

На правах рукописи



Яковлева Екатерина Михайловна

**Краевые задачи о смешанном нагружении тел с разрезами с учетом накопления
рассеянных повреждений в связанной постановке**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Самара – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении Высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: **Степанова Лариса Валентиновна**, доктор физико–математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)», г. Самара.

Официальные оппоненты: **Радченко Владимир Павлович**, доктор физико–математических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», г. Самара.

Келлер Илья Эрнстович, доктор физико–математических наук, доцент, научный сотрудник ФГБУН «Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН», г. Пермь.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Казанский научный центр Российской академии наук, г. Казань.

Защита состоится « **27** » **сентября 2016 г.** в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 004.012.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт механики сплошных сред УрО РАН по адресу: 614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, тел: (342) 237–84–61; факс: (342) 237–84–87.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Институт механики сплошных сред» Уральского отделения РАН: www.icmm.ru.

Автореферат разослан « » _____ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, доцент



/ А.Л. Зуев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень её разработанности. Анализ распределений напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины трещины является одной из фундаментальных задач механики трещин, представляющей интерес с теоретической, экспериментальной и вычислительной точек зрения. В настоящее время многие вопросы, связанные с нахождением напряженно – деформированного состояния вблизи вершины дефекта, остаются открытыми. Сейчас в механике трещин и, в целом, в механике разрушения сложилось понимание процесса разрушения как процесса многомасштабного и многоуровневого, для описания основных закономерностей которого следует прибегать к многомасштабным моделям. В рамках многоуровневого подхода процесс разрушения моделируется с помощью различных определяющих соотношений на различных расстояниях от вершины трещины с помощью введения полей напряжений с различным асимптотическим поведением у вершины трещины. При построении решения задачи в целом представления, работающие на разных расстояниях от кончика трещины, сращиваются в зонах, где справедливы асимптотики соседних областей. Одним из наиболее распространенных математических методов построения распределений напряжений, деформаций и перемещений у кончика трещины является асимптотический анализ, базирующийся на подходах, развитых в асимптотической теории. Определение напряженно – деформированного состояния вблизи кончика трещины в материале со степенным законом упрочнения с помощью асимптотических разложений полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины и построение высших приближений асимптотических разложений являлись предметом многочисленных исследований на протяжении многих лет, начиная с классических работ Дж. Хатчинсона, Дж. Райса и Дж. Розенгрена до работ самого последнего времени. В целом, задачи определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в условиях пластического деформирования и ползучести рассматривались Анниным Б.Д., Астафьевым В.И., Ломакиным Е.В., Матвиенко Ю.Г., Морозовым Е.М., Никишковым Г.П., Черепановым Г.П., Шлянниковым В.Н., Anheuser M., Bui H.D., Cai Y., Chaboche J.L., Desmorat R., Edmunds T.M., Gross D., Hui C.Y., Hutchinson J.W., Kattan P.I., Kuna M., Lee S.B., Lemaitre J., Murakami S., Rice J.R., Riedel H., Rosengren G.F., Ruina A., Shih C.F., Sih G.C., Tang X.S., Voyiadjis G.H., Wei R.P., Willis J.R., Zhang X., Zhang W., Zhao J.

Исследованию напряженно – деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения образца с дефектом посвящен целый ряд исследований. Монография Шлянникова В.Н. [1]¹ посвящена критериям и параметрам

¹ [1] Shlyannikov V.N. Elastic-Plastic Mixed-Mode Fracture Criteria and Parameters // Berlin, Springer, 2003. – 246 p.
 [2] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. An inclined surface crack subject to biaxial loading // International Journal of Solid and Structures, 2011. – V. 48. – Issues 11-12. – p. 1778–1790.
 [3] Shlyannikov V.N., Boychenko N.V., Tartygasheva A.M. In-plane and out-of-plane crack-tip constraint effects under biaxial nonlinear deformation // Engineering Fracture Mechanics, 2011. – V. 78. – p. 1771–1783.
 [4] Shlyannikov V.N., Boychenko N.V., Tumanov A.V., Fernandez-Canteli A. The elastic and plastic constraint parameters for three-dimensional problems // Engineering Fracture Mechanics, 2014. – V.127. – p. 83–96.
 [5] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Characterization of crack tip stress fields in test specimens by mode mixity parameters // International Journal of Fracture, 2014. – V. 185. – Issue 1. – p. 49–76.
 [6] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Boychenko N.V. A creep stress intensity factor approach to creep–fatigue crack growth // Engineering Fracture Mechanics, 2015. – V. 142. – p. 201-219.

разрушения для упругопластических тел с трещинами в условиях смешанного нагружения. В [2] выполнены численные расчеты полей напряжений в упругопластической пластине с наклонной полуэллиптической трещиной для различных случаев двухосного нагружения. Рассмотрены различные типы смешанного нагружения и различные углы наклона полуэллиптической трещины. Численные расчеты выполнены для различных геометрий полуэллиптической трещины с целью изучения эффектов двухосного нагружения и различных видов смешанного деформирования на напряженно – деформированное состояние у фронта трещины и область пластического деформирования. В работах [3,4] обсуждаются результаты экспериментов на смешанное нагружение трехмерных образцов с дефектами и выполнен конечно – элементный анализ эффектов стеснения и их влияния на напряженно – деформированное состояние у фронта трещины. В [4] показано, что пластический коэффициент интенсивности напряжения может быть использован в качестве единой характеристики разрушения для широкого диапазона геометрий образцов и видов нагружения. В [5] приведены аналитические и численные решения для всего спектра смешанных форм нагружения для различных типов образцов с трещиной. Показано, что введенный пластический коэффициент интенсивности напряжений может быть использован для характеристики полей напряжений у вершины трещины для образцов различной геометрии в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм деформирования для случая плоского напряженного и плоского деформированного состояния. В [6] был введен новый параметр для характеристики трещиностойкости элементов конструкций, находящихся под действием высоких температур. Параметр вводится по аналогии с пластическим коэффициентом интенсивности напряжений и может быть назван коэффициентом интенсивности напряжений в условиях ползучести. С использованием новой характеристики трещиностойкости был разработан подход для оценки роста трещины в условиях взаимодействия ползучести и усталостного нагружения. Предложен численный метод определения напряженно – деформированного состояния вблизи прямолинейного и криволинейного фронта трещины. В [6] описываются экспериментальные результаты, подтверждающие проведенные теоретические исследования и численные расчеты.

Целью данной диссертационной работы является определение напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения элементов конструкций в материалах со степенными определяющими уравнениями и учет процессов накопления рассеянных повреждений вблизи кончика трещины в связанной (ползучесть – поврежденность) постановке задачи в полном диапазоне смешанных форм деформирования.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Построение математической модели задачи определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины для материала со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного нагружения. Сведение проблемы к нелинейной задаче на собственные значения.
2. Разработка численного метода определения всего спектра собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения полей напряжений, деформаций и перемещений в окрестности вершины трещины в условиях

смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм деформирования от чистого нормального отрыва до чистого поперечного сдвига.

3. Анализ собственного значения нелинейной задачи на собственные значения, отвечающего проблеме Хатчинсона – Райса – Розенгрена (ХРР) для смешанного деформирования в предположении реализации плоского напряженного и плоского деформированного состояния: численное определение собственных значений и приближенное аналитическое определение собственных значений с помощью метода искусственного малого параметра.

4. Нахождение всего спектра собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы отыскания напряженно – деформированного состояния у вершины трещины при смешанном нагружении для плоского напряженного и плоского деформированного состояния.

5. Определение полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и поля сплошности вблизи вершины неподвижной трещины в условиях высокотемпературной ползучести при смешанном нагружении в связанной (ползучесть – поврежденность) постановке задачи.

