ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Самойлова Анна Евгеньевна

КОНВЕКТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СЛОЕВ ЖИДКОСТИ С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., доцент $\boxed{\text{Н.И. Лобов}}$
д.ф.-м.н., доцент В. А. Демин

Пермь – 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

Обзор литературы 4

Общая характеристика работы 14

ГЛАВА 1. КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО СЛОЯ СО СВОБОДНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ 22

1.1. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия 23

1.2. Небуссинесковская модель описания конвекции Рэлея–Бенара в слое с деформируемой границей раздела сред. Линейная задача устойчивости 26

1.3. Методы численного решения 29

1.4. Основные результаты линейного анализа 32

1.4.1. Положительный параметр Буссинеска 33

1.4.2. Отрицательный параметр Буссинеска 38

1.5. Слабонелинейный анализ конвективных структур 42

1.5.1. Метод амплитудных функций 42

1.5.2. Вывод и анализ амплитудных уравнений 45

1.5.3. Численные методы и результаты вычислений 57

1.6. Колебательная неустойчивость в отсутствие гравитации и термокапиллярного эффекта 60

1.6.1. Линейный анализ устойчивости в широком диапазоне волновых чисел... 60

1.6.2. Асимптотический анализ устойчивости слоя невязкой жидкости относительно коротковолновых возмущений 63

ГЛАВА 2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МАРАНГОНИ В ТОНКОЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ 71

2.1. Исследование линейной устойчивости тонкой пленки в широком диапазоне волновых чисел 71

2.1.1. Постановка задачи 71

2.1.2. Длинноволновая асимптотика 76

2.1.3. Монотонная мода 77

2.1.4. Колебательная мода 77

2.2. Длинноволновая неустойчивость Марангони в тонкой пленке в рамках двухслойного подхода 84

2.2.1. Постановка задачи 84

2.2.2. Амплитудные уравнения 87

2.2.3. Линейный анализ 90

2.2.4. Слабонелинейный анализ 95

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 105

БЛАГОДАРНОСТИ 108

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.. 109

ВВЕДЕНИЕ

В диссертации исследуются механизмы конвективной неустойчивости в неизотермических горизонтальных слоях жидкости с деформируемыми поверхностями раздела, а также способы воздействия на эти механизмы. Внимание уделяется колебательным режимам конвекции, существенно связанным с деформируемостью поверхности раздела.

Конвективные движения, возникающие вследствие неустойчивости неоднородно нагретого горизонтального слоя жидкости, расположенного между твердой и свободной границами, представляют интерес с точки зрения многочисленных технологических приложений, изучения природных процессов, а также фундаментальной науки. Наличие свободной границы, которая может значительно деформироваться при определенных условиях, вносит в изучение таких гидродинамических систем существенный вклад, который проявляется в появлении дополнительных механизмов, но в то же время затрудняет процесс исследования.

Обзор литературы

Как известно, в неравномерно нагретой жидкости, находящейся в поле сил тяжести, механическое равновесие возможно при определенных условиях, а именно, когда градиент температуры вертикален [1]. Если градиент температуры достаточно велик, дестабилизирующее влияние плавучести превалирует над стабилизирующим действием вязкости и теплопроводности жидкости. Таким образом, равновесие становится неустойчивым, развитие возмущений приводит к смене его конвективным движением. При дальнейшем увеличении неоднородности температурного поля это течение также может потерять устойчивость (вторичное течение). При этом потеря устойчивости может происходить как монотонным, так и колебательным образом.

При изучении различных аспектов конвективной неустойчивости часто рассматривается горизонтальный слой жидкости, помещенный на твердую подложку и ограниченный сверху свободной поверхностью. Сравнительная простота экспериментальной реализации, а также множество приложений оставляют изучение устойчивости такой системы актуальным и в наши дни. Исследования конвективной неустойчивости горизонтального слоя жидкости имеют давнюю историю. Началом систематического изучения этой проблемы принято считать эксперименты Бенара [2], который наблюдал регулярные пространственно-периодические структуры (ячейки Бенара) в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости со свободной поверхностью. Заинтересованный этими экспериментами Релей позднее теоретически исследует устойчивость равновесия горизонтального слоя для модельного случая обеих свободных границ [3]. Было установлено, что переход от чисто теплопроводного режима к режиму конвекции при подогреве снизу происходит при некотором критическом значении безразмерного комплекса, названного впоследствии числом Релея. Это число определяет отношение подъемно-опускных сил к силам вязкого трения. Теория Релея объясняет возникновение конвективного движения влиянием архимедовых подъемных сил. В ходе решения Рэлей использовал уравнения гидродинамики в приближении Буссинеска [4,5], границы применимости которого будут обсуждаться ниже. Позднее была рассмотрена более реалистичная система: горизонтальный слой с твердой нижней и свободной верхней границами [6]. В этой работе был определен порог возникновения монотонной релеевской неустойчивости в такой системе, также показано существование колебательных возмущений при нагреве сверху. Общие свойства спектра характеристических возмущений изучались в работах [7,8].

