35, no. 7. P. 58.
38. Гершуни Г. З., Жуковицкий Е. М., Мызников В. М. Устойчивость плоско-параллельного конвективного течения жидкости в горизонтальном слое относительно пространственных возмущений // ПМТФ. 1974.
39. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
40. Siggia E. D. High Rayleigh Number Convection // [Annual Review of Fluid Mechanics](#). 1994. Vol. 26, no. 1. P. 137–168.
41. Spiegel E. A. Convection in Stars I. Basic Boussinesq Convection // [Annual Review of Astronomy and Astrophysics](#). 1971. Vol. 9, no. 1. P. 323–352.
42. Heslot F., Castaing B., Libchaber A. Transitions to turbulence in helium gas // [Physical Review A](#). 1987. Vol. 36, no. 12. P. 5870–5873.
43. Castaing B., Gunaratne G., Heslot F., Kadanoff L., Libchaber A., Thomae S., Wu X.-Z., Zaleski S., Zanetti G. Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Bénard convection // [Journal of Fluid Mechanics](#). 1989. Vol. 204, no. -1. P. 1.

44. Sano M., Wu X. Z., Libchaber A. Turbulence in helium-gas free convection // [Physical Review A](#). 1989. Vol. 40, no. 11. P. 6421–6430.
45. Procaccia I., Ching E. S. C., Constantin P., Kadanoff L. P., Libchaber A., Wu X.-Z. Transitions in convective turbulence: The role of thermal plumes // [Physical Review A](#). 1991. Vol. 44, no. 12. P. 8091–8102.
46. Cioni S., Ciliberto S., Sommeria J. Strongly turbulent Rayleigh–Bénard convection in mercury: comparison with results at moderate Prandtl number // [Journal of Fluid Mechanics](#). 1997. Vol. 335. P. 111–140.
47. Shraiman B. I., Siggia E. D. Heat transport in high-Rayleigh-number convection // [Physical Review A](#). 1990. Vol. 42, no. 6. P. 3650–3653.
48. Kraichnan R. H. Turbulent Thermal Convection at Arbitrary Prandtl Number // [Physics of Fluids](#). 1962. Vol. 5, no. 11. P. 1374.
49. Glazier J. A., Segawa T., Naert A., Sano M. Evidence against ‘ultrahard’ thermal turbulence at very high Rayleigh numbers // [Nature](#). 1999. Vol. 398, no. 6725. P. 307–310.
50. Grossmann S., Lohse D. Scaling in thermal convection: a unifying theory // [Journal of Fluid Mechanics](#). 2000. Vol. 407. P. 27–56.
51. Grossmann S., Lohse D. Thermal Convection for Large Prandtl Numbers // [Physical Review Letters](#). 2001. Vol. 86, no. 15. P. 3316–3319.
52. Grossmann S., Lohse D. Prandtl and Rayleigh number dependence of the Reynolds number in turbulent thermal convection // [Physical Review E](#). 2002. Vol. 66, no. 1.
53. Grossmann S., Lohse D. Fluctuations in turbulent Rayleigh–Bénard convection: The role of plumes // [Physics of Fluids](#). 2004. Vol. 16, no. 12. P. 4462–4472.
54. Ahlers G., Grossmann S., Lohse D. Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh–Bénard convection // [Reviews of Modern Physics](#). 2009. Vol. 81, no. 2. P. 503–537.
55. Rachkov V. Fast reactor development program in Russia // International conference on Fast reactors and related fuel cycles: safe technologies and sustainable

- scenarios. Paris, France, 4–7 March. 2013.
56. Latge C., Le Coz P., Castaldi O., Gauche F., Devictor N. The ASTRID project and related R&D on Na technology // The 9-th International PAMIR conference on Fundamental and Applied MHD, Thermo Acoustic and Space Technologies. Vol. 2. Riga, Latvia: 2014. P. 43–51.
  57. Mel'nikov I. A., Razuvanov N. G., Sviridov V. G., Sviridov E. V., Shestakov A. A. An investigation of heat exchange of liquid metal during flow in a vertical tube with non-uniform heating in the transverse magnetic field // [Thermal Engineering](#). 2013. Vol. 60, no. 5. P. 355–362.
  58. Platacis E. Liquid metal in nuclear applications // The 9-th International PAMIR conference on Fundamental and Applied MHD, Thermo Acoustic and Space Technologies. Vol. 2. Riga, Latvia: 2014. P. 25–28.
  59. Ruault J.-M., Masson F., Worms J.-C., Detsis E., Gaia E. MEGAHIT: Update on the advanced propulsion roadmap for HORIZON 2020 // The 9-th International PAMIR conference on Fundamental and Applied MHD, Thermo Acoustic and Space Technologies. Vol. 1. Riga, Latvia: 2014. P. 484–488.
  60. Ashurko Y., Pugachev G. Phenomenon of Coolant Local Natural Circulation Occurring in Heat Removal Loops of Nuclear Power Plant // [Journal of Nuclear Science and Technology](#). 2011. Vol. 48, no. 4. P. 602–611.
  61. Осипов С. Л., Рогожкин С. А., Пахолков В. В. Численные исследования свободной конвекции в замкнутом объеме трубопровода // Сборник докладов научно-технического семинара «Проблемы верификации и применения CFD кодов в атомной энергетике». 2012. С. 888–892.
  62. Zwirner L., Shishkina O. Confined inclined thermal convection in low-Prandtl-number fluids // [Journal of Fluid Mechanics](#). 2018. Vol. 850. P. 984–1008.
  63. Nikolaenko A., Brown E., Funfschilling D., Ahlers G. Heat transport by turbulent Rayleigh–Bénard convection in cylindrical cells with aspect ratio one and less // [Journal of Fluid Mechanics](#). 2005. Vol. 523. P. 251–260.

64. Мамыкин А. Д., Лосев Г. Л., Мандрыкин С. Д. Анализ мод крупномасштабной циркуляции жидкого натрия в эксперименте по турбулентной конвекции Релея-Бенара // [Вестник Пермского Университета. Физика](#). 2020. № 2. С. 65–73.
65. Bojarevics V., Freibergs Y., Shilova E., Shcherbinin E. Electrically induced vortical flows. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht., 1989.
66. Rabiger D., Zhang Y., Galindo V., Franke S., Willers B., Eckert S. The relevance of melt convection to grain refinement in Al–Si alloys solidified under the impact of electric currents // [Acta Materialia](#). 2014. Vol. 79. P. 327–338.
67. Kazak O. Modeling of Vortex Flows in Direct Current (DC) Electric Arc Furnace with Different Bottom Electrode Positions // [Metallurgical and Materials Transactions B](#). 2013. Vol. 44, no. 5. P. 1243–1250.
68. Kazak O. Numerical modelling of electrovortex and heat flows in dc electric arc furnace with cooling bottom electrode // [Heat and Mass Transfer](#). 2013. Vol. 50, no. 5. P. 685–692.
69. Sneyd A. D., Wang A. MHD driven instabilities in aluminium reduction cells // [Magnetohydrodynamics](#). 1996. Vol. 32, no. 4. P. 487–493.
70. Weber N., Galindo V., Stefani F., Weier T. Current-driven flow instabilities in large-scale liquid metal batteries, and how to tame them // [Journal of Power Sources](#). 2014. Vol. 265. P. 166–173.
71. Kelley D. H., Weier T. Fluid Mechanics of Liquid Metal Batteries // [Applied Mechanics Reviews](#). 2018. Vol. 70, no. 2. P. 020801.
72. Kim H., Boysen D. A., Newhouse J. M., Spatocco B. L., Chung B., Burke P. J., Bradwell D. J., Jiang K., Tomaszowska A. A., Wang K., Wei W., Ortiz L. A., Barriga S. A., Poizeau S. M., Sadoway D. R. Liquid metal batteries: past, present, and future // [Chem. Rev.](#) 2012. Vol. 113, no. 3. P. 2075–2099.
73. Wang K., Jiang K., Chung B., Ouchi T., Burke P. J., Boysen D. A., Bradwell D. J., Kim H., Muecke U., Sadoway D. R. Lithium–antimony–lead liquid metal battery for grid-level energy storage // [Nature](#). 2014. Vol. 514, no. 7522.

- P. 348–350.
74. Backhaus S., Chertkov M. Getting a grip on the electrical grid // [Physics Today](#). 2013. Vol. 66, no. 5. P. 42–48.
  75. OECD. World energy outlook 2013. International Energy Agency, 2013.
  76. Weber N., Beckstein P., Galindo V., Herreman W., Nore C., Stefani F., Weier T. Metal pad roll instability in liquid metal batteries // [Magnetohydrodynamics](#). 2017. Vol. 53, no. 1. P. 3–13.
  77. Davidson P. A., Lindsay R. I. Stability of interfacial waves in aluminium reduction cells // [Journal of Fluid Mechanics](#). 1998. Vol. 362. P. 273–295.
  78. Stefani F., Galindo V., Kasprzyk C., Landgraf S., Seilmayer M., Starace M., Weber N., Weier T. Magnetohydrodynamic effects in liquid metal batteries // [IOP Conference Series: Materials Science and Engineering](#). 2016. Vol. 143. P. 012024.
  79. Zikanov O. Metal pad instabilities in liquid metal batteries // [Physical Review E](#). 2015. Vol. 92, no. 6.
  80. Weber N., Beckstein P., Herreman W., Horstmann G. M., Nore C., Stefani F., Weier T. Sloshing instability and electrolyte layer rupture in liquid metal batteries // [Physics of Fluids](#). 2017. Vol. 29, no. 5. P. 054101.
  81. Shen Y., Zikanov O. Thermal convection in a liquid metal battery // [Theoretical and Computational Fluid Dynamics](#). 2015. Vol. 30, no. 4. P. 275–294.
  82. Ashour R. F., Kelley D. H., Salas A., Starace M., Weber N., Weier T. Competing forces in liquid metal electrodes and batteries // [Journal of Power Sources](#). 2018. Vol. 378. P. 301–310.
  83. Vinogradov D. A., Teplyakov I. O., Ivochkin Y. P., Klementeva I. B. Influence of the external magnetic field on hydrodynamic structure of the electrovortex flow in hemispherical container // [Journal of Physics: Conference Series](#). 2017. Vol. 899, no. 8. P. 082006.
  84. Dement'ev S., Chaikovskii A., Chudnovskii A. Generation of electrovortex flows liquid-metal baths with a multielectrode current input // [Magnetohydrodynam-](#)

- ics. 1988. Vol. 24, no. 1. P. 45–49.
85. Chudnovsky A., Ivochkin Y., Jakovics A., Pavlovs S., Teplyakov I., Vinogradov D. An electrovortex flow around two fully submerged electrodes // [IOP Conference Series: Materials Science and Engineering](#). 2020. Vol. 950. P. 012002.
86. Хрипченко С. Ю. Генерация крупномасштабных вихревых структур в плоском слое мелкомасштабной спиральной турбулентностью // *Магнитная гидродинамика*. 1991. Т. 27, № 4. С. 77–83.
87. Pedchenko A., Molokov S., Priede J., Lukyanov A., Thomas P. J. Experimental model of the interfacial instability in aluminium reduction cells // [EPL \(Europhysics Letters\)](#). 2009. Vol. 88, no. 2. P. 24001.
88. Gómez R. C. C., Sansón L. Z., Pinilla M. A. Generation of isolated vortices in a rotating fluid by means of an electromagnetic method // [Experiments in Fluids](#). 2013. Vol. 54, no. 8.
89. Liu K., Stefani F., Weber N., Weier T., Li B. W. Numerical and Experimental Investigation of Electro-Vortex Flow in a Cylindrical Container // *Magnetohydrodynamics*. 2020. Vol. 56, no. 1. P. 27–42.
90. Anderson J. D. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill Education - Europe, 1995. ISBN: [0070016852](#).
91. Сиковский Д. Ф. *Методы вычислительной теплофизики: учеб. пособие*. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013.
92. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik // *Mathematische Annalen*. 1928. Bd. 100, H. 1. S. 32–74.
93. Самарский А. А. *Введение в теорию разностных схем*. М.: Наука, 1971.
94. Самарский А. А. *Методы решения сеточных уравнений*. М.: Наука, 1978.
95. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем // *Докл. АН СССР*. 1968. Т. 182, № 4. С. 776–778.
96. Патанкар С. *Численные методы решения задач теплообмена и динамики*

- жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
97. Ferziger J. H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag GmbH, 2001. ISBN: [3540420746](#).
  98. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
  99. Мареев В. В., Станкова Е. Н. Основы метода конечных разностей. Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2012. ISBN: [5-983-40073-8](#).
  100. Формалев В. Ф. Численные методы. Физматлит, 2006. ISBN: [5-9221-0479-9](#).
  101. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.
  102. Зубко И. Ю., Няшина Н. Д. Математическое моделирование: дискретные подходы и численные методы: учеб. пособие. Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2012. ISBN: [978-5-398-00947-7](#).
  103. Moukalled F., Mangani L., Darwish M. [The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics](#). Springer International Publishing, 2016.
  104. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Едиториал УРСС, 2004.
  105. Ильин В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000.
  106. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах. Т. 1. М.: Мир, 1991. ISBN: [5-03-001881-6](#).
  107. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
  108. Фрик П. Г. Турбулентность: подходы и модели. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
  109. Zhiyin Y. Large-eddy simulation: Past, present and the future // [Chinese Journal of Aeronautics](#). 2015. Vol. 28, no. 1. P. 11–24.
  110. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations // [Monthly Weather Review](#). 1963. Vol. 91, no. 3. P. 99–164.
  111. Deardorff J. W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // [Journal of Fluid Mechanics](#). 1970. Vol. 41, no. 02.

- P. 453.
112. Stoll R., Porté-Agel F. Large-Eddy Simulation of the Stable Atmospheric Boundary Layer using Dynamic Models with Different Averaging Schemes // [Boundary-Layer Meteorology](#). 2007. Vol. 126, no. 1. P. 1–28.
  113. Большухин М. А., Васильев А. Ю., Будников А. В. Об экспериментальных тестах (бенчмарках) для программных пакетов, обеспечивающих расчет теплообменников в атомной энергетике // [Вычислительная механика сплошных сред](#). 2012. Т. 5, № 4. С. 469–480.
  114. Shishkina O., Stevens R. J. A. M., Grossmann S., Lohse D. Boundary layer structure in turbulent thermal convection and its consequences for the required numerical resolution // [New Journal of Physics](#). 2010. Vol. 12, no. 7. P. 075022.
  115. Schumacher J., Bandaru V., Pandey A., Scheel J. D. Transitional boundary layers in low-Prandtl-number convection // [Physical Review Fluids](#). 2016. Vol. 1, no. 8.
  116. Köllner T., Boeck T., Schumacher J. Thermal Rayleigh-Marangoni convection in a three-layer liquid-metal-battery model // [Physical Review E](#). 2017. Vol. 95, no. 5.
  117. Franke S., Rübiger D., Galindo V., Zhang Y., Eckert S. Investigations of electrically driven liquid metal flows using an ultrasound Doppler flow mapping system // [Flow Measurement and Instrumentation](#). 2016. Vol. 48. P. 64–73.
  118. Herreman W., Nore C., Cappanera L., Guermond J.-L. Efficient mixing by swirling electrovortex flows in liquid metal batteries // [Journal of Fluid Mechanics](#). 2021. Vol. 915.
  119. Belyaev I. A., Listratov Y. I., Melnikov I. A., Razuванov V. G., N. G. Sviridov, Sviridov E. V. Engineering approach to numerical simulation of MHD heat transfer // [Magnetohydrodynamics](#). 2016. Vol. 52, no. 3. P. 379–389.
  120. Belyaev I. A., Razuванov N. G., Sviridov V. G. A Method to Calculate Mixed MHD Convection in a Vertical Channel // [High Temperature](#). 2018. Vol. 56, no. 5. P. 767–773.