6. Асимптотический анализ полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и поля сплошности в окрестности вершины трещины и определение геометрии области полностью поврежденного материала, моделируемой в окрестности вершины трещины.

7. Проведение численных экспериментов для исследования конфигураций области полностью поврежденного материала, угловых распределений полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности для различных значений показателя ползучести и параметра смешанности нагружения.

Методология и методы диссертационного исследования. В диссертационной работе построены асимптотические решения класса задач определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в среде с поврежденностью. Полученный класс решений базируется на основных положениях механики сплошных сред: механики разрушения и континуальной механики поврежденности. Решение основывается на методологии и подходах асимптотической теории и методов возмущений. В диссертации используется метод разложения по собственным функциям и метод искусственного малого параметра. Численные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений найдены с использованием классических алгоритмов численного анализа: посредством семейства методов Рунге – Кутты – Фельберга.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Разработан новый метод и алгоритм численного определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения для полного диапазона смешанных форм деформирования.

2. Разработаны программы, реализующие численные алгоритмы нахождения полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности для различных значений показателя ползучести и параметра смешанности нагружения.

3. Найдена новая асимптотика поля напряжений у вершины трещины вне зоны полностью поврежденного материала в условиях смешанного деформирования.

4. Построены конфигурации области полностью поврежденного материала у вершины трещины для полного диапазона смешанных форм деформирования от чистого поперечного сдвига до чистого нормального отрыва.

Практическая значимость диссертационной работы определяется тем, что полученный класс асимптотических решений дает возможность правильно описать структуру окрестности вершины трещины и построить конфигурации области полностью поврежденного материала, окружающей вершину трещины.

После осуществления процедуры введения параметра сплошности в расчетную схему метода конечных элементов, полученный класс асимптотических решений может быть использован на практике для анализа напряженно – деформированного состояния реальных элементов конструкций, для создания современных экспертных систем, для разработки современных ремонтных технологий различных элементов конструкций.

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается строгостью математической постановки задач, использованием фундаментальных положений механики сплошных сред, теории дифференциальных уравнений, асимптотической теории и методов возмущений и апробацией разработанных вычислительных алгоритмов на различных примерах.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих российских и международных конференциях: 19th European Conference on Fracture, Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety (Russia, Kazan, 2012); Третья международная конференция "Математическая физика и ее приложения" (Россия, Самара, 2012); XL Summer School–Conference "Advanced Problems in Mechanics" (Russia, Saint Petersburg, 2012); Научный семинар лаборатории "Физики прочности и интеллектуальных диагностических систем" под руководством д. т. н., проф. А. Ю. Виноградова, ТГУ (Россия, Тольятти, 2013); XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред (Россия, Пермь, 2013); Всероссийская конференция "Актуальные проблемы математики и механики", посвященная 75–летию Г.И. Быковцева (Россия, Самара, 2013); XXI Петербургские чтения по проблемам прочности, к 100–летию со дня рождения Л.М Качанова и Ю.Н. Работнова (Россия, Санкт–Петербург, 2014); IV международная конференция "Математическая физика и ее приложения" (Россия, Самара, 2014); 20th European Conference on Fracture (Trondheim, Norway, 2014); XIV Зимняя школа по механике сплошных сред (Россия, Пермь, 2015); The Second International Conference on Damage Mechanics (France, Troyes, 2015); XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам прикладной и теоретической механики (Россия, Казань, 2015); 9th European Solid Mechanics Conference (Spain, Madrid, 2015). Полностью работа докладывалась на регулярном научном семинаре кафедры математического моделирования в механике Самарского государственного университета; научном семинаре Института механики сплошных сред (Россия, Пермь, декабрь 2015); научном семинаре кафедры Математического моделирования систем и процессов Пермского национального исследовательского политехнического университета (Россия, Пермь, февраль 2016); объединенном научном семинаре кафедры Вычислительной математики и механики и кафедры Композиционных материалов и конструкций Пермского национального исследовательского политехнического университета (Россия, Пермь, февраль 2016); научном семинаре Исследовательского центра проблем энергетики ФГБУН Казанского научного центра Российской ака-

демии наук (Россия, Казань, март 2016); теоретическом научном семинаре ИМСС УрО РАН (Россия, Пермь, март 2016).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов:

Проект РФФИ № 12–08–00390–а "Развитие математических моделей нелинейного деформирования и поврежденности материалов и прогнозирование на их основе прочности и долговечности элементов конструкций"; проект "Многоскейлинговые модели процессов разрушения и нелинейного деформирования образцов с трещинами для анализа и прогнозирования прочности и долговечности элементов авиационных конструкций в процессе их длительной эксплуатации" (Программа повышения конкурентоспособности Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева (национальный исследовательский университет)" среди ведущих мировых научно – образовательных центров на 2013 – 2020 гг.).

Личный вклад. Автор принимал активное участие в разработке и реализации нового численного метода отыскания всего спектра собственных значений в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного деформирования; в построении угловых распределений компонент тензора напряжений и деформаций вблизи кончика трещины для новой найденной асимптотики и построении конфигурации областей диспергированного материала с использованием новой асимптотики дальнего поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 16 печатных работах в журналах, рекомендованных ВАК, и рецензируемых журналах, входящих в ведущие международные системы цитирования.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объем диссертации **124** страницы текста с **56** рисунками и **18** таблицами. Список литературы содержит **160** наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, выявляются научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** приведены основные теоретические результаты изучения проблем смешанного нагружения элемента конструкции с трещиной, теоретические сведения из линейной и нелинейной механики разрушения и показано, что процесс разрушения следует рассматривать как процесс многомасштабный и многоуровневый, для описания основных закономерностей которого следует прибегать к многомасштабным математическим моделям.

Во **второй главе** приводится математическая постановка задачи, следующая из проблемы определения напряженно – деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования элемента конструкции в материале со степенными определяющими уравнениями

$$\varepsilon_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2, \quad (1)$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформации, S_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений, $\sigma_e = (3S_{ij}S_{ij}/2)^{1/2}$ – интенсивность касательных напряжений, B, n – материальные константы. Задача сводится к необходимости исследования уравнений равновесия (в полярной системе координат с полюсом в вершине трещины)

$$r\sigma_{rr,r} + \sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad r\sigma_{r\theta,r} + \sigma_{\theta\theta,\theta} + 2\sigma_{r\theta} = 0 \quad (2)$$

и условия совместности деформаций

$$2(r\varepsilon_{r\theta,\theta})_{,r} = \varepsilon_{rr,\theta\theta} - r\varepsilon_{rr,r} + r(r\varepsilon_{\theta\theta})_{,rr} \quad (3)$$

вместе с определяющими уравнениями (1).

Одним из наиболее распространенных методов определения напряженно – деформированного состояния в окрестности вершины трещины является метод разложения по собственным функциям, в соответствии с которым асимптотическое представление функции напряжений Эри $\chi(r, \theta)$ в окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$) разыскивается в форме

$$\chi(r, \theta) = Kr^{\lambda+1}f(\theta). \quad (4)$$

Компоненты тензора напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины принимают вид $\sigma_{ij}(r, \theta) = r^{\lambda-1}\tilde{\sigma}_{ij}(r, \theta)$ или

$$\sigma_{rr} = r^{\lambda-1}[(\lambda+1)f + f''], \quad \sigma_{\theta\theta} = r^{\lambda-1}\lambda(\lambda+1)f, \quad \sigma_{r\theta} = -r^{\lambda-1}\lambda f'. \quad (5)$$

Асимптотическое представление интенсивности касательных напряжений в условиях плоского деформированного состояния в окрестности вершины трещины имеет форму $\sigma_e(r, \theta) = r^{\lambda-1}f_e(\theta)$, где

$$f_e(\theta) = \sqrt{[f''(\theta) + (1 - \lambda^2)f(\theta)]^2 + 4\lambda^2[f'(\theta)]^2}.$$

В силу (1), (4) и (5) компоненты тензора деформаций при плоском деформированном состоянии в окрестности вершины трещины имеют следующую структуру

$$\varepsilon_{rr}(r, \theta) = -\varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = Br^{(\lambda-1)n}\tilde{\varepsilon}_{rr}(\theta), \quad \varepsilon_{r\theta}(r, \theta) = Br^{(\lambda-1)n}\tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta), \quad (6)$$

где $\tilde{\varepsilon}_{rr}(\theta) = 3f_e^{n-1}[f''(\theta) + (1 - \lambda^2)f(\theta)]/4$, $\tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta) = -3f_e^{n-1}\lambda f'(\theta)/2$.

Подстановка выражений (6) для компонент тензора деформаций в условие совместности (3) позволяет получить нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $f(\theta)$

$$2[(\lambda-1)n+1]\tilde{\varepsilon}_{r\theta,\theta} = \tilde{\varepsilon}_{rr,\theta\theta} - (\lambda-1)n[(\lambda-1)n+2]\tilde{\varepsilon}_{rr} \quad (7)$$

или в терминах функции $f(\theta)$

$$\begin{aligned} & f_e^2 f^{(4)} \{ (n-1)[(1-\lambda^2)f + f'']^2 + f_e^2 \} + (n-1)(n-3) \times \\ & \times \{ [(1-\lambda^2)f + f''][(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \}^2 [(1-\lambda^2)f + f''] + \\ & + (n-1)f_e^2 \{ [(1-\lambda^2)f' + f''']^2 + [(1-\lambda^2)f + f'']^2 + \\ & + 4\lambda^2 (f''^2 + f' f''') \} [(1-\lambda^2)f + f''] + 2(n-1)f_e^2 \times \\ & \times \{ [(1-\lambda^2)f + f''][(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \} [(1-\lambda^2)f' + f'''] + \\ & + C_1(n-1)f_e^2 \{ [(1-\lambda^2)f + f''][(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \} f' + \\ & + C_1 f_e^4 f'' - C_2 f_e^4 [(1-\lambda^2)f + f''] + f_e^4 (1-\lambda^2)f'' = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где приняты сокращающие обозначения

$$C_1 = 4\lambda[(\lambda - 1)n + 1], \quad C_2 = (\lambda - 1)n[(\lambda - 1)n + 2].$$

Решение уравнения (8) должно удовлетворять краевым условиям, следующим из требования отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$f(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f'(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (9)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (8) вместе с краевыми условиями (9) представляет собой двухточечную краевую задачу на собственные значения: необходимо найти собственные значения λ , отвечающие нетривиальным решениям уравнения (8), удовлетворяющим краевым условиям (9). Для решения такого класса задач обычно обращаются к численным методам: семейству методов Рунге – Кутты – Фельберга и методу пристрелки, в которых первоначально необходимо перейти к задаче Коши для уравнения (8). Симметричное раскрытие берегов трещины (трещины типа I) приводит к следующим начальным условиям:

$$f(\theta = 0) = 1, \quad f'(\theta = 0) = 0, \quad f''(\theta = 0) = A_2, \quad f'''(\theta = 0) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (8) вместе с начальными условиями (10) интегрируется численно. В случае трещины нормального отрыва находят два параметра (собственные значения λ и A_2) таким образом, чтобы выполнялись краевые условия на верхнем берегу дефекта $f(\theta = \pi) = 0, \quad f'(\theta = \pi) = 0$. Для трещины типа II (антисимметричное деформирование относительно луча $\theta = 0$) начальные условия имеют вид:

$$f(\theta = 0) = 0, \quad f'(\theta = 0) = 1, \quad f''(\theta = 0) = 0, \quad f'''(\theta = 0) = A_3 \quad (11)$$

и для выполнения условий отсутствия поверхностных усилий подбираются значения параметров: собственные значения λ и A_3 в (11). Одно собственное значение рассматриваемой задачи хорошо известно и соответствует классической задаче ХРР: $\lambda = n/(n + 1)$. Однако сейчас интерес представляют другие собственные значения, отличные от собственных чисел, отвечающих задаче ХРР. В случае смешанного деформирования соображения симметрии и антисимметрии использоваться быть не могут и необходимо искать решение уравнения (8) на отрезке $[-\pi, \pi]$. В условиях смешанного нагружения при численном решении уравнения (8) отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ можно разбить на два отрезка: $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$. Сначала уравнение (8) интегрируется на отрезке $[0, \pi]$ и краевая задача сводится к задаче Коши с начальными условиями

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = (\lambda + 1)/tg(M^p\pi/2), \quad f''(0) = A_2, \quad f'''(0) = A_3, \quad (12)$$

где M^p – параметр смешанности нагружения, определяемый соотношением

$$M^p = \frac{2}{\pi} \arctg \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right|.$$

Значение производной первого порядка функции $f'(\theta = 0)$ находится из условия смешанности нагружения. Неизвестные постоянные A_2 и A_3 определяются таким образом, чтобы выполнялись краевые условия на верхнем берегу трещины $f(\theta = \pi) = 0, \quad f'(\theta = \pi) = 0$. После того как подобраны постоянные A_2 и A_3 , уравнение (8) интегрируется на отрезке $[-\pi, 0]$. Вновь двухточечная краевая задача для уравнения (8) с граничными условиями

$$f(-\pi) = 0, \quad f'(-\pi) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = (\lambda + 1)/tg(M^p\pi/2) \quad (13)$$

заменяется задачей Коши с начальными условиями

$$f(\theta = -\pi) = 0, \quad f'(\theta = -\pi) = 0, \quad f''(\theta = -\pi) = B_2, \quad f'''(\theta = -\pi) = B_3. \quad (14)$$

Неизвестные постоянные B_2 и B_3 подбираются таким образом, чтобы выполнялись условия равновесия элемента, расположенного на луче $\theta = 0$. Уравнения равновесия данного элемента требуют непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ на луче $\theta = 0$, что влечет за собой непрерывность функций $f(\theta)$ и $f'(\theta)$ при $\theta = 0$ (и, следовательно, краевые условия (13)). Поэтому две неизвестные постоянные B_2 и B_3 в (14) определяются таким образом, чтобы решение, разыскиваемое на отрезке $[-\pi, 0]$, удовлетворяло бы краевым условиям (12). С целью определения всего спектра собственных значений λ было проанализировано поведение радиальной компоненты тензора напряжений σ_{rr} и отмечено, что радиальная компонента тензора напряжений является непрерывной функцией полярного угла для всех значений параметра смешанности нагружения и показателя упрочнения материала, тогда как при построении решения непрерывность этой компоненты тензора напряжений не требовалась. При отыскании собственных значений, отличных от собственных чисел задачи ХРР, следует потребовать непрерывности радиальной компоненты тензора напряжений σ_{rr} при $\theta = 0$: $\sigma_{rr}|_{\theta=0-} = \sigma_{rr}|_{\theta=0+}$. С помощью нового дополнительного условия получено асимптотическое решение нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряжений и деформаций у вершины трещины в условиях смешанного деформирования. Найдены собственные значения, отличные от собственных значений, отвечающих задаче ХРР ($\lambda = n/(n + 1)$) в условиях плоского деформированного состояния. Результаты вычислений приведены в таблице 1, где собраны новые значения λ и пристрелочные значения $f''(\theta = 0)$, $f'''(\theta = 0)$, $f''(\theta = -\pi)$ и $f'''(\theta = -\pi)$ для всех значений параметра смешанности нагружения M^p и различных значений показателя нелинейности материала n . Построены угловые распределения компонент тензора напряжений для новых вычисленных собственных значений для всех значений параметра смешанности нагружения M^p (рис. 1).