Дальнейшее развитие теории конвективной устойчивости продвигалось весьма медленно из-за значительных вычислительных трудностей. Только в пятидесятые годы вновь возросший интерес к задачам устойчивости равновесия и течений в связи с их многочисленными технологическими приложениями, а также новые вычислительные возможности привели к бурному развитию исследований конвекции. Была изучена устойчивость равновесия в полостях разной формы с различными граничными условиями, отдельное внимание уделялось влиянию осложняющих факторов: магнитного поля, вращения, наличия примеси, внутренних источников тепла, модуляции параметров системы. Подробный обзор этих исследований можно найти в книгах [1,9–12].

Конвективные системы со свободной границей (границей раздела) представляют отдельный интерес, т.к. в них появляется дополнительный механизм развития неустойчивости, связанный с температурной зависимостью поверхностного натяжения (термокапиллярная неустойчивость). Впервые Блок [13] высказал предположение о том, что именно этот механизм является причиной возникновения ячеек Бенара. Исследования термокапиллярного механизма неустойчивости восходят к работе [14]. В этой работе Пирсон аналитически определил порог возникновения монотонной термокапиллярной неустойчивости, а также сравнил этот результат с тем, что был получен в эксперименте Бенаром, и с результатом расчетов Рэлея. Пирсон показал, что в тонком слое жидкости (порядка 1 мм), в котором наблюдались ячейки Бенара, ответственным за возникновение неустойчивости является термокапиллярный механизм, а не рэлеевский. Позднее Нилдом было проведено сопоставление этих двух механизмов в [15], где рассматривалась устойчивость горизонтального слоя относительно монотонных возмущений в присутствие как термокапиллярных, так и подъемных сил. Показано, что два механизма неустойчивости усиливают дестабилизирующее действие друг друга. Анализируя результаты Нилда, Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицкий в [1] заключают, что причины возникновения неустойчивости горизонтального слоя со свободной границей зависят от толщины слоя. В тонких слоях (для большинства существующих жидкостей это толщи́ны порядка 1 мм и меньше) вертикальный перепад температуры в слое настолько мал, что рэлеевская неустойчивость не может приводить к развитию неустойчивости. В очень толстых слоях, наоборот, термокапиллярной неустойчивостью можно пренебречь. При промежуточных толщинах два механизма конкурируют между собой. Механизм развития термокапиллярной неустойчивости описан в [1,16], основными стабилизирующими факторами являются вязкость и диффузия тепла.

Во всех вышеперечисленных работах свободные границы рассматриваемого горизонтального слоя считались плоскими и недеформируемыми, что значительно упрощает решение. В действительности же свободная поверхность может деформироваться под действием возмущений. Учет деформации свободной поверхности при исследовании термокапиллярной конвекции (которую также называют конвекцией Марангони) был впервые выполнен в работе Скривена и Стернлинга [17]. Обнаружена слабая дестабилизация коротковолновой моды конвекции Марангони при учете деформируемости свободной поверхности. Авторы также показали, что в отсутствие поля тяжести длинноволновая мода конвекции Марангони возникает при любом бесконечно малом перепаде температур. Фактически это означает, что поверхностное натяжение не способно подавить крупномасштабные деформации. Этот результат был прояснен Смитом [18], который получил корректную формулу для порога возникновения термокапиллярной неустойчивости горизонтального слоя со свободной деформируемой поверхностью при наличии гравитации. Механизм возникновения длинноволновой конвекции Марангони описан [17–19], деформируемость свободной границы является необходимым условием возникновения этой неустойчивости, а основными стабилизирующими факторами являются сила тяжести и поверхностное натяжение.

Колебательная мода термокапиллярной неустойчