ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ПЕРМСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Кузнецова Юлия Сергеевна

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА КАСТИЛЬЯНО И ЕГО ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

доктор технических наук,
профессор Труфанов Н.А.

доктор физико-математических
наук, профессор Шардаков И.Н.

Пермь 2018

Содержание

Введение

Актуальность и степень разработанности темы диссертации.

Постановка краевой задачи теории упругости традиционно может быть выполнена в перемещениях или в напряжениях, что при использовании вариационной формулировки подразумевает применение соответственно принципа минимума общей потенциальной энергии системы (принципа Лагранжа) и принципа минимума дополнительной работы (принципа Кастильяно). Приближенные и численные методы теории упругости, такие как метод конечных элементов (МКЭ), вариационно-разностный метод, реализующие экстремальные принципы, в большинстве случаев базируются на формулировке в перемещениях, как более удобной с точки зрения выбора базисных функций, к которым предъявляются достаточно просто удовлетворяемые требования кинематической допустимости, заключающиеся в выполнении граничных условий в перемещениях и существовании первых производных по пространственным переменным. Известные недостатки численных решений в перемещениях заключаются в низкой точности определения полей деформаций и напряжений, проблемы с анализом слабосжимаемых материалов, невозможности расчета несжимаемых тел. Поэтому достаточно широкое развитие получили различные смешанные формулировки на основе вариационных принципов Рейсснера, Ху-Вашизу и др., более сложные в реализации, но, в известной степени, свободные от указанных недостатков.

Приближенные и численные решения в напряжениях на основе вариационного принципа Кастильяно нашли достаточно ограниченное применение, прежде всего из-за проблем с построением базисных функций, которые в данной формулировке должны быть статически допустимыми: удовлетворять в области уравнениям равновесия и статическим граничным условиям. В основном получены решения таких задач теории упругости в канонических по форме областях, соответственно, построены простые по форме конечные элементы в напряжениях.

Существует ряд методов сведения краевой задачи теории упругости для области произвольной формы к задаче на канонической области: метод фиктивных областей, метод малых возмущений формы, метод фиктивных канонических областей, метод геометрического погружения (Шардаков И.Н., Труфанов НА., Матвеенко В.П. Метод геометрического погружения в теории упругости. - РАН УрО, Екатеринбург, 1999, 298 с.) и др. Формулировка метода геометрического погружения (МГП) дана авторами в перемещениях, предложены эффективные алгоритмы реализации методом конечных элементов, вариационно-разностным методом, методом граничных элементов.

МГП представляется перспективным, как основа для решения задач теории упругости в напряжениях, сформулированных на областях сложной конфигурации, поскольку позволяет эффективно использовать имеющиеся решения и наработки для областей канонической формы. Привлекательность данного подхода связана с принципиальной возможностью получения полей напряжений при численной реализации МГП с более высокой точностью, решения задач для несжимаемых и слабосжимаемых материалов. Кроме того, получение решения задачи в перемещениях и в напряжениях позволяет построить вариационные нижнюю и верхнюю границы, в которых гарантировано лежит точное решение задачи.

Таким образом, разработка новых численных методов теории упругости, позволяющих более точно исследовать напряженное состояние сложных по форме конструкций и узлов, имеющих важное практическое значение, является **актуальной** задачей.

Цель работы: обобщение метода геометрического погружения на класс задач теории упругости в напряжениях и разработка численного алгоритма реализации на основе вариационного принципа Кастильяно.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

– Разработать основные теоретические положения метода геометрического погружения в напряжениях.

– Доказать сходимость итерационной процедуры МГП.

– Построить дискретные аналоги вариационного уравнения МГП с помощью метода конечных элементов в напряжениях, метода Ритца.

– Реализовать и исследовать практическую сходимость МГП в напряжениях на примере двумерных задач теории упругости (плоских и осесимметричных).

– Применить разработанный подход МГП в напряжениях для численного анализа напряженного состояния резинометаллических конструкций (амортизаторов).

Краткое содержание работы

В **Главе 1** приведен анализ научных публикаций по проблеме развития численных методов для решения краевых задач теории упругости, в том числе приведен обзор численных подходов, позволяющих свести краевую задачу теории упругости для тел сложной формы к задачам на канонических областях. Также, на основе анализа научных публикаций, сформулированы цели диссертационной работы.

В **Главе 2** предложено обобщение метода геометрического погружения на класс краевых задач теории упругости в напряжениях. Описана процедура сведения краевой задачи теории упругости в напряжениях, сформулированной в области произвольной конфигурации, к итерационной последовательности краевых задач на канонической области. Получен вид дифференциальной формулировки задачи на канонической области, соответствующей вариационному уравнению метода геометрического погружения, построенного в рамках принципа минимума дополнительной работы (принципа Кастильяно), установлены возможные типы граничных условий на новой части границы канонической области. Приведен процесс построения итерационной процедуры

МГП в напряжениях, сформулирована и доказана теорема о ее сходимости в терминах элементов введенных пространств тензоров напряжений.

В **Главе 3** показано применение метода геометрического погружения в напряжениях для решения плоских задач теории упругости в декартовой системе координат. Выполнено построение дискретного аналога вариационного уравнения МГП методом Ритца и методом конечных элементов в напряжениях. Рассмотрена модельная плоская задача, демонстрирующая эффективное применение МГП с конечно-элементной реализацией, сформулированной с использованием функции напряжений Эри; выполнен сравнительный анализ скорости и качества практической сходимости решения по предложенной схеме и решения, полученного с помощью традиционного МКЭ в перемещениях. Продемонстрировано практическое применение метода геометрического погружения для решения задач с несжимаемыми упругими материалами. Приведены практические приложения метода, позволяющие рассчитывать конструкции промышленного назначения, такие как плоские резинометаллические амортизаторы.

В **Главе 4** показано применение метода геометрического погружения в напряжениях для решения осесимметричных задач теории упругости в цилиндрической системе координат. Выполнено построение дискретного аналога вариационного уравнения МГП методом конечных элементов в напряжениях. Рассмотрена модельная осесимметричная задача, демонстрирующая эффективное применение МГП с конечно-элементной реализацией; выполнен сравнительный анализ скорости и качества практической сходимости решения по предложенной схеме и решения, полученного с помощью традиционного МКЭ в перемещениях. Продемонстрировано практическое применение метода геометрического погружения для решения задач с несжимаемыми упругими материалами. Приведены практические приложения метода, позволяющие рассчитывать конструкции промышленного назначения, такие как осесимметричные резинометаллические амортизаторы.

Методология и методы диссертационного исследования основаны на использовании методов функционального анализа, теории упругости, вычислительной механики деформируемого твердого тела. Применена программная среда MATLAB.

Теоретическая и практическая значимость. Созданы теоретические основы метода геометрического погружения в напряжениях, позволяющего свести отыскание обобщенного решения задачи в области произвольной конфигурации к итерационной последовательности задач в области канонической формы. Предложен процесс построения вариационно-итерационной процедуры МГП в напряжениях, сформулирована и доказана теорема о ее сходимости, установлен вид дифференциальной формулировки краевой задачи теории упругости в напряжениях в канонической области, соответствующий вариационному уравнению МГП в напряжениях, в том числе возможный вид доопределения граничных условий на новых границах канонической области, возникших в результате осуществления процедуры погружения. Практическая значимость работы состоит в разработанных алгоритмах и программах, реализующих МГП в напряжениях, возможности их применения для анализа напряженного состоянии тел сложной конфигурации, в том числе конструкций из несжимаемых или слабосжимаемых упругих материалов.

Достоверность результатов обеспечивается сравнением с известными аналитическими решениями других авторов, численными решениями, полученными другими численными методами, практическим подтверждением сходимости численных процедур и выполнения естественных граничных условий.

Научная новизна:

1. Проведено обобщение метода геометрического погружения на класс краевых задач теории упругости в напряжениях, позволяющего свести отыскание обобщенного решения задачи в области произвольной конфигурации к

итерационной последовательности задач в области канонической формы. Предложен процесс построения вариационно-итерационной процедуры МГП в напряжениях, сформулирована и доказана теорема о ее сходимости.

2. Установлен вид дифференциальной формулировки краевой задачи теории упругости в напряжениях в канонической области, соответствующий вариационному уравнению МГП в напряжениях, в том числе возможный вид доопределения граничных условий на новых границах канонической области, возникших в результате осуществления процедуры погружения.

3. Предложен и реализован в виде программ в среде MatLab алгоритм построения дискретного аналога вариационного уравнения МГП на основе метода конечных элементов в напряжениях. Изучены характеристики практической сходимости дискретного аналога МГП и итерационной процедуры МГП на примере решения двумерных (плоских и осесимметричных) задач теории упругости в напряжениях.

4. Продемонстрированы возможности известных конечных элементов в напряжениях канонической формы для решения задач теории упругости в областях произвольной конфигурации.

На защиту выносятся:

1. Общие теоретические положения МГП на основе принципа минимума дополнительной работы: схема построения решения в канонической области; обоснование сходимости итерационной процедуры, дифференциальная формулировка МГП; вид граничных условий в канонической области.

2. Варианты построения дискретного аналога вариационно-итерационной процедуры МГП и результаты исследования практической сходимости конечно-элементного аналога МГП и итерационной процедуры МГП в напряжениях для плоских и осесимметричных задач теории упругости.

Личный вклад автора заключается в написании расчетных программ. Постановки задач, теоретические выкладки и анализ получаемых результатов проводились автором совместно с научным руководителем.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на XIX Зимней школе по механике сплошных сред (г. Пермь, 2015, 2017), на XXI и XXV Всероссийской школе – конференции молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2012, 2016), на XVIII и XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (г. Алушта, 2013, 2015), на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Казань, 2015), на Всероссийской научной конференции «Проблемы деформирования и разрушения материалов и конструкций» (г. Пермь, 2015). Полностью работа доложена и обсуждена на семинарах кафедры «Вычислительная математика и механика» ПНИПУ (рук. доцент П.В. Максимов), Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. академик РАН В.П. Матвеенко), кафедры «Математическое моделирование систем и процессов» ПНИПУ (рук. профессор П.В. Трусов), кафедры «Механика композиционных материалов и конструкций» ПНИПУ (рук. профессор А.Н. Аношкин).

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 11 печатных работ, из них 2 статьи в ведущих рецензируемых научных изданиях, присутствующих в Перечне ВАК, 1 статья включена в международную базу цитирования Scopus, основные положения и разделы работы отражены в печатных работах [121-123].

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 130 наименований. Общий объем работы – 112 страниц машинописного текста, содержащего 47 иллюстраций и 2 таблицы.

Глава 1. Анализ современного состояния проблемы развития численных методов для решения краевых задач теории упругости.

Задачи теории упругости являются основополагающими в механике твердого деформированного тела, для решения которых существует масса численных подходов, основанных на вариационно-разностных, сеточных, гранично-элементных методах. Определение напряженно-деформированного состояния объекта является наиболее важной задачей при оценке прочности, долговечности и надежности конструкции. В настоящее время индустрия численного расчета набирает высокие обороты. В связи со сложностью рассматриваемых объектов, больших материальных затрат на проведение натурных экспериментов, проблемами не адаптации современных инженерных пакетов к достаточно узким классам задач растет потребность в новых алгоритмах счета, позволяющих обойти все сложности геометрии, описания свойств материалов и непосредственно процесса деформирования.

Таким образом, в связи с современными проблемами в области расчетов, в данной главе рассмотрим основные существующие подходы для решения краевых задач теории упругости, выполним анализ литературных источников.

1.1. Обзор классических подходов для решения краевых задач теории упругости.

Теория упругости - основополагающий раздел механики деформированного твердого тела, внесший неоценимый вклад в исследование напряженно-деформированного состояния упругих тел [1]. В классической теории упругости постановка задачи, направленная на оценку и анализ НДС конструкции, сводится к полной системе дифференциальных уравнений, которая включает в себя уравнения равновесия, уравнения совместности, граничные условия, геометрические и физические соотношения. В общем случае такая система содержит пятнадцать неизвестных, из которых шесть компонент тензора напряжений, шесть компонент тензора деформаций и три компоненты вектора перемещений, для разрешения которой прибегают к аналитическим, приближенным либо численным методам.

Нахождение всех характеристик НДС в аналитической форме довольно трудоемкая задача, тем не менее, для их определения существуют три подхода: прямые и обратные решения задачи теории упругости, полуобратный метод Сен-Венана [2]. В первом случае вычислители пытаются проинтегрировать дифференциальные уравнения Ляме и принять основными неизвестными вектор перемещений, тем самым решая задачу в перемещениях, или взять за основу уравнения равновесия в терминах напряжений и условия совместности Бельтрами-Митчелла, что позволит решить задачу в напряжениях. Что же касается самой формулировки задачи теории упругости, то стоит отметить тот факт, что больший интерес в научном сообществе был выявлен к постановке задачи теории упругости в напряжениях, неоценимый вклад в развитие которой внесли такие деятели как: Эри, Максвелл, Моррер, В.И. Блох и Ю.А. Крутков, в осесимметричном случае: Ляв, К. Вебер, А. Тимпе, Б.Г. Галеркин, Г.Д. Гродский, Ю.Н. Васильев и др. [3-5] Отдельно стоит отметить постанову известного российского ученого Б.Е. Победри, отраженную в работах [6-8], а так же его учеников Д.В. Георгиевского и С.В. Шешенина [9-11]. В решениях обратных задач, исходя из физических соображений, вычислители задаются конкретным видом перемещений либо напряжений, в дальнейшем находя оставшиеся характеристики. Однако решения, полученные таким подходом, зачастую не имеют никакого практического интереса. Частичное задание и компонент тензора напряжений, и вектора перемещений приводит к полуобратному методу Сен-Венана, с помощью которого получено большое количество точных решений простейших задач теории упругости: задача о всестороннем равномерном давлении, осевое растяжение призматического бруса, растяжение призматического бруса под действием собственного веса, кручение круглого призматического бруса и др. Для расчета более сложных конструкций такие методики не находят своего применения, поскольку очень трудоемки и громоздки в своей реализации, в связи с чем, свое развитие получили приближенные методы теории упругости.

Приближенные подходы, позволяющие описать напряженно-деформированное состояние во всей области решаемой задачи с использованием определенного набора функций, относят к прямым методам теории упругости. Метод Ритца, Бубнова-Галеркина, Канторовича, Треффца – являются классическими методами, каждый из которых имеет свои особенности в подборе базисных функций, на которых в дальнейшем строится приближенное решение поставленной задачи [12-13]. В настоящее время попытки строить решение задачи теории упругости в полиномах либо с использованием тригонометрических рядов не остаются тщетными. Развитие таких подходов, позволяющих описать напряженно-деформированное состояние конструкции с помощью математических функций, отмечается в работах [14-21], каждая из которых ориентирована на определенный класс задач теории упругости. Так же не остаются незамеченными работы, направленные на изучение контактных задач теории упругости [22-24], вопросов сингулярности получаемых решений [25-26] и пр. Большое количество приближенных решений – отличная основа для развития численных методов, поскольку является бесценным материалом для верификации и отладки все более новых усовершенствованных подходов. Тем не менее, ограниченность таких форм решений, направленность на конкретные задачи, отделяют известные приближеннее методы исследований от численных, позволяющих строить дискретные аналоги для различных классов задач и проводить объемные вычислительные эксперименты.

Среди численных подходов можно выделить три основных класса: конечно-разностных, вариационно-разностных и конечно-элементных методов [27-29]. В настоящее время самым распространенным, эффективным и универсальным методом в теории упругости является метод конечных элементов, основная идея которого заключается в построении дискретного аналога физического объекта (тела). Метод конечных элементов (МКЭ) - основной метод решения задач прикладной механики, лежащий в основе подавляющего большинства современных программных комплексов, предназначенных для выполнения расчетов любых конструкций на ЭВМ, таких как ЛИРА, ANSYS, ABACUS, DINA, MARC и др. Большое количество монографий посвящено изложению самой сути метода, представлению различных конечно-элементных формулировок [30-34], а также вопросам сходимости получаемых решений со строгим математическим обоснованием [35-37]. Нельзя не отметить обзорные статьи А.В. Игнатьева [38-40], посвященные хронологии развития МКЭ, а также формализации существующих конечно-элементных подходов.

В настоящее время метод конечных элементов имеет множество вариантов, основывающихся на различных вариационных принципах [41]. Особой популярностью пользуется классический подход, базирующийся на вариационном принципе Лагранжа. Простота, прозрачность и ясность метода являются основными критериями при его использовании. Рассматриваемый вариант метода позволяет с высокой точностью определить перемещения узлов конструкции, при соответствующем выборе координатных функций. Вводимые аппроксимирующие выражения для перемещений внутри конечного элемента должны удовлетворять условиям кинематической допустимости, что соответствует выполнению уравнений равновесия и кинематических граничных условий. Такого рода элементы получили достаточное широкое применение не только в теории упругости. Из современных Лагранжевых подходов можно отметить ажурную схему метода конечных элементов [42-44], позволяющую существенно сократить вычислительны затраты, не теряя при этом качество решения поставленной задач. Развитию самих конечных элементов так же уделено должное внимание [45-47]. Тем не менее, для определения наиболее точного напряженного состояния нам приходится увеличивать в разы степень дискретизации исходной области, поскольку определение деформаций (напряжений) приводит к численному дифференцированию основного приближенного решения (перемещений), что характеризуется снижением точности и гладкости. Так, например, использование линейной аппроксимации перемещений приводит к постоянному распределению полей напряжений внутри элемента. Так же еще одним слабым местом подхода можно считать невозможность получения решения для тел из несжимаемых или слабосжимаемых материалов (коэффициент Пуассона равен, либо близок к 0.5).

В связи с этим свое развитие получили смешанные вариационные принципы. В частности вариационные принципы Рейсснера и Ху-Вашидзу [41] являются основой для построения численных методов, обладающих рациональными алгоритмами и дающих приближенные решения для перемещений и напряжений с практически одинаковой точностью и гладкостью в широких классах задач теории упругости. Стоит отдельно отметить работы Т. Пиана и П. Тонга, направленные на гибридные конечно-элементные формулировки [48-50], С. Атлури и др [51-52]. В настоящее время смешанным формулировкам так же уделяется должное внимание, что отражается в работах [53-56]. Несмотря на то что, в гибридных формулировках решена проблема расчета конструкций из несжимаемых материалов, на примере вариационного принципа Германа [57], основным недостатком рассматриваемых подходов является высокая размерность систем линейных алгебраических уравнений для неизвестных узловых величин, как следствие одновременной и независимой аппроксимации перемещений и напряжений внутри элемента.

Меньшую распространенность получил метод конечных элементов в напряжениях, основанный на вариационном принципе Кастильяно, уделим ему особое внимание.

1.2. Метод конечных элементов на основе вариационного принципа Кастильяно.

Как известно, функционал дополнительной работы является двойственным по отношению к функционалу Лагранжа [32]. Одновременное применение обоих вариантов – принципа Лагранжа и принципа Кастильяно позволяет получить в смысле энергии деформирования верхние и нижние границы для решения. Кроме того, при одинаковых затратах решением на основе функционала дополнительной работы удается получить более точные поля напряжений, чем решением на основе функционала Лагранжа. Однако сложности в реализации не позволяют широко применять принцип Кастильяно в сфере расчетов.

Функционал дополнительной работы является вариационным аналогом дифференциальных уравнений совместности в форме Бельтрами - Митчелла и кинематических граничных условий. Статические же граничные условия для данного функционала являются главными. Принцип возможных напряжений подразумевает: из всех статически возможных полей напряжений, что удовлетворяют уравнениям равновесия и статическим граничным условиям, истинным полем является то, которое доставляет функционалу дополнительной работы минимальное значение [58]. О возможностях формулировки метода конечных элементов, базирующегося на вариационном принципе Кастильяно, в основе которого лежит фундаментальный принцип виртуальных сил, а так же примеры его применения можно встретить в известной монографии Р. Галлагера [32]. В ней так же приводится два варианта построения конечно-элементных соотношений: конечно-элементная дискретизация с использованием узловых сил и конечно-элементная дискретизация с использованием функции напряжения Эри (в случае плоской задачи теории упругости).

Построение равновесного поля напряжений внутри конечного элемента – довольно сложная задача. При рассмотрении произвольной аппроксимации полей напряжений, возникает проблема выполнения условий равновесия. Данному вопросу большое внимание уделял бельгийский ученый Fraeijs de Veubeke, что в полной мере отражено в работе [59]. Как альтернатива, для решения плоских задач теории упругости в [54], предлагается использование постоянного распределения поля напряжений по области конечного элемента. Это позволило бы строить разрывные поля напряжений в местах приложения нагрузок или изменения толщины конструкции, однако с такой аппроксимацией для получения качественного решения необходимо сильно мельчить сетку, что приводит к значительному увеличению узловых неизвестных, и как следствие, к большим вычислительным затратам. Построение таких равновесных полей на основе аппроксимации напряжений для решения плоских задач теории упругости так и остается трудоемкой задачей, однако, в случае осесимметричных задач данный подход является достаточно известным. Впервые в работе [60] встречается семейство конечных элементов, позволяющих строить поля напряжений с различным набором параметров, заведомо удовлетворяющие уравнениям равновесия в цилиндрической системе координат, использование которых так же приведено в [61-62].

Другим известным подходом при построении статически допустимых полей напряжений в области конечного элемента является использование функции напряжений, основной особенностью которой является автоматическое удовлетворение уравнениям равновесия. Такому построению конечно-элементных соотношений уделено большее внимание [63-70]. В указанных работах встречаются прямоугольные, треугольные конечные элементы с различной степенью аппроксимации функции напряжений, ориентированные на решение плоских задач теории упругости. В [67-68] достаточно подробно описаны процедуры построения функций форм для прямоугольных конечных элементов, а так же учета статических граничных условий, которые, как было отмечено выше, являются главными в рассматриваемой формулировке. Поскольку в качестве узловых неизвестных фигурирует функция напряжений и ее производные, то задание статических граничных условий приводит к линейным ограничениям на узловые неизвестные, которые в дальнейшем вводятся в функционал с помощью метода множителей Лагранжа. Существует и еще один подход, который реализуется только в случае достаточно простых задач, позволяющий вычислить аналитически по заданным нагрузкам распределение функции напряжений на границе конструкции и в дальнейшем задать полученные значения в узлах, используя метод модификации глобальных матриц податливости и вектора обобщенных перемещений.

В [32, 67] проводится аналогия между задачами изгиба пластин и плоской задачей теории упругости. Однородное дифференциальное уравнение для функции напряжений Эри совпадает с уравнением изгиба пластин для функции прогиба ω при нулевых распределенных нагрузках. Поэтому если в функционале дополнительной работы функцию напряжений заменить на ω, а матрицу податливости материала (упругих констант) на матрицу жесткости материала, то функционал оказывается равным энергии деформации изгибаемой тонкой пластины. Следовательно, определение функции напряжений идентично отысканию поля прогибов при изгибе пластин. Именно такие элементы и взяли свое начало при развитии конечно-элементного подхода в напряжениях.

Так же стоит отметить работы, которые посвящены решению трехмерных задач теории упругости, в которых функция напряжений принимает векторную интерпретацию [71-72].

Что касается осессимметричных задач теории упругости, то в таком случае рассматриваемый подход не находит своего применения, поскольку функции напряжений имеют достаточно сложную связь с компонентами тензора напряжений, что приводит к непростой конечно-элементной реализации, трудностям задания статических граничных условий.

В качестве итога стоит обратить внимание на то, что все приведенные в работах конечные элементы имеют простую форму, поскольку для сложного криволинейного (изопараметрического) элемента построить статически допустимое поле напряжений достаточно трудно [73], а для решения двумерных задач теории упругости такие попытки не увенчались успехом. В связи с этим применение метода конечных элементов в напряжениях ограничено использованием рассмотренных подходов для расчета тел, занимающих канонические области. Отличным выходом из сложившейся ситуации послужил бы симбиоз метода конечных элементов в напряжениях и метода, позволяющего свести краевую задачу теории упругости, сформулированную на сложной области, к задаче на канонической области, который мог бы дать толчок в развитии самих равновесных конечных элементов, а так же значительно расширил сферу применения конечно-элементных подходов в напряжениях. Поэтому следующий раздел посвятим рассмотрению численных подходов, позволяющих эффективно решать задачи теории упругости для конструкций неканонической формы.

1.3. Обзор численных подходов для решения задач теории упругости, позволяющих свести краевую задачу теории упругости для тел сложной формы к задаче на канонической области

В 90е года получили свое развитие методы, позволяющие свести задачи теории упругости, сформулированные на областях сложной геометрически формы, к задачам на канонических областях. К одним из таких методов можно отнести подход, разработанный Гузь А. Н. и Немиш Ю. Н. 1982 г (метод малых возмущений формы), позволяющий искать приближенное решение задачи на областях, мало отличающихся от канонических. В работах [74-76] проанализировано воздействие возмущений формы границы тела на его напряженно-деформированное состояние, рассмотрены вопросы сходимости приближенных решений. Тем не менее, большинство реальных конструкций имеют форму, сильно отличающую от канонической, что в таком случае делает предложенный подход неэффективным.

В 1963 году впервые В.К.Саульевым был предложен метод фиктивных областей, как метод приближенного решения краевых задач в областях сложной геометрически формы [77]. Так же к развитию указанной методологии причастны такие научные деятели, как: Бугров А.Н., Руховец Л.А., Коновалов А.Н., Копченой В.Д., Бахвалов Н.С., Войцеховский С.А., Астраханцев Г.П., Вабищев П.Н., Брусникин М.Б. [78-87]. В вычислительной сфере метод фиктивных областей получил обширное распространение, поскольку имеет достаточно простой алгоритм отладки метода на необходимый вид области.

В 1973 году Л.Н. Ясницким был предложен метод фиктивных канонических областей (ФКО), дающий возможность получить решение в аналитическом виде, тождественно удовлетворяющее решаемым дифференциальным уравнениям краевой задачи [88]. В работах [89-92] была представлена формулировка и первое доказательство теоремы сходимости в случае двумерных задач теории упругости, рассмотрены и определены приемы оценки погрешности решений краевых задач, созданы теоретические основы математического аппарата рассматриваемого подхода. В случае трехмерных задач теории упругости теорема сходимости метода ФКО была доказана С.Я. Гусманом [93]. Большой вклад в развитие метода внес С.Л. Гладкий [94-97].

В 1999 году в монографии И.Н. Шардакова, Н.А.Труфанова, В.П. Матвеенко [98] был представлен подход геометрического погружения (МГП). Так же большой вклад в развитие рассматриваемой методики внесен И.Е. Трояновским, С.В. Поповым, М.А. Труфановой, П.В. Булавиным, К.С. Пустовойт, В.П. Матвеенко [99-100, 103, 111-114]. Основной целью метода является сведение краевой задачи теории упругости, сформулированной на области сложной формы, к вариационно-итерационной последовательности задач на канонической области [99, 105, 108]. Формулировка МГП дана в перемещениях, в работах [101, 103-104, 107] предложены эффективные алгоритмы реализации методом конечных элементов, вариационно-разностным методом [110], методом граничных элементов [106, 111], имеется теоретическое обоснование рассматриваемого подхода [98, 102]. Основными преимуществами процедуры геометрического погружения являются: решение краевых задач на областях, как сильно, так и мало отличающихся от канонических областей; более точное определение полей перемещений на криволинейных границах исходной области; получение решения задачи с необходимой точностью; построение дискретного аналога на канонической области, что сразу снимает все проблемы связанные с дискретизацией исходной геометрии. Тем не менее, как и все методики, сформулированные на Лагранжевом подходе, существует ряд проблем, касающихся непосредственно определения напряженного состояния рассматриваемой конструкции, а так же расчетов конструкций из несжимаемых, слабосжимаемых материалов. Развитие такого подхода на основе вариационного принципа Кастильяно [113-114] позволило бы обойти указанные проблемы, а так же эффективно использовать метод конечных элементов в напряжениях для расчета сложных областей с криволинейными границами.

1.4. Выводы по главе

Обобщая рассмотренные статьи, нельзя не отметить несомненную важность численных формулировок, основанных на вариационном принципе Кастильяно. Преимущества таких подходов заключаются в определении более точного напряженного состояния рассматриваемых расчетных конструкций, возможностью решения задач с несжимаемыми или слабосжимаемыми материалами. Не стоит забывать и про то, что решение, полученное с помощью принципа минимума дополнительной энергии, является верхней гранью решения, в то время как решение, основанное на принципе возможных перемещений – нижней гранью с энергетической точки зрения. Используя одновременно два подхода для анализа конструкций можно определить интервал значений, в котором находится точное решение рассматриваемой задачи.

В связи с этим, развитие метода геометрического погружения в напряжениях не просто расширит применение процедуры погружения при решении краевых задач теории упругости, но и позволит эффективно использовать известные равновесные конечные элементы при дискретизации сложных геометрически областей.

Таким образом, согласно рассмотренным литературным источникам по тематике исследования, определена цель диссертационной работы: обобщение метода геометрического погружения на класс задач теории упругости в напряжениях и разработка численного алгоритма реализации на основе вариационного принципа Кастильяно.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

– Разработать основные теоретические положения метода геометрического погружения в напряжениях.

– Доказать сходимость итерационной процедуры МГП.

– Построить дискретные аналоги вариационного уравнения МГП с помощью метода конечных элементов в напряжениях, метода Ритца.

– Реализовать и исследовать практическую сходимость МГП в напряжениях на примере двумерных задач теории упругости (плоских и осесимметричных).

– Применить разработанный подход МГП в напряжениях для численного анализа напряженного состояния резинометаллических конструкций (амортизаторов).

Глава 2. Теоретические положения метода геометрического погружения для решения задач линейной теории упругости в напряжениях

В главе рассмотрены основные теоретические положения метода геометрического погружения, обобщающие подход на класс краевых задач теории упругости в напряжениях. Описывается процедура сведения краевой задачи теории упругости в напряжениях, сформулированной в области произвольной конфигурации, к итерационной последовательности краевых задач на канонической области. Приводятся вид дифференциальной формулировки задачи на канонической области, соответствующей вариационному уравнению метода геометрического погружения, построенного в рамках принципа минимума дополнительной работы (принципа Кастильяно), процесс построения итерационной процедуры МГП в напряжениях, формулируется и доказывается теорема о ее сходимости в терминах элементов введенных пространств тензоров напряжений.

2.1. Постановка краевой задачи линейной теории упругости в напряжениях

В n-мерном евклидовом пространстве R^n $(n=1,2,3)$ рассматривается связанное ограниченное открытое множество D с непрерывной по Липшицу границей S. Замыкание $\bar{D}=D\cup S$ множества D определяет область в R^n, занятую упругим изотропным телом.

Рассмотрим краевую задачу теории упругости в напряжениях [58] при отсутствии объемных сил, включающую уравнения равновесия, уравнения совместности в напряжениях (соотношения Бельтрами-Мичелла), статические граничные условия и кинематические граничные условия:

$$\sigma_{ij,j}=0, \quad \mathbf{x}\in D, \tag{2.1}$$

$$\frac{3\sigma_{,ij}}{1+\nu}+\Delta\sigma_{ij}=0, \quad \mathbf{x}\in D, \tag{2.2}$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma, \tag{2.3}$$

$$u_i\left(\hat{\sigma}\right) = U_i, \quad \mathbf{x} \in S_u, \tag{2.4}$$

где $S = S_\sigma \cup S_u$, S_σ, S_u – части границы S, на которых заданы, соответственно, поверхностные силы и перемещения; $\mathbf{T}$ – вектор заданных на границе S_σ усилий с компонентами T_i; $\mathbf{x} \in D$ – радиус-вектор с компонентами x_i произвольной точки области, занятой упругим телом; $\mathbf{n}$ – вектор единичной внешней нормали к границе S с компонентами n_i; $\hat{\sigma}$ – симметричный тензор напряжений с компонентами σ_{ij}; $\hat{\varepsilon}$ – симметричный тензор деформации с компонентами ε_{ij}; $\mathbf{u}$ – вектор перемещений с компонентами u_i; $\mathbf{U}$ – вектор заданных на границе S_u перемещений с компонентами U_i.

Тензор напряжения $\hat{\sigma}$ связан с тензором деформации $\hat{\varepsilon}$ физическим законом Гука:

$$\hat{\sigma} = \lambda I_1\left(\hat{\varepsilon}\right)\hat{\boldsymbol{E}} + 2\mu\hat{\varepsilon},$$

в обратной форме записи:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\hat{\sigma} - \frac{\nu}{E} I_1\left(\hat{\sigma}\right)\hat{\boldsymbol{E}};$$

где $\hat{\boldsymbol{E}}$ – единичный тензор, $I_1\left(\hat{\varepsilon}\right) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – первый инвариант тензора деформации, λ, μ – упругие параметры Ламе, $I_1\left(\hat{\sigma}\right) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ – первый инвариант тензора напряжений, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Связь линейного тензора деформации $\hat{\varepsilon}$ с вектором перемещений $\mathbf{u}$ определяется геометрическими соотношениями Коши:

$$\hat{\varepsilon} = \operatorname{def}\left(\mathbf{u}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\Delta\mathbf{u}\right)^T + \Delta\mathbf{u}\right),$$

а компоненты ε_{ij} тензора деформации удовлетворяют условию совместности в форме Сен-Венана:

$$\operatorname{Ink}\left(\hat{\varepsilon}\right) = \varepsilon_{ii,kj} - \varepsilon_{ik,ij} - \varepsilon_{ij,ki} + \varepsilon_{jk,ii} = 0.$$

Представление граничного условия на S_u в форме (2.4) требует выражения компонент вектора перемещений через компоненты тензора деформаций с помощью формул Чезаро [58] и замену деформаций через напряжения по закону Гука. Известно, что формулы Чезаро дают неединственное выражение перемещений через деформации (с точностью до перемещения среды как абсолютно жесткого тела). Чтобы исключить неединственность решения, будем предполагать, что наложение на упругую систему кинематических связей вида (2.4) обеспечивает отсутствие жестких смещений и поворотов.

В тензорной форме задача (2.1)-(2.4) перепишется в виде:

$$\operatorname{div}\hat{\sigma}(\mathbf{x}) = 0,\ \ \mathbf{x} \in D, \tag{2.5}$$

$$\Delta\hat{\sigma}(\mathbf{x}) + \frac{1}{1+\nu}\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\hat{\sigma}(\mathbf{x})\right) = 0,\ \ \mathbf{x} \in D, \tag{2.6}$$

$$\hat{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x} \in S_\sigma, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{u}\left(\hat{\sigma}(\mathbf{x})\right) = \boldsymbol{f}\left(\hat{\sigma}(\mathbf{x})\right) = \mathbf{U},\ \ \mathbf{x} \in S_u, \tag{2.8}$$

где $\boldsymbol{f}(\hat{\sigma}) = \operatorname{def}^{-1}\left[\frac{1+\nu}{E}\hat{\sigma} - \frac{\nu}{E} I_1(\hat{\sigma})\hat{\boldsymbol{E}}\right]$.

2.2. Вариационная формулировка задачи линейной теории упругости в напряжениях

Рассмотрим функционал дополнительной работы упругого тела [12, 58, 115]:

$$\mathit{П}_{доп}(\hat{\sigma}) = \int_D \mathrm{A}(\hat{\sigma}) dD - \int_{S_u} t_i(\hat{\sigma}) U_i dS_u = \frac{1}{2}\int_D \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dD - \int_{S_u} t_i(\hat{\sigma}) U_i dS_u\,, \tag{2.9}$$

где $\mathrm{A}(\hat{\sigma}) = \frac{1}{2E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\sigma_{kk}\right]$, определенный на множестве статически допустимых полей напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих уравнениям равновесия (2.1) в области D и статическим граничным условиям (2.3) на границе S_σ. В выражении (2.9) $t_i = \sigma_{ij} n_j$ – усилия на поверхности S_u.

Проварьируем функционал (2.9), учитывая, что вариации $\delta\sigma_{ij}$ также являются статически допустимыми полями напряжений, т.е. вариации $\delta\sigma_{ij}$ удовлетворяют условиям $\delta\sigma_{ij,j} = 0$ при $\mathbf{x} \in D$, $\delta\sigma_{ij} n_j = 0$ при $\mathbf{x} \in S_\sigma$, а при $\mathbf{x} \in S_u$ вариации $\delta\sigma_{ij}$ произвольны.

Тогда вариационная формулировка задачи примет вид:

$$\delta \Pi_{доп}\left(\hat{\sigma}\right) = 0, \tag{2.10}$$

где

$$\delta \Pi_{доп}\left(\hat{\sigma}\right) = \int\limits_D \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\left(\hat{\sigma}\right) dD - \int\limits_{S_u} t_i\left(\delta\hat{\sigma}\right) U_i dS_u \tag{2.11}$$

откуда, в силу произвольности вариаций, следует [12, 58, 115] выполнение естественным образом уравнений Бельтрами-Мичелла (2.6) в области D и граничных условий в перемещениях (2.8) на S_u, как будет показано далее.

2.3. Используемые пространства и нормы.

Введем в рассмотрение пространство V векторов перемещений $\mathbf{u}$: $V\left(R^n\right) = \left\{\mathbf{u} \in H^3\left(R^n\right)\right\}$. Действуя на элементы $\mathbf{u} \in V\left(R^n\right)$ линейным дифференциальным оператором $\operatorname{def}\left(\mathbf{u}\right)$, получим пространство тензоров деформации $\hat{\varepsilon}$:

$$W\left(R^n\right) = \left\{\hat{\varepsilon} \in H^2\left(R^n\right), \operatorname{Ink}\left(\hat{\varepsilon}\right) = 0,\ \hat{\varepsilon} = \operatorname{def}\left(\mathbf{u}\right), \mathbf{u} \in V\left(R^n\right)\right\} .$$

Линейное преобразование $L\hat{\varepsilon} = {}^4\hat{C} \cdot\cdot \hat{\varepsilon}$, где ${}^4\hat{C}$ – тензор упругих постоянных материала, элементов $\hat{\varepsilon} \in W\left(R^n\right)$ дает пространство тензоров напряжений $\hat{\sigma}$:

$$\Phi\left(R^n\right) = \left\{\hat{\sigma} \in H^2\left(R^n\right),\ \hat{\sigma} = L\hat{\varepsilon},\ \hat{\varepsilon} \in W\left(R^n\right)\right\}.$$

Рассмотрим подпространство $\Psi\left(D\right)$ пространства $\Phi\left(R^n\right)$:

$$\Psi\left(D\right) = \left\{\hat{\psi} \in \Phi\left(D\right);\quad \operatorname{div}\hat{\psi} = 0,\ \mathbf{x} \in D;\quad \hat{\psi} \cdot \mathbf{n} = 0,\ \mathbf{x} \in S_\sigma\right\},$$

где $\hat{\sigma} = \hat{\psi} + \hat{\phi}$, $\left(\hat{\phi} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T},\ \mathbf{x} \in S_\sigma\right)$. Пространство $\Psi(D)$ является полным замкнутым подпространством Соболева [116]:

$$H^2(D) = \left\{\hat{\psi} \in L_2(D),\ \partial^\alpha \hat{\psi} \in L_2(D),\ \ |\alpha| \le 2\right\},$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in N^n.$$

Определим скалярные произведения:

$$\forall \hat{\chi}, \hat{\psi} \in \Psi(D):\ \ \langle \hat{\chi}, \hat{\psi} \rangle = \int_D \hat{\chi} \cdot\cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\psi}) dD,$$

$$\forall \mathbf{t}(\hat{\chi}), \boldsymbol{f}(\hat{\psi}) \in L_2(S_u):\ \ \left(\mathbf{t}(\hat{\chi}), \boldsymbol{f}(\hat{\psi})\right) = \int_{S_u} \mathbf{t}(\hat{\chi}) \cdot \boldsymbol{f}(\hat{\psi}) dS_u = \int_{S_u} \mathbf{t}(\hat{\chi}) \cdot \mathbf{U} dS_u,$$

где $\mathbf{t}(\hat{\chi}), \boldsymbol{f}(\hat{\psi}) \equiv \mathbf{U}$ – операторы, отображающие элементы $\hat{\psi}, \hat{\chi} \in H^2(D)$ в элементы векторного пространства $L_2(S_u)$.

Порождаемые введенными скалярными произведениями нормы соответствующих пространств имеют вид:

$$\forall \hat{\psi} \in \Psi(D) \quad \|\hat{\psi}\| = \langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle^{1/2}, \tag{2.12}$$

$$\forall \mathbf{t} \in L_2(S_u) \quad \|\mathbf{t}\|_S = (\mathbf{t}, \mathbf{t})^{1/2}. \tag{2.13}$$

С учетом выше сказанного, функционал (2.9) перепишется в виде:

$$\mathit{П}_{доп}(\hat{\psi}) = \frac{1}{2}\int_D \hat{\psi} \cdot\cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\psi}) dD - \int_{S_u} \mathbf{t}(\hat{\psi}) \cdot \mathbf{U} dS_u, \text{ или } \mathit{П}_{доп}(\hat{\psi}) = \frac{1}{2}\langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle - \left(\mathbf{t}(\hat{\psi}), \mathbf{U}\right),$$

а его вариация (2.11) – в виде:

$$\delta \mathit{П}_{доп}(\hat{\psi}) = \int_D \hat{\chi} \cdot\cdot \varepsilon(\hat{\psi}) dD - \int_{S_u} \mathbf{t}(\hat{\chi}) \cdot \mathbf{U} dS_u.$$

Таким образом, приходим к вариационному уравнению

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi(D) \quad \langle \hat{\chi}, \hat{\psi} \rangle = \left(\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U}\right), \tag{2.14}$$

для которого согласно теореме Лакса-Мильграмма [116] существует единственное решение $\hat{\psi} \in \Psi(D)$. Обобщенное решение краевой задачи (2.5)-

(2.8) получается из вариационного уравнения (2.14) $\forall\hat{\chi}\in\Psi(D)$ и доставляет минимум функционалу $\mathit{П}_{доп}(\hat{\psi})$ согласно вариационному принципу Кастильяно.

2.4. Введение канонической области

Для осуществления геометрического погружения в рассмотрение вводится каноническая область $\bar{D}_0$, представляющая собой замыкание $\bar{D}_0 = D_0 \cup S_0$ ограниченного открытого множества $D_0 \subset R^n$, имеющего непрерывную по Липшицу границу S_0 (рис. 2.1).

Пусть выполняется условие

$$\bar{D} \subset \bar{D}_0 . \tag{2.15}$$

Полагаем также, что $S_u^1 = S_u \cap S_0$, $S_u^2 = S_u \cap S_\Delta$, где S_Δ – непрерывная по Липшицу граница области $D_\Delta = D_0 \setminus D$ – дополнения множества D до D_0. Таким образом, $S_u = S_u^1 \cup S_u^2$, $S_0 = S_u^1 \cup S_0^1 \cup S_\sigma$, $S_0^1 = S_0 \cap S_\Delta$, $S_\Delta = S_0^1 \cup S_u^2$.

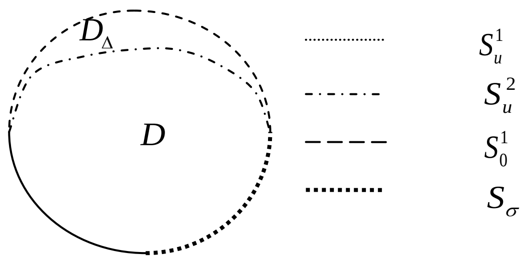


Рис. 2.1. Исходная область D, область дополнения D_Δ и обозначения границ.

Рассмотрим соответствие решения уравнения (2.14) полному замкнутому пространству

$$\Psi_0(D_0) = \left\{\hat{\psi}\in\Phi(D_0);\quad \operatorname{div}\hat{\psi}=0,\ \mathbf{x}\in D_0;\quad \hat{\psi}\cdot\mathbf{n}=0,\ \mathbf{x}\in S_\sigma;\quad F(\hat{\psi})=0,\ \mathbf{x}\in S_0^1\right\} \tag{2.16}$$

со скалярным произведением

$$\forall\hat{\chi},\hat{\psi}\in\Psi_0(D_0):\quad \langle\hat{\chi},\hat{\psi}\rangle_0 = \int_{D_0}\hat{\chi}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\hat{\psi})\, dD_0 \tag{2.17}$$

и соответствующей ему нормой $\forall\hat{\psi}\in\Psi_0\left(D_0\right)\quad \left\|\hat{\psi}\right\|_0=\left\langle\hat{\psi},\hat{\psi}\right\rangle_0^{1/2}$. В (2.16) $F\left(\hat{\psi}\right)$ – линейный однородный оператор, зависящий от тензора $\hat{\psi}$ или только от некоторых его компонент.

2.5. Связь элементов пространств $\Psi\left(D\right)$ и $\Psi_0\left(D_0\right)$

Для установления соответствия элементов пространств $\Psi\left(D\right)$ и $\Psi_0\left(D_0\right)$ определим два однозначных отображения:

1). $\gamma:\Psi_0\left(D_0\right)\rightarrow\Psi\left(D\right)$: $\forall\hat{\psi}\in\Psi_0\left(D_0\right)\ \exists\hat{\chi}\in\Psi\left(D\right)$: $\hat{\chi}=\gamma\left(\hat{\psi}\right)$;

2). $\varphi:\Psi\left(D\right)\rightarrow\Psi_0\left(D_0\right)$: $\forall\hat{\chi}\in\Psi\left(D\right)\ \exists\hat{\psi}\in\Psi_0\left(D_0\right)$: $\hat{\psi}=\varphi\left(\hat{\chi}\right)$.

Первое утверждает, что $\forall\mathbf{x}\in D\ \ \hat{\chi}=\hat{\psi}$, означая тем самым сужение области определения $\forall\hat{\psi}\in\Psi_0\left(D_0\right)$ до D, при этом справедливо неравенство $\forall\hat{\psi}\in\Psi_0\left(D_0\right)\quad \left\|\hat{\psi}\right\|_0\geq\left\|\gamma\left(\hat{\psi}\right)\right\|$, которое следует из положительной определенности функционалов (2.12), (2.17) и условия (2.15).

Второе однозначное отображение утверждает, что $\forall\mathbf{x}\in D\ \hat{\psi}=\hat{\chi},\ \ \forall\mathbf{x}\in D_\Delta\ \hat{\psi}=\hat{\chi}_*$, где $\hat{\chi}_*$ – решение краевой задачи:

$$\Delta\hat{\chi}_*+\frac{1}{1+\nu}\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\hat{\chi}_*\right)=0,\quad \mathbf{x}\in D_\Delta, \tag{2.18}$$

$$\hat{\chi}_*=\hat{\chi},\qquad \mathbf{x}\in S_\Delta\cap S\,. \tag{2.19}$$

Для $\mathbf{x}\in S_0^1$ краевое условие (2.19), как станет ясно из дальнейшего изложения, может быть одного из следующих типов:

$$\hat{\chi}_*=0,\qquad \mathbf{x}\in S_0^1, \tag{2.20а}$$

$$u_i\left(\hat{\chi}_*\right)n_j=0,\qquad \mathbf{x}\in S_0^1, \tag{2.20б}$$

$$\chi_{*ij}=0,\quad u_k n_l=0,\quad i,j\neq k,\ \ i,j\neq l,\quad \mathbf{x}\in S_0^1, \tag{2.20в}$$

где $\mathbf{n}=\left(n_1,n_2,n_3\right)$ – вектор внешней единичной нормали при $\mathbf{x}\in S_0^1$, u_i – компонента вектора $\mathbf{u}$. Для такого типа краевых условий существует единственное решение задачи (2.18)-(2.20).

Таким образом, отображение φ производит расширение области определения $\forall\hat{\chi}\in\Psi(D)$ до D_0, продолжая его однозначно и непрерывно по значению $\hat{\chi}$ при $\mathbf{x}\in S_\Delta\cap S$ решением задачи (2.18)-(2.20) при $\mathbf{x}\in D_\Delta$.

Построенные отображения позволяют утверждать: областью значений отображения $\gamma:\Psi_0(D_0)\to\Psi(D)$ является все пространство $\Psi(D)$; решению $\hat{\psi}\in\Psi(D)$ вариационного уравнения (2.14) будет соответствовать единственный элемент $\varphi(\hat{\psi})\in\Psi_0(D_0)$, что следует из однозначности отображения $\varphi:\Psi(D)\to\Psi_0(D_0)$. Эти утверждения позволяют установить соответствие решения $\hat{\psi}\in\Psi(D)$ уравнения (2.14) пространству $\Psi_0(D_0)$:

$$\forall\hat{\chi}\in\Psi_0(D_0)\ \left\langle\gamma(\hat{\chi}),\gamma\left(\varphi(\hat{\psi})\right)\right\rangle=\left(\mathbf{t}\left(\gamma(\hat{\chi})\right),\mathbf{U}\right). \tag{2.21}$$

Запись $\gamma\left(\varphi(\hat{\psi})\right)$обозначает последовательное действие отображений φ на элемент $\hat{\psi}\in\Psi(D)$ и γ на элемент $\varphi(\hat{\psi})\in\Psi_0(D_0)$. Отметим, что

$$\forall\hat{\chi}\in\Psi_0(D_0)\ \left(\mathbf{t}\left(\gamma(\hat{\chi})\right),\mathbf{U}\right)=\left(\mathbf{t}(\hat{\chi}),\mathbf{U}\right). \tag{2.22}$$

Для элементов пространства $\Psi_0(D_0)$ имеет место равенство [117]

$$\forall\hat{\psi},\hat{\chi}\in\Psi_0(D_0)\ \left\langle\gamma(\hat{\chi}),\gamma(\hat{\psi})\right\rangle=\left\langle\hat{\chi},\hat{\psi}\right\rangle_0-\left\langle\hat{\chi},\hat{\psi}\right\rangle_\Delta, \tag{2.23}$$

где билинейная форма $\left\langle\hat{\chi},\hat{\psi}\right\rangle_\Delta=\int\limits_{D_\Delta}\hat{\chi}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}(\hat{\psi})\,dD_\Delta$ симметрична и при $\hat{\chi}=\hat{\psi}$ является положительным функционалом, для которого вследствие определения D_Δ справедливо неравенство

$$\forall\hat{\psi}\in\Psi_0(D_0)\ \left\langle\hat{\psi},\hat{\psi}\right\rangle_0\ge\left\langle\hat{\psi},\hat{\psi}\right\rangle_\Delta. \tag{2.24}$$

Используя (2.21)-(2.23), получим уравнение

$$\forall\hat{\chi}\in\Psi_0(D_0)\ \left\langle\hat{\chi},\varphi(\hat{\psi})\right\rangle_0=\left\langle\hat{\chi},\varphi(\hat{\psi})\right\rangle_\Delta+\left(\mathbf{t}(\hat{\chi}),\mathbf{U}\right), \tag{2.25}$$

которое будет являться основополагающим для метода геометрического погружения в вариационной формулировке.

Из существования и единственности решения $\hat{\psi}\in\Psi(D)$ исходного уравнения (2.14), из построенных однозначных отображений, а также из равенства (2.23) следуют существование и единственность решения $\varphi(\hat{\psi}) \in \Psi_0(D_0)$ вариационного уравнения (2.25).

2.6. Вариационный принцип Кастильяно

Из общих методических соображений приведем основные положения вариационного принципа Кастильяно, следуя работам [12, 58]. Принцип Кастильяно утверждает, что из всех статически возможных напряженных состояний тела при заданных внешних силах в действительности реализуется то напряженное состояние, для которого функционал (2.9), имеет минимум, т.е следует уравнение (2.10). Покажем, что условие (2.10) влечет за собой выполнение уравнений Бельтрами-Мичелла, представляющих уравнения Эйлера-Остроградского для функционала (2.9), а также выполнение кинематических граничных условий (2.4) на части S_u поверхности тела, как естественных граничных условий вариационной задачи.

С учетом того, что вариации $\delta\sigma_{ij}$ должны подчиняться условиям, отмеченным в п.2.2, которые являются уравнениями связей, и следуя методу неопределенных множителей Лагранжа, представим условие стационарности (2.10) в следующем виде:

$$\delta\Pi_{доп} = \int_D \left[\frac{\partial \mathrm{A}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} + \lambda_i \delta\sigma_{ij,j} \right] dD - \int_{S_u} \delta\sigma_{ij} n_j U_i dS_u = 0, \qquad (2.26)$$

где $\dfrac{\partial \mathrm{A}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \dfrac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}\right]$, λ_i – неопределенные множители, представляющие собой компоненты некоторого вектора $\boldsymbol{\lambda}$ в области D, занятой телом.

Применяя формулу Остроградского, преобразуем объемный интеграл в (2.26):

$$\int_D \lambda_i \delta\sigma_{ij,j} dD = \int_D \left(\lambda_i \delta\sigma_{ij}\right)_{,j} dD - \int_D \lambda_{i,j} \delta\sigma_{ij} dD = \int_S \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j dS - \int_D \lambda_{i,j} \delta\sigma_{ij} dD, \qquad (2.27)$$

где $\left(\lambda_{i,j}\right)$ – несимметричный тензор второго ранга, который можно разложить на симметричную и кососимметричную части: $\lambda_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}\right) + \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i}\right)$.

Тогда объемный интеграл в (2.27) преобразуется к виду:

$$\int_D \lambda_{i,j} \delta\sigma_{ij} dD = \frac{1}{2}\int_D \left(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij} dD + \frac{1}{2}\int_D \left(\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij} dD = \frac{1}{2}\int_D \left(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij} dD,$$

поскольку произведение $\left(\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij}$ будет равно нулю, т.к. $\delta\sigma_{ij}$ - симметричный тензор.

В поверхностном интеграле в (2.27) учтем, что $\delta\sigma_{ij} n_j = 0$ при $\mathbf{x} \in S_\sigma$:

$$\int_S \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j dS = \int_{S_u} \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j dS_u + \int_{S_\sigma} \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j dS_\sigma = \int_{S_u} \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j dS_u .$$

Тогда условие стационарности (2.26) примет вид:

$$\delta\Pi_{доп} = \int_D \left[\frac{1}{E}(1+\nu)\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} - \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}\right) \right] \delta\sigma_{ij} dD +$$

$$+ \int_{S_u} \left(\lambda_i - U_i\right)\delta\sigma_{ij} n_j dS_u = 0. \qquad (2.28)$$

Шесть вариаций $\delta\sigma_{ij}$, связанных тремя уравнениями $\delta\sigma_{ij,j} = 0$, $\mathbf{x} \in D$ при соответствующем выборе трех компонент λ_i лагранжева вектора $\boldsymbol{\lambda}$ можно считать произвольными. Приравнивая нулю множители в подинтегральных выражениях перед вариациями $\delta\sigma_{ij}$ в условии стационарности (2.28), получим соотношения

$$\frac{1}{E}(1+\nu)\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}\right), \ \mathbf{x} \in D; \quad \lambda_i = U_i, \ \mathbf{x} \in S_u . \qquad (2.29)$$

Правая часть первого соотношения представляет собой симметричный тензор, определяемый вектором $\boldsymbol{\lambda}$; второе соотношение показывает, что вектор $\boldsymbol{\lambda}$ должен быть равен вектору $\mathbf{U}$, заданному на поверхности S_u тела. Очевидно, что вектор $\boldsymbol{\lambda}$ можно отождествить с вектором перемещения $\mathbf{u}$ в области D, т.е.

считать, что тензор, определяемый правой частью первого равенства (2.29), есть тензор деформации $\hat{\varepsilon}$ и, следовательно, компоненты его должны подчиняться зависимостям Сен-Венана: $\mathrm{Ink}\left(\hat{\varepsilon}\right)=0$.

Подставив в эти зависимости значения компонент ε_{ij}, выраженные левой частью первого соотношения (2.29), придем к уравнениям Бельтрами, как уравнениям Эйлера-Остроградского для функционала $\Pi_{доп}$, второе соотношение (2.29) – естественные граничные условия вариационной задачи.

Теперь данную методику применим к исследуемой задаче, учитывая погружение исходной области в каноническую. Выполним тождественное преобразование функционала (2.9) дополнительной работы:

$$\Pi_{доп}=\int\limits_{D}\mathrm{A}\left(\sigma_{ij}\right)dD-\int\limits_{S_u}t_iU_idS_u+\int\limits_{D_\Delta}\mathrm{A}\left(\sigma_{ij}\right)dD_\Delta-\int\limits_{D_\Delta}\mathrm{A}\left(\sigma_{ij}\right)dD_\Delta=$$

$$=\int\limits_{D_0}\mathrm{A}\left(\sigma_{ij}\right)dD_0-\int\limits_{S_u}t_iU_idS_u-\int\limits_{D_\Delta}\mathrm{A}\left(\sigma_{ij}\right)dD_\Delta. \qquad (2.30)$$

Условие минимума (2.30) примет вид:

$$\delta\Pi_{доп}=\int\limits_{D}\frac{\partial\mathrm{A}\left(\sigma_{ij}\right)}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}dD-\int\limits_{S_u}\delta\sigma_{ij}n_jU_idS_u-\int\limits_{D_\Delta}\frac{\partial\mathrm{A}\left(\sigma_{ij}\right)}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}dD_\Delta=0.$$

Применим метод неопределенных множителей Лагранжа и формулу Остроградского:

$$\delta\Pi_{доп}=\int\limits_{D_0}\left[\frac{\partial A\left(\sigma_{ij}\right)}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}+\lambda_i\delta\sigma_{ij,j}\right]dD-\int\limits_{D_\Delta}\left[\frac{\partial\mathrm{A}\left(\sigma_{ij}\right)}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}+\lambda_i\delta\sigma_{ij,j}\right]dD_\Delta-$$

$$-\int\limits_{S_u}\delta\sigma_{ij}n_jU_idS_u=\int\limits_{D_0}\frac{\partial\mathrm{A}\left(\sigma_{ij}\right)}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}dD_0+\int\limits_{S_0}\lambda_i\delta\sigma_{ij}n_jdS_0-\int\limits_{D_0}\lambda_{i,j}\delta\sigma_{ij}dD_0-$$

$$-\int\limits_{D_\Delta}\frac{\partial\mathrm{A}\left(\sigma_{ij}\right)}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}dD_0-\int\limits_{S_\Delta}\lambda_i\delta\sigma_{ij}n_jdS_0+\int\limits_{D_\Delta}\lambda_{i,j}\delta\sigma_{ij}dD_\Delta-\int\limits_{S_u}\delta\sigma_{ij}n_jU_idS_u.$$

Вновь используем разложение несимметричного тензора второго ранга $\left(\lambda_{i,j}\right)$ на симметричную и несимметричную части:

$$\delta\Pi_{доп} = \int\limits_{D_0} \frac{\partial \mathrm{A}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} dD_0 - \int\limits_{D_0} \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij} dD_0 - \int\limits_{D_0} \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij} dD_0 +$$

$$+\int\limits_{S_u^1} \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j dS_u^1 + \int\limits_{S_0^1} \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j dS_0^1 + \int\limits_{S_\sigma} \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j dS_\sigma^1 - \int\limits_{D_\Delta} \frac{\partial \mathrm{A}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij} dD_\Delta +$$

$$+\int\limits_{D_\Delta} \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij} dD_\Delta + \int\limits_{D_\Delta} \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij} dD_\Delta - \int\limits_{S_u^2} \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j dS_u^2 -$$

$$-\int\limits_{S_0^1} \lambda_i \delta\sigma_{ij} n_j dS_0^1 - \int\limits_{S_u^1} \delta\sigma_{ij} n_j U_i dS_u^1 - \int\limits_{S_u^2} \delta\sigma_{ij} n_j U_i dS_u^2 . \qquad (2.31)$$

Окончательно получим:

$$\delta\Pi_{доп} = \int\limits_{D_0} \left[\frac{1}{E}(1+\nu)\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} - \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}\right) \right] \delta\sigma_{ij} dD_0 -$$

$$-\int\limits_{D_\Delta} \left[\frac{1}{E}(1+\nu)\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} - \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}\right) \right] \delta\sigma_{ij} dD_\Delta +$$

$$+\int\limits_{S_u^1} \left(\lambda_i - U_i\right)\delta\sigma_{ij} n_j dS_u^1 - \int\limits_{S_u^2} \left(\lambda_i + U_i\right)\delta\sigma_{ij} n_j dS_u^2 = 0 \qquad (2.32)$$

или

$$\frac{1}{E}(1+\nu)\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}\right), \ \ \mathbf{x} \in D_0 ,$$

$$\left(\lambda_i - U_i\right) n_j = 0, \ \ \mathbf{x} \in S_u^1 ,$$

$$\left(\lambda_i + U_i\right) n_j = 0, \ \ \mathbf{x} \in S_u^2 .$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{\lambda}$ по-прежнему можно отождествить с вектором перемещений $\mathbf{u}$ в области D, а при переходе через границы S_u^2 и S_u^1 наблюдается скачок в значении вектора перемещений.

Из анализа (2.32) следует возможность потребовать

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D) \ \ \mathbf{u}(\hat{\psi}) \cdot \hat{\chi} \cdot \mathbf{n} = 0, \ \ \mathbf{x} \in S_0^1. \qquad (2.33)$$

Этому требованию удовлетворяют все типы однородных краевых условий (2.20). Используя этот произвол, можно выбрать наиболее приемлемый тип краевых условий для конкретно решаемой задачи. Следует отметить, что принятый вариант краевого условия при $\mathbf{x} \in S_0^1$ однозначно определит и вид оператора $F(\hat{\psi})$ в (2.16).

2.7. Вспомогательное вариационное уравнение

Рассмотрим другое вариационное уравнение

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \quad \langle \hat{\chi}, \hat{\xi} \rangle_0 = (1-\varepsilon)\langle \hat{\chi}, \hat{\xi} \rangle_\Delta + (\mathbf{t}(\hat{\chi}), \mathbf{U}), \tag{2.34}$$

где $\forall \hat{\xi} \in \Psi_0(D_0)$ и ε – числовой параметр.

Теорема 1. Если числовой параметр ε удовлетворяет условию $\varepsilon \geq 0$, то разность $\gamma\left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right)$ решений вариационных уравнений (2.25) и (2.34) по норме пространства $\Psi(D)$ удовлетворяет неравенству

$$\left\| \gamma\left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right) \right\| \leq C\varepsilon$$

где постоянная C не зависит от ε.

Доказательство. Почленно вычитая из уравнения (2.25) уравнение (2.34), получим соотношение:

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \ \left\langle \hat{\chi}, \left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right) \right\rangle_0 = \left\langle \hat{\chi}, \left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right) \right\rangle_\Delta - \varepsilon \langle \hat{\chi}, \hat{\xi} \rangle_\Delta,$$

которое преобразуется к виду:

$$\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0) \ \left\langle \hat{\chi}, \gamma\left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right) \right\rangle_0 = -\varepsilon \left\langle \hat{\chi}, \left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right) \right\rangle + \left\langle \hat{\chi}, \varphi\left(\hat{\xi}\right) \right\rangle_\Delta. \tag{2.35}$$

Используя произвольность элемента $\forall \hat{\chi} \in \Psi_0(D_0)$, примем его равным $\left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right)$, и, подставив в (2.35), получим:

$$\left\langle \gamma\left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right), \gamma\left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right) \right\rangle_0^+ = \varepsilon \left\langle \left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right), \varphi(\hat{\psi}) \right\rangle - \varepsilon \left\langle \left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right), \left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right) \right\rangle_\Delta^+,$$

откуда с учетом положительной определенности скалярных произведений, отмеченных «+», следует неравенство:

$$\left\| \gamma\left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right) \right\|^2 \leq \varepsilon \left\langle \left(\varphi(\hat{\psi}) - \hat{\xi}\right), \varphi(\hat{\psi}) \right\rangle_\Delta. \tag{2.36}$$

К правой части неравенства (2.36) применим преобразование Остроградского-Гаусса:

$$\left\langle \varphi(\hat\psi)-\hat\xi,\varphi(\hat\psi)\right\rangle_{\Delta}=$$

$$=\int\limits_{D_\Delta}\left[\frac{1}{E}(1+\nu)\varphi(\hat\psi)-\frac{\nu}{E}I_1\left(\varphi(\hat\psi)\right)\hat E-def\left(\mathbf{u}\left(\varphi(\hat\psi)\right)\right)\right]\cdot\left(\varphi(\hat\psi)-\hat\xi\right)dD_\Delta+$$

$$+\int\limits_{S_0^1}\mathbf{u}\left(\varphi(\hat\psi)\right)\cdot\left(\varphi(\hat\psi)-\hat\xi\right)\cdot\mathbf{n}dS_0^1+\int\limits_{S_u^2}\mathbf{u}\left(\varphi(\hat\psi)\right)\cdot\left(\varphi(\hat\psi)-\hat\xi\right)\cdot\mathbf{n}dS_u^2. \qquad (2.37)$$

Первый интеграл в (2.37) равен нулю в силу (2.18), второй – в силу (2.19), как частного случая условия (2.33). К третьему интегралу применим неравенство Коши-Шварца [116]:

$$\int\limits_{S_u^2}\mathbf{u}\left(\varphi(\hat\psi)\right)\cdot\left(\varphi(\hat\psi)-\hat\xi\right)\cdot\mathbf{n}dS_u^2\leq\leq$$

$$\leq\leq\left[\int\limits_{S_u^2}\mathbf{u}\left(\varphi(\hat\psi)\right)\cdot\mathbf{u}\left(\varphi(\hat\psi)\right)dS_u^2\right]^{1/2}\cdot\left[\int\limits_{S_u^2}\left(\left(\varphi(\hat\psi)-\hat\xi\right)\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\left(\left(\varphi(\hat\psi)-\hat\xi\right)\cdot\mathbf{n}\right)dS_u^2\right]^{1/2} \qquad (2.38)$$

Согласно известному неравенству имеем:

$$\forall\hat\psi,\hat\chi\in\Psi(D)\quad \left\|(\hat\psi-\hat\chi)\cdot\mathbf{n}\right\|_S\leq\alpha\left\|\hat\psi-\hat\chi\right\|, \qquad (2.39)$$

где норма в левой части неравенства определена соотношением (2.13), и величина α зависит от S. С учетом того, что $S_u^2\subset S$ и $\gamma\left(\varphi(\hat\psi)-\hat\xi\right)\in\Psi(D)$, соотношение (2.39) позволяет усилить неравенство (2.38) и оценить сверху равенство (2.37):

$$\left\langle \varphi(\hat\psi)-\hat\xi,\varphi(\hat\psi)\right\rangle_{\Delta}\leq\alpha\left\|\gamma\left(\varphi(\hat\psi)-\hat\xi\right)\right\|\left[\int\limits_{S_u^2}\mathbf{u}\left(\varphi(\hat\psi)\right)\cdot\mathbf{u}\left(\varphi(\hat\psi)\right)dS_u^2\right]^{1/2}. \qquad (2.40)$$

Подставляя (2.40) в (2.36), будем иметь: $\left\|\gamma\left(\varphi(\hat\psi)-\hat\xi\right)\right\|\leq\varepsilon\alpha\left[\int\limits_{S_u^2}\mathbf{u}\left(\varphi(\hat\psi)\right)\cdot\mathbf{u}\left(\varphi(\hat\psi)\right)dS_u^2\right]=\varepsilon C$, где величина C не зависит от ε.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что при достаточно малой величине ε в области D решение вариационной задачи (2.34) сколь угодно близко к решению исходного вариационного уравнения (2.25) по норме пространства $\Psi(D)$ и может быть использовано в качестве приближенного решения.

2.8. Вариационное уравнение метода геометрического погружения в напряжениях

Теорема 2. Если числовой параметр ε удовлетворяет условию $0<\varepsilon\le 1$, то последовательность итераций $\left\{\xi^k\right\}$ вариационного уравнения

$$\forall\hat{\chi}\in\Psi_0(D_0)\quad \left\langle\hat{\chi},\hat{\xi}^k\right\rangle_0=(1-\varepsilon)\left\langle\hat{\chi},\hat{\xi}^{k-1}\right\rangle_\Delta+\left(\mathbf{t}(\hat{\chi}),\mathbf{U}\right),\tag{2.41}$$

$$k=1,2,\ldots;\quad \hat{\xi}^0=0$$

сходится по норме пространства $\Psi_0(D_0)$, т.е. $\left\|\hat{\xi}^m-\hat{\xi}^n\right\|_0\underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Доказательство. Представим $\hat{\xi}^m=\hat{\xi}^0+\sum_{k=1}^{m}\left(\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1}\right)$ и соответственно $\hat{\xi}^n=\hat{\xi}^0+\sum_{k=1}^{n}\left(\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1}\right)$. Пусть $m>n$, тогда

$$\hat{\xi}^m-\hat{\xi}^n=\sum_{k=n+1}^{m}\left(\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1}\right).\tag{2.42}$$

Переходя в (2.42) к неравенству, имеем

$$\left\|\hat{\xi}^m-\hat{\xi}^n\right\|_0\le\sum_{k=n+1}^{m}\left\|\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1}\right\|_0.\tag{2.43}$$

Из уравнения (2.43), почленно вычитая равенство $\left\langle\hat{\chi},\hat{\xi}^{k-1}\right\rangle_0=(1-\varepsilon)\left\langle\hat{\chi},\hat{\xi}^{k-2}\right\rangle_\Delta+\left(\mathbf{t}(\hat{\chi}),\mathbf{U}\right)$, получим

$$\left\langle\hat{\chi},\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1}\right\rangle_0=(1-\varepsilon)\left\langle\hat{\chi},\hat{\xi}^{k-1}-\hat{\xi}^{k-2}\right\rangle_\Delta.\tag{2.44}$$

При $k=1$ уравнение (2.44) имеет вид $\forall\hat{\chi}\in\Psi_0(D_0)$ $\left\langle\hat{\chi},\hat{\xi}^1\right\rangle_0=\left(\mathbf{t}(\hat{\chi}),\mathbf{U}\right)$. Из непрерывности линейного функционала $\left(\mathbf{t}(\hat{\chi}),\mathbf{U}\right)$ на пространстве $\Psi_0(D_0)$ имеем

$$\left\|\hat{\xi}^1\right\|_0\le B, \tag{2.45}$$

где величина B зависит от $\mathbf{t}$, $\mathbf{U}$, $\bar{D}$, $\bar{D}_0$.

Используя произвольность элемента $\forall\hat{\chi}\in\Psi_0(D_0)$ в равенстве (2.44) и принимая $\hat{\chi}=\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1}$, приходим к соотношению

$$\left\langle\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1},\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1}\right\rangle_0=(1-\varepsilon)\left\langle\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1},\hat{\xi}^{k-1}-\hat{\xi}^{k-2}\right\rangle_\Delta. \tag{2.46}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к правой части неравенства (2.46), будем иметь

$$\left\langle\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1},\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1}\right\rangle_0\le(1-\varepsilon)\cdot\left\langle\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1},\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1}\right\rangle_\Delta^{1/2}\cdot\left\langle\hat{\xi}^{k-1}-\hat{\xi}^{k-2},\hat{\xi}^{k-1}-\hat{\xi}^{k-2}\right\rangle_\Delta^{1/2}.$$

С учетом неравенств (2.24) и (2.45) можно показать справедливость оценки $\forall k\ge1$ $\left\|\hat{\xi}^k-\hat{\xi}^{k-1}\right\|_0\le B(1-\varepsilon)^{k-1}$, которая позволяет оценить левую часть неравенства (2.43)

$$\left\|\hat{\xi}^m-\hat{\xi}^n\right\|_0\le B\frac{(1-\varepsilon)^n}{\varepsilon},$$

откуда следует, что если $0<\varepsilon\le1$, то

$$\left\|\hat{\xi}^m-\hat{\xi}^n\right\|_0\underset{m,n\to\infty}{\to}0,$$

что и требовалось доказать. Уравнение (2.41) будем называть вариационным уравнением метода геометрического погружения. Из теоремы 2 следует, что итерационный процесс метода геометрического погружения сходится всегда независимо от степени отличия области D от D_0.

2.9. Выводы по главе

1. Предложено обобщение метода геометрического погружения на класс краевых задач теории упругости в напряжениях. Описана процедура сведения краевой задачи теории упругости в напряжениях, сформулированной в области произвольной конфигурации, к итерационной последовательности вариационных задач на канонической области.

2. Получен вид дифференциальной формулировки задачи на канонической области, соответствующей вариационному уравнению метода геометрического погружения, построенного в рамках принципа минимума дополнительной работы (принципа Кастильяно), установлены возможные типы граничных условий на новой части границы канонической области.

3. Приведен процесс построения итерационной процедуры МГП в напряжениях, сформулирована и доказана теорема о ее сходимости в терминах элементов введенных пространств тензоров напряжений.

Глава 3. Численная реализация метода геометрического погружения для плоских задач теории упругости в напряжениях

В главе рассматривается применение метода геометрического погружения в напряжениях для решения плоских задач теории упругости в декартовой системе координат. На примере решения модельной плоской задачи о растяжении пластины с абсолютно жестким круговым включением рассмотрены особенности построения дискретного аналога вариационного уравнения МГП методом Ритца и методом конечных элементов в напряжениях. Демонстрируется практическое применение метода геометрического погружения для решения задач с несжимаемыми упругими материалами. В качестве приложения разработанных алгоритмов приводятся результаты определения полей напряжений в конструкции плоского резинометаллического амортизатора.

3.1. Уравнения метода геометрического погружения для плоских задач теории упругости в напряжениях

Рассмотрим постановку плоской задачи теории упругости в области D в декартовой системе координат в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in D, \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} \Delta\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) = 0, \quad (x, y) \in D \\ \Delta \equiv \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \end{gathered}, \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y = T_x \\ \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_{yy} \cdot n_y = T_y \end{cases}, \quad (x, y) \in S_\sigma, \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} u_x = U_x \\ u_y = U_y \end{cases}, \quad (x, y) \in S_u. \tag{3.4}$$

Она включает в себя два уравнения равновесия (3.1), условие совместности в форме Бельтрами-Мичелла (3.2), статические граничные условия (3.3) и кинематические граничные условия (3.4). Как известно, приведенная постановка существенно упрощается, если ввести в рассмотрение функцию напряжений Эри [1], позволяющую автоматически удовлетворить уравнениям равновесия (3.1):

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \tag{3.5}$$

Тогда краевая задача теории упругости сведется к поиску бигармонической функции, удовлетворяющей статическим граничным условиям на границе S_σ:

$$\Delta\Delta(\phi) = 0 \quad (x, y) \in D, \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot n_x - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cdot n_y = T_x \\ -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cdot n_x + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot n_y = T_y \end{cases}, \quad (x, y) \in S_\sigma. \tag{3.7}$$

Согласно введенным упрощениям функционал дополнительной работы, который в плоском случае имеет вид:

$$\Pi_C(\hat{\sigma}) = \frac{1}{2E} \int_D \left[\sigma_{xx}{}^2 + \sigma_{yy}{}^2 - 2\nu(\sigma_{xx}\sigma_{yy}) + 2(1+\nu)\tau_{xy}{}^2 \right] dD - \int_{S_u} (t_x U_x + t_y U_y) dS_u$$

примет следующую форму:

$$\Pi_C(\phi) = \frac{1}{2E} \int_D \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 - 2\nu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + 2(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dD -$$

$$- \int_{S_u} (t_x U_x + t_y U_y) dS_u.$$

Поскольку метод геометрического погружения позволяет отыскать обобщенное решение краевой задачи теории упругости в напряжениях для тела занимающего область D с границей S в результате реализации итерационной последовательности вариационных задач вида (без учета массовых сил) (2.41), запишем как будет выглядеть вариационное уравнение МГП в плоском случае:

$$\int_{D_0}\Big[\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k+1)}+\delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k+1)}-\nu\Big(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k+1)}+\delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\Big)+$$

$$+\delta\tau_{xy}{}^{(k+1)}\tau_{xy}{}^{(k+1)}2(1+\nu)\Big]dxdy=\int_{D_\Delta}\Big[\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k)}+\delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k)}-$$

$$-\nu\Big(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k)}+\delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k)}\Big)+\delta\tau_{xy}{}^{(k+1)}\tau_{xy}{}^{(k)}2(1+\nu)\Big]dxdy+,$$

$$+\int_{S_u}\big(t_xU_x+t_yU_y\big)dS_u \tag{3.8}$$

$$\sigma_{ij}^{(0)}\equiv 0,\quad k=1,2,3...$$

или с использованием функции напряжения Эри:

$$\int_{D_0}\left[\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}^{(k+1)}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}^{(k+1)}+\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}^{(k+1)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}^{(k+1)}-\nu\left(\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}^{(k+1)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}^{(k+1)}+\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}^{(k+1)}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}^{(k+1)}\right)+\right.$$

$$\left.+\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}^{(k+1)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}^{(k+1)}2(1+\nu)\right]dxdy=\int_{D_\Delta}\left[\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}^{(k+1)}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}^{(k)}+\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}^{(k+1)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}^{(k)}-\right.$$

$$\left.-\nu\left(\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}^{(k+1)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}^{(k)}+\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}^{(k+1)}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}^{(k)}\right)+\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}^{(k+1)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}^{(k)}2(1+\nu)\right]dxdy+$$

$$+\int_{S_u}\big(t_xU_x+t_yU_y\big)dS_u \tag{3.9}$$

$$\phi^{(0)}\equiv 0,\quad k=1,2,3...$$

Погружение области D будем осуществлять в каноническую область D_0, причем $D\in D_0$, $D_\Delta=D_0\setminus D$ (рис. 2.1). В разделе 2 доказано, что процедура (3.8) сходится к решению исходной краевой задачи по норме энергетического пространства независимо от степени отличия реальной области от канонической.

3.2. Иллюстративный пример. Дискретизация вариационного уравнения МГП методом Ритца

Одним из прямых методов решения вариационных задач является метод Ритца [3]. Поскольку мы рассматриваем задачу теории упругости, сформулированную в напряжениях, то в таком случае идея метода Ритца будет заключаться в поиске экстремального значения функционала дополнительной работы на семействе статически допустимых функций, линейно зависящих от нескольких параметров. При этом удобно использовать функцию напряжений Эри, позволяющую заведомо удовлетворить уравнениям равновесия в плоском случае.

В качестве наглядного примера рассмотрим задачу о растяжении вдоль оси Оx прямоугольной пластины с круговым абсолютно жестким включением радиуса R под действием параболически распределенной нагрузки *P(y)* (рис. 3.1).

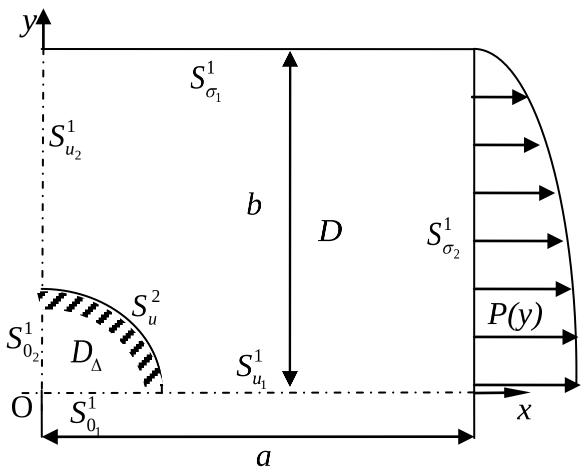


Рис. 3.1. Расчетная схема

С учетом симметрии задачи, необходимо выполнить следующие статические граничные условия:

$$\tau_{xy}\left(0,y\right)=0, \quad y\in S^1_{u_2}, \quad \tau_{xy}\left(x,0\right)=0, \quad x\in S^1_{u_1},$$

$$\sigma_{xx}(a,y)=P(y)=P_0\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right),\quad \tau_{xy}(a,y)=0,\quad y\in S^1_{\sigma_2},$$

$$\sigma_{yy}(x,b)=\tau_{xy}(x,b)=0,\quad x\in S^1_{\sigma_1},$$

и кинематические граничные условия:

$$u_x(0,y)=0\quad y\in S^1_{u_2},$$

$$u_y(x,0)=0\quad x\in S^1_{u_1},$$

$$u_x(x,y)=u_y(x,y)=0\quad (x,y)\in S^2_u.$$

Согласно процедуре погружения, введем в рассмотрение каноническую область D_0, представляющую собой прямоугольник размером $a\times b$, полностью охватывающий реальную область пластины D (рис. 3.2).

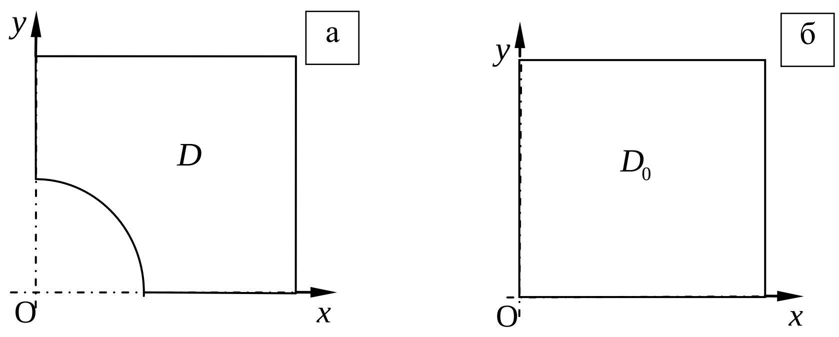


Рис. 3.2. Исходная область D и каноническая область D_0

В соответствии с теоретическими положениями МГП в напряжениях на возникших после погружения области D в область D_0 новых границах $S^1_{0_2}$ и $S^1_{0_1}$ необходимо задать граничные условия, которые могут быть сформулированы в кинематической, статической или смешанной форме (2.33). В данном случае на $S^1_{0_1}$ и $S^1_{0_2}$ будет удобно задать условия симметрии, такие же, что сформулированы на $S^1_{u_1}$ и $S^1_{u_2}$:

$$u_x(0,y)=0,\quad \tau_{xy}(0,y)=0,\quad y\in S^1_{0_2},$$

$$u_y(x,0)=0,\quad \tau_{xy}(x,0)=0,\quad x\in S^1_{0_1}.$$

Для последующей численной реализации размеры пластинки были приняты равными $a = 4м$, $b = 4м$, радиус выреза $R = 2м$, параметры материала: $E = 2\,E11$ Па – модуль Юнга, $\nu = 0,33$ – коэффициент Пуассона, $P_0 = 100$ Па.

Согласно расчетной схеме и введенной в рассмотрение канонической области, запишем функционал дополнительной работы с использованием функции напряжений Эри:

$$\Pi_C(\phi) = \frac{1}{2E}\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)^2 - 2\nu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) + 2(1+\nu)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy -$$

$$-\frac{1}{2E}\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)^2 - 2\nu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) + 2(1+\nu)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy \qquad (3.10)$$

В (3.10) отсутствует интеграл по границе S_u, выражающий работу поверхностных сил на заданных перемещениях, поскольку на границах S_u^2, $S_{u_1}^1$, $S_{u_2}^1$ назначены нулевые кинематические граничные условия.

Требование стационарности функционала $\delta\Pi_C(\phi) = 0$ ведет к получению вариационного уравнения МГП, сформулированного на канонической области. Для последующей его дискретизации с помощью метода Ритца, представим функцию напряжений в виде следующего ряда:

$$\varphi = \varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + ... + a_n\varphi_n, \qquad (3.11)$$

где $a_1, a_2, ..., a_n$ - постоянные, подлежащие определению, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ - набор базисных функций, удовлетворяющих однородным статическим граничным условиям, φ_0 - функция, отвечающая за выполнение ненулевых граничных условий задачи, сформулированных на границах S_σ.

Подставим в (3.10) выражение для функции напряжений Эри (3.11):

$$\Pi_C(\phi) = \frac{1}{2E}\int_0^a\int_0^b\left[\left(\varphi_{0,xx} + \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_{i,xx}\right)^2 + \left(\varphi_{0,yy} + \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_{i,yy}\right)^2 -\right.$$

$$-2\nu\left(\varphi_{0,xx}+\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_{i,xx}\right)\left(\varphi_{0,yy}+\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_{i,yy}\right)+2(1+\nu)\left(\varphi_{0,xy}+\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_{i,xy}\right)^2\Bigg]dxdy-$$

$$-\frac{1}{2E}\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\left[\left(\varphi_{0,xx}+\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_{i,xx}\right)^2+\left(\varphi_{0,yy}+\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_{i,yy}\right)^2-\right.$$

$$\left.-2\nu\left(\varphi_{0,xx}+\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_{i,xx}\right)\left(\varphi_{0,yy}+\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_{i,yy}\right)+2(1+\nu)\left(\varphi_{0,xy}+\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_{i,xy}\right)^2\right]dxdy\,,\quad(3.12)$$

$$i=1...n;$$

где через $\varphi_{i,xx},\varphi_{i,yy},\varphi_{i,xy}$ обозначим вторые производные функции напряжений по соответствующим координатам.

Требование стационарности (3.12) приведет к следующему набору условий:

$$\frac{\partial\Pi_C(\phi)}{\partial a_i}=\frac{1}{E}\int_0^a\int_0^b\left[\varphi_{i,xx}\left(\varphi_{0,xx}+\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_{m,xx}\right)+\varphi_{i,yy}\left(\varphi_{0,yy}+\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_{m,yy}\right)-\right.$$

$$-\nu\varphi_{i,xx}\left(\varphi_{0,yy}+\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_{m,yy}\right)-\nu\varphi_{i,yy}\left(\varphi_{0,xx}+\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_{m,xx}\right)+$$

$$\left.+2(1+\nu)\varphi_{i,xy}\left(\varphi_{0,xy}+\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_{m,xy}\right)\right]dxdy-$$

$$-\frac{1}{E}\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\left[\varphi_{i,xx}\left(\varphi_{0,xx}+\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_{m,xx}\right)+\varphi_{i,yy}\left(\varphi_{0,yy}+\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_{m,yy}\right)-\right.$$

$$-\nu\varphi_{i,xx}\left(\varphi_{0,yy}+\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_{m,yy}\right)-\nu\varphi_{i,yy}\left(\varphi_{0,xx}+\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_{m,xx}\right)+$$

$$\left.+2(1+\nu)\varphi_{i,xy}\left(\varphi_{0,xy}+\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_{m,xy}\right)\right]dxdy=0$$

$$i=1...n;$$

$$\frac{1}{E}\int_0^a\int_0^b\left[\sum_{m=1}^{n}\left(a_m\left(\varphi_{i,xx}\varphi_{m,xx}+\varphi_{i,yy}\varphi_{m,yy}-\nu\varphi_{i,xx}\varphi_{m,yy}-\nu\varphi_{i,yy}\varphi_{m,xx}+2(1+\nu)\varphi_{i,xy}\varphi_{m,xy}\right)\right)\right]dxdy=$$

$$=\frac{1}{E}\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\left[\sum_{m=1}^{n}\left(a_m\left(\varphi_{i,xx}\varphi_{m,xx}+\varphi_{i,yy}\varphi_{m,yy}-\nu\varphi_{i,xx}\varphi_{m,yy}-\nu\varphi_{i,yy}\varphi_{m,xx}+2(1+\nu)\varphi_{i,xy}\varphi_{m,xy}\right)\right)\right]dxdy-$$

$$-\frac{1}{E}\int_0^a\int_0^b\left[\varphi_{i,xx}\varphi_{0,xx}+\varphi_{i,yy}\varphi_{0,yy}-\nu\varphi_{i,xx}\varphi_{0,yy}-\nu\varphi_{i,yy}\varphi_{0,xx}+2(1+\nu)\varphi_{i,xy}\varphi_{0,xy}\right]dxdy+ \qquad (3.13)$$

$$+\frac{1}{E}\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\left[\varphi_{i,xx}\varphi_{0,xx}+\varphi_{i,yy}\varphi_{0,yy}-\nu\varphi_{i,xx}\varphi_{0,yy}-\nu\varphi_{i,yy}\varphi_{0,xx}+2(1+\nu)\varphi_{i,xy}\varphi_{0,xy}\right]dxdy,$$

$$i=1...n.$$

Выражение (3.13) представим в следующем матричном виде:

$$[P]_0\{a\}=[P]_\Delta\{a\}-\{F^p\}_0+\{F^p\}_\Delta, \qquad (3.14)$$

где $[P]_0$ - матрица с элементами

$$P_{ij_0}=\frac{1}{E}\int_0^a\int_0^b\left(\varphi_{i,xx}\varphi_{m,xx}+\varphi_{i,yy}\varphi_{m,yy}-\nu\varphi_{i,xx}\varphi_{m,yy}-\nu\varphi_{i,yy}\varphi_{m,xx}+2(1+\nu)\varphi_{i,xy}\varphi_{m,xy}\right)dxdy,$$

$[P]_\Delta$ - матрица с элементами

$$P_{ij_\Delta}=\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\left(\varphi_{i,xx}\varphi_{m,xx}+\varphi_{i,yy}\varphi_{m,yy}-\nu\varphi_{i,xx}\varphi_{m,yy}-\nu\varphi_{i,yy}\varphi_{m,xx}+2(1+\nu)\varphi_{i,xy}\varphi_{m,xy}\right)dxdy,$$

$\{F^p\}_0$ - вектор с элементами

$$F_{i\ 0}^{p}=-\frac{1}{E}\int_0^a\int_0^b\left(\varphi_{i,xx}\varphi_{0,xx}+\varphi_{i,yy}\varphi_{0,yy}-\nu\varphi_{i,xx}\varphi_{0,yy}-\nu\varphi_{i,yy}\varphi_{0,xx}+2(1+\nu)\varphi_{i,xy}\varphi_{0,xy}\right)dxdy,$$

$\{F^p\}_\Delta$ - вектор с элементами

$$F_{i\ \Delta}^{p}=\frac{1}{E}\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\left(\varphi_{i,xx}\varphi_{0,xx}+\varphi_{i,yy}\varphi_{0,yy}-\nu\varphi_{i,xx}\varphi_{0,yy}-\nu\varphi_{i,yy}\varphi_{0,xx}+2(1+\nu)\varphi_{i,xy}\varphi_{0,xy}\right)dxdy,$$

$\{a\}$ - вектор неизвестных.

Решать (3.14) будем, используя следующую итерационную процедуру:

$$\begin{cases} [P]_0 \{a\}^{(k+1)} = [P]_\Delta \{a\}^{(k)} - \{F^p\}_0 + \{F^p\}_\Delta \\ \{a\}^{(0)} \equiv 0 \end{cases}, \qquad (3.15)$$

$$k = 1, 2, 3...$$

условие остановки которой выбрано в виде:

$$\frac{\left\| \left\{a^{(k+1)}\right\} - \left\{a^{(k)}\right\} \right\|}{\left\| \left\{a^{(k)}\right\} \right\|} \le \beta,$$

где в качестве нормы вектора $\{a\}$ выбрана норма Чебышева, β - задаваемое вычислителем малое положительное число.

Таким образом (3.15) – дискретный аналог вариационного уравнения метода геометрического погружения в напряжениях на основе метода Ритца для поставленной плоской задачи теории упругости.

Для решения задачи, сформулированной на канонической области (прямоугольная пластинка без включения под действием параболически распределенного растягивающего усилия), предложено приближенное решение [1], согласно которому функцию напряжений можно взять в следующем виде:

$$\varphi = \frac{1}{2} P y^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2}\right) + \left(x^2 - a^2\right)^2 \left(y^2 - b^2\right)^2 \left(a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + ...\right), \quad * \qquad (3.16)$$

где $\varphi_0 = \frac{1}{2} P y^2 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2}\right)$, $\varphi_1 = \left(x^2 - a^2\right)^2 \left(y^2 - b^2\right)^2$, $\varphi_2 = \left(x^2 - a^2\right)^2 \left(y^2 - b^2\right)^2 x^2$, $\varphi_3 = \left(x^2 - a^2\right)^2 \left(y^2 - b^2\right)^2 y^2$ и т.д.

В этом ряду сохраняются лишь четные степени x и y, поскольку распределение напряжений симметрично относительно осей *Ox* и *Oy*.

Для сравнения численных результатов использовано решение задачи методом конечных элементов в перемещениях, результаты приведены для сетки элементов, содержащей 1800 узловых неизвестных. Решение с помощью МГП в напряжениях на основе метода Ритца построено на основе итерационной процедуры (3.15), при этом удержано 6 базисных функций, удовлетворяющих условиям статической допустимости в канонической области.

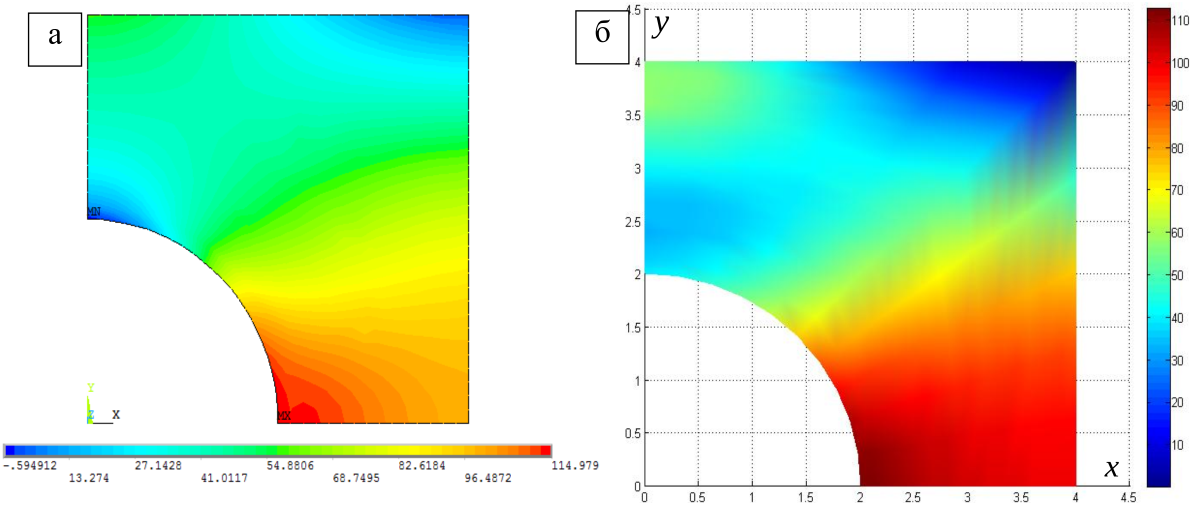


Рис 3.3. Распределение напряжений σ_{xx}, *Па*

а) МКЭ в перемещениях, б) МГП в напряжениях

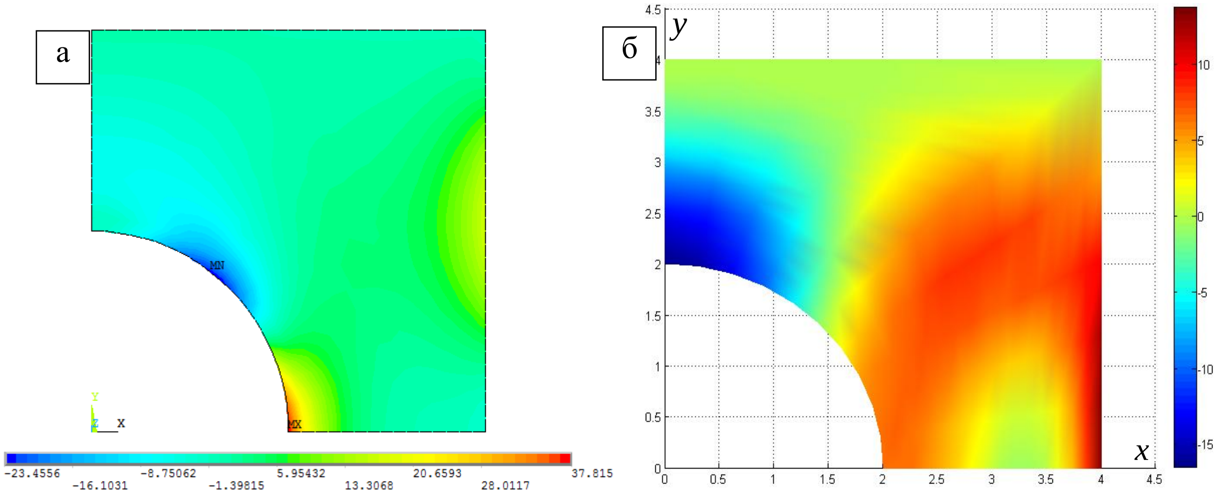


Рис 3.4. Распределение напряжений σ_{yy}, *Па*

а) МКЭ в перемещениях, б) МГП в напряжениях

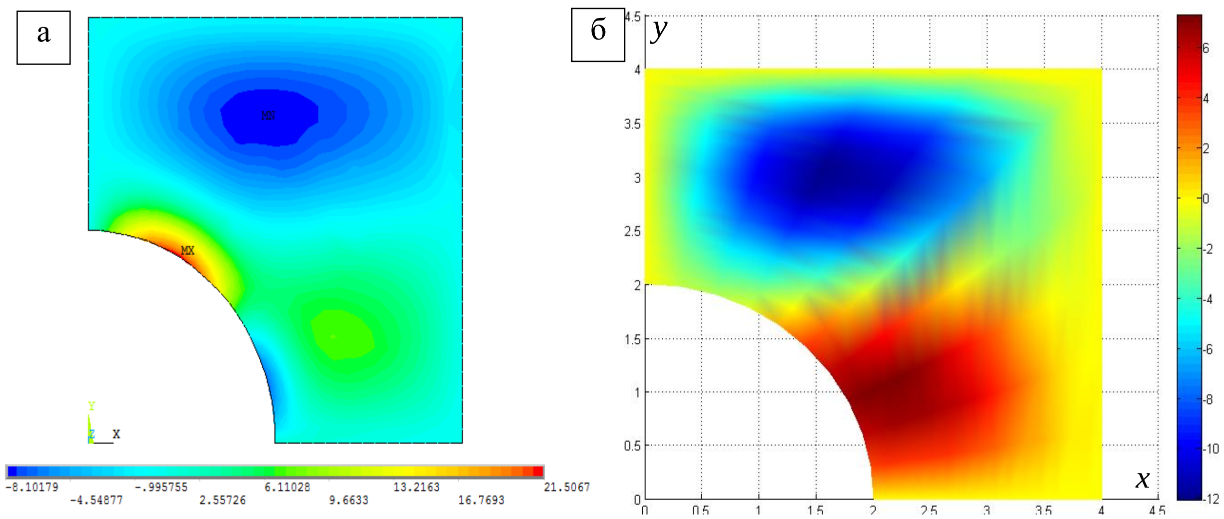


Рис 3.5. Распределение напряжений τ_{xy}, *Па*

а) МКЭ в перемещениях, б) МГП в напряжениях

Из рис. 3.3-3.5 видно, что достаточно хорошее качественное и количественное сходство результатов наблюдается у компоненты σ_{xx}, о чем нельзя сказать при рассмотрении компонент σ_{yy} и τ_{xy}. Кроме того, при удержании большего числа членов ряда, а так же при уменьшении параметра β итерационной процедуры существенного улучшения результатов не наблюдается. Поскольку решение задачи методом Ритца очень сильно зависит от удачного выбора базисных функций, то для сравнения функция напряжений была выбрана также в виде следующего тригонометрического ряда:

$$\varphi = \frac{1}{2}Py^2\left(1-\frac{1}{6}\frac{y^2}{b^2}\right)+\left(x^2-a^2\right)^2\left(y^2-b^2\right)^2\left(a_1+a_2\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)+\right.$$

$$\left.+a_3\cos\left(\frac{2\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)+\ldots\right), \qquad ** \qquad (3.17)$$

в котором $\varphi_0 = \frac{1}{2}Py^2\left(1-\frac{1}{6}\frac{y^2}{b^2}\right)$, $\varphi_1 = \left(x^2-a^2\right)^2\left(y^2-b^2\right)^2$,

$\varphi_2 = \left(x^2-a^2\right)^2\left(y^2-b^2\right)^2\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$,

$$\varphi_3 = \left(x^2 - a^2\right)^2 \left(y^2 - b^2\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \text{ и т.д.}$$

В ходе решения были получены следующие коэффициенты разложения функции напряжения (таблица 3.1), остановка итерационной процедуры при $\beta = 0.0001$:

Таблица 3.1. Коэффициенты разложения функции напряжения

Коэффициенты разложения	Ряд **	Ряд *
a_1	0.00171868	0.000339668
a_2	-0.0022017	-5.31E-05
a_3	-0.0002149	0.000211314
a_4	0.00145442	2.27E-06
a_5	-0.0001617	1.35E-08
a_6	-0.0003877	-8.15E-06
a_7	4.31E-05	-

Для более точного количественного сравнения результатов, рассмотрим распределение напряжений по разным сечениям пластины рис. 3.7-3.10, схема сечений представлена на рис. 3.6.

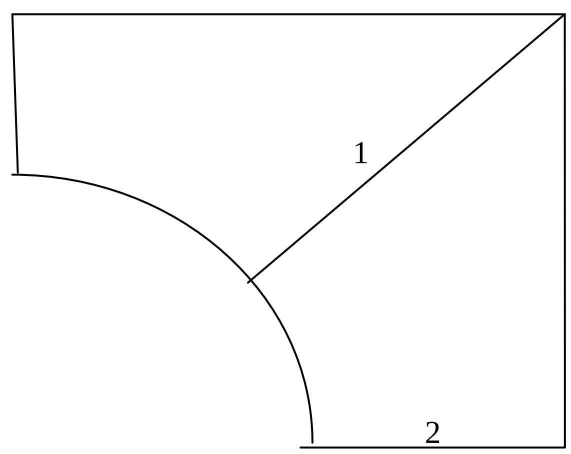


Рис. 3.6. Схема сечений

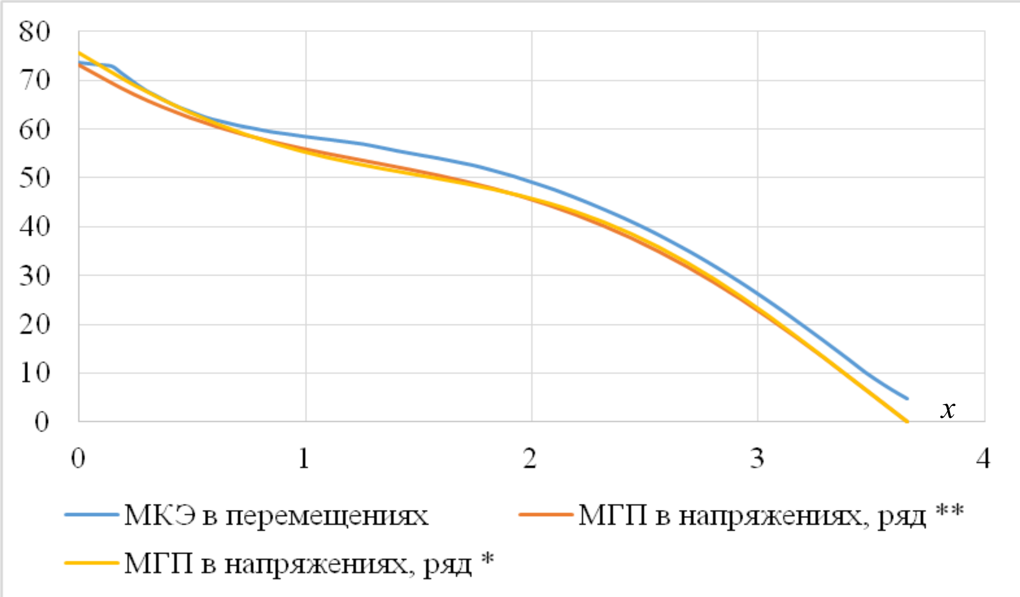


Рис. 3.7. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{xx}, $Па$ в сечении 1.

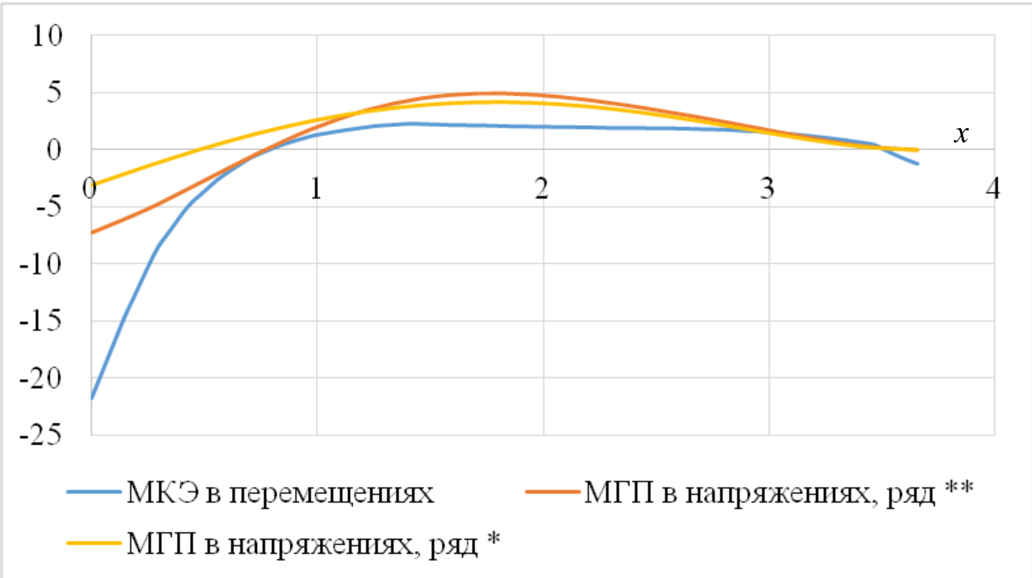


Рис. 3.8 Распределение компоненты тензора напряжений σ_{yy}, $Па$ в сечении 1.

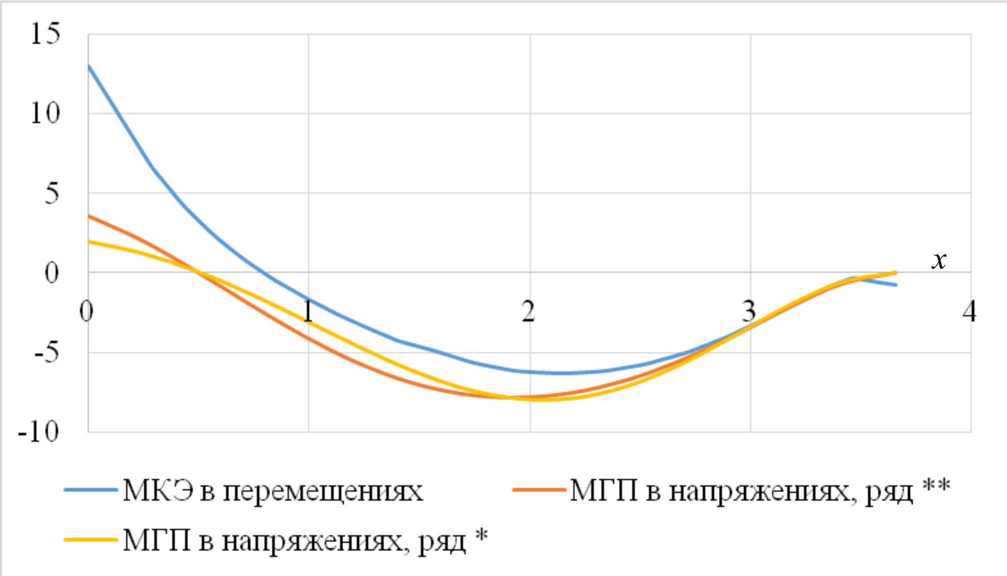


Рис. 3.9. Распределение компоненты тензора напряжений τ_{xy}, *Па* в сечении 1.

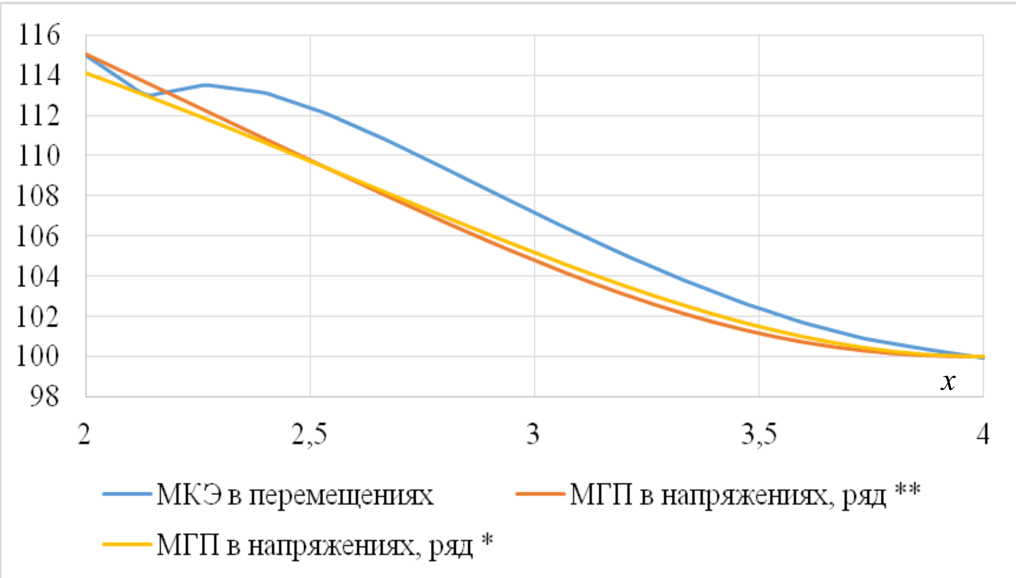


Рис. 3.10. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{xx}, *Па* в сечении 2.

По полученным графикам можно сделать вывод, что из двух вариантов представления функции напряжений Эри более подходящим оказался тригонометрический ряд **, так как в большинстве случаев значения основных для данной задачи компонент тензора напряжений, полученные МГП на основе метода Ритца, достаточно близки к результатам метода конечных элементов в перемещениях. Следует отметить, что сравниваются численные результаты для дискретных аналогов, содержащих существенно разное число степеней свободы: МГП - 7, МКЭ в перемещениях - 1800.

Варьируя количество удерживаемых членов этого ряда, покажем сходимость дополнительной работы $\Pi_C(\phi)$ (таблица 3.2).

Таблица 3.2. Изменение дополнительной работы деформирования при увеличении количества членов ряда **.

Количество удерживаемых членов ряда	$\Pi_C(\phi)$
2	2.960886E-09
4	4.099622E-09
7	4.000430E-09
13	4.000396E-09

Видно, что сходимость в смысле энергии имеет место, с увеличением количества членов ряда больше 6 значение дополнительной работы изменяется достаточно мало.

3.3. Построение дискретного аналога вариационного уравнения МГП методом конечных элементов в напряжениях.

Для решения вариационного уравнения (3.8) в двумерной канонической области D_0 построим его дискретный аналог, используя метод конечных элементов в напряжениях для плоских задач теории упругости в декартовой системе координат. Указанный подход на основе вариационного принципа минимума дополнительной работы является хорошо известным, однако его практическое использование остается достаточно ограниченным, прежде всего из-за проблем с построением базисных функций, которые в данной формулировке должны быть статически допустимыми. Особенно затруднителен выбор функций формы для изопараметрических элементов в напряжениях (элементов с криволинейными границами), поэтому в литературе в основном предложены элементы прямоугольной формы для плоских задач [32, 118] и их возможные пространственные обобщения, пригодные для решения задач теории упругости в канонических по форме областях, что как раз и необходимо для процедуры погружения. Так, например, в плоском случае, прямоугольные элементы в напряжениях удобно строить с использованием функции напряжений Эри, на основе аппроксимации которой удается выбрать полиномиальные аппроксимации компонент тензора напряжений, удовлетворяющие в элементе уравнениям равновесия; выполнение статических граничных условий обеспечивается наложением на систему дополнительных условий с помощью множителей Лагранжа. Граничные условия в перемещениях для данной вариационной формулировки являются естественными.

В качестве конечного элемента выберем прямоугольный элемент с узлами в углах (рис. 3.11).

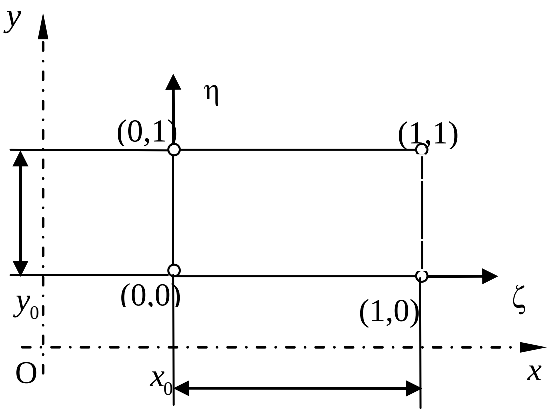


Рис. 3.11. Прямоугольный конечный элемент в локальной системе координат

Связь глобальных и локальных координат конечного элемента имеет вид: $x = x_0 + a\zeta$, $y = y_0 + b\eta$.

Решение уравнения (3.8) следует искать среди статически допустимых полей напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия и статическим граничным условиям, поэтому используя функцию напряжения Эри, в качестве узловых неизвестных примем значения функции напряжений, ее первых производных по пространственных переменным, а также смешанной производной $\{\Phi_i\}^T = \left\{\varphi_i, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_i, \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)_i\right\}$. Таким образом, внутри каждого конечного элемента введена эрмитова аппроксимация функции напряжения Эри, которая в локальной системе координат имеет вид:

$$\varphi(\zeta,\eta) = \left\{N^e(\zeta,\eta)\right\}^{\mathrm{T}}\left\{\Phi^e\right\},$$

где$\left\{N^e(\zeta,\eta)\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{\left\{N_i^e\right\}^{\mathrm{T}}, \left\{N_j^e\right\}^{\mathrm{T}}, \left\{N_k^e\right\}^{\mathrm{T}}, \left\{N_l^e\right\}^{\mathrm{T}}\right\}$,

$\left\{N_i^e\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{\bar{N}_{1i}(\zeta,\eta), \bar{N}_{2i}(\zeta,\eta), \bar{N}_{3i}(\zeta,\eta), \bar{N}_{4i}(\zeta,\eta)\right\}$ – столбец функций форм элемента, $\left\{\Phi^e\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{\{\Phi_i\}, \{\Phi_j\}, \{\Phi_k\}, \{\Phi_l\}\right\}$ столбец узловых неизвестных элемента,

$$\begin{aligned} &\bar{N}_{1q} = N_{0q}(\zeta)N_{0q}(\eta), \quad \bar{N}_{2q} = N_{0q}(\zeta)N_{1q}(\eta), \\ &\bar{N}_{3q} = N_{1q}(\zeta)N_{0q}(\eta), \quad \bar{N}_{4q} = N_{1q}(\zeta)N_{1q}(\eta), \\ &q = i, j, k, l. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Конечный элемент данного типа хорошо известен в задачах изгиба прямоугольных пластин (для аппроксимации функции прогиба), функции формы в (3.17) определяются как [118]:

$$N_{0i}(\zeta) = N_{0l}(\zeta) = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3, \;\; N_{0i}(\eta) = N_{0l}(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3,$$

$$N_{1i}(\zeta) = N_{1l}(\zeta) = a\left(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3\right), \;\; N_{1i}(\eta) = N_{1j}(\eta) = b\left(\eta - 2\eta^2 + \eta^3\right),$$

$$N_{0l}(\zeta) = N_{0k}(\zeta) = 3\zeta^2 - 2\zeta^3, \;\; N_{0l}(\eta) = N_{0k}(\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3,$$

$$N_{1j}(\zeta) = N_{1k}(\zeta) = -a\left(\zeta^2 - \zeta^3\right), \;\; N_{1l}(\eta) = N_{1k}(\eta) = -b\left(\eta^2 - \eta^3\right).$$

Аппроксимирующая функция в данном случае представляет собой неполный полином шестого порядка по ζ и η (опущены слагаемые, содержащие степени выше третьих по любой переменной):

$$\phi(\xi,\eta) = \alpha_1 + \alpha_2\zeta + \alpha_3\eta + \alpha_4\zeta^2 + \alpha_5\eta^2 + \alpha_6\zeta\eta + \alpha_7\zeta^2\eta + \alpha_8\zeta\eta^2 + \alpha_9\zeta^3 +$$

$$+\alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\zeta\eta^3 + \alpha_{12}\zeta^3\eta + \alpha_{13}\zeta^2\eta^2 + \alpha_{14}\zeta^3\eta^2 + \alpha_{15}\zeta^2\eta^3 + \alpha_{16}\zeta^3\eta^3$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{16}$ – коэффициенты аппроксимации. При таком способе аппроксимации функция Эри и ее первые производные непрерывны вдоль общих сторон смежных конечных элементов.

Используя (3.5), определим в матричном виде связь компонент тензора напряжений с узловыми неизвестными элемента:

$$\{\sigma\} = \left[L^e\right]\left\{\Phi^e\right\},$$

где $\{\sigma\} = \left\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\right\}^{\mathrm{T}}$ – вектор напряжений в элементе,

$$\left[L^e\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{N^e\right\}^{\mathrm{T}} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{N^e\right\}^{\mathrm{T}} \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left\{N^e\right\}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{b^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left\{N^e\right\}^{\mathrm{T}} \\ \dfrac{4}{a^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left\{N^e\right\}^{\mathrm{T}} \\ -\dfrac{4}{ab}\dfrac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta}\left\{N^e\right\}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$ – матрица градиентов конечного элемента для функции напряжений в случае плоской задачи.

Физические соотношения [33] в матричной форме примут вид:

$$\{\varepsilon\} = \left[D^{-1}\right]\{\sigma\} = \left[D^{-1}\right]\left[L^e\right]\left\{\Phi^e\right\},$$

где $\{\varepsilon\} = \left\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\right\}^{\mathrm{T}}$ – вектор деформаций в элементе, $\left[D^{-1}\right]$ – матрица констант упругой податливости, которая в случае плоско-напряженного состояния определяется как

$$\left[D^{-1}\right] = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix},$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Выполним дискретизацию канонической области, используя введенные прямоугольные конечные элементы (Рис. 3.12).

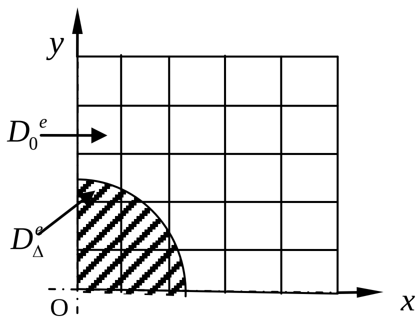


Рис. 3.12. Конечно-элементная сетка

Рассмотрим выражения вариаций дополнительной работы упругого тела в областях D_0 и D_Δ в соотношении (3.8), используя введенные выше обозначения:

$$\int\limits_{D_0} \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\left(\hat{\sigma}\right)dD_0 = \sum_e \int\limits_{D_0^e} \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\left(\hat{\sigma}\right)dD_0^e =$$

$$= \sum_e \delta\left\{\Phi^e\right\}^{\mathrm{T}} \int\limits_{D_0^e} \left[L^e\right]^{\mathrm{T}} \left[D^{-1}\right]\left[L^e\right]dD_0^e \left\{\Phi^e\right\} = \sum_e \delta\left\{\Phi^e\right\}^{\mathrm{T}} \left[p^e\right]_0 \left\{\Phi^e\right\}, \qquad (3.19)$$

$$\int\limits_{D_\Delta} \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\left(\hat{\sigma}\right)dD_\Delta = \sum_e \int\limits_{D_\Delta^e} \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\left(\hat{\sigma}\right)dD_\Delta^e =$$

$$= \sum_e \delta\left\{\Phi^e\right\}^{\mathrm{T}} \int\limits_{D_\Delta^e} \left[L^e\right]^{\mathrm{T}} \left[D^{-1}\right]\left[L^e\right]dD_\Delta^e \left\{\Phi^e\right\} = \sum_e \delta\left\{\Phi^e\right\}^{\mathrm{T}} \left[p^e\right]_\Delta \left\{\Phi^e\right\}, \qquad (3.20)$$

где $\left[p^e\right]_0 = \int\limits_{D_0^e} \left[L^e\right]^{\mathrm{T}} \left[D^{-1}\right]\left[L^e\right]dD_0^e$ – матрица податливости конечного элемента, целиком принадлежащего канонической области, $\left[p^e\right]_\Delta = \int\limits_{D_\Delta^e} \left[L^e\right]^{\mathrm{T}} \left[D^{-1}\right]\left[L^e\right]dD_\Delta^e$ – матрица податливости элемента, полностью или частично принадлежащего области дополнения, вычисленная по области дополнения D_Δ^e.

Вычисление интегралов типа (3.19) является достаточно простой процедурой, так как области D_0^e представляют собой прямоугольники. Элементы и подобласти элементов, определяющие в совокупности область дополнения D_Δ, имеют различную форму. Как видно (Рис. 3.12), среди элементов есть такие, которые принадлежат одновременно исходной области D и области дополнения D_Δ и содержат внутри себя в общем случае участок S_u^e криволинейной границы

S_u. Это необходимо учитывать при вычислении интегралов типа (3.20). Учитывая, что в общем случае граница имеет произвольную форму, имеется множество возможных вариантов ее прохождения по конечному элементу, представляется удобным использование вычисления таких интегралов методом ячеек [28], заключающемся в разбиении области интегрирования на более мелкие подобласти. Криволинейная граница сводится к прямолинейной внутри каждой ячейки, образуя при этом подобласти простой формы: треугольники, трапеции – что упрощает численное вычисление интеграла (рис. 3.13).

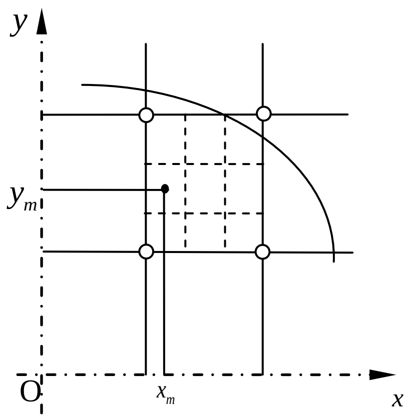


Рис. 3.13. Разбиение элемента области дополнения

Простейшая формула вычисления матрицы податливости элемента, принадлежащего области дополнения, по методу ячеек примет вид:

$$\left[p^e\right]_\Delta = \int\limits_{D^e_\Delta} \left[L^e\right]^{\mathrm{T}} \left[D^{-1}\right]\left[L^e\right] dD^e_\Delta = \sum_{m=1}^{M^e}\left(A_m \cdot \left[L^e\left(x_m, y_m\right)\right]^{\mathrm{T}} \left[D^{-1}\right]\left[L^e\left(x_m, y_m\right)\right]\right),$$

где A_m – площадь ячейки, $\left(x_m, y_m\right)$ – координаты центра ячейки, M^e– общее число ячеек в элементе.

Работу возможных усилий на заданных перемещениях на границе S_u определим как:

$$\int\limits_{S_u} t_i\left(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}\right) U_i dS_u = \int\limits_{S_u} \delta\sigma_{ij} n_j U_i dS_u =$$

$$=\sum_e \delta\left\{\Phi^e\right\}^{\mathrm{T}} \int_{S_u^e} \left[L^e\right]^{\mathrm{T}} \left[n\right]^{\mathrm{T}} \left\{U\right\} dS_u^e = \sum_e \delta\left\{\Phi^e\right\}^{\mathrm{T}} \left\{f_u^e\right\}, \tag{3.21}$$

где $\left\{f_u^e\right\} = \int_{S_u^e} \left[L^e\right]^{\mathrm{T}} \left[n\right]^{\mathrm{T}} \left[U\right] dS_u^e$ – вектор-столбец обобщенных узловых перемещений;

$\left\{U\right\} = \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix}$ – вектор заданных перемещений,

$\left\{t\right\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}$ – вектор усилий на границе S_u,

$\left\{t\right\} = \left[n\right]\left\{\sigma\right\} = \left[n\right]\left[L^e\right]\left\{\Phi^e\right\}$,

$\left[n\right] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$,

n_x, n_y – направляющие косинусы вектора внешней единичной нормали к границе S_u^e.

Подстановка (3.19-3.21) в (3.8) приводит к следующему выражению вариации дополнительной работы упругого тела:

$$\sum_e \delta\left(\left\{\Phi^e\right\}^{\mathrm{T}}\right)^{(k+1)} \left[p^e\right]_0 \left\{\Phi^e\right\}^{(k+1)} = \sum_e \delta\left(\left\{\Phi^e\right\}^{\mathrm{T}}\right)^{(k+1)} \left[p^e\right]_\Delta \left\{\Phi^e\right\}^{(k)} +$$

$$+\sum_e \delta\left(\left\{\Phi^e\right\}^{\mathrm{T}}\right)^{(k+1)} \left\{f_u^e\right\} \tag{3.22}$$

Введя обозначения

$$\left[P\right]_0 = \sum_e \left[p^e\right]_0,\ \left[P\right]_\Delta = \sum_e \left[p^e\right]_\Delta,\ \left\{F_u\right\} = \sum_e \left\{f_u^e\right\},\ \left\{\Phi\right\},$$

соответственно для глобальных матриц податливости канонической области и области дополнения, глобального вектора обобщенных перемещений и вектора узловых неизвестных соответственно, получим:

$$\delta\left(\left\{\Phi\right\}^{\mathrm{T}}\right)^{(k+1)} \left[P\right]_0 \left\{\Phi\right\}^{(k+1)} = \delta\left(\left\{\Phi\right\}^{\mathrm{T}}\right)^{(k+1)} \left[P\right]_\Delta \left\{\Phi\right\}^{(k)} + \delta\left(\left\{\Phi\right\}^{\mathrm{T}}\right)^{(k+1)} \left\{F_u\right\}. \tag{3.23}$$

В силу произвольности вариаций узловых неизвестных, выражение (3.23) дает последовательность независимых по левой части систем линейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных $\{\Phi\}$. Дискретный аналог итерационной процедуры (3.8) запишется так:

$$\begin{aligned} &[P]_0\{\Phi\}^{(k+1)} = [P]_\Delta\{\Phi\}^{(k)} + \{F_u\}, \\ &\{\Phi\}^{(k)} \equiv 0, \quad k = 1,2,3... \end{aligned} \tag{3.24}$$

Поскольку в вариационной формулировке принципа минимума дополнительной работы рассматриваются статически допустимые поля напряжений, что предполагает в том числе и выполнение статических граничных условий, необходимо предусмотреть, чтобы узловые неизвестные, входящие в столбец $\{\Phi\}$ обеспечивали выполнение уравнений $\sigma_{ij}n_j = T_i$ на S_σ. Это приводит к появлению дополнительных условий, накладываемых на узловые неизвестные, для учета которых наиболее удобным и распространенным является метод множителей Лагранжа [31-32].

Методику формулировки дополнительных ограничений продемонстрируем на следующем примере: пусть на стороне конечного элемента, параллельной оси Ox, действуют поверхностные силы T_y, как изображено это на рис. 3.14.

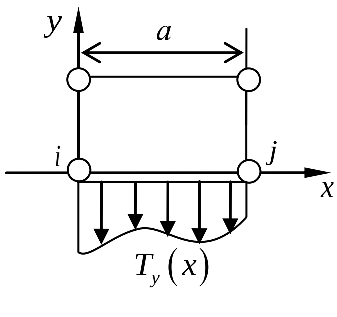


Рис. 3.14. Схема приложения поверхностных сил на границу конечного элемента

Используя связь функции напряжений Эри и компонент тензора напряжений (3.5), дважды проинтегрируем по переменной x на стороне элемента с узлами i и j выражение $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = T_y(x)$ и определим константы интегрирования через значения φ , $\left(\dfrac{\partial \varphi}{dx}\right)$ в узловых точках ($\varphi_i, \left(\dfrac{\partial \varphi}{dx}\right)_i, \varphi_j, \left(\dfrac{\partial \varphi}{dx}\right)_j$).

Таким образом, получим:

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{dx}\right)_i + \left(\frac{\partial \varphi}{dx}\right)_j = \int_{x_i}^{x_j} T_y(x)\,dx, \tag{3.25}$$

$$-\varphi_i + \varphi_j - \left(\frac{\partial \varphi}{dx}\right)_i a = \int_{x_i}^{x_j}\int_{x_i}^{x} T_y(x)\,dx dx. \tag{3.26}$$

Т.к. функция T_y задана и зависит только от x, то можно вычислить интегралы в соотношениях (3.25) и (3.26). В результате получим два уравнения, определяющих связь между узловыми неизвестными на границе элемента. Учитывая аналогично все остальные граничные условия для напряжений, сформируем полную систему ограничений для элемента в виде:

$$\left[g^e\right]\left\{\Phi^e\right\} = \left\{f_p^e\right\}. \tag{3.27}$$

Следует отметить, что поскольку касательные напряжения τ_{xy} непосредственно входят в число узловых неизвестных, в качестве смешанной производной от функции напряжения Эри, условия, накладываемые на них, можно учитывать с помощью традиционной процедуры модификации глобальной матрицы податливости.

На основе соотношений (3.27) для всех конечных элементов, имеющих границы с приложенными известными поверхностными усилиями, дополним уравнения (3.24), используя метод множителей Лагранжа, и получим следующую итерационную последовательность систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} [P]_0 & [G]^{\mathrm{T}} \\ [G] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{\Phi^{(k+1)}\right\} \\ \left\{\lambda^{(k+1)}\right\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [P]_\Delta & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi^{(k)} \\ \lambda^{(k)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F_u\} \\ \{F_p\} \end{Bmatrix}, \tag{3.28}$$

$$\{\Phi\}^{(k)} \equiv 0, \quad \{\lambda\}^{(k)} \equiv 0, \quad k = 1,2,3...$$

где $\{\lambda\}$ – вектор множителей Лагранжа, $[G]$ – глобальная матрица коэффициентов системы условий вида (3.27), $\{F_p\}$ – соответствующие правые части условий.

Условие остановки итерационной процедуры используется в виде:

$$\frac{\left\| \left\{ \Phi^{(k+1)} \right\} - \left\{ \Phi^{(k)} \right\} \right\|}{\left\| \left\{ \Phi^{(k)} \right\} \right\|} \le \beta,$$

где в качестве нормы вектора $\{\Phi\}$ выбрана норма Чебышева, β - задаваемое вычислителем малое положительное число.

3.4. Примеры численной реализации МГП в напряжениях для плоских задач теории упругости

В качестве примера реализации описанной конечно-элементной процедуры МГП рассмотрим плоскую задачу теории упругости в декартовой системе координат: сжатие вдоль оси О*x* бесконечной пластины с вклеенным круговым абсолютно жестким включением радиуса R под действием равномерно распределенной нагрузки *P*. На контуре включения равны нулю обе компоненты вектора перемещений. Данная задача имеет известное аналитическое решение [119], что позволит подкрепить теоретические доказательства о сходимости итерационного процесса МГП данными численных исследований. При численном решении размеры пластинки были приняты равными $2a \times 2a$, радиус выреза $R = a/7$, параметры материала: $E = 2{,}3\,E+11$ Па – модуль Юнга, $\nu = 0{,}33$ – коэффициент Пуассона. В силу симметрии задачи относительно осей рассматривается четверть пластины (рис. 3.15). В качестве канонической области выбран прямоугольник размером $2a \times 2a$.

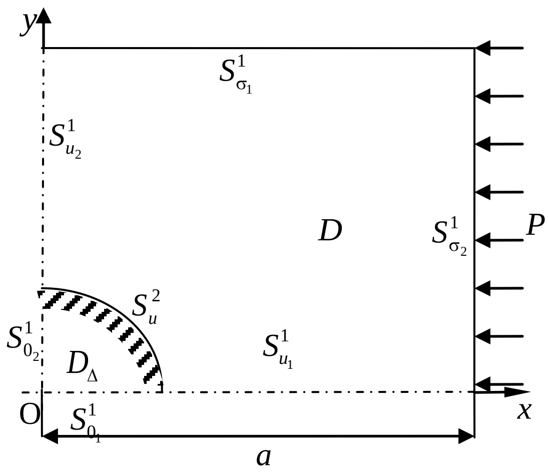


Рис. 3.15. Расчетная схема

Решение данной задачи по методу геометрического погружения сводится к реализации следующей вариационно-итерационной процедуры:

$$\int_{D_0} \delta\sigma_{ij}{}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}\left(\hat{\sigma}^{(k+1)}\right) dV - \int_{D_\Delta} \delta\sigma_{ij}{}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}\left(\hat{\sigma}^{(k)}\right) dV_\Delta - \int_{S_u} t_i\left(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}\right) U_i dS_u =$$

$$= \frac{1}{E}\int_0^a\int_0^a \Big(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k+1)} + \delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k+1)} - \nu\left(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k+1)} + \delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\right) +$$

$$+\delta\tau_{xy}{}^{(k+1)}\tau_{xy}{}^{(k+1)} 2(1+\nu)\Big) dxdy - \frac{1}{E}\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \Big(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k)} + \delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k)}$$

$$-\nu\left(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k)} + \delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k)}\right) + \delta\tau_{xy}{}^{(k+1)}\tau_{xy}{}^{(k)} 2(1+\nu)\Big) dxdy -$$

$$-\int_{S_u}\left(t_x\left(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}\right)U_x + t_y\left(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}\right)U_y\right) dS_u = 0, \tag{3.29}$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} \equiv 0, \quad k = 1, 2, 3...$$

Так как по круговому контуру $U_x = U_y = 0$, то (3.29) преобразуется к следующему виду:

$$\int_{D_0} \delta\sigma_{ij}{}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}\left(\hat{\sigma}^{(k+1)}\right) dV - \int_{D_\Delta} \delta\sigma_{ij}{}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}\left(\hat{\sigma}^{(k)}\right) dV_\Delta - \int_{S_u} t_i\left(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}\right) U_i dS_u =$$

$$= \frac{1}{E}\int_0^a\int_0^a \Big(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k+1)} + \delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k+1)} - \nu\left(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k+1)} + \delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\right) +$$

$$+\delta\tau_{xy}{}^{(k+1)}\tau_{xy}{}^{(k+1)}2(1+\nu)\Big)dxdy-\frac{1}{E}\int\limits_0^R\int\limits_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\Big(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k)}+\delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k)}$$

$$-\nu\left(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k)}+\delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k)}\right)+\delta\tau_{xy}{}^{(k+1)}\tau_{xy}{}^{(k)}2(1+\nu)\Big)dxdy.$$

Для обеспечения статической допустимости полей напряжений при реализации итерационной процедуры (3.29), необходимо выполнить следующие граничные условия:

$$\tau_{xy}(0,y)=0,\quad y\in S^1_{u_2},\quad \tau_{xy}(x,0)=0,\quad x\in S^1_{u_1},$$

$$\sigma_{xx}(a,y)=-P(y),\quad \tau_{xy}(a,y)=0,\quad y\in S^1_{\sigma_2},$$

$$\sigma_{yy}(x,a)=\tau_{xy}(x,a)=0,\quad x\in S^1_{\sigma_1}.$$

Кинематические граничные условия:

$$u_x(0,y)=0\quad y\in S^1_{u_2},$$

$$u_y(x,0)=0\quad x\in S^1_{u_1},$$

$$u_x(x,y)=u_y(x,y)=0\quad (x,y)\in S^2_u,$$

отражающие условия симметрии на соответствующих границах, а так же равенство нулю по контуру включения компонент вектора перемещений, выполняются непосредственно из условия минимума функционала как естественные.

В соответствии с теоретическими положениями МГП в напряжениях, описанными в главе 2, на возникших после погружения области D в область D_0 новых границах $S^1_{0_2}$ и $S^1_{0_1}$ необходимо сформулировать граничные условия, в качестве которых в данном случае возможно и удобно выбрать:

$$u_x(0,y)=0,\quad \tau_{xy}(0,y)=0,\quad y\in S^1_{0_2},$$

$$u_y(x,0)=0,\quad \tau_{xy}(x,0)=0,\quad x\in S^1_{0_1}.$$

Для последующей конечно-элементной реализации необходимо осуществить дискретизацию канонической области. Особенность метода геометрического погружения состоит в том, что точность получаемого решения можно улучшать, как увеличением степени пространственной дискретизации, так и увеличением числа итераций. Была выполнена серия вычислительных экспериментов на последовательности сгущающихся сеток и уменьшающейся величины критерия β прекращения итераций. Установлено, что для данной задачи достаточно использование сетки из 361 элемента с 400 узлами (рис. 3.17) при $\beta = 0,001$, при этом дальнейшее сгущение сетки и уменьшение β к существенному изменению численного решения не приводит. Таким образом, вектор-столбец $\{\Phi\}$ содержит 1752 узловых неизвестных, из которых 76 известно из граничных условий (нулевые значения касательных напряжений в граничных узлах сетки), вектор-столбец $\{\lambda\}$ содержит 152 неизвестных множителей Лагранжа, соответствующих наложенным на узловые неизвестные ограничениям (всего 152 условия).

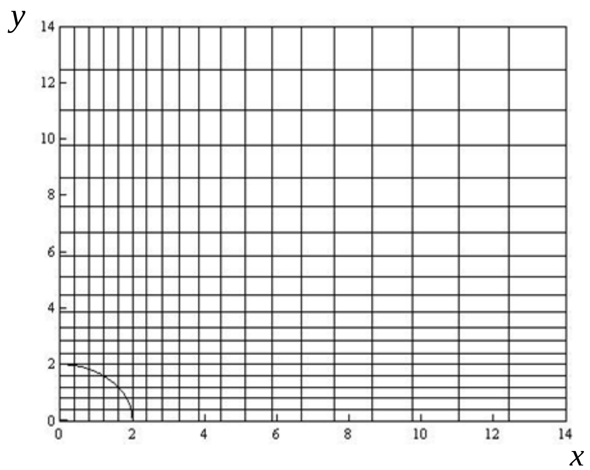


Рис. 3.17. Конечно-элементная дискретизация канонической области

Алгоритм решения задачи реализован в виде программы в среде пакета MATLAB. Для сравнения задача была также решена точно аналитически [119] и численно методом конечных элементов в перемещениях, в котором сетка формировалась со сгущением к вырезу, при этом ее густота обеспечивала равенство числа узловых неизвестных с рассматриваемым подходом.

Рассмотрим распределение компонент напряжений на границах пластины (рис. 3.18).

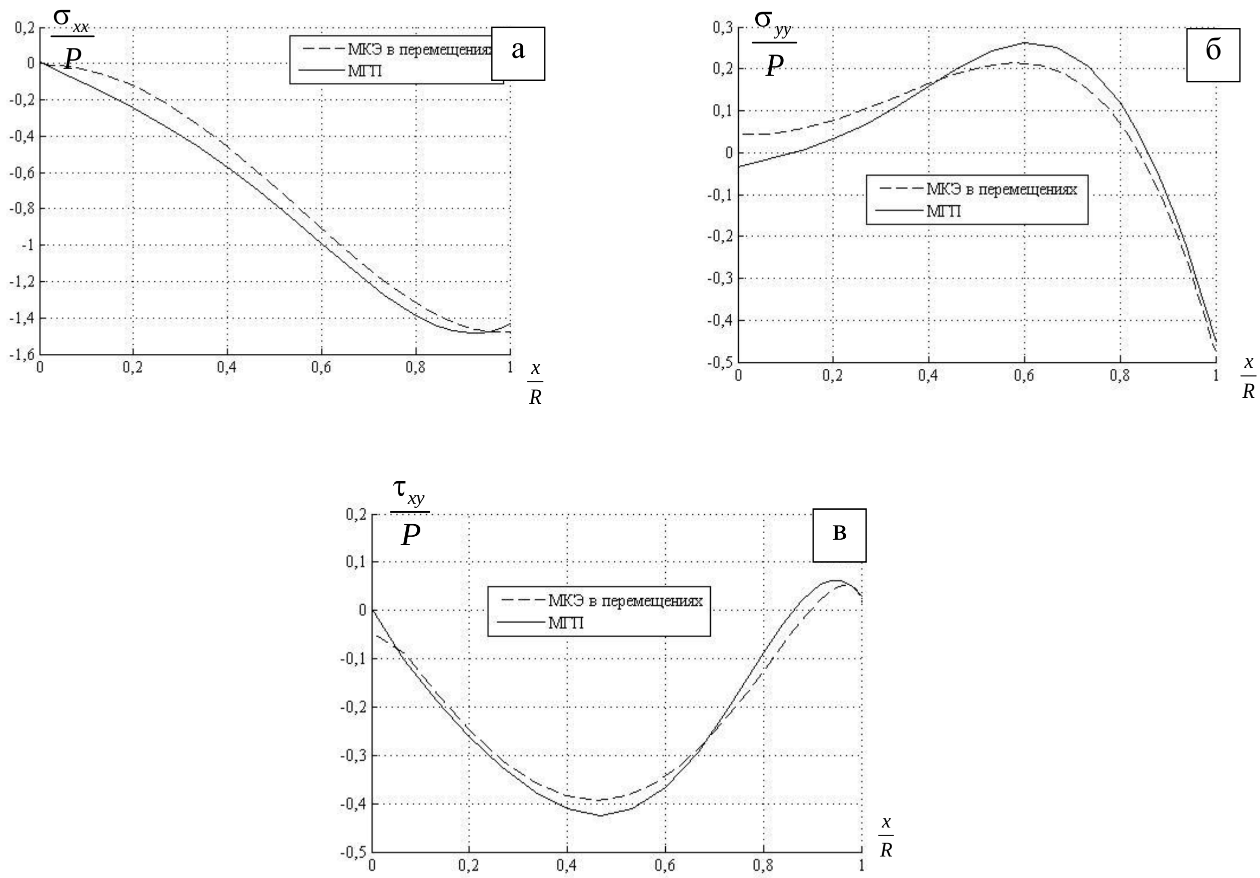


Рис. 3.18. Распределение напряжений по контуру кругового жесткого включения

Распределение напряжений в декартовой системе координат по контуру кругового жесткого включения, полученные методом конечных элементов в перемещениях, существенно отличается от решения, полученного МГП (рис. 3.18). Произведем поворот тензора напряжения для вычисления компонент в полярной системе координат и сравним с точным решением задачи (рис. 3.19).

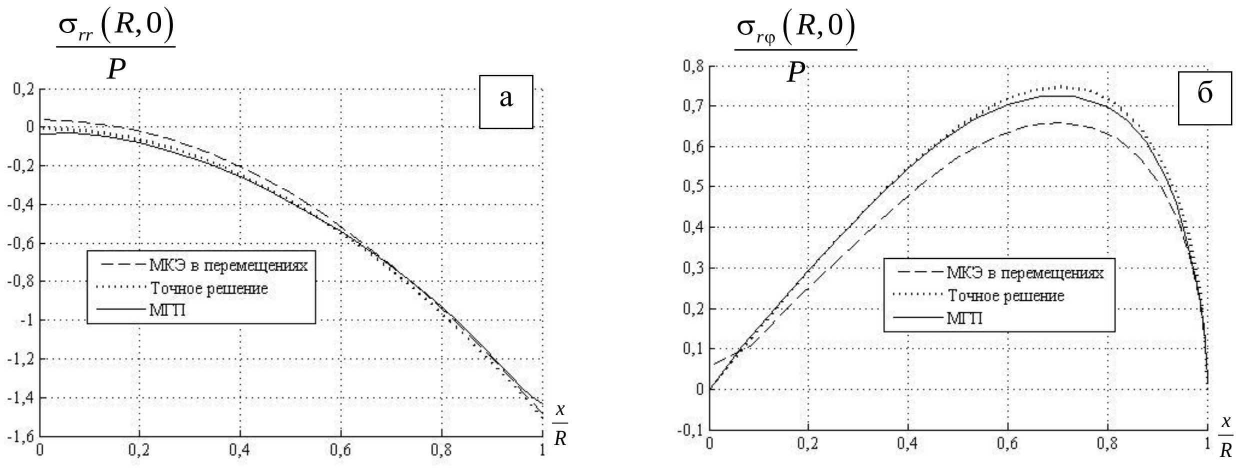


Рис. 3.19. Распределение напряжений по контуру жесткого включения в полярной системе координат

Распределение компонент тензора напряжений, полученных МГП, лучше соответствуют аналитическому решению задачи на криволинейной границе области по сравнению с МКЭ в перемещениях. Это подтверждает одно из преимуществ метода – более точное определение напряженного состояния тела на границах сложной формы. В точках области, удаленных от места расположения концентратора распределения компонент тензора напряжений, полученные обоими методами практически не отличаются (рис. 3.20). Следует отметить, что решение задачи при использовании МГП получается во всей канонической области (левые части графиков при значениях координат, меньших R).

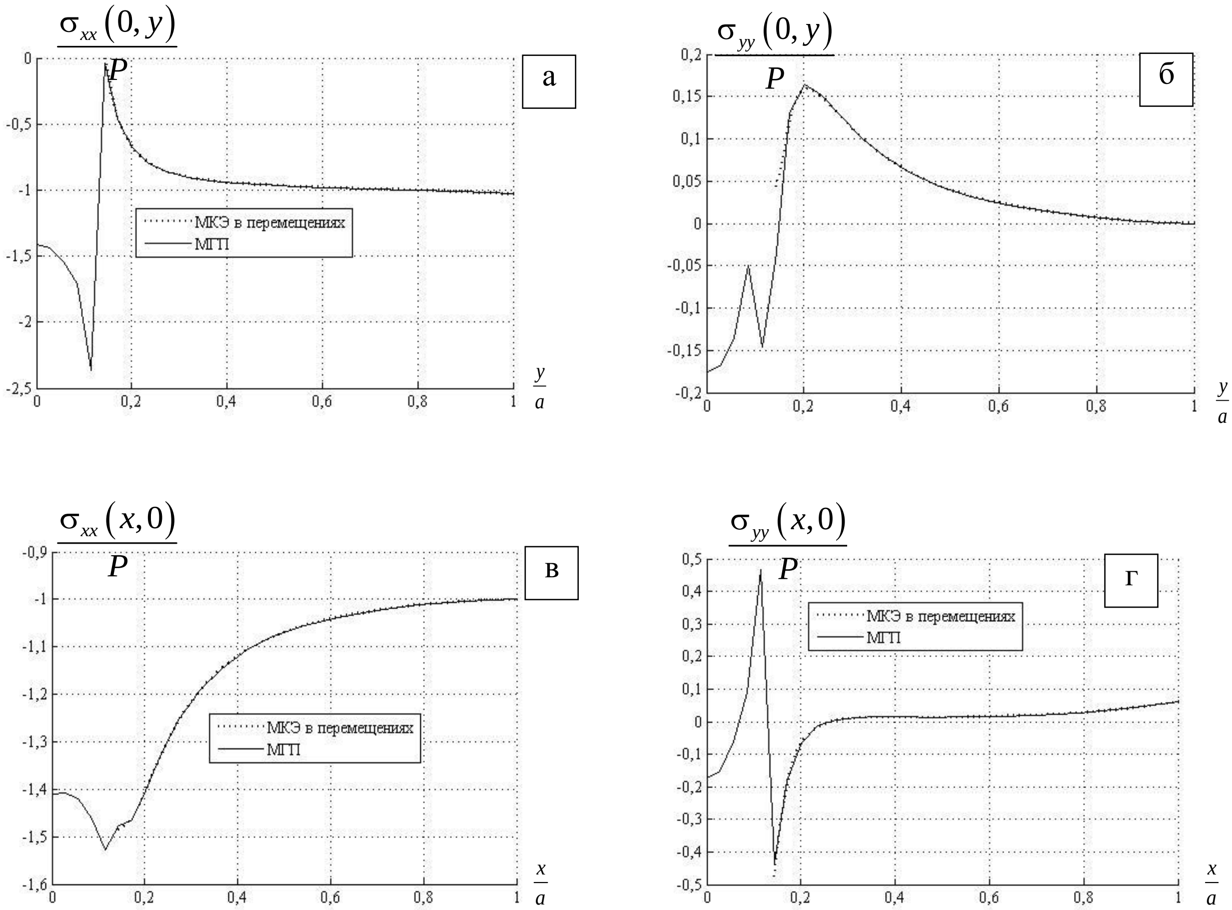


Рис. 3.20. Распределение напряжений: а), б) на границе симметрии при $x = 0$; в), г) на границе симметрии при $y = 0$

Для решения на каждой итерации системы линейных алгебраических уравнений (3.28) использован метод Гаусса с выбором главного элемента. Портрет матрицы коэффициентов СЛАУ представлен на рис. 3.21. Матрица коэффициентов преимущественно ленточная, фрагментарное нарушение ленточного характера связано с использованием метода множителей Лагранжа. В нашем случае число ненулевых элементов в матрице равно 54259. Относительная погрешность решения СЛАУ составила 1.1594e-014 (по векторной норме Чебышева).

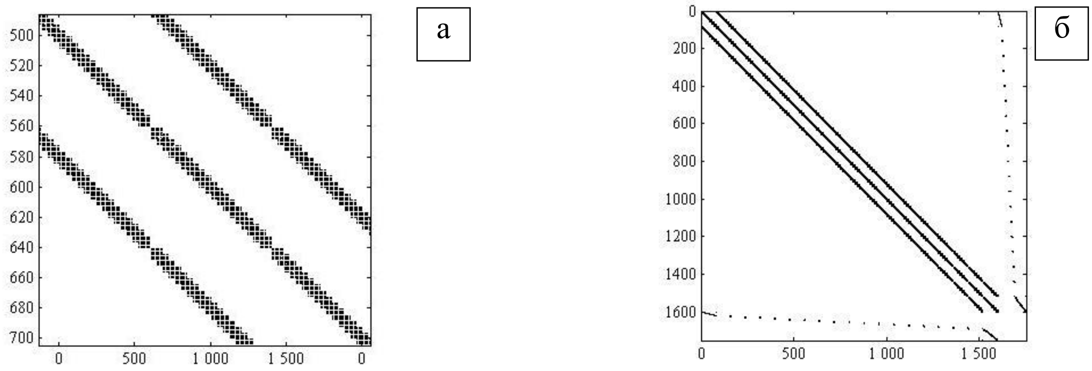


Рис. 3.21. Портрет матрицы коэффициентов а), б)

В качестве второго примера рассмотрим решение задачи теории упругости для несжимаемого материала. Известно, что в общем случае получение решения задачи теории упругости при коэффициенте Пуассона равном или близком к 0.5, используя МКЭ на основе вариационного принципа Лагранжа, представляет собой большую проблему. Применение МГП на основе МКЭ в напряжениях с этой точки зрения является привлекательным и эффективным подходом.

Для наглядности рассмотрим задачу о плоско-деформированном состоянии длинного бруса с круговым жестким включением под действием сжимающей постоянной нагрузки. Расчетная схема аналогична схеме, рассмотренной выше (рис. 3.15), размеры сечения бруса были приняты равными $2a \times 2a$, радиус выреза $-R = a/2$.

Данная задача так же решена двумя методами: традиционным МКЭ в перемещениях и МГП на основе вариационного принципа Кастильяно. Проведена серия расчетов при коэффициенте Пуассона ν, изменяющемся от 0,33 до 0,5; полученные результаты показывают, что решение, полученное МКЭ в перемещениях, неустойчиво при значениях ν близких к 0.5, а МГП на основе МКЭ в напряжениях позволяет успешно получить решение задачи (рис. 3.22).

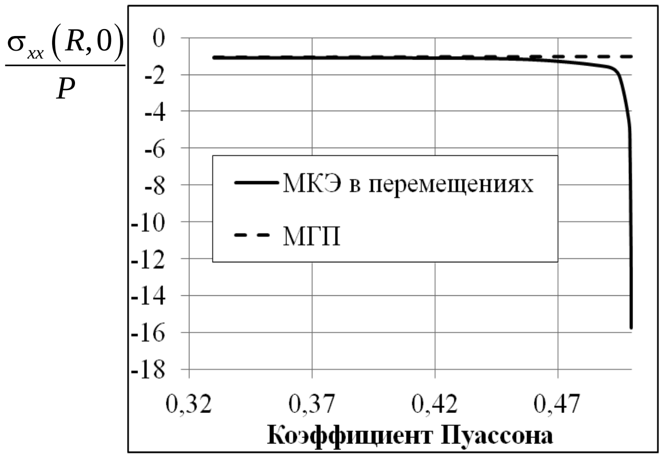


Рис. 3.22. Изменение напряжения σ_{xx}/P в точке $(R,0)$ в зависимости от значения коэффициента Пуассона

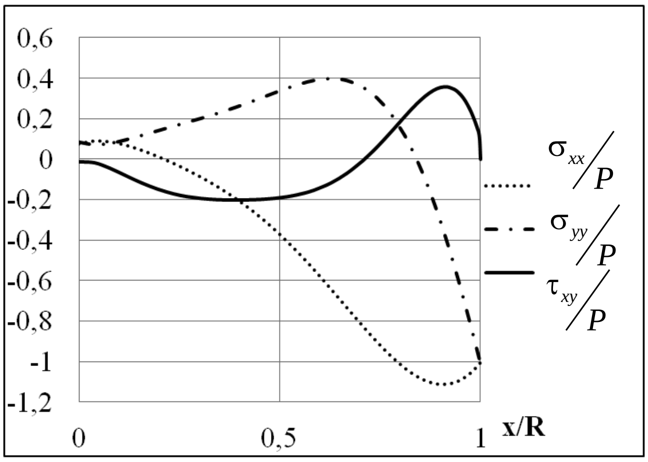


Рис. 3.23. Распределение напряжений по контуру жесткого включения, полученные методом геометрического погружения в напряжениях

На рис.3.23 представлены результаты решения задачи для несжимаемого материала $(\nu = 0,5)$, полученные методом геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно.

3.5. Применение метода геометрического погружения в напряжениях для расчета напряженного состояния плоского резинометаллического амортизатора

Поскольку одним из неоспоримых плюсов численных подходов, основанных на вариационном принципе Кастильяно, является расчет конструкций из несжимаемых материалов, то в качестве практического применения МГП в напряжениях рассмотрим задачу о сдвиговом деформировании резинометаллического амортизатора (рис.3.24). Предполагается существование плоско-деформированного состояния, стальные элементы предполагаются абсолютно жесткими. Расчетная схема представлена на рис.3.25.

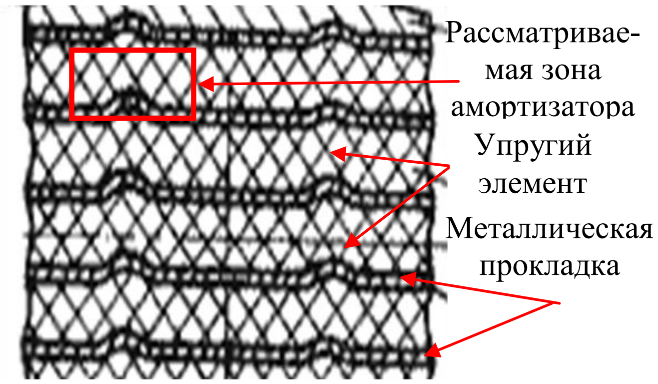


Рис. 3.24. Элемент конструкции амортизатора

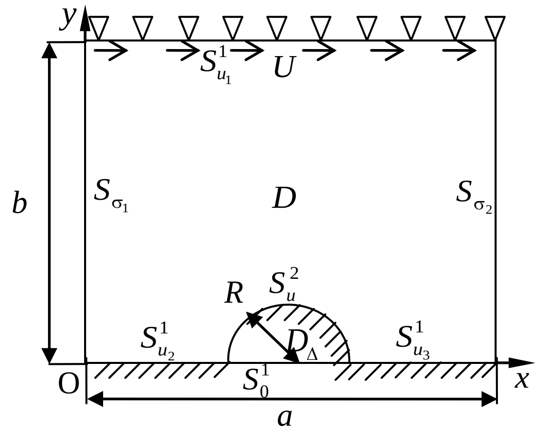


Рис. 3.25. Расчетная схема

Математическая постановка задачи:

$$\frac{1}{E}\int_0^b\int_0^a\Big(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k+1)}+\delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k+1)}-\nu\left(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k+1)}+\delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\right)+$$

$$+\delta\tau_{xy}{}^{(k+1)}\tau_{xy}{}^{(k+1)}2(1+\nu)\Big)dxdy-\frac{1}{E}\int_{a/2-R}^{a/2+R}\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}+a/2}\Big(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k)}+\delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k)}-$$

$$-\nu\left(\delta\sigma_{xx}{}^{(k+1)}\sigma_{yy}{}^{(k)}+\delta\sigma_{yy}{}^{(k+1)}\sigma_{xx}{}^{(k)}\right)+\delta\tau_{xy}{}^{(k+1)}\tau_{xy}{}^{(k)}2(1+\nu)\Big)dxdy-$$

$$-\int_0^a t_x\left(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}\right)UdS_u=0,$$

$$\sigma_{ij}^{(0)}\equiv 0,\quad k=1,2,3\ldots$$

Кинематические граничные условия:

$$u_x(x,y)=u_y(x,y)=0\quad (x,y)\in S_u^2\cup S_{u_2}^1\cup S_{u_3}^1,$$

$$u_y(x,y)=0,\quad u_x(x,y)=U\quad (x,y)\in S_{u_1}^1,$$

$$U=1E-11.$$

Статические граничные условия:

$$\tau_{xy}(x,y)=\sigma_{xx}(x,y)=0\quad (x,y)\in S_{\sigma_1}\cup S_{\sigma_2}.$$

Граничные условия на новой границе S_0^1:

$$u_x(x,y)=u_y(x,y)=0\quad (x,y)\in S_0^1.$$

Параметры материала: $\nu = 0.5$, $E = 2.8E6$ $Па$, размеры конструкции: $a = 4м$, $b = 2м$, $R = 0.5м$.

Результаты решения представлены в виде изменения напряжений и интенсивности напряжений по кромке стального элемента (рис. 3.26-3.27).

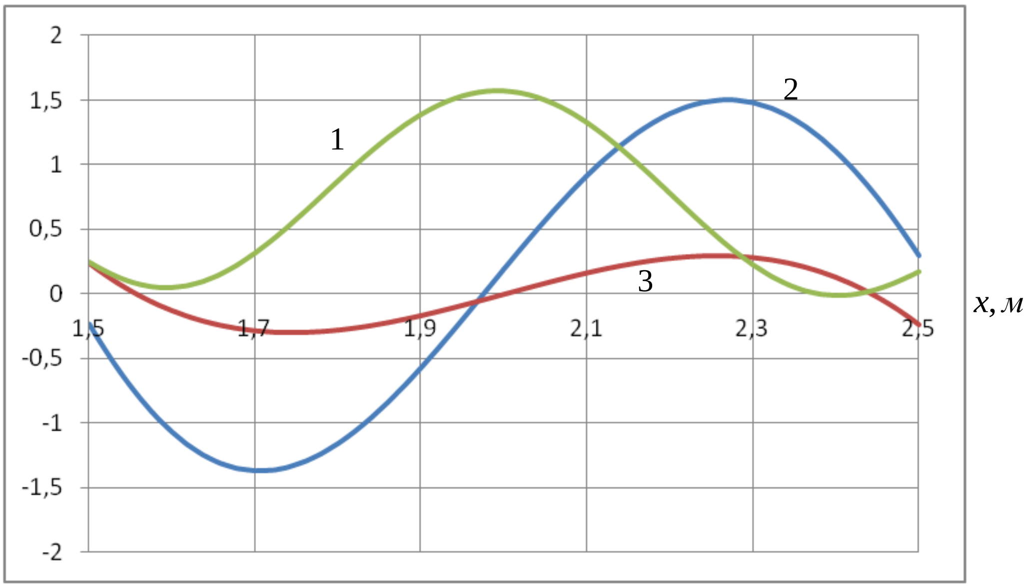


Рис. 3.26. Распределение компонент тензора напряжений по криволинейной границе кромки стального элемента:

1 - $\tau_{xy}, Па$; 2 - $\sigma_{xx}, Па$; 3 - $\sigma_{yy}, Па$.

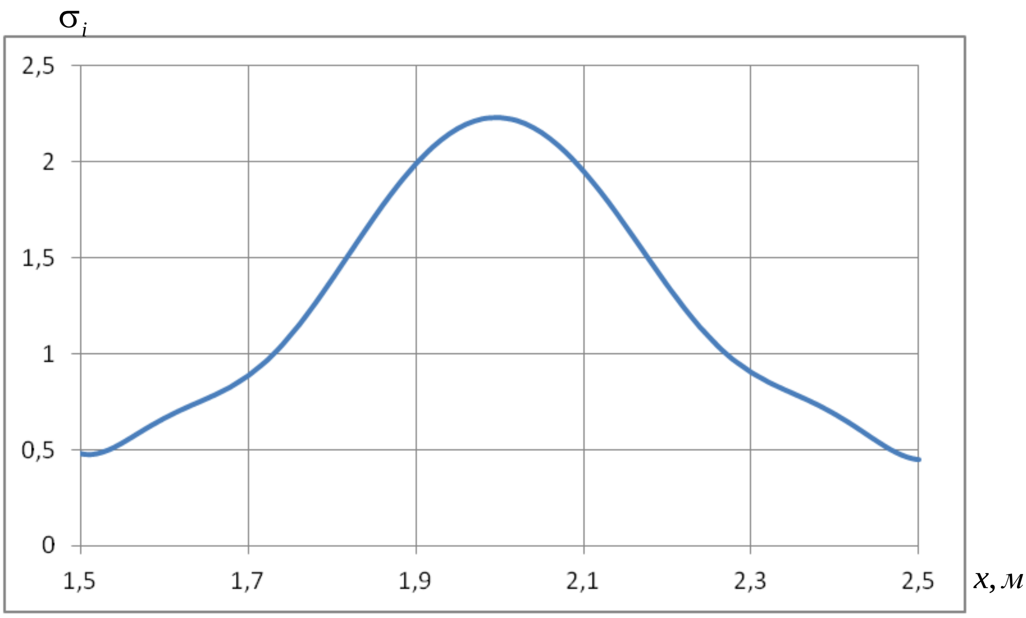


Рис. 3.27. Интенсивность напряжений по криволинейной границе кромки стального элемента

Для проверки правильности решения задачи при $\nu = 0.5$, а так же для проверки сходимости алгоритма МГП была исследована исходная задача при $\nu = 0.28$, $E = 2.8E11 \quad Па$. Реализованное состояние ПНС.

В качестве эталонного решения взяты результаты решения задачи методом конечных элементов в перемещениях. Для анализа сходимости МГП от числа степеней свободы была проведена серия расчетов, при которой было выявлено, что для получения достоверных результатов необходимо порядка 5000 степеней свободы (рис.3.28). При дальнейшем измельчении сетки погрешность решения по сравнению с эталонным не превышает 3,02%. В связи с этим все вычисления, в том числе и для несжимаемого материала, приведенные выше, производились при степени дискретизации равной 5880.

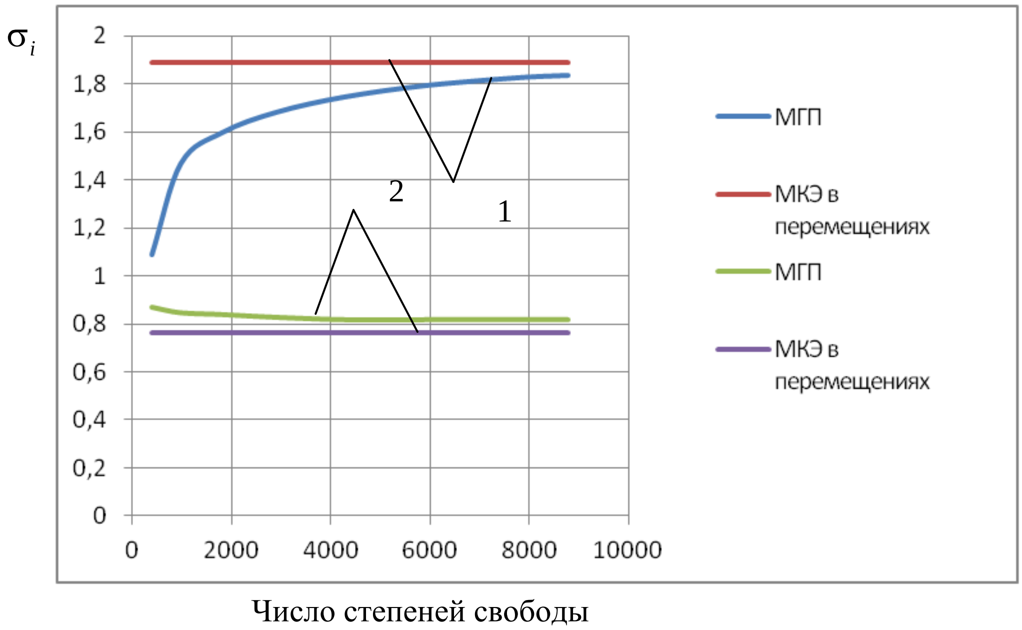


Рис.3.28. Изменение интенсивности напряжений в контрольных точках: точка 1 с координатами $\left(a/2, R\right)$, точка 2 с координатами $\left(a/2, b\right)$

Так же стоит отметить, что качественно и количественно решения задачи методом геометрического погружения и методом конечных элементов в перемещениях достаточно близки, что позволяет сделать вывод о достоверности результатов, полученных МГП в напряжениях.

3.6. Выводы по главе.

1. Дана вариационная постановка метода геометрического погружения в напряжениях для решения плоских задач теории упругости; приведены варианты построения дискретного аналога вариационного уравнения МГП методом Ритца и методом конечных элементов в напряжениях. Разработана вычислительная схема учета статических граничных условий.
2. Рассмотрена модельная плоская задача, демонстрирующая эффективное применение МГП с конечно-элементной реализацией, сформулированной с использованием функции напряжений Эри; выполнен сравнительный анализ скорости и качества практической сходимости решения по предложенной схеме и решения, полученного с помощью традиционного МКЭ в перемещениях.
3. Реализована возможность применения известных конечных элементов в напряжениях канонической формы для решения задач теории упругости в областях сложной конфигурации.
4. Продемонстрировано практическое применение метода геометрического погружения для решения задач теории упругости из несжимаемых упругих материалов, в том числе выполнен расчет напряженного состояния резинометаллического амортизатора.

Глава 4. Применение метода геометрического погружения в напряжениях для решения осесимметричных задач теории упругости.

В главе рассматривается применение метода геометрического погружения в напряжениях для решения осесимметричных задач теории упругости в цилиндрической системе координат. На примере решения модельной осесимметричной задачи о равновесии под действием внутреннего давления полого кругового цилиндра с абсолютно жестким кольцевым включением рассмотрены особенности построения дискретного аналога вариационного уравнения МГП. Использован конечный элемент с аппроксимацией полей напряжений, удовлетворяющей уравнениям равновесия в цилиндрической системе координат. В качестве приложения разработанных алгоритмов приводятся результаты определения полей напряжений в конструкциях двух осесимметричных резинометаллических амортизаторов.

4.1. Вариационное уравнение метода геометрического погружения в напряжениях для решения осесимметричных задач теории упругости

Рассмотрим постановку осесимметричной задачи теории упругости в области D в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{r} = 0, \end{cases} \qquad (r, z) \in D \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \nabla^2\sigma_{rr} - \dfrac{2}{r^2}\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\left(\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{zz}\right)}{\partial r^2} = 0, \\ \nabla^2\sigma_{\varphi\varphi} + \dfrac{2}{r^2}\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\left(\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{zz}\right)}{\partial r} = 0, \\ \nabla^2\sigma_{zz} + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\left(\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{zz}\right)}{\partial z^2} = 0, \\ \nabla^2\sigma_{rz} + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\left(\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{zz}\right)}{\partial r\partial z} - \dfrac{\sigma_{rz}}{r^2} = 0, \end{cases} \quad (r,z)\in D \qquad (4.2)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}\cdot n_r + \tau_{rz}\cdot n_z = T_r \\ \tau_{rz}\cdot n_r + \sigma_{zz}\cdot n_z = T_z \end{cases}, \quad (r,z)\in S_\sigma, \qquad (4.3)$$

$$u_r(r,z) = U_r,\ u_z(r,z) = U_z,\ (r,z)\in S_u. \qquad (4.4)$$

Она включает в себя два уравнения равновесия (4.1), четыре условия совместности в форме Бельтрами-Мичелла (4.2), статические граничные условия (4.3) и кинематические граничные условия (4.4). В осесимметричном случае существует большое количество функций напряжений, позволяющих так же упростить дифференциальную постановку задачи в напряжениях. Одними из первых по времени, однако не получившими широкого распространения за счет сложных требований к функциям, являются функции напряжения Гельмгольца. Так же можно отметить функции напряжений, полученные К. Вебером, А. Тимпе, Б.Г. Галеркиным, П.Ф. Папковичем–Нейбером, Г.Д. Гродским, К.В. Соляником-Красса, Ю.Н. Васильевым [5]. Однако, большинство предложенных разработок могут быть сведены к известному решению Лява, позволяющему найти обобщенное решение задачи с помощью одной бигармонической функции. Несмотря на удобство, и, казалось бы на первый взгляд, простоту вводимых зависимостей, существует ограниченное число задач, для которых получены точные решения [5]. Сами аналитические выкладки очень громоздки и требуют тщательного анализа для выбираемых базисных функций. Стоит отметить, что и численные конечно-элементные подходы, основанные на функциях напряжений, не находят в данном случае своего применения, что связано со сложностью учета статических граничных условий.

Запишем функционал дополнительной работы в привычном для нас виде:

$$\Pi_C\left(\hat{\sigma}\right)=\frac{1}{2E}\int\limits_D\Big[\sigma_{rr}{}^2+\sigma_{\varphi\varphi}{}^2+\sigma_{zz}{}^2-2\nu\left(\sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{rr}\sigma_{zz}+\sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz}\right)+$$

$$+2\left(1+\nu\right)\tau_{rz}{}^2\Big]dD-\int\limits_{S_u}\left(t_rU_r+t_zU_z\right)dS_u$$

Погружение области D будем осуществлять в каноническую область D_0, причем $D\in D_0$, $D_\Delta=D_0\setminus D$ (рис. 4.1).

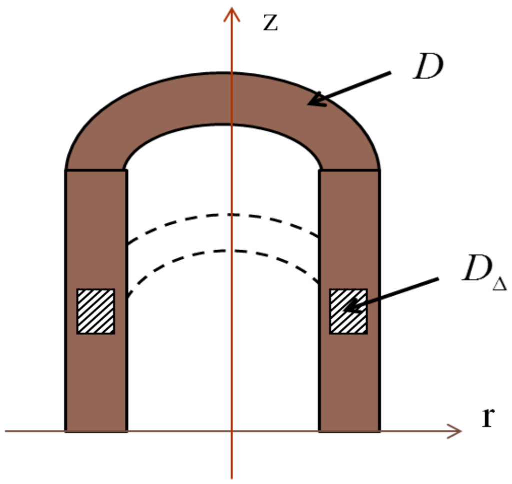


Рис. 4.1. Исходная область D и область дополнения D_Δ

Вариационно-итерационная процедура МГП для данной задачи примет вид:

$$\int\limits_{D_0}\Big[\delta\sigma_{rr}{}^{(k+1)}\sigma_{rr}{}^{(k+1)}+\delta\sigma_{\varphi\varphi}{}^{(k+1)}\sigma_{\varphi\varphi}{}^{(k+1)}+\delta\sigma_{zz}{}^{(k+1)}\sigma_{zz}{}^{(k+1)}-$$

$$-\nu\left(\delta\sigma_{rr}{}^{(k+1)}\sigma_{\varphi\varphi}{}^{(k+1)}+\delta\sigma_{rr}{}^{(k+1)}\sigma_{zz}{}^{(k+1)}+\delta\sigma_{\varphi\varphi}{}^{(k+1)}\sigma_{rr}{}^{(k+1)}\right)-$$

$$-\nu\left(\delta\sigma_{\varphi\varphi}{}^{(k+1)}\sigma_{zz}{}^{(k+1)}+\delta\sigma_{zz}{}^{(k+1)}\sigma_{rr}{}^{(k+1)}+\delta\sigma_{zz}{}^{(k+1)}\sigma_{\varphi\varphi}{}^{(k+1)}\right)+$$

$$+\delta\tau_{rz}{}^{(k+1)}\tau_{rz}{}^{(k+1)}2\left(1+\nu\right)\Big]dD_0= \tag{4.5}$$

$$=\int\limits_{D_\Delta}\Big[\delta\sigma_{rr}{}^{(k+1)}\sigma_{rr}{}^{(k)}+\delta\sigma_{\varphi\varphi}{}^{(k+1)}\sigma_{\varphi\varphi}{}^{(k)}+\delta\sigma_{zz}{}^{(k+1)}\sigma_{zz}{}^{(k)}-$$

$$-\nu\left(\delta\sigma_{rr}^{(k+1)}\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}+\delta\sigma_{rr}^{(k+1)}\sigma_{zz}^{(k)}+\delta\sigma_{\varphi\varphi}^{(k+1)}\sigma_{rr}^{(k)}\right)-$$

$$-\nu\left(\delta\sigma_{\varphi\varphi}^{(k+1)}\sigma_{zz}^{(k)}+\delta\sigma_{zz}^{(k+1)}\sigma_{rr}^{(k)}+\delta\sigma_{zz}^{(k+1)}\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}\right)+$$

$$+\delta\tau_{rz}^{(k+1)}\tau_{rz}^{(k)}2(1+\nu)\Big]dD_{\Delta}+\int_{S_u}\left(t_r\left(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}\right)U_r+t_z\left(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}\right)U_z\right)dS_u,$$

$$\sigma_{ij}^{(0)}\equiv 0,\quad k=1,2,3...$$

4.2. Конечно-элементная дискретизация вариационного уравнения МГП в напряжениях

Для решения вариационного уравнения (4.5) в цилиндрической канонической области D_0 построим его дискретный аналог, используя метод конечных элементов в напряжениях для осесимметричных задач теории упругости. В качестве конечного элемента выберем прямоугольный в сечении кольцевой элемент (рис. 4.2).

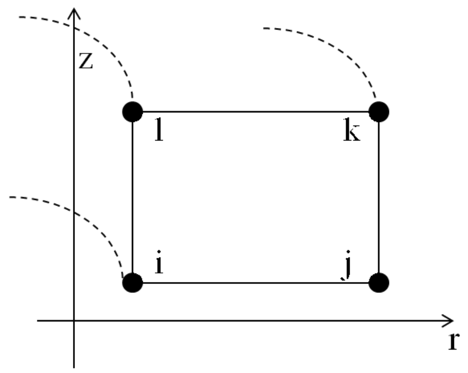


Рис. 4.2. Осесимметричный конечный элемент

Для построения статически допустимых полей напряжений воспользуемся результатами работы [60]. Внутри каждого конечного элемента введем следующие аппроксимации компонент тензора напряжений, заведомо удовлетворяющие уравнениям равновесия в цилиндрической системе координат:

$$\sigma_{rr}=\beta_1+\beta_2 z+\beta_3\frac{1}{r}+\beta_4\frac{z}{r},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \beta_2 z + \beta_5 + \beta_6 \frac{1}{r} + \beta_7 \frac{z}{r}, \tag{4.6}$$

$$\sigma_{zz} = \beta_6 \frac{z^2}{2r^3} + \beta_7 \frac{z^3}{6r^3} + \beta_8 + \beta_9 z + \beta_{10} \frac{1}{r} - \beta_{11} \frac{z}{r},$$

$$\tau_{rz} = -\beta_1 \frac{z}{r} + \beta_5 \frac{z}{r} + \beta_6 \frac{z}{r^2} + \beta_7 \frac{z}{2r^2} - \beta_9 \frac{r}{2} + \beta_{11} + \beta_{12} \frac{1}{r}$$

где $\beta_1, \beta_2, ...\beta_{12}$ - коэффициенты разложения.

Из (4.6) видно, что компонента $\sigma_{\varphi\varphi}$ является зависимой от остальных, поэтому в качестве узловых неизвестных примем $\{\delta_i\}^T = \{\sigma^i_{rr}, \sigma^i_{zz}, \tau^i_{rz}\}$, а в элементе получим – $\{\delta^e\}^T = \{\delta_i, \delta_i, \delta_k, \delta_l\}$.

Тогда в матричной форме столбец напряжений в элементе примет вид

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr}(r,z) \\ \sigma_{zz}(r,z) \\ \tau_{rz}(r,z) \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r,z) \end{Bmatrix} = \left[P(r,z)\right]\{\beta^e\},$$

где $$\left[P(r,z)\right] = \begin{bmatrix} 1 & z & \frac{1}{r} & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{r} & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z^2}{2r^3} & \frac{z^3}{6r^3} & 1 & z & \frac{1}{r} & -\frac{z}{r} & 0 \\ -\frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{z}{r} & \frac{z}{r^2} & \frac{z^2}{2r^2} & 0 & -\frac{r}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

- матрица базисных функций из (4.6), $\{\beta^e\}$ – коэффициенты аппроксимации в элементе.

Узловые неизвестные выразим как:

$$\{\delta^e\} = [C]\{\beta^e\},$$

$$[C]=\begin{bmatrix}
1 & z_i & \frac{1}{r_i} & \frac{z_i}{r_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z_i^2}{2r_i^3} & \frac{z_i^3}{6r_i^3} & 1 & z_i & \frac{1}{r_i} & -\frac{z_i}{r_i} & 0 \\
-\frac{z_i}{r_i} & 0 & 0 & 0 & \frac{z_i}{r_i} & \frac{z_i}{r_i^2} & \frac{z_i}{2r_i^2} & 0 & -\frac{r_i}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{r_i} \\
1 & z_j & \frac{1}{r_j} & \frac{z_j}{r_j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z_j^2}{2r_j^3} & \frac{z_j^3}{6r_j^3} & 1 & z_j & \frac{1}{r_j} & -\frac{z_j}{r_j} & 0 \\
-\frac{z_j}{r_j} & 0 & 0 & 0 & \frac{z_j}{r_j} & \frac{z_j}{r_j^2} & \frac{z_j}{2r_j^2} & 0 & -\frac{r_j}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{r_j} \\
1 & z_k & \frac{1}{r_k} & \frac{z_k}{r_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z_k^2}{2r_k^3} & \frac{z_k^3}{6r_k^3} & 1 & z_k & \frac{1}{r_k} & -\frac{z_k}{r_k} & 0 \\
-\frac{z_k}{r_k} & 0 & 0 & 0 & \frac{z_k}{r_k} & \frac{z_k}{r_k^2} & \frac{z_k}{2r_k^2} & 0 & -\frac{r_k}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{r_k} \\
1 & z_l & \frac{1}{r_l} & \frac{z_l}{r_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z_l^2}{2r_l^3} & \frac{z_l^3}{6r_l^3} & 1 & z_l & \frac{1}{r_l} & -\frac{z_l}{r_l} & 0 \\
-\frac{z_l}{r_l} & 0 & 0 & 0 & \frac{z_l}{r_l} & \frac{z_l}{r_l^2} & \frac{z_l}{2r_l^2} & 0 & -\frac{r_l}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{r_l}
\end{bmatrix}$$

Тогда

$$\{\sigma\}=\left[P(r,z)\right]\left[C^{-1}\right]\left\{\delta^e\right\}=\left[N^e(r,z)\right]\left\{\delta^e\right\},$$

где $\left[N^e(r,z)\right]=\left[P(r,z)\right]\left[C^{-1}\right]$ - матрица функций форм элемента, выраженная в неявном виде.

Физические соотношения в матричной форме примут вид:

$$\{\varepsilon\}=\left[D^{-1}\right]\{\sigma\}=\left[D^{-1}\right]\left[N^e(r,z)\right]\left\{\delta^e\right\},$$

где $\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_{rr},\varepsilon_{\varphi\varphi},\varepsilon_{zz},\gamma_{rz}\}^{\mathrm{T}}$ – вектор деформаций в элементе, $[D^{-1}]$ – матрица констант упругой податливости.

Выполнив дискретизацию канонической области, используя введенные кольцевые конечные элементы, рассмотрим выражения вариаций дополнительной работы упругого тела в областях D_0 и D_Δ в соотношении (4.5):

$$\int_{D_0}\delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\hat{\sigma})rdrdz=\sum_e\int_{D_0^e}\delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\hat{\sigma})dD_0^e=$$

$$=\sum_e\delta\{\delta^e\}^{\mathrm{T}}\int_{D_0^e}\left[N^e(r,z)\right]^{\mathrm{T}}\left[D^{-1}\right]\left[N^e(r,z)\right]dD_0^e\{\delta^e\}=\sum_e\delta\{\delta^e\}^{\mathrm{T}}\left[p^e\right]_0\{\delta^e\},\qquad(4.7)$$

$$\int_{D_\Delta}\delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\hat{\sigma})dD_\Delta=\sum_e\int_{D_\Delta^e}\delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\hat{\sigma})dD_\Delta^e=$$

$$=\sum_e\delta\{\delta^e\}^{\mathrm{T}}\int_{D_\Delta^e}\left[N^e(r,z)\right]^{\mathrm{T}}\left[D^{-1}\right]\left[N^e(r,z)\right]dD_\Delta^e\{\delta^e\}=\sum_e\delta\{\Phi^e\}^{\mathrm{T}}\left[p^e\right]_\Delta\{\delta^e\},\qquad(4.8)$$

где $\left[p^e\right]_0=\int_{D_0^e}\left[N^e(r,z)\right]^{\mathrm{T}}\left[D^{-1}\right]\left[N^e(r,z)\right]dD_0^e$ – матрица податливости конечного элемента, целиком принадлежащего канонической области, $\left[p^e\right]_\Delta=\int_{D_\Delta^e}\left[N^e(r,z)\right]^{\mathrm{T}}\left[D^{-1}\right]\left[N^e(r,z)\right]dD_\Delta^e$ – матрица податливости элемента, полностью или частично принадлежащего области дополнения, вычисленная по области дополнения D_Δ^e.

Работу возможных усилий на заданных перемещениях на границе S_u определим как:

$$\int_{S_u}t_i\left(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}\right)U_idS_u=\int_{S_u}\delta\sigma_{ij}n_jU_idS_u=\sum_e\delta\{\delta^e\}^{\mathrm{T}}\int_{S_u^e}\left[N^e(r,z)\right]^{\mathrm{T}}[n]^{\mathrm{T}}\{U\}dS_u^e=$$

$$=\sum_e\delta\{\delta^e\}^{\mathrm{T}}\{f_u^e\},\qquad(4.9)$$

где $\{f_u^e\}=\int_{S_u^e}\left[N^e(r,z)\right]^{\mathrm{T}}[n]^{\mathrm{T}}[U]dS_u^e$ – вектор-столбец обобщенных узловых перемещений,

$\{U\}=\begin{Bmatrix} U_r \\ U_z \end{Bmatrix}$ – вектор заданных перемещений,

$\{t\}=\begin{Bmatrix} t_r \\ t_z \end{Bmatrix}$ – вектор усилий на границе S_u,

$\{t\}=[n]\{\sigma\}=[n]\left[N^e(r,z)\right]\{\delta^e\}$,

$[n]=\begin{bmatrix} n_r & 0 & n_z \\ 0 & n_z & n_r \end{bmatrix}$, n_r, n_z – направляющие косинусы вектора внешней единичной нормали к границе S_u^e.

Подстановка (4.7-4.9) в (4.5) приводит к следующему выражению вариации дополнительной работы упругого тела:

$$\sum_e \delta\left(\{\delta^e\}^{\mathrm{T}}\right)^{(k+1)}\left[p^e\right]_0\{\delta^e\}^{(k+1)}=\sum_e \delta\left(\{\delta^e\}^{\mathrm{T}}\right)^{(k+1)}\left[p^e\right]_\Delta\{\delta^e\}^{(k)}+$$

$$+\sum_e \delta\left(\{\delta^e\}^{\mathrm{T}}\right)^{(k+1)}\left\{f_u^e\right\}. \tag{4.10}$$

Обозначив через

$$[P]_0=\sum_e\left[p^e\right]_0,\ [P]_\Delta=\sum_e\left[p^e\right]_\Delta,\ \{F_u\}=\sum_e\left\{f_u^e\right\},\ \{\delta\}$$

– соответственно, глобальные матрицы податливости канонической области и области дополнения, глобального вектора обобщенных перемещений и вектора узловых неизвестных соответственно, получим:

$$\delta\left(\{\delta\}^{\mathrm{T}}\right)^{(k+1)}[P]_0\{\delta\}^{(k+1)}=\delta\left(\{\delta\}^{\mathrm{T}}\right)^{(k+1)}[P]_\Delta\{\delta\}^{(k)}+\delta\left(\{\delta\}^{\mathrm{T}}\right)^{(k+1)}\{F_u\}. \tag{4.11}$$

В силу произвольности вариаций узловых неизвестных (4.11) дает последовательность независимых по левой части систем линейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных $\{\delta\}$. Дискретный аналог итерационной процедуры (4.5) запишется так:

$$\begin{aligned} &[P]_0\{\delta\}^{(k+1)}=[P]_\Delta\{\delta\}^{(k)}+\{F_u\}, \\ &\{\delta\}^{(0)}\equiv 0,\quad k=1,2,3... \end{aligned} \tag{4.12}$$

Поскольку в вариационной формулировке принципа минимума дополнительной работы рассматриваются статически допустимые поля напряжений, то необходимо предусмотреть выполнение статических граничных условий вида на S_σ. Так как в осесимметричном случае в качестве узловых неизвестных приняты компоненты тензора напряжений, то учет таких условий производится традиционным методом модификации глобальных матриц податливости и вектора обобщенных узловых перемещений.