Таблица 1. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения в условиях плоского деформированного состояния для $n = 6$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.05	-0.229370	0.13304842	-1.09550621	-0.48497154	0.48902078
0.1	-0.212455	0.17011750	-1.01745991	-0.39241154	0.39014040
0.2	-0.194070	0.18900929	-0.96835632	-0.27331750	0.26753598
0.3	-0.187200	0.18550116	-0.95997525	0.18076020	-0.18575105
0.4	-0.184800	0.17920893	-0.95879580	0.10887899	-0.11197716
0.5	-0.187000	0.20146662	-1.00220816	0.21886770	-0.03710250
0.6	-0.191250	0.23194856	-1.05006028	0.28618945	-0.27942962
0.7	-0.195100	0.25526013	-1.08775909	0.49617463	-0.48609996
0.8	-0.200080	0.27843964	-1.11576660	0.72959827	-0.71782714
0.9	-0.207204	0.30231092	-1.11496378	0.98516357	-0.97513726
0.95	-0.210800	0.31120751	-1.08697613	1.10415827	-1.09624005

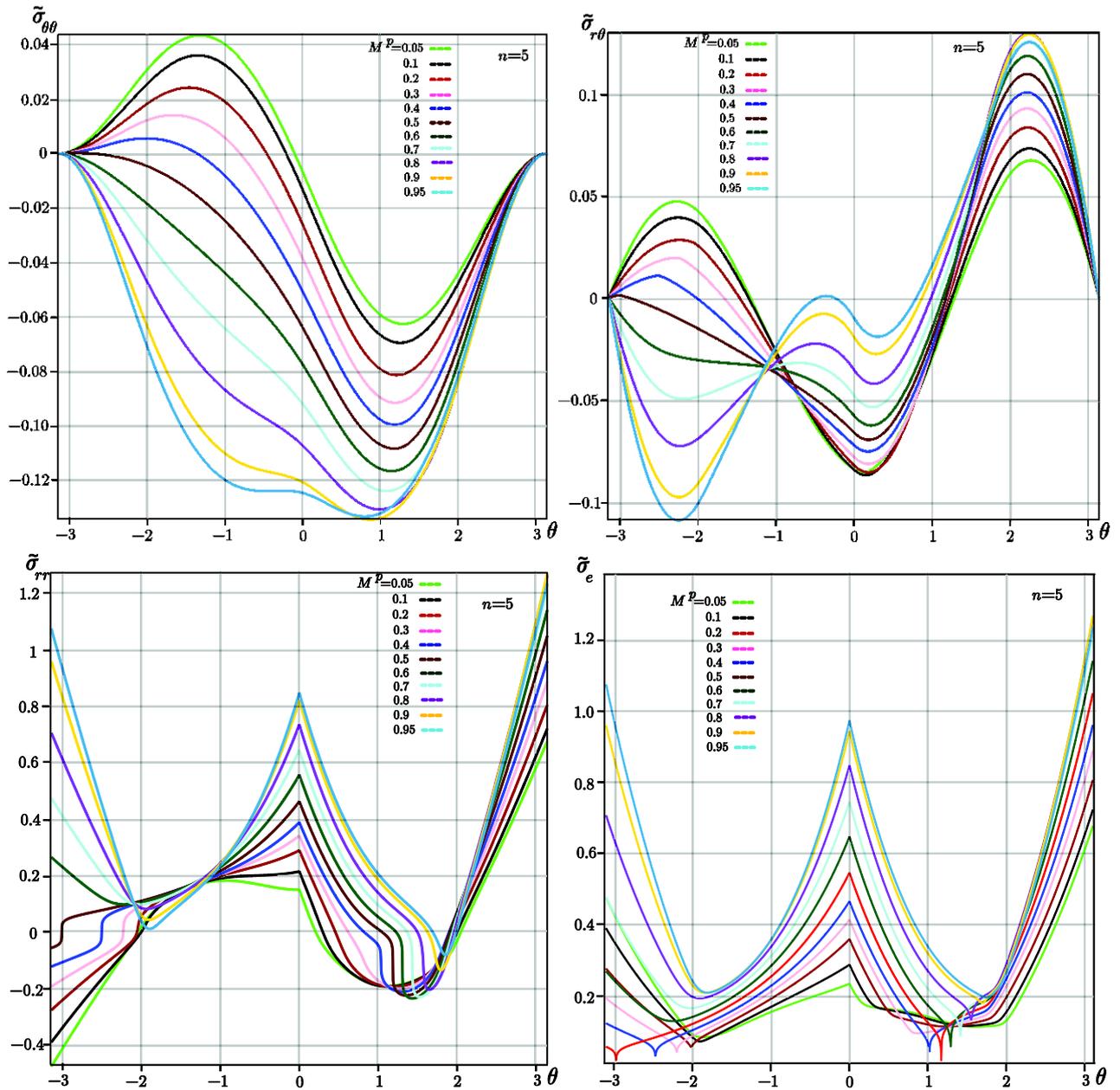


Рис. 1. Угловые распределения компонент напряжений для $n = 5$ и различных значений параметра смешанности нагружения

Показано, что предложенная процедура позволяет численно отыскать весь спектр собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного деформирования в полном диапазоне смешанных форм деформирования от чистого сдвига до чистого нормального отрыва. С помощью предложенного метода найдены собственные значения, отличные от собственных значений, отвечающих задаче ХРР.

В третьей главе приведено приложение найденной новой асимптотики поля напряжений к задаче о стационарной трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного нагружения и построено автомодельное промежуточное асимптотическое решение задачи о трещине в связанной (ползучесть – поврежденность) постановке зада-

чи. Определяющие уравнения материала строятся на основе степенного закона Бейли – Нортонa теории установившейся ползучести с применением концепции эффективного напряжения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (3/2)B(\sigma_e/\psi)^{n-1}s_{ij}/\psi, \quad (15)$$

где ψ – параметр сплошности, эволюционирующий в соответствии со степенным законом накопления повреждений Качанова – Работнова

$$d\psi/dt = -A(\sigma_e/\psi)^m. \quad (16)$$

В соответствии с гипотезой о маломасштабной поврежденности на больших расстояниях от вершины трещины (больших по сравнению с характерным линейным размером области полностью поврежденного материала, но все еще малых по сравнению с длиной трещины, характерным линейным размером образца), поле напряжений определяется решением ХРР:

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \theta, t) = (C^*/(BI_n r))^{1/(n+1)}\bar{\sigma}_{ij}(\theta, n). \quad (17)$$

Анализ размерности величин позволил установить, что для определяющих соотношений (15), кинетического уравнения (16), начальных и граничных условий (17) существует автомодельная переменная

$$R = r(At)^{-(n+1)/m}BI_n/C^* \quad (18)$$

и система уравнений задачи (2), (3), (12), (15), (16) допускает автомодельное представление решения: $\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (At)^{-1/m}\hat{\sigma}_{ij}(R, \theta)$, $\psi(r, \theta, t) = \hat{\psi}(R, \theta)$.

Автомодельное представление решения может быть введено и для более общего граничного условия в бесконечно удаленной точке $\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \theta, t) = \tilde{C}r^s\hat{\sigma}_{ij}(\theta, n)$, где показатель степени s подлежит определению в ходе решения задачи, \tilde{C} – амплитуда поля напряжений на бесконечности, определяемая геометрией реального образца и системой приложенных нагрузок.

Асимптотическое решение задачи вне области диспергированного материала, формирующейся у вершины трещины, (на больших расстояниях от вершины трещины $R \rightarrow \infty$) разыскивается в форме

$$\chi(R, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} R^{\lambda_k+1} f_k(\theta), \quad \psi(R, \theta) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} R^{\gamma_k} g_k(\theta), \quad (19)$$

где $\chi(R, \theta)$ – функция напряжения Эри, $\lambda_k, \gamma_k, f_k(\theta), g_k(\theta)$ – неизвестные собственные значения и собственные функции, подлежащие определению. Для нахождения функции $f_0(\theta)$, получается нелинейное однородное дифференциальное уравнение, совпадающее с ранее рассмотренным уравнением (7)

$$2[(\lambda_0 - 1)n + 1]\varepsilon_{R\theta, \theta}^{(0)} = \varepsilon_{RR, \theta\theta}^{(0)} - (\lambda_0 - 1)n[(\lambda_0 - 1)n + 2]\varepsilon_{RR}^{(0)}. \quad (20)$$

Относительно функций $f_k(\theta)$ ($k \geq 1$) (угловых коэффициентов асимптотического разложения (19)) из условия совместности (3) следует система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2(l + 1)\varepsilon_{R\theta, \theta}^{(k)} = \varepsilon_{RR, \theta\theta}^{(k)} - l(l + 2)\varepsilon_{RR}^{(k)}, \quad l = (\lambda_0 - 1)(n + km). \quad (21)$$

Решение системы уравнений (20), (21) должно удовлетворять граничным условиям $f_k(\theta = \pm\pi) = 0$ и $f'_k(\theta = \pm\pi) = 0$. Численное решение системы уравнений (20), (21) на отрезке $[-\pi, \pi]$ разыскивалось с помощью разработанного численного метода. После нахождения численного решения системы уравнений (20), (21) были определены гра-

ницы области диспергированного материала в окрестности вершины трещины (рис. 2) с помощью уравнения

$$\psi(R, \theta) = 1 - \sum_{j=0}^N R^{\gamma_j} g_j(\theta) = 0.$$

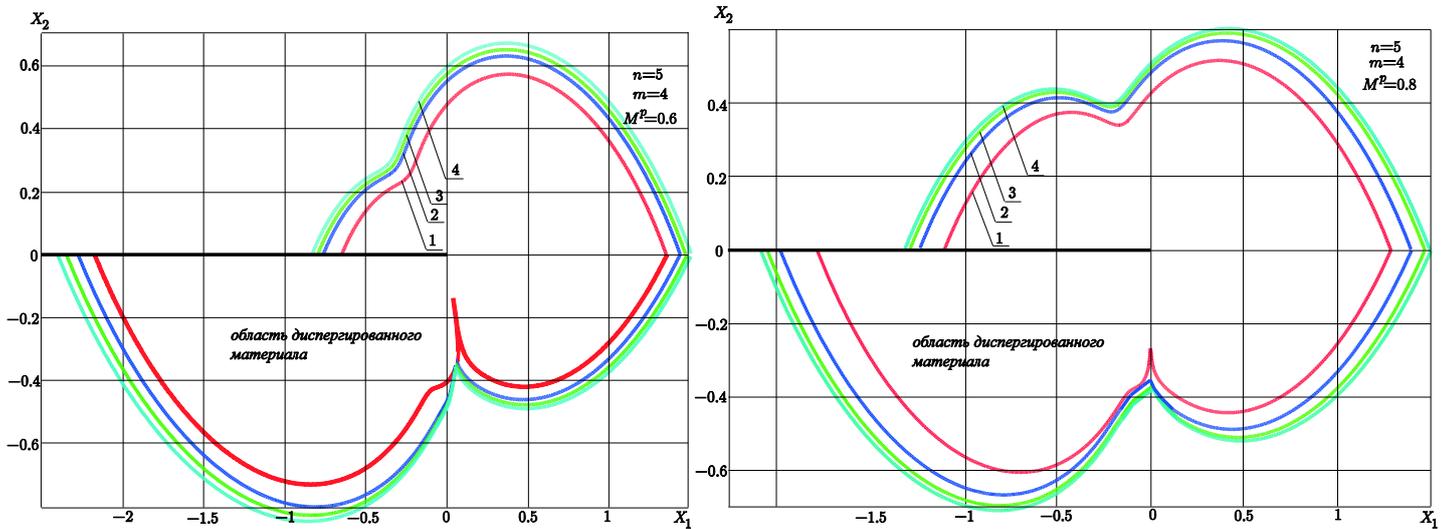


Рис. 2. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0.6$ и $M^p = 0.8$

Оказалось, что если в качестве условия в бесконечно удаленной точке принять условие асимптотического сближения с решением ХРР ($\lambda = n/(n + 1)$) и предположить, что вне области активного накопления повреждений решение выходит на асимптотику ХРР, то границы области диспергированного материала, построенные с помощью двучленного и трехчленного асимптотических разложений параметра сплошности, значительно отличаются друг от друга по своей форме и размерам, что свидетельствует о том, что разложения не имеют асимптотической природы, ибо каждое следующее слагаемое в асимптотическом разложении должно быть малой поправкой к предыдущему. Однако, если предположить, что в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования имеется область с промежуточной асимптотикой поля напряжений (где собственные значения отличаются от значений задачи ХРР и определяются значениями, приведенными в таблице 1), то асимптотические разложения приводят к границам области диспергированного материала, сходящимся к предельному контуру. Конфигурации области полностью поврежденного материала, полученные для новой асимптотики, показаны на рис. 2.

В четвертой главе проведен асимптотический анализ распределения напряжений и сплошности у вершины трещины в условиях плоского напряженного состояния. Обычно при исследовании смешанного нагружения предполагается известным собственное значение рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения $\lambda = n/(n + 1)$. Показано, что данное предположение приводит к разрывному полю радиального напряжения и, как показывает приближенный анализ рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения, не может быть использовано в случае плоского напряженного состояния. В силу указанных причин определено собственное значение задачи, ведущее к непрерывному полю радиального напряжения. Т.о., собственные значения, отвечающие задаче ХРР, были уточнены для случая смешанного нагружения с помощью разработанного численного метода, результаты вычислений приведены в таб-

лице 2. Для собственных значений построены угловые распределения компонент тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$, σ_{rr} и интенсивности касательных напряжений σ_e (рис. 3) и построены линии равных значений интенсивности напряжений σ_e (рис. 4).

Таблица 2. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения в условиях плоского напряженного состояния для $n = 6$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.05	0.85712730	-0.04197133	-1.32714024	-1.06602753	0.01244132
0.1	0.85707955	-0.08275264	-1.29886808	-1.04711530	0.01956806
0.2	0.85687015	-0.16066518	-1.22620969	-1.00338089	0.03288647
0.3	0.85644585	-0.23530069	-1.14009661	-0.95988212	0.04563737
0.4	0.85565325	-0.30541344	-1.02717175	-0.90933069	0.05807172
0.5	0.85644585	-0.23530069	-1.14009661	-0.95988212	0.04563737
0.6	0.85145875	-0.44198314	-0.71463082	-0.81738465	0.08737114
0.7	0.84667285	-0.50332097	-0.47689697	-0.76445660	0.10651094
0.8	0.84202705	-0.57395163	-0.24463436	-0.72417013	0.13443608
0.9	0.84177785	-0.65176078	-0.06902450	-0.70653361	0.18084768
0.95	0.84174285	-0.67431952	0.03136688	-0.69340419	0.21503109

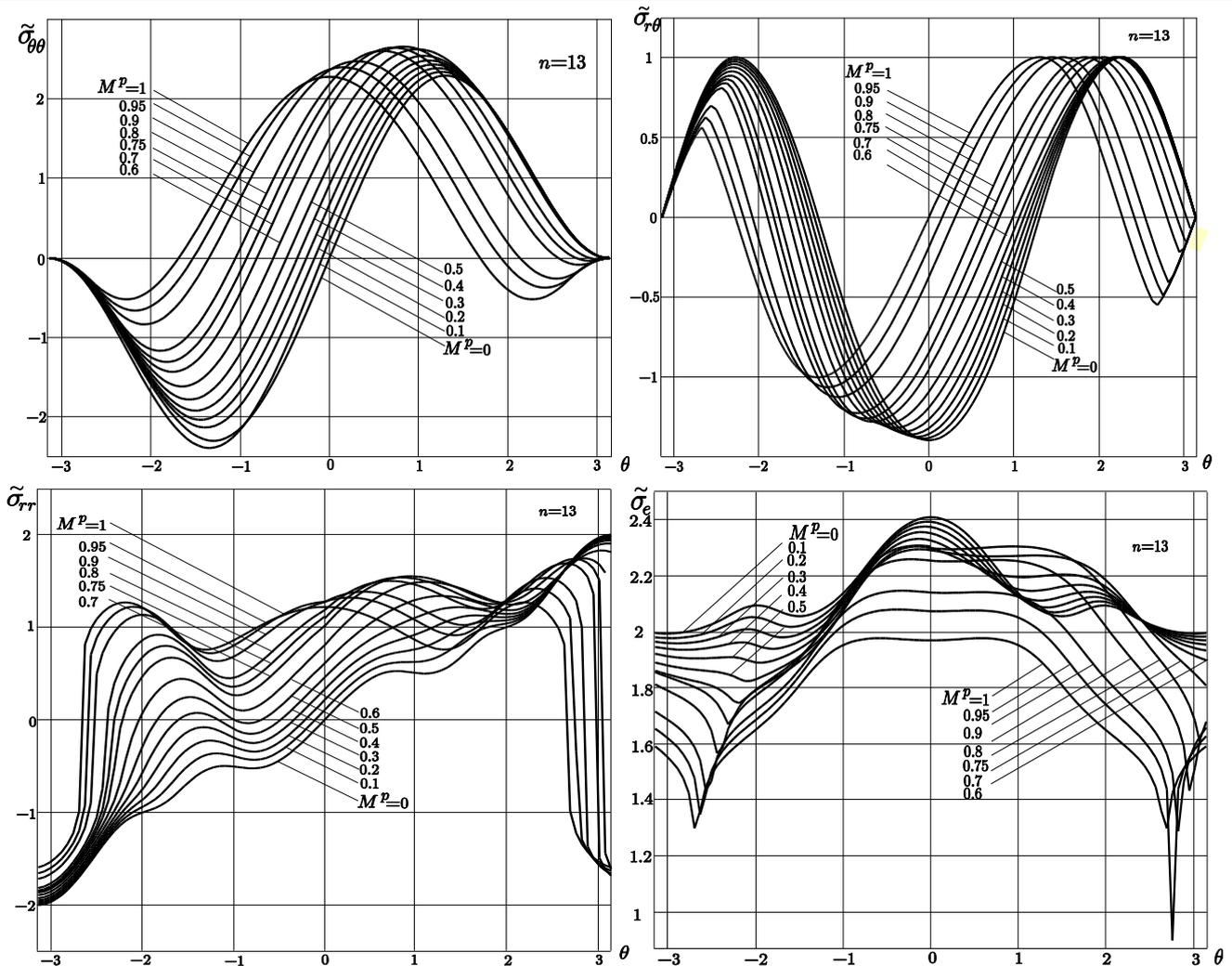


Рис. 3. Угловые распределения компонент напряжений для $n = 13$ и различных значений параметра смешанности нагружения

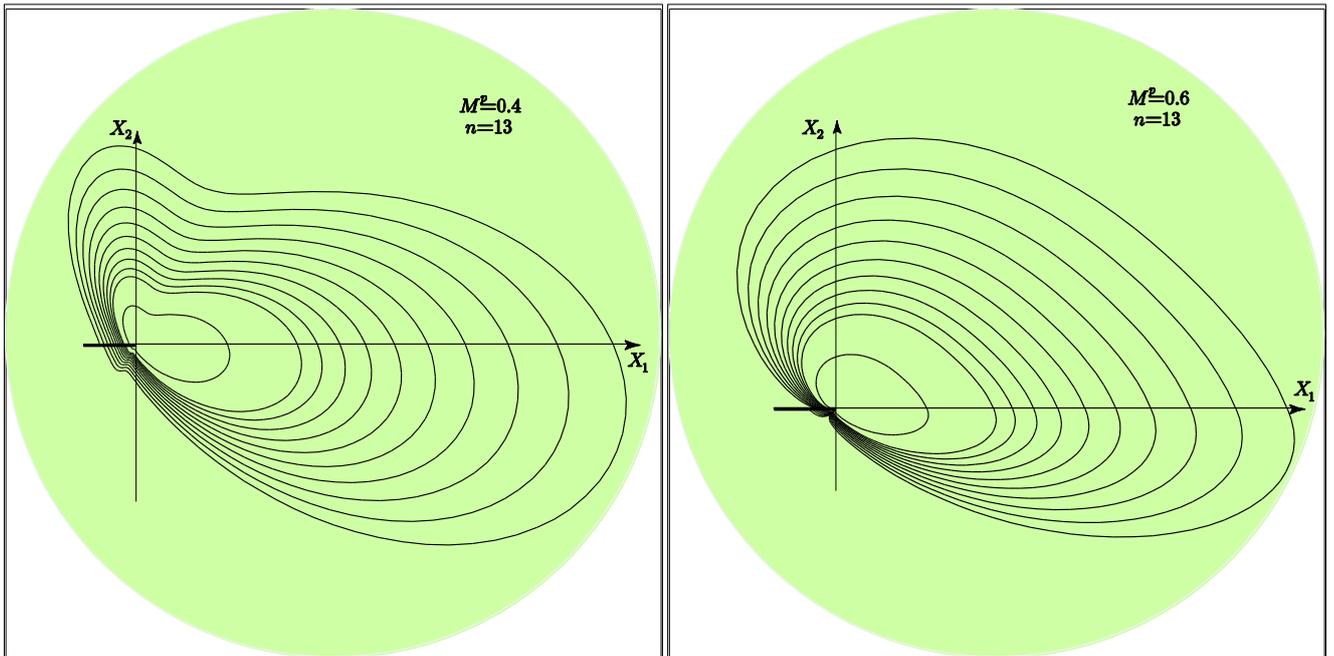


Рис. 4. Линии равных значений интенсивности касательных напряжений σ_e

С использованием разработанного численного метода найдены новые собственные значения, отличные от собственных значений, отвечающих асимптотике ХРР. Результаты вычислений приведены в таблице 3. Построены конфигурации областей полностью поврежденного материала для найденной новой асимптотики (рис. 5).

Таблица 3. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения (плоское напряженное состояние, $n = 6$)

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.05	-0.26170350	0.09706907	-1.03515266	-0.41910254	0.29785114
0.1	-0.23832000	0.11877385	-0.89259541	-0.35953080	0.25064804
0.2	-0.20987000	0.12286058	-0.78579354	-0.27881899	0.18978795
0.3	-0.19170000	0.11057837	-0.74628248	-0.21915749	0.14687900
0.4	-0.18230000	0.09315039	-0.72322888	-0.16798263	0.11174738
0.5	-0.18176000	0.08236757	-0.72319570	-0.12302450	0.08335711
0.6	-0.18981000	0.09845337	-0.74042327	0.12604887	-0.07917506
0.7	-0.19740000	0.10717509	-0.74958474	0.33783813	-0.22750817
0.8	-0.20540000	0.10745680	-0.74380118	0.52878999	-0.35856813
0.9	-0.21670000	0.10959383	-0.71535351	0.73222044	-0.50130470
0.95	-0.22400000	0.11333333	-0.68462687	0.83130874	-0.57265834

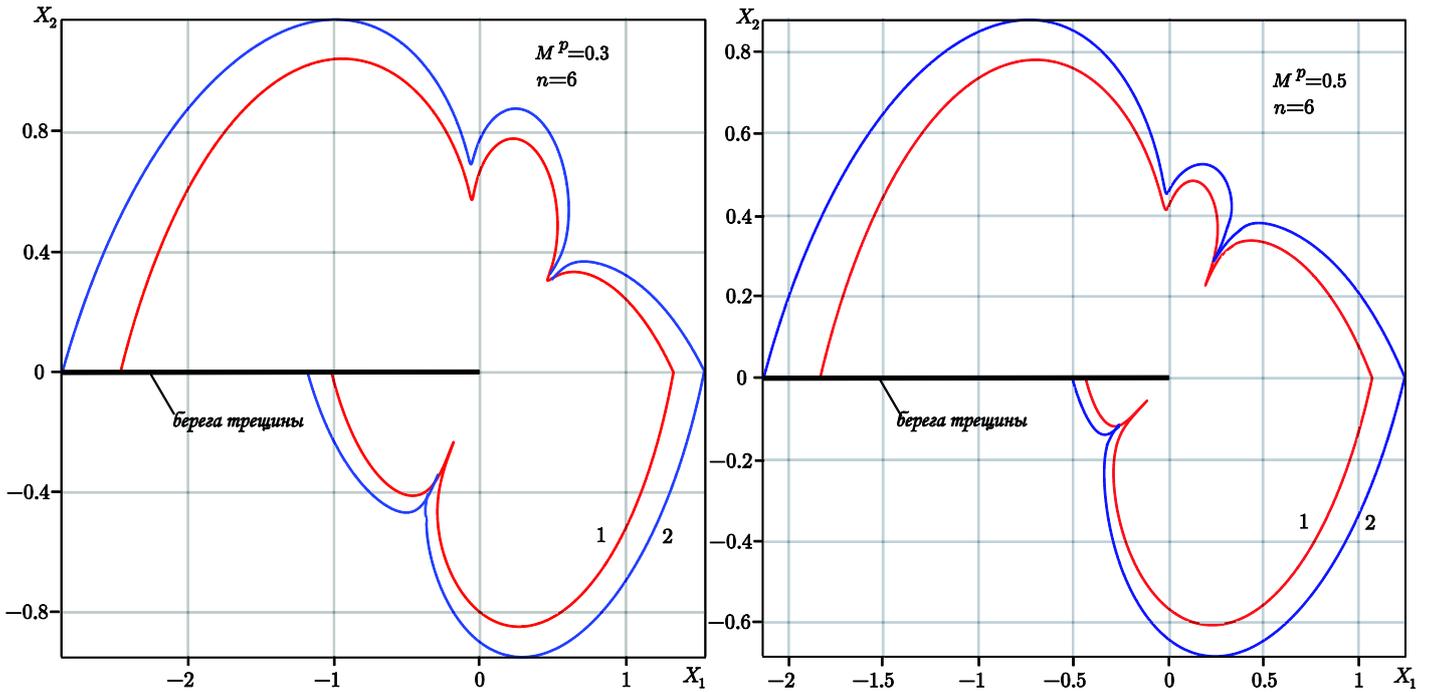


Рис. 5. Геометрия области полностью поврежденного материала

В пятой главе приведен анализ собственных значений нелинейной задачи на собственные значения с помощью метода возмущений (метода искусственного малого параметра), суть которого заключается в том, что собственное значение λ представляется в виде:

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon, \quad (22)$$

где λ_0 соответствует “невозмущенной” линейной задаче ($n = 1$), ε – отклонение собственного числа λ от собственного числа λ_0 при изменении n : $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$. Вместе с (22) показатель нелинейности материала n и функция, описывающая угловое распределение функции напряжений Эри $f(\theta)$, представляются в следующем виде ($f_0(\theta)$ – решение линейной “невозмущенной” задачи ($n = 1$)):

$$n = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l n_l, \quad f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l f_l(\theta). \quad (23)$$

Решение линейной “невозмущенной” задачи в линейной механике разрушения обычно связывают с именем М. Уильямса:

$$f_0(\theta) = B_1 \cos[(\lambda_0 - 1)\theta] + B_2 \sin[(\lambda_0 - 1)\theta] + B_3 \cos[(\lambda_0 + 1)\theta] + B_4 \sin[(\lambda_0 + 1)\theta].$$

В диссертации получены линейные обыкновенные дифференциальные уравнения относительно функций $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ для случая плоского деформированного и плоского напряженного состояния. Найдены значения коэффициентов асимптотического разложения (23) n_1 и n_2 для $\lambda_0 = 1/2$, что соответствует асимптотике ХРР и для $\lambda_0 = -1/2$, что соответствует новой асимптотике, найденной в рамках данной работы (таблица 4). Из таблицы видно, что смешанное нагружение элемента конструкции (пластины) с дефектом ведет к нарушению асимптотики ХРР, поскольку, если бы решение ХРР было справедливым, то было бы справедливым соотношение $n_k = (-1)^k / (\lambda_0 - 1)^k$. Но результаты вычислений, приведенные в таблице 4 показывают, что это условие нарушается и, следовательно, смешанное нагружение приводит к изменению асимптотики ХРР и необходимо исследовать весь спектр собственных значений.

Таблица 4. Вычисленные значения коэффициентов n_1 и n_2 для $\lambda_0 = 1/2$ и $\lambda_0 = -1/2$ для случая плоского деформированного состояния

M^p	$\lambda_0 = 1/2$			$\lambda_0 = -1/2$		
	n_1	n_2	λ	n_1	n_2	λ
0.0	4.00000	8.0000000	0.683012	1.3333333	3.0123456	-0.104103
0.1	4.00000	7.9997562	0.683013	1.3333333	3.0269835	-0.104718
0.2	4.00000	7.9986923	0.683013	1.3333333	3.0701926	-0.106516
0.3	4.00000	7.9955185	0.683034	1.3333333	3.1397530	-0.109354
0.4	4.00000	7.9867700	0.683076	1.3333333	3.2316300	-0.112999
0.5	4.00000	7.9630625	0.683191	1.3333333	3.3396240	-0.117142
0.6	4.00000	7.8971870	0.683512	1.3333333	3.4551500	-0.121413
0.7	4.00000	7.7042370	0.684462	1.3333303	3.5674200	-0.125416
0.8	4.00000	7.1181770	0.687462	1.3334023	3.6780000	-0.129224
0.9	4.00014	5.5650000	0.696353	1.3518183	20.151000	-0.307255
1.0	4.00000	8.0000000	0.683012	1.3333333	1.1380240	0.019580

Построены угловые распределения функции напряжения Эри (собственные функции) (рис. 6), где голубым цветом показано распределение $f_0(\theta)$, зеленым цветом – численное решение краевой задачи (8), (9), синим, черным и красным цветом – двучленное $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta)$, трехчленное $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta)$ и четырехчленное $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \varepsilon^3 f_3(\theta)$ асимптотические разложения функции $f(\theta)$ соответственно.