121. Marocco L. Hybrid LES/DNS of turbulent forced and aided mixed convection to a liquid metal flowing in a vertical concentric annulus // [International Journal of Heat and Mass Transfer](#). 2018. Vol. 121. P. 488–502.
122. Weller H. G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques // [Computers in Physics](#). 1998. Vol. 12. P. 620–631.
123. Issa R. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // [Journal of Computational Physics](#). 1986. Vol. 62, no. 1. P. 40 – 65.
124. Ferziger J. H., Perić M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002. 423 p.
125. Fletcher R. *Conjugate gradient methods for indefinite systems* // *Numerical Analysis* / Ed. by G. A. Watson. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1976. P. 73–89.
126. Verzicco R., Camussi R. Numerical experiments on strongly turbulent thermal convection in a slender cylindrical cell // [Journal of Fluid Mechanics](#). 2003. Vol. 477. P. 19–49.
127. Stevens R. J. A. M., Verzicco R., Lohse D. Radial boundary layer structure and Nusselt number in Rayleigh-Bénard convection // [Journal of Fluid Mechanics](#). 2010. Vol. 643. P. 495–507. [0905.0379](#).
128. Kolesnichenko I. V., Mamykin A. D., Pavlinov A. M., Pakholkov V. V., Rogozhkin S. A., Frick P. G., Khalilov R. I., Shepelev S. F. Experimental study on free convection of sodium in a long cylinder // [Thermal Engineering](#). 2015. Vol. 62, no. 6. P. 414–422.
129. Kolesnichenko I., Frick P. Conducting fluid flow in a helical magnetic field // *Magnetohydrodynamics*. 2009. Vol. 45, no. 2. P. 165–171.
130. Sokoloff D., Stepanov R., Frick P. Dynamos: from an astrophysical model to laboratory experiments // *Physics-Uspekhi*. 2014. Vol. 57, no. 3. P. 292.
131. Kolesnichenko I., Khripchenko S., Buchenau D., Gerbeth G. Electrovortex flows

- in a square layer of liquid metal // *Magnetohydrodynamics*. 2005. Vol. 41, no. 1. P. 39–51.
132. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 томах. Том 08. Электродинамика сплошных сред. ФИЗМАТЛИТ, 2005. ISBN: [5-9221-0053-X](#).
133. Yakhot V., Orszag S. A., Thangam S., Gatski T. B., Speziale C. G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 1992. Vol. 4, no. 7. P. 1510–1520.
134. *Wavelets: An Analysis Tool*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 1999. P. 448. ISBN: [0198505213](#).
135. Wilcox D. *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries, 2006. ISBN: [9781928729082](#).
136. Zhilin V. G., Ivochkin, Y. P. A. A., Oksman, Lurin'sh G. R., Chaikovskii A. I., Chudnovskii A. Y., Shcherbinin E. V. An experimental investigation of the velocity field in an axisymmetric electrovortical flow in a cylindrical container // *Magnitnaya Gidrodinamika*. 1986. Vol. 22, no. 3. P. 110–117.
137. Vinogradov D. A., Ivochkin Y. P., Teplyakov I. O. Effect of the Earth's Magnetic Field on the Electric-Vortex-Flow Structure // *Doklady Physics*. 2018. Vol. 63, no. 11. P. 447–450.
138. Davidson P. A., Kinnear D., Lingwood R. J., Short D. J., He X. The role of Ekman pumping and the dominance of swirl in confined flows driven by Lorentz forces // *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. 1999. Vol. 18, no. 4. P. 693–711.
139. Davidson P. A. *Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2016. ISBN: [1107160162](#).