4.3. Напряжения в коротком цилиндре с абсолютно жестким кольцевым включением при нагружении внутренним давлением. Тестовый пример.

В качестве примера реализации описанной конечно-элементной процедуры МГП рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости: определение напряженного состояния конечного полого цилиндра с жестким прямоугольным в сечении кольцевым включением под действием равномерно распределенного внутреннего давления P (рис. 4.3). На контуре включения равны нулю обе компоненты вектора перемещений. В качестве канонической области выбран цилиндр без включения, полностью охватывающий реальную область.

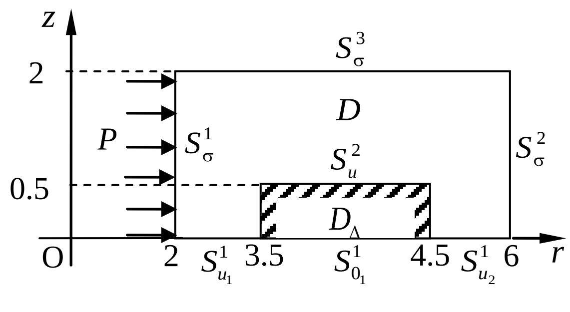


Рис. 4.3. Расчетная схема

Решение данной задачи по методу геометрического погружения сводится к реализации следующей вариационно-итерационной процедуры:

$$2\pi\int_0^2\int_2^6\Big[\delta\sigma_{rr}^{(k+1)}\sigma_{rr}^{(k+1)}+\delta\sigma_{\varphi\varphi}^{(k+1)}\sigma_{\varphi\varphi}^{(k+1)}+\delta\sigma_{zz}^{(k+1)}\sigma_{zz}^{(k+1)}-$$

$$-\nu\left(\delta\sigma_{rr}^{(k+1)}\sigma_{\varphi\varphi}^{(k+1)}+\delta\sigma_{rr}^{(k+1)}\sigma_{zz}^{(k+1)}+\delta\sigma_{\varphi\varphi}^{(k+1)}\sigma_{rr}^{(k+1)}\right)-$$

$$-\nu\left(\delta\sigma_{\varphi\varphi}^{(k+1)}\sigma_{zz}^{(k+1)}+\delta\sigma_{zz}^{(k+1)}\sigma_{rr}^{(k+1)}+\delta\sigma_{zz}^{(k+1)}\sigma_{\varphi\varphi}^{(k+1)}\right)+$$

$$+\delta\tau_{rz}^{(k+1)}\tau_{rz}^{(k+1)}2(1+\nu)\Big]rdrdz= \tag{4.13}$$

$$2\pi\int_0^{0.5}\int_{3.5}^{4.5}\Big[\delta\sigma_{rr}^{(k+1)}\sigma_{rr}^{(k)}+\delta\sigma_{\varphi\varphi}^{(k+1)}\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}+\delta\sigma_{zz}^{(k+1)}\sigma_{zz}^{(k)}-$$

$$-\nu\left(\delta\sigma_{rr}^{(k+1)}\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}+\delta\sigma_{rr}^{(k+1)}\sigma_{zz}^{(k)}+\delta\sigma_{\varphi\varphi}^{(k+1)}\sigma_{rr}^{(k)}\right)-$$

$$-\nu\left(\delta\sigma_{\varphi\varphi}^{(k+1)}\sigma_{zz}^{(k)}+\delta\sigma_{zz}^{(k+1)}\sigma_{rr}^{(k)}+\delta\sigma_{zz}^{(k+1)}\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}\right)+$$

$$+\delta\tau_{rz}^{(k+1)}\tau_{rz}^{(k)}2(1+\nu)\Big]rdrdz,$$

$$\sigma_{ij}^{(0)}\equiv 0,\quad k=1,2,3...$$

Интеграл по границе S_u отсутствует, поскольку по контуру жесткого включения $U_r=U_z=0$.

Для обеспечения статической допустимости полей напряжений при реализации итерационной процедуры (4.13), необходимо выполнить следующие граничные условия:

$$\sigma_{rr}(2,z)=-P,\quad \tau_{rz}(2,z)=0,\quad z\in S_\sigma^1,$$

$$\sigma_{rr}(6,z)=0,\quad \tau_{rz}(6,z)=0,\quad z\in S_\sigma^2,$$

$$\sigma_{zz}(r,2)=\tau_{rz}(r,2)=0,\quad r\in S_\sigma^3,$$

$$\tau_{rz}(r,0)=0,\quad r\in S_{u_1}^1\cup S_{u_2}^1.$$

Кинематические граничные условия:

$$u_r(r,z)=u_z(r,z)=0\quad (r,z)\in S_u^2,$$

$$u_z(r,0)=0\quad (r,z)\in S_{u_1}^1\cup S_{u_2}^1.$$

Также при процедуре погружения образуется новая граница $S_{0_1}^1$, на которую удобно продлить условия симметрии, такие как на $S_{u_1}^1$ и $S_{u_2}^1$:

$$\tau_{rz}(r,0) = u_z(r,0) = 0 \quad (r,z) \in S_{0_1}^1.$$

Параметры материала: $E = 2.3E11$ Па, $\nu = 0{,}3$. Величина давления P = 10 Па.

Исходная задача была решена двумя методами: МГП в напряжениях (степень дискретизации 3267) и методом конечных элементов в перемещениях (степень дискретизации 3418). Для качественного сравнения решения приведем распределение характерных полей напряжений в реальной области, полученные обоими подходами (рис. 4.4-4.6).

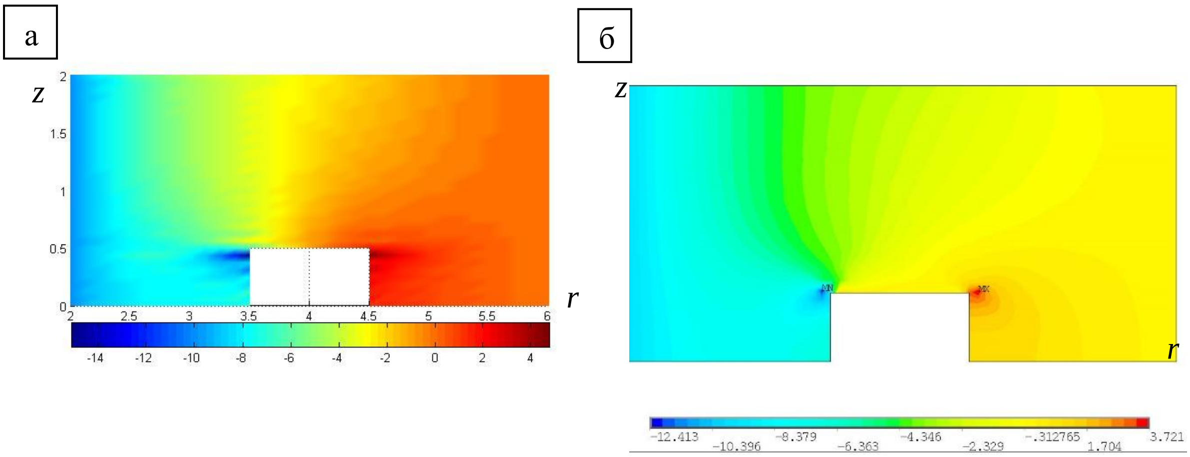


Рис. 4.4. Распределение σ_{rr}, *Па* а) МГП в напряжениях, б) МКЭ в перемещениях

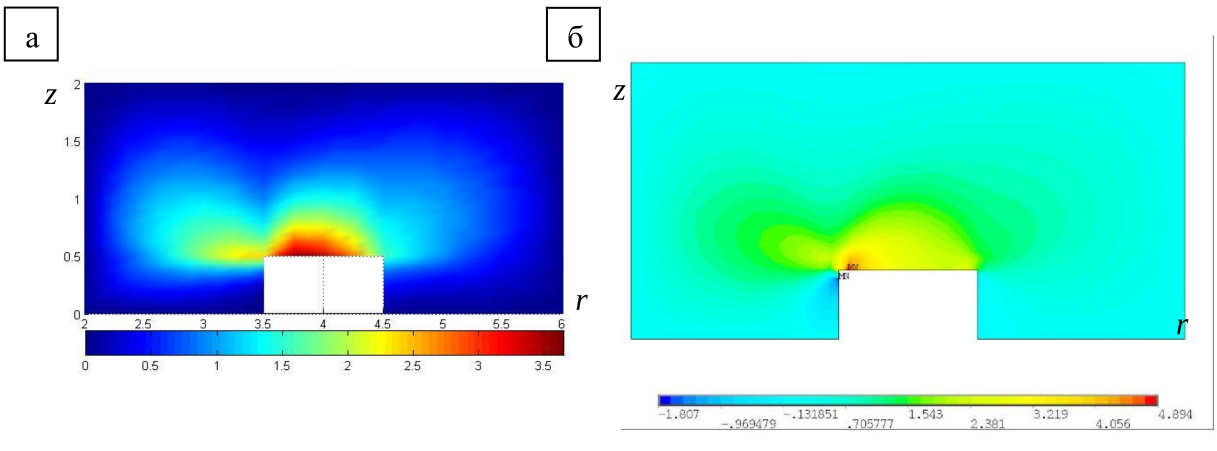


Рис. 4.5. Распределение τ_{rz}, *Па* а) МГП в напряжениях, б) МКЭ в перемещениях

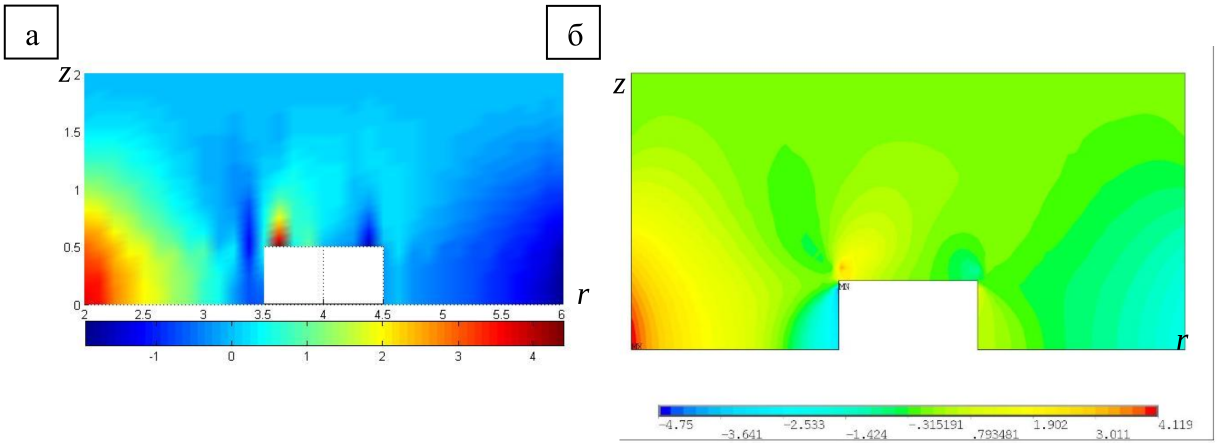
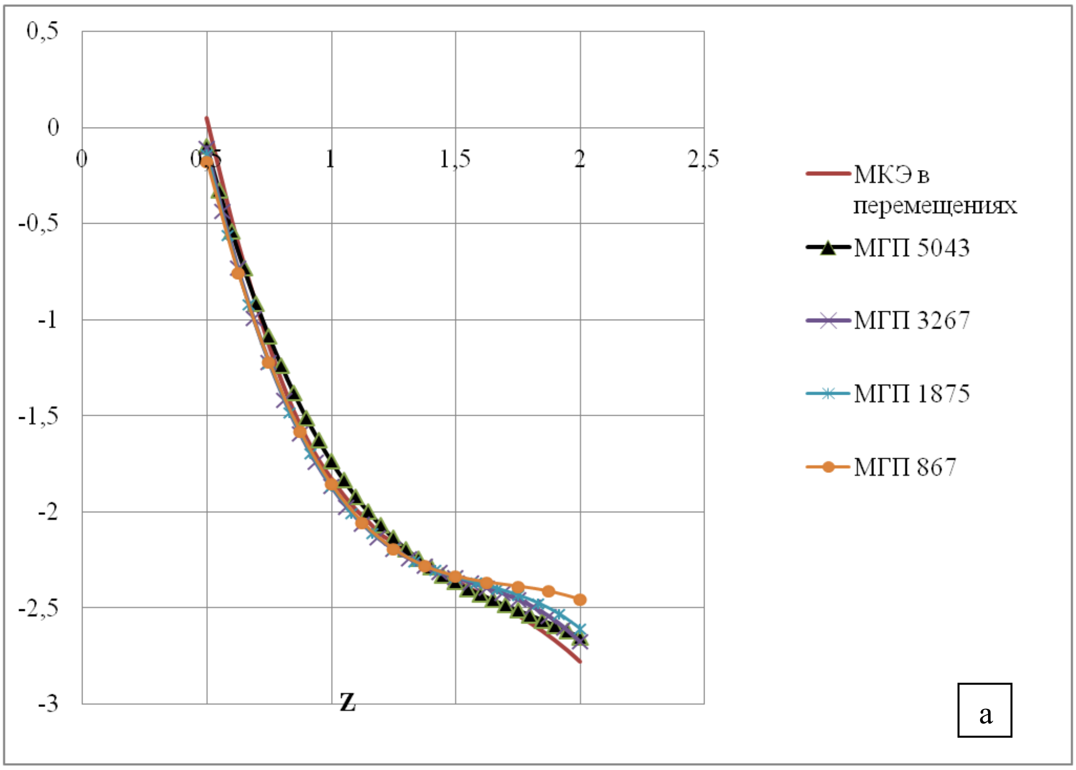


Рис. 4.6. Распределение σ_{zz}, *Па* а) МГП в напряжениях, б) МКЭ в перемещениях

Из рис. 4.4-4.6 видно, что результаты, полученные обоими методами достаточно близки, что подтверждает достоверность и правильность решения методом геометрического погружения в напряжениях.

Для установления сходимости итерационной процедуры МГП от степени дискретизации канонической области, была выполнена серия расчетов на последовательности равномерно сгущающихся сеток (рис. 4.7). В качестве эталонного решения взяты результаты, полученные методом конечных элементов в перемещениях (степень дискретизации 6088).



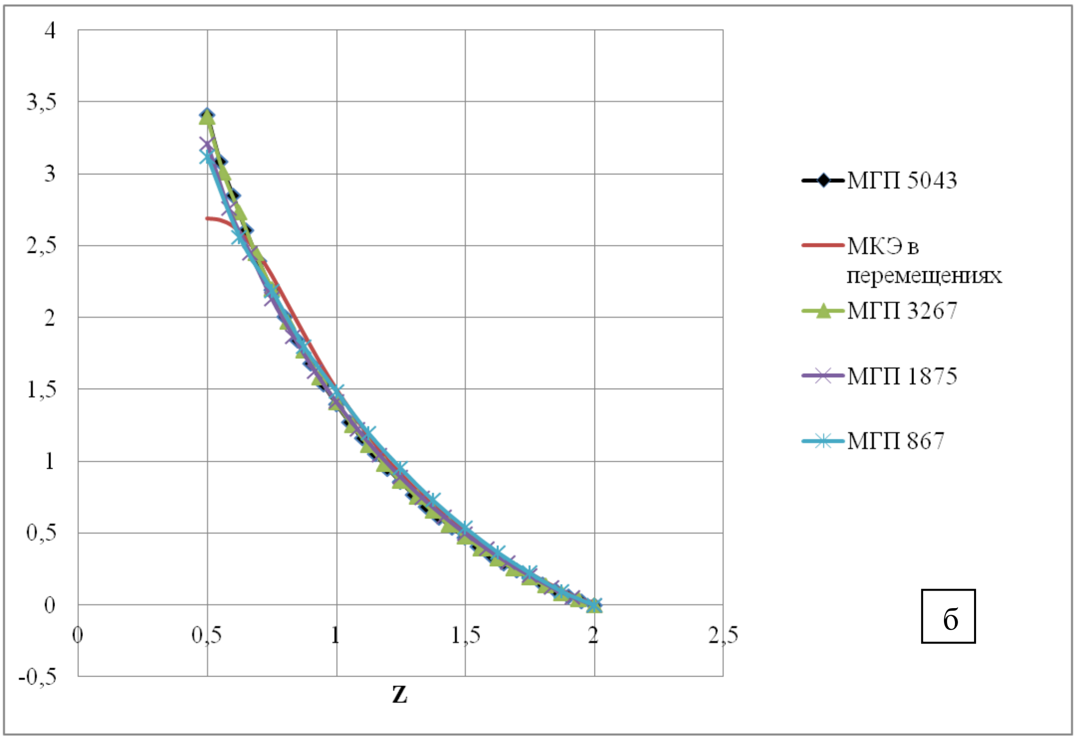


Рис. 4.7. Распределение компонент тензора напряжений в зависимости от числа степеней свободы по сечению цилиндра при $r = 4\ м$ а) σ_{rr}, *Па* б) σ_{zz}, *Па*

Установлено, что для данной задачи достаточно использование сетки с 3267 числом узловых неизвестных. При этом дальнейшее сгущение сетки к существенному изменению численного решения не приводит.

Для определения сходимости итерационной процедуры от числа итераций рассмотрим изменение относительной невязки на каждом шаге решения (рис. 4.8).

$$\frac{\left\|\left\{\delta^{(k+1)}\right\}-\left\{\delta^{(k)}\right\}\right\|}{\left\|\left\{\delta^{(k)}\right\}\right\|}$$

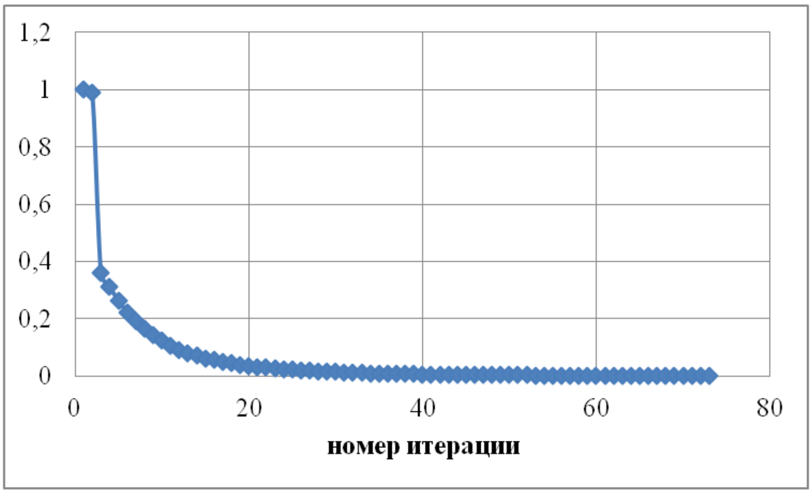


Рис. 4.8. Изменение относительной невязки от номера итерации

Из рис. 4.8 видно, что для получения качественного решения нам потребуется порядка 40 итераций. При дальнейшем увеличении номера итерации относительная невязка $\frac{\left\|\left\{\delta^{(k+1)}\right\}-\left\{\delta^{(k)}\right\}\right\|}{\left\|\left\{\delta^{(k)}\right\}\right\|}$ будет меньше 0.0001, что приведет к незначительному изменению результатов.

4.4. Практическое применение метода геометрического погружения в напряжениях для расчета осесимметричных резинометаллических амортизаторов.

В качестве примеров практического применения рассмотрим задачи определения напряженного состояния резинометаллических амортизаторов осесимметричной формы, имеющих широкое распространение в машиностроении, судостроении, автомобильной промышленности и других отраслях в качестве демпфирующих устройств. Для примера выбраны две типичных конструкции, условно названных «амортизатор 1» и «амортизатор 2».

Амортизатор 1. Конструкция цилиндрического амортизатора, предназначенного для компенсации продольных воздействий, представлена на рис. 4.9. Стальной элемент предполагается абсолютно жестким и непрерывно склеенным с резиной. На рис. 4.10 указаны возникшие в результате осуществления процедуры геометрического погружения область дополнения D_Δ и новые границы $S^1_{0_1}$ и $S^1_{0_2}$.

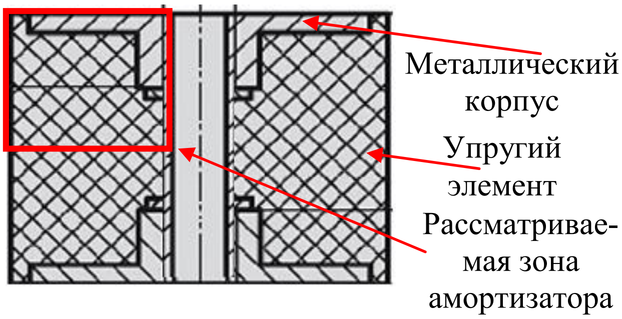


Рис. 4.9. Резинометаллический амортизатор, тип С

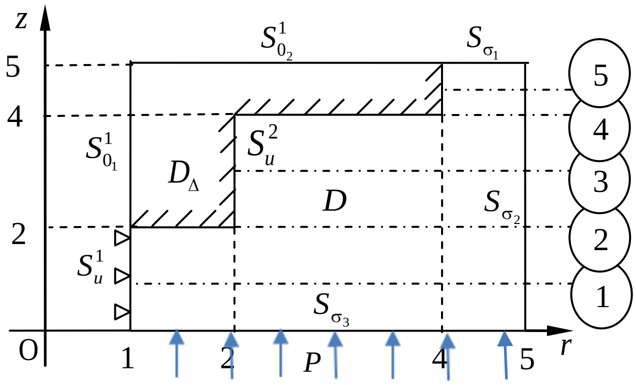


Рис. 4.10. Расчетная схема

Математическая постановка задачи включает в себя уравнение (3.5), кинематические граничные условия:

$$u_r(r,z)=u_z(r,z)=0 \quad (r,z)\in S_u^2,$$

$$u_r(r,z)=0, \quad (r,z)\in S_u^1\ ,$$

статические граничные условия:

$$\tau_{rz}(r,z)=\sigma_{zz}(r,z)=0 \quad (r,z)\in S_{\sigma_1},$$

$$\tau_{rz}(r,z)=\sigma_{rr}(r,z)=0 \quad (r,z)\in S_{\sigma_2},$$

$$\tau_{rz}(r,z)=0, \quad \sigma_{zz}(r,z)=-P \quad (r,z)\in S_{\sigma_3},$$

$$\tau_{rz}(r,z)=0 \quad (r,z)\in S_u^1,$$

граничные условия на новой границе:

$$\tau_{rz}(r,z)=0, \quad u_r(r,z)=0 \quad (r,z)\in S^1_{0_1},$$

$$u_r(r,z)=u_z(r,z)=0 \quad (r,z)\in S^1_{0_2}.$$

Параметры материала: $\nu = 0.5, \quad E = 2.3E6 \quad Па$.

Полученные результаты представлены распределением характерных компонент тензора напряжений по сечениям амортизатора (рис. 4.11-4.12), а так же картиной интенсивности напряжений во всей конструкции (рис. 4.13).

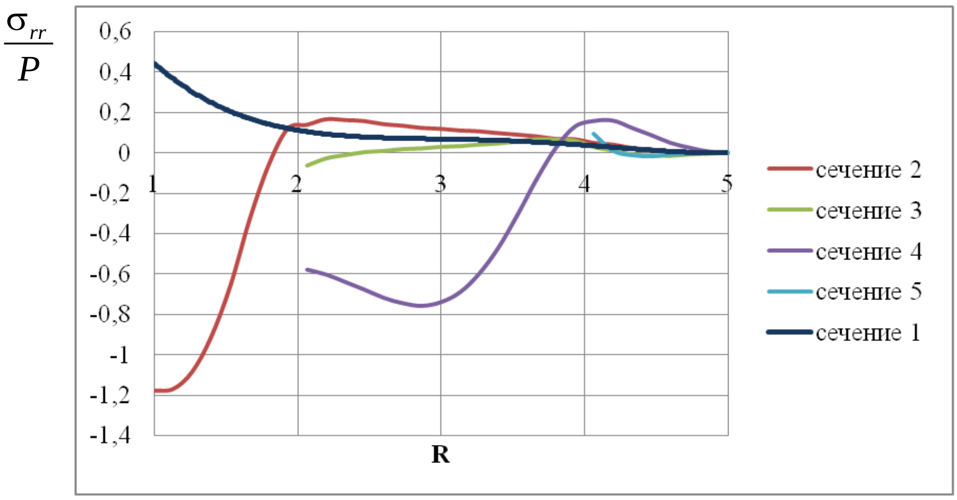


Рис. 4.11. Распределение $\frac{\sigma_{rr}}{P}$ по сечениям

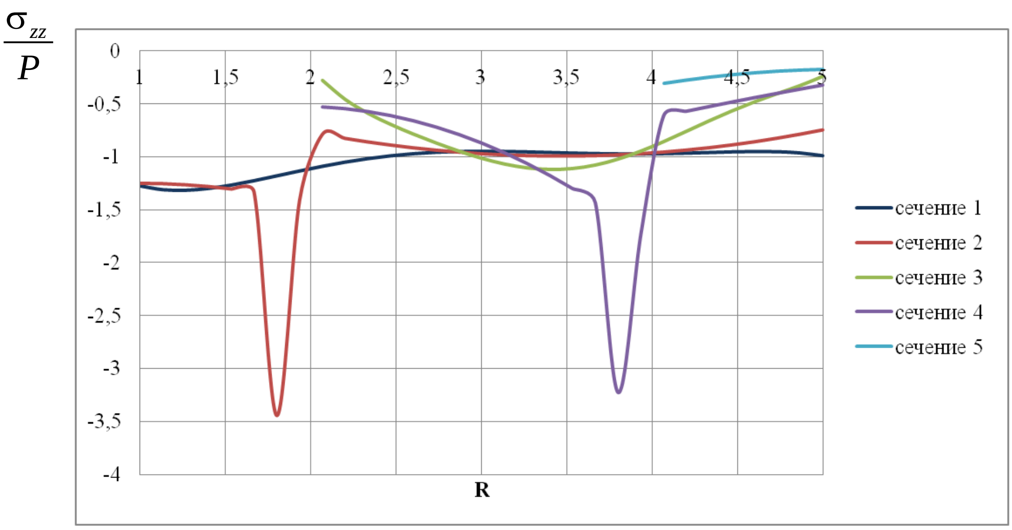


Рис. 4.12. Распределение $\frac{\sigma_{zz}}{P}$ по сечениям

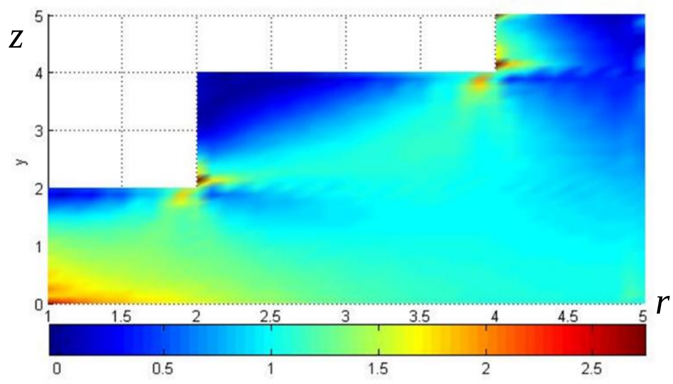


Рис. 4.13. Интенсивность напряжений, приведенная к величине нагрузки

Из рис.4.13 можно сделать выводы о самых нагруженных и ненагруженных областях амортизатора, что позволит в дальнейшем эффективно и рационально применять.

Амортизатор 2. Конструкция амортизатора в виде фигурной втулки, предназначенного для компенсации продольных воздействий, представлена на рис. 4.14. Стальные элементы предполагаются абсолютно жесткими и непрерывно склеенными с резиной. На рис. 4.15 изображена упрощенная расчетная схема и указаны возникшие в результате осуществления процедуры геометрического погружения область дополнения D_Δ и новая граница S_0^1.

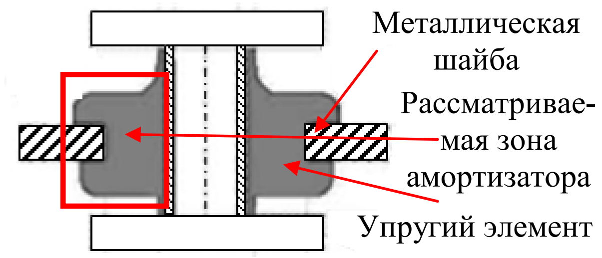


Рис. 4.14. Резинометаллический амортизатор в виде фигурной втулки

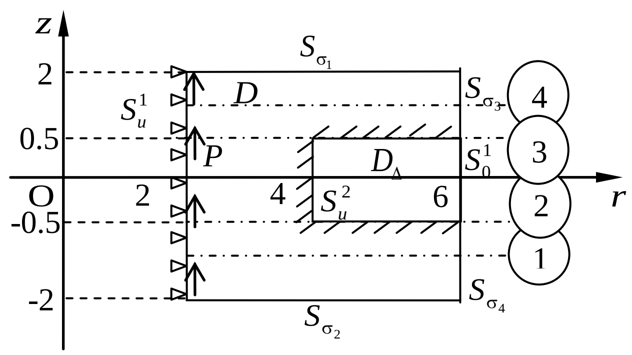


Рис. 4.15. Расчетная схема

Математическая постановка задачи включает в себя уравнение (3.5), кинематические граничные условия:

$$u_r(r,z)=u_z(r,z)=0 \quad (r,z)\in S_u^2,$$

$$u_r(r,z)=0 \quad (r,z)\in S_u^1,$$

статические граничные условия:

$$\tau_{rz}(r,z)=\sigma_{zz}(r,z)=0 \quad (r,z)\in S_{\sigma_1}\cup S_{\sigma_2},$$

$$\tau_{rz}(r,z)=\sigma_{rr}(r,z)=0 \quad (r,z)\in S_{\sigma_3}\cup S_{\sigma_4},$$

$$\tau_{rz}(r,z)=P \quad (r,z)\in S_u^1,$$

граничные условия на новой границе:

$$u_r(r,z)=u_z(r,z)=0 \quad (r,z)\in S_0^1 .$$

Параметры материала: $\nu=0.5, \quad E=2.3E6 \quad \Pi a$.

Полученные результаты представлены распределением характерных компонент тензора напряжений по сечениям амортизатора (рис. 4.16-4.17), а так же картиной интенсивности напряжений во всей конструкции (рис. 4.18).

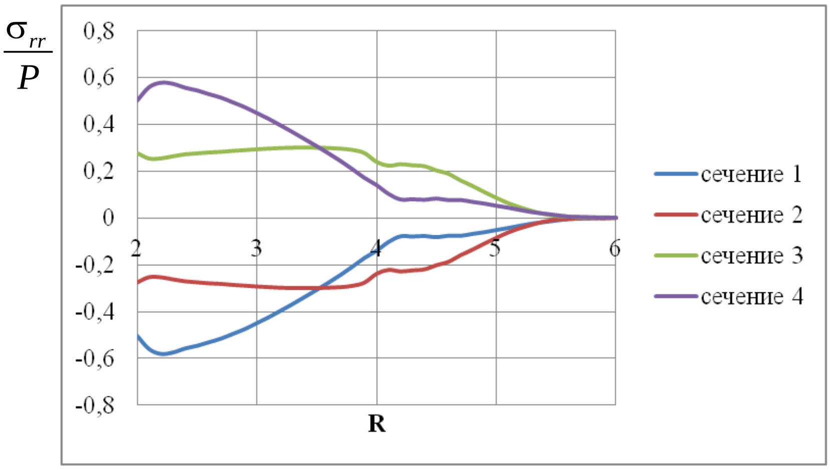


Рис. 4.16. Распределение $\frac{\sigma_{rr}}{P}$ по сечениям.

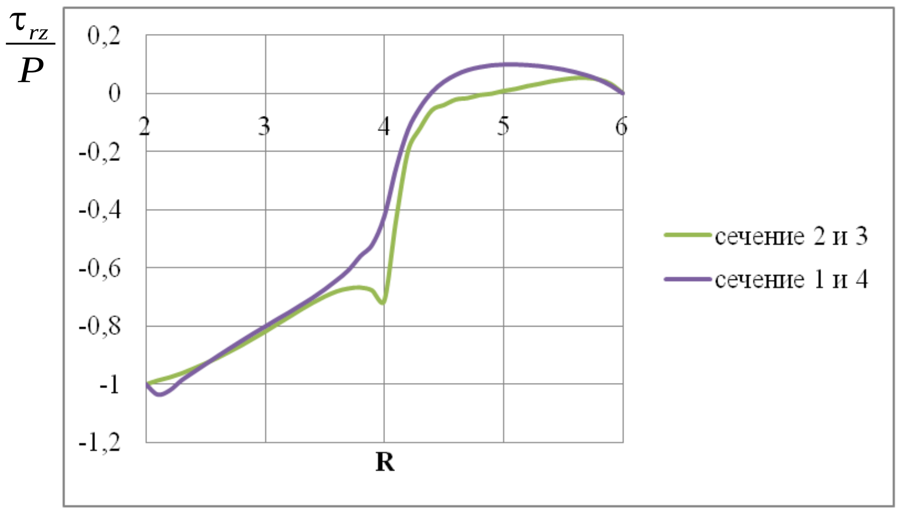


Рис. 4.17. Распределение $\frac{\tau_{rz}}{P}$ по сечениям.

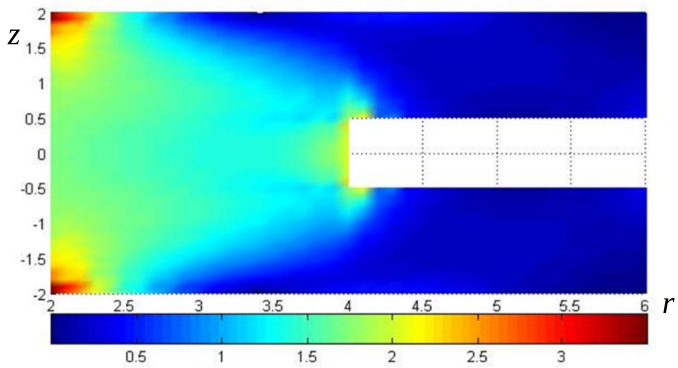


Рис. 4.18. Интенсивность напряжений, приведенная к величине нагрузки.

Отметим, что для проверки правильности поставленных задач, а так же для проверки сходимости алгоритма МГП были исследованы исходные задачи при $\nu = 0.28$, $E = 2.8E11$ $Па$, полученные поля напряжений сравнены с результатами метода конечных элементов в перемещениях. Качественно и количественно решения задачи методом геометрического погружения и методом конечных элементов в перемещениях достаточно близки, что позволяет сделать вывод о достоверности результатов, полученных МГП в напряжениях при расчете резинометаллических конструкций. Установлено, что для получения достоверных результатов необходима сетка порядка 4000 степеней свободы, при этом дальнейшее сгущение сетки к существенному изменению численного решения не приводит.

4.5. Выводы по главе.

1. Представлена вариационная постановка метода геометрического погружения в напряжениях для решения осесимметричных задач теории упругости в цилиндрической системе координат.
2. Предложен вариант построения дискретного аналога вариационного уравнения МГП методом конечных элементов в напряжениях, использующего равновесные поля аппроксимаций. Рассмотрена модельная осесимметричная задача о равновесии под действием внутреннего давления полого кругового цилиндра с абсолютно жестким кольцевым включением, демонстрирующая эффективное применение МГП с конечно-элементной реализацией; выполнен сравнительный анализ скорости и качества практической сходимости решения по предложенной схеме и решения, полученного с помощью традиционного МКЭ в перемещениях.
3. Продемонстрирована возможность применения известных осесимметричных конечных элементов в напряжениях канонической формы для решения задач теории упругости в областях сложной конфигурации.
4. В качестве приложений разработанных алгоритмов выполнены расчеты напряженного состояния двух типовых конструкций осесимметричных резинометаллических амортизаторов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования.

1. Проведено теоретическое обоснование метода геометрического погружения в напряжениях, доказана сходимость предложенной итерационно-вариационной процедуры МГП на основе принципа минимума дополнительной работы.

2. Описана процедура сведения краевой задачи теории упругости в напряжениях, сформулированной в области произвольной конфигурации, к итерационной последовательности краевых задач на канонической области. Получен вид дифференциальной формулировки краевой задачи теории упругости на канонической области, соответствующей вариационному уравнению метода геометрического погружения, построенному в рамках вариационного принципа Кастильяно. Установлен вид граничных условий, которые необходимо сформулировать на новых границах канонической области, возникших в результате процедуры геометрического погружения.

3. Предложенные алгоритмы метода геометрического погружения реализованы в виде программ в среде пакета MatLab.

4. Продемонстрировано практическое применение метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно и его конечно-элементной реализации в напряжениях на примере плоских и осесимметричных задач теории упругости.

5. Получено достаточно хорошее соответствие результатов определения полей напряжений в сравнении с аналитическим решением и численным решением традиционным МКЭ в перемещениях, что позволяет сделать вывод о возможности эффективного применения конечных прямоугольных элементов в напряжениях для получения решения двумерных (плоских и осесимметричных) задач в областях с криволинейными границами в том числе и для конструкций из несжимаемых (слабосжимаемых) материалов.

6. Продемонстрировано эффективное применение разработанных процедур МГП в напряжениях для решения прикладных задач расчета напряженного состояния плоских и осесимметричных резинометаллических амортизаторов.

Перспективы дальнейшей разработки темы.

На основе результатов, полученных при решении двумерных задач теории упругости методом геометрического погружения, основанного на вариационном принципе Кастильяно, разработанный подход можно рекомендовать для анализа трехмерных конструкций произвольной пространственной конфигурации. Так же описанную в работе методику можно эффективно использовать для расчетов резинометаллических конструкций, изделий из анизотропных, слабосжимаемых или несжимаемых материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Д.Ж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

2. Амензаде, Ю.А. Теория упругости / Ю.А. Амензаде. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.

3. Демидов, С.П. Теория упругости / С.П. Демидов. – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.

4. Папкович, П.Ф. Теория упругости / П.Ф. Папкович. – М:Оборонгиза, 1939. – 640 с.

5. Колтунов, М.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. / М.А. Колтунов.– М.: Высшая школа, 1975. – 526 с.

6. Победря, Б.Е. О статической задаче в напряжениях / Б.Е. Победря // Вести. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 2003. – № 3. – С. 61-67.

7. Победря Б.Е. О задаче в напряжениях. Доклады Академии наук. 1978. Т. 240. № 3. С. 564.

8. Победря Б.Е. Новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях//Докл. АН СССР. 1980. 253, № 2. 295-297.

9. Победря, Б.Е. О методах упругих решений. / Б.Е. Победря, С.В. Шешенин // Механика твердого тела. – 1987. – № 5. – С. 59.

10. Георгиевский, Д.В. О числе независимых уравнений совместности в механике деформируемого твердого тела / Д.В. Георгиевский, Б.Е. Победря // ПММ. – 2004. –Т. 68. –Вып. 6. –С. 1043-1048.

11. Pobedrya, B.E. Equivalence of formulations for problems in elasticity theory in terms of stresses / B.E. Pobedrya, D.V. Georgievskii // Russian J. Math. Physics. – 2006. –V. 13. –№ 2. –P. 203-209.

12. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 866 с.

13. Новожилов, В.В. Теория упругости / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1958. –370 с.

14. Kucher, V.A. Some properties of the boundary value problem of linear elasticity in terms of stresses / V.A. Kucher, X. Markenscoff, M.V. Paukshto // J. Elasticity. – 2004. –N 74(2). – P. 135-145.

15. Абруков, Д.А. Задача изгиба полуполосы со свободными продольными краями. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича / Д.А. Абруков // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 2 (20). –С. 57-77.

16. Абруков, Д.А. Задача изгиба полуполосы со свободными продольными краями. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича / Д.А. Абруков // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 2 (20). – С. 57-77.

17. Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля - Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78-98.

18. Коваленко, М.Д. Разложения Лагранжа по функциям Фадля -Папковича в обратно-симметрической задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы / М. Д. Коваленко, И.В. Меньшова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1 (15). – С. 81-90.

19. Коваленко, М.Д. Однородные решения теории упругости. Базисные свойства / М.Д. Коваленко, Н.В. Клейн // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – т.11. – №2. – С.209-225.

20. Коваленко, М.Д. Однородные решения теории упругости. Биортогональные разложения / М.Д. Коваленко, Н.В. Клейн // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11. – № 3. – С. 393-408.

21. Гасратова, Н. А. Решение некоторых осесимметричных задач теории упругости в напряжениях: дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Гасратова Наталья Александровна. – Санкт-Петербург, 2013. – 78 с.

22. Bazarenko, N.A. The contact problem for hollow and solid cylinders with stress-free faces / N.A. Bazarenko // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2008. – Т. 72. – № 2. – С. 214-225.

23. Нахатакян, Ф.Г. Решение плоской контактной задачи теории упругости с помощью модели упругого полупространства / Ф.Г. Нахатакян // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2011. – №5. – С. 63-67.

24. Nakhatakyan, F.G. Precise solution of Hertz contact problem for circular cylinders with parallel axes / F.G. Nakhatakyan // Russian Engineering Research. – 2011. – Т. 31. – № 3. – С. 193-196.

25. Vasil'ev, V.V. Stress tensor symmetry and singular solutions in the theory of elasticity / V.V. Vasil'ev // Mechanics of Solids. – 2010. – Т. 45. – № 2. – С. 205-213.

26. Vasil'ev, V.V. On the solution singularity in the plane elasticity problem for a cantilever strip / V.V. Vasil'ev, S.A. Lurie // Mechanics of Solids. – 2013. – Т. 48. – № 4. – С. 388-396.

27. Зенкевич, О.К. Конечные элементы и аппроксимация / О.К. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

28. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.

29. Самарский, А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 430 с.

30. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Батэ, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

31. Бате, К. Методы конечных элементов / К. Бате. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 1024 с.

32. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы / Р.М. Галлагер. –М: Мир, 1984. – 428 с.

33. Зенкевич, О.К. Метод конечных элементов в технике / О.К. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

34. Секулович, М. Метод конечных элементов / М. Секулович. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.

35. Моррей, Д.О. О сходимости решений в методе конечных элементов / Д.О.Моррей //Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – № 4. – С. 112-114.

36. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М.: Мир, 1977. – 350 с.

37. Марчук, Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

38. Игнатьев, А.В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 1 / А.В. Игнатьев // Вестник МГСУ. – 2014. – № 11. – С. 37-57.

39. Игнатьев, А.В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 2 / А.В. Игнатьев // Вестник МГСУ. – 2014. – № 12. –С. 40-59.

40. Игнатьев, А.В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 3 / А.В. Игнатьев // Вестник МГСУ. – 2015. – № 1. – С. 16-26.

41. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

42. Чекмарев, Д.Т. Численные схемы метода конечного элемента на "ажурных" сетках / Д.Т. Чекмарев // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2009. – № 2. – С. 49-54.

43. Жидков, А.В. Ажурная схема метода конечных элементов решения статических задач теории упругости / А.В. Жидков, С.В. Спирин, Д.Т. Чекмарев // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2012. – Т. 154. – № 4. – С. 26-32.

44. Чекмарев, Д.Т. Об одном способе построения двумерных 4-узловых и трехмерных 8-узловых конечных элементов для решения задач теории упругости

/ Д.Т. Чекмарев // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155. – № 3. – С. 150-158.

45. Киселев, А.П. Объемный конечный элемент в виде треугольной призмы с первыми производными узловых перемещений / А.П. Киселев, А.П. Николаев // Известия высших учебных заведений. Строительство. –2006. – №1. – С.13-18.

46. Сорокина, Е.И. Четырехугольный конечный элемент с узловыми неизвестными в виде перемещений и их производных / Е.И. Сорокина // Молодой ученый. – 2010. – № 6. – С. 34-37.

47. Гайджуров, П.П. Конечные элементы повышенной точности для решения трехмерных задач теории упругости / П.П. Гайджуров // Известия высших учебных заведений. Северо-кавказский регион. Серия: технические науки. – 2003. – №1. – С. 54-57.

48. Pian, T. Basis for finite element methods for solid continua / T. Pian, P. Tong // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1969. – Vol. 1. – No. 1. – Pp. 3—28.

49. Tong, P. A variational principle and the convergence of a finite-element method based on assumed stress distribution / P. Tong, T.H.H. Pian // International journal Solids Structures. – 1968. –Vol. 5. – Pp. 463-472.

50. Pian, T. H. H. A new formulation of hybrid/mixed finite elements / T.H.H. Pian, D.P. Chen, D. Kang // Comp. Struct. – 1983. – Vol. 16. – Pp.81-87 .

51. Moitinho de Almeida, J.P. A set of hybrid equilibrium finite element models for the analysis of three-dimensional solids / J.P. Moitinho de Almeida, O.J.B. Almeida Pereira // International journal for numerical methods in engineering – 1996. – vol. 39. –P. 2789-2802.

52. Atluri, S. Recent studies in hybrid and mixed finite element methods in mechanics / S. Atluri, P. Tong, H. Murakava // Conf. Hybrid and Mixed M, John Wiley. – 1983. – Pp. 51—71.

53. Gureeva, N.A. Solving a plane problem of elasticity theory with the use of a hybrid FEM formulation / N.A. Gureeva // Russian Aeronautics. – 2009. Т. 52. – № 2. –Pp. 138-144.

54. Тюкалов, Ю.Я. Решение задач строительной механики методом конечных элементов в напряжениях на основе функционала дополнительной энергии и принципа возможных перемещений: Дисс. д-ра. техн. наук: 05.23.17 / Тюкалов Юрий Яковлевич. – Киров, 2006. – 314с.

55. Тюкалов, Ю.Я. Решение объемных задач теории упругости методом конечных элементов в напряжениях / Ю.Я. Тюкалов // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2006. – № 2. – С. 19-26.

56. Игнатьев, В.А. Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики / Игнатьев В.А., Игнатьев А.В., Жиделев А.В.. – Волгоград: ВолгГАСУ, 2006. – 172 с

57. Herrmann, L.R. Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem / Herrmann L.R. // AIAA J. – 1965. – Vol. 3. – No. 10. – Pp. 1896—1900.

58. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 490 с.

59. . Fraeijs de Veubeke, B.M Discretization of stress fields in the finite element method / B.M Fraeijs de Veubeke, A. Millard // Franklin Inst. –1976. – Vol. 302. – № 5-6. – Pp. 389-412.

60. Spilker, R.L. A study of axisymmetric solid of revolution elements based on the assumed-stress hybrid model / R.L. Spilker, T.H.H. Pian // Computers and structures. – 1978. – Vol.9. – Pp. 273-279.

61. Spilker, R.L. Improved hybrid-stress axisymmetric elements including behavior for nearly incompressible materials / R.L. Spilker // International journal for numerical methods in engineering. – 1981. – Vol.17. – Pp. 483-501.

62. Sze, K.Y. Transition finite element families for adaptive analysis of axisymmetric elasticity problems / K.Y. Sze, D. Wu // Finite Elements in Analysis and Design. – 2011. – Vol.47. – pp. 360-372.

63. Gallagher, R.H. Finite element structural analysis and complementary energy / R.H. Gallagher // Finite element in analysis and design. – 1993. – Vol. 13. – Pp. 115-126.

64. Sarigul, N. Assumed stress function finite element method: two-dimensional elasticity/ N. Sarigul, R.H. Gallagher // .International journal for numerical methods in engineering – 1989. – Vol.18. – Pp. 1577-1598.

65. Watwood, V.B.Jr. An equilibrium stress field model for finite element solutions of two-dimensional elastostatic problem / V.B. Jr. Watwood, B.J. Hartz // International journal Solids Structures – 1968. – Vol. 4. – Pp. 857-873.

66. Fraeijs de Veubeke, B.M. Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method / B.M. Fraeijs de Veubeke // International journal for numerical methods in engineering. – 2001. – Vol. 52. – Pp. 287-342.

67. Sarigul, N. Assumed stress function finite element method: PH.D / Nesrin Sarigul. – The University of Arizona, 1984 . – 198 pp.

68. Azene, M A finite element complementary energy formulation for plane elastoplastic stress analysis: PH.D / Muluneh Azene. – Texas Tech University, 1979 . – 141 pp.

69. Harvey, J.W. Dual analysis of plane stress problem by commonly based finite elements / J.W. Harvey // International journal for numerical methods in engineering. – 1983. – Vol. 19. – Pp. 971-984.

70. Кузнецова, Ю.С. О конечном элементе на основе вариационного принципа Кастильяно для плоских задач теории упругости / Ю.С. Кузнецова (Ю.С. Суходолова), Труфанов Н.А. // Вестник пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2012. – № 1. – С.168-178.

71. Moitinho de Almeida, J. P. A set of hybrid equilibrium finite element models for the analysis of three-dimensional solids / J. P. Moitinho de Almeida, O.J.B. Almeida Pereira // International journal for numerical methods in engineering. – 1996. – Vol. 39. – Pp. 2789-2802.

72. Almeida Pereira, O.J.B. Equilibrium finite elements and dual analysis in three-dimensional elastostatics / O.J.B. Almeida Pereira, J.P. Moitinho de Almeida //

Education, Practice and Promotion of Computational Methods in Engineering, Techno-Press. – Seoul, 1995. – pp. 955-960.

73. Robinson, J. Basis for isoparametric stress elements / J. Robinson // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 1973. – Vol. 2. –Pp. 43-63.

74. Гузь, А. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. – Киев: Выща шк., 1989. – 352 с.

75. Гузь, А.Н., Метод возмущения формы границы в механике сплошной среды (обзор)/ А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш // Прикл. механика. – 1987. – Т. 23. – № 9. – С. 3-29.

76. Гузь, А.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. – Киев: Выща шк., 1982. – 352 с.

77. Саульев, В.К. О решении некоторых краевых задач на быстродействующих вычислителных машинах методом фиктивных областей / В.К. Саульев // Сибирский математический журнал. – 1963. – т.4. – №4. – с.912-925.1.

78. Бахвалов, Н.С. Решение первой краевой задачи для системы уравнений теории упругости методом фиктивных областей / Н.С. Бахвалов. – М.:ОВМ АН СССР, 1988. – 14с.

79. Бугров, А.Н. Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными эллиптического типа / А.Н. Бугров // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Ч.2 / Новосибирск, 1978. – с.24-35.

80. Вабищев, П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики / П.Н. Вабищев. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1991. – 160 с.

81. Коновалов, А.Н. Об одном варианте метода фиктивных областей / А.Н. Коновалов // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной матетматики – Новосибирск, 1975. – с. 191-199.

82. Войцеховский, С.А. Метод фиктивных областей для эллиптических уравнений второго порядка / С.А. Войцеховский // 1981. – Деп. в ВИНИТИ. – 2455-81.

83. Руховец, Л.А. Замечание к методу фиктивных областей / Л.А. Руховец // Дифференциальные уравнения. – 1967. – 3,4. С. 698-701.

84. Копченов, В.Д. Метод фиктивных областей для второй и третьей краевых задач / В.Д. Копченов // Труды МИ АН СССР. – 1974. - 131. – с.119-127.

85. Астраханцев, Г.П. Метод фиктивных областей для эллиптических уравнений второго порядка с естественными граничными условиями / Г.П. Астраханцев // ЖВМ и МФ. – 1978. – 18;1. – С. 118-125.

86. Коновалов, А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения / А.Н. Коновалов // Численные методы механики сплошной среды. – 1973. – Т. 4. – № 2. – С. 109–115. 11.

87. Брусникин, М.Б. Об эффективных алгоритмах решения задач метода фиктивных областей в многосвязном случае / М.Б. Брусникин // Докл. РАН. – 2002. Т. 387, № 2. С. 151–155.

88. Ясницкий, Л.Н. Об одном способе решения задач теории гармонических функций и линейной теории упругости / Л.Н. Ясницкий // Прочностные и гидравлические характеристики машин и конструкций. Пермь. Изд. Пермского политехнического ин-та. – 1973. С.78-83.

89. Тарантина, А.В. Влияние расположения особых точек искомого решения на сходимость метода фиктивных канонических областей. Численные иллюстрации / А.В. Тарантина, Л.Н. Ясницкий // Динамика и прочность машин. Вестник ПГТУ. №4. – 2003. –С.47-55.

90. Ясницкий, Л.Н. Аналитический метод решения краевых задач теории упругости для тел сложной конфигурации / Л.Н. Ясницкий // Прочностные и динамические характеристики машин и конструкций. Пермь. Изд-во Пермского политехнического ин-та, 1988. С.16-23.

91. Ясницкий, Л.Н. Метод фиктивных канонических областей в механике сплошных сред / Л.Н. Ясницкий. – М.: Наука, 1992. – 128 с.

92. Ясницкий, Л.Н. Об одном способе решения задач теории гармонических функций и линейной теории упругости / Л.Н. Ясницкий // Прочностные и гидравлические характеристики машин и конструкций. Пермь. Изд. Пермского политехнического ин-та, 1973. С.78-83.

93. Гусман, С.Ч. Обоснование выбора фиктивных канонических областей / С.Ч. Гусман, Л. Н. Ясницкий // Вестник Пермского университета. Математика, информатика, механика. – 1994. – Вып.1. – С.55- 65.

94. Гладкий, С.Л. О возможностях метода фиктивных канонических областей для решения задач теории упругости / С.Л. Гладкий, Н.И. Симакина, Л.Н. Ясницкий // Динамика и прочность машин. Вестник Пермского государственного технического университета. – 2000. – С.114-122.

95. Гладкий, С.Л. Верификация численных расчетов методом фиктивных канонических областей / С.Л. Гладкий, Н.Ф. Таланцев, Л.Н. Ясницкий // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2006. – № 4. – С.18-27.

96. Гладкий, С.Л. Алгоритмы оптимизации базисных разложений в методе фиктивных канонических областей / С.Л. Гладкий, Л.Н. Ясницкий // Динамика и прочность машин. Вестник Вестник Пермского государственного технического университета №3. – 2001. – С.131- 141.

97. Гладкий, С.Л. Об оценке погрешности метода фиктивных канонических областей / С.Л. Гладкий, Л.Н. Ясницкий // Известия АН. Механика твердого тела. – 2002. – №6. – С.69-75.

98. Шардаков, И.Н. Метод геометрического погружения в теории упругости / И.Н. Шардаков, Н.А. Труфанов, В.П. Матвеенко. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 298 с.

99. Матвеенко, В.П. Метод геометрического погружения и его численная реализация для решения задач теории упругости / В.П. Матвеенко, Н.А.

Труфанов, И.Н. Шардаков // Матем. моделирование, 2000, том 12, номер 5, с. 49–54.

100. Шардаков, И.Н. Метод геометрического погружения для решения краевых задач теории упругости / И.Н. Шардаков, И.Е. Трояновский , Н.А. Труфанов. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – 66 с.

101. Попов, С.В. Многошаговые итерационные процедуры в конечно-элементной реализации метода геометрического погружения при решении пространственных задач теории упругости / С.В. Попов // Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика. – 1996. – №1. – С.82-85.

102. Трояновский, И.Е. Обоснование метода геометрического погружения для краевых задач теории упругости / И.Е. Трояновский, И.Н. Шардаков, Н.А. Труфанов // Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. Свердловск, 1986. С. 107-111.

103. Труфанов, Н.А. МКЭ-реализация метода геометрического погружения для пространственных задач теории упругости в цилиндрических координатах. 1. Основные соотношения / Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков // Статические и динамические краевые задачи механики деформируемых тел. Свердловск, 1989. С.36-45.

104. Труфанов, Н.А. МКЭ-реализация метода геометрического погружения для пространственных задач теории упругости в цилиндрических координатах. 2. Численный пример / Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков // Статические и динамические краевые задачи механики деформируемых тел. Свердловск, 1989. С.46-50.

105. Труфанов, Н.А. Применение метода геометрического погружения для численного расчета пространственных конструкций / Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков // Расчеты на прочность. М., 1990. Вып.31. С. 127-134.

106. Шардаков, И.Н. Решение краевых задач теории упругости методом геометрического погружения в дифференциальной постановке / Шардаков И.Н. // Механика и прикладная математика. Тула, 1988. С.61- 64.

107. Шардаков, И.Н. Конечно-элементная реализация метода геометрического погружения для двумерных упругих задач / И.Н. Шардаков, Н.А. Труфанов // Напряжения и деформации в конструкциях и материалах. Свердловск, 1985. С. 19-24.

108. Шардаков, И.Н. Применение метода геометрического погружения для решения осесимметричных задач теории упругости / И.Н. Шардаков, Н.А. Труфанов, М.А. Труфанова // Численные методы в исследованиях напряжений и деформаций. Свердловск, 1987. С.51-56.

109. Попов, С.В. Численная реализация метода геометрического погружения для пространственных задач теории упругости и ее вычислительные аспекты: Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Сергей Владимирович Попов. – Пермь, 1997. – 131с.

110. Труфанова, М.А. Вариационно-разностная реализация метода геометрического погружения в задачах теории упругости: Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Марина Александровна Труфанова. – Пермь, 1994. – 144с.

111. Булавин, П.В. Метод геометрического погружения в дифференциальной постановке и его численная реализация в трехмерных задачах теории упругости: Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Павел Владимирович Булавин. – Пермь, 1994. – 71с.

112. Пустовойт, К.С. Некоторые пространственные динамические задачи теории упругости и вязкоупругости для тел сложной формы: Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Константин Семенович Пустовойт. – Москва, 1984. – 164с.

113. Каменских, А.А. Численная реализация метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно / А.А. Каменских, Н.А. Труфанов, В.П. Матвеенко // Вестник пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2010. – №3. – С. 5-18.

114. Матвеенко, В.П. Конечно-элементная реализация метода геометрического погружения применительно к плоской задаче теории упругости в напряжениях / В.П. Матвеенко, А.А. Осипанов // Модели и методы исследования упругого и неупругого поведения материалов и конструкций. Свердловск, 1987. С. 11-16.

115. Победря, Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б.Е. Победря. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 343 с.

116. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. –М.: Мир, 1980. – 512 с

117. Соболев, С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев. – М.: Гостехиздат, 1947. – 440 с.

118. Норри, Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри. – М.: Мир, 1981. – 304 с.

119. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука 1966. – 708 с.

120. Труфанов, Н.А. Конечно-элементная реализация метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно для плоской задачи теории упругости / Н.А. Труфанов, Ю.С. Кузнецова (Ю.С. Суходолова) // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2013, №1. - С. 221-234.

121. Деревянкина, П.О. Теоретические положения метода геометрического погружения в напряжениях / П.О. Деревянкина, Ю.С. Кузнецова, Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т.7, № 3. – С. 317-330. (Входит в перечень ВАК).

122. Кузнецова, Ю.С. МКЭ-реализация метода геометрического погружения в напряжениях на примере плоских задач теории упругости / Ю.С. Кузнецова, Н.А. Труфанов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т.7, № 4. – С.460-471. (Входит в перечень ВАК).

123. Kuznetsova, Y.S. Application of the geometric immersion method based on the Castigliano variational principle for the axisymmetric problems of

elasticity theory / Y.S. Kuznetsova, N.A. Vorobyev, N.A. Trufanov // IOP: Materials Science and Engineering. – 2016. –p.726-732 (Scopus).

124. Кузнецова, Ю.С. О методе конечных элементов в напряжениях и варианте его реализации на основе процедуры геометрического погружения / Ю.С. Кузнецова, Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков // В книге: XIX Зимняя школа по механике сплошных сред: Тезисы докладов. – 2015. – С. 173.

125. Кузнецова, Ю.С. Реализация метода конечных элементов в напряжениях на основе итерационной процедуры метода геометрического погружения / Ю.С. Кузнецова, Н.А Труфанов., И.Н. Шардаков // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015), 24-31 мая 2015 г., Алушта. – М.: МАИ, 2015. – С.298-299.

126. Труфанов, Н.А. Применение метода геометрического погружения в напряжениях при решении задач теории упругости для несжимаемого и слабосжимаемого материала / Н.А. Труфанов, Ю.С. Кузнецова // Проблемы деформирования и разрушения материалов и конструкций: тез. докл. Всероссийской научн. Конференции. – Пермь, 17-19 июня 2015. – С.63.

127. Труфанов, Н.А. Итерационная процедура реализации вариационного принципа Кастильяно для задач теории упругости на основе метода геометрического погружения / Н.А. Труфанов, Ю.С. Кузнецова // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. – Казань, 2015. – С. 3800-3802.

128. Труфанов, Н.А. Метод геометрического погружения для решения осесимметричных задач теории упругости в напряжениях / Н.А. Труфанов, Ю.С. Кузнецова, Н.А. Воробьев // В книге: XX Зимняя школа по механике сплошных сред: Тезисы докладов. – 2017. – С. 348.

129. Воробьев, Н.А. Метод геометрического погружения в напряжениях и его реализация для плоских задач теории упругости с помощью метода ритца / Н.А. Воробьев, Ю.С. Кузнецова, Н.А. Труфанов // Математическое

моделирование в естественных науках: материалы XXV всерос. шк.-конф. мол. ученых и студентов, г.Пермь, 5-8 окт. 2016г. / ПНИПУ - Пермь: изд-во ПНИПУ, 2016, с.471-475. - 1 электрон. опт. диск (CD ROM)

130. Воробьев, Н.А. Применение метода геометрического погружения в напряжениях для решения осесимметричных задач теории упругости / Н.А. Воробьев, Ю.С. Кузнецова, Н.А. Труфанов // Математическое моделирование в естественных науках: материалы XXV всерос. шк.-конф. мол. ученых и студентов, г.Пермь, 5-8 окт. 2016г. / ПНИПУ- Пермь: изд-во ПНИПУ, 2016, с.475-479. - 1 электрон. опт. диск (CD ROM).