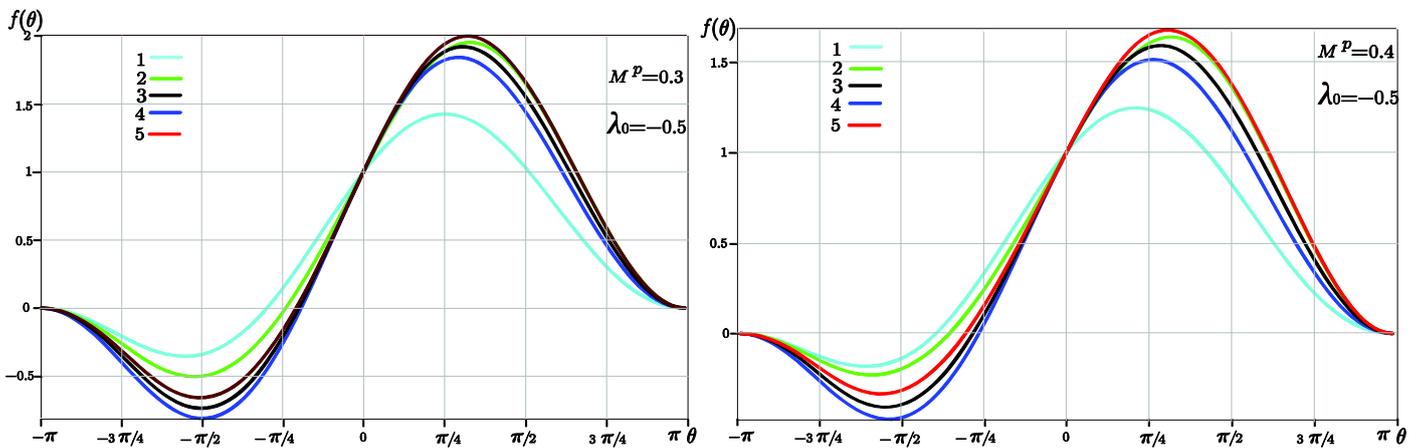


Рис. 6. Результаты вычислений для параметра смешанности $M^p = 0.3$ и $M^p = 0.4$ и $\lambda_0 = -1/2$ угловые распределения функции напряжений Эри (собственная функция)

Показано, что метод искусственного малого параметра дает эффективный способ вычисления собственных значений нелинейных задач на собственные значения, следующих из проблем нелинейной механики разрушения. Смешанное деформирование пластины с дефектом приводит к новому классу нелинейных задач на собственные значения, поскольку асимптотика собственных значений в случае смешанного нагружения начинает существенно зависеть от параметра смешанности нагружения M^p . Метод воз-

мущений позволяет найти весь спектр собственных значений задачи, которые могут быть уточнены с помощью численного решения.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Разработан численный метод определения всего спектра собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения полей напряжений, деформаций и перемещений в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм деформирования от чистого поперечного сдвига до чистого нормального отрыва.
2. Проведен анализ собственного значения нелинейной задачи на собственные значения, отвечающего проблеме Хатчинсона – Райса – Розенгрена, для смешанного деформирования в предположении реализации плоского напряженного и плоского деформированного состояния. Выполнен 1) численный анализ собственных значений; 2) асимптотический анализ собственных значений с помощью метода искусственного малого параметра.
3. Найден весь спектр собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы отыскания напряженно – деформированного состояния у вершины трещины при смешанном нагружении для плоского напряженного и плоского деформированного состояния.
4. Определены поля напряжений, скоростей деформаций ползучести и поля сплошности вблизи вершины неподвижной трещины в условиях высокотемпературной ползучести при смешанном нагружении в связанной (ползучесть – поврежденность) постановке задачи.
5. Выполнен асимптотический анализ полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и поля сплошности в окрестности вершины трещины и определена геометрия области полностью поврежденного материала в условиях смешанного деформирования.
6. Получены конфигурации области полностью поврежденного материала у вершины трещины, получены угловые распределения полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности для различных значений показателя ползучести и параметра смешанности нагружения.

Публикации автора по теме диссертации

I. Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях:

1. Степанова Л.В., **Яковлева Е.М.** Асимптотика собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения // Сибирский журнал вычислительной математики, 2016. – Т. 19. – № 2. – С. 207–222. (Stepanova L. V., **Yakovleva E. M.** Asymptotics of eigenvalues of the nonlinear eigenvalue problem arising from the near mixed-mode crack-tip stress-strain field problems // Numerical Analysis and Applications, – 2016. – V. 9. – Issue 2. – P. 159 – 170).

2. Stepanova L. V., **Yakovleva E. M.** Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2015. – V. 10. – № 3. – P. 367–393.
3. Степанова Л.В., **Яковлева Е.М.** Асимптотика поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения: метод малого параметра // *Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия*, 2015. – № 10 (132). – С. 77–90.
4. **Яковлева Е.М.** К вопросу о нелинейных задачах на собственные значения, возникающих в механике разрушения // *Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия*, 2015. – № 3(125). – С. 125–139.
5. Степанова Л. В., **Яковлева Е. М.** О смешанном нагружении элементов конструкции с дефектом // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физ.–мат. науки*, 2015. – Т. 19. – № 2. – С. 358–381.
6. Stepanova L.V., **Yakovleva E.M.**, Mironova E.A. Asymptotic Self-Similar Solution of the Creep Crack Problems in Damaged Materials under Mixed Mode Loading // *Applied Mechanics and Materials*, 2015. – V. 784. – P. 145–152.
7. Степанова Л.В., **Адылина Е.М.** Напряженно – деформированное состояние в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения // *Прикладная механика и техническая физика*, 2014. – Т. 55 (327). – № 5. – С. 181–194. (Stepanova L.V., **Adulina E.M.** Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, – 2014. – V. 55. – № 5. – P. 885–895.)
8. Степанова Л.В., **Яковлева Е.М.** Смешанное деформирование пластины с трещиной в условиях плоского напряженного состояния // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2014. – № 3. – С. 129–162.
9. Степанова Л.В., **Яковлева Е.М.** Поле напряжений у вершины трещины при смешанном нагружении в условиях плоского напряженного состояния // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физ.–мат. науки*, 2014. – № 1(34). – С. 109–124.
10. **Adulina E.M.**, Stepanova L. V. Self-similar solutions to the creep crack problems in a damaged medium under mixed loading conditions // *Procedia Materials Science*, 2014. – V.3. – P. 948–954.
11. Степанова Л.В., **Адылина Е.М.** Автомодельное решение задачи о смешанном деформировании пластины с трещиной в среде с поврежденностью // *Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия*, 2013. – № 9/1(110). – С. 76–93.

12. **Адылина Е.М.** Численный метод построения спектра собственных значений нелинейной задачи, следующей из одной проблемы смешанного деформирования пластины с трещиной // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия, 2013. – № 6(107). – С. 85–99.
13. Степанова Л.В., **Адылина Е.М.** Асимптотические методы нелинейной механики разрушения: результаты, современное состояние и перспективы // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физ.–мат. науки, 2013. – № 2(31). – С. 156–168.
14. **Adulina E.,** Stepanova L. Nonlinear eigenvalue problems arising from nonlinear fracture mechanics analysis // 19th European Conference on Fracture: Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety, ECF 2012; Kazan; Russian Federation; 26 August 2012 through 31 August 2012.
15. **Адылина Е. М.,** Игонин С. А., Степанова Л. В. О нелинейной задаче на собственные значения, следующей из анализа напряжений у вершины усталостной трещины // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия, 2012. – № 3/1(94). – С. 83–102.
16. **Адылина Е. М.,** Степанова Л. В. О построении многомасштабных моделей неупругого разрушения // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия, 2012. – № 9(100). – С. 70–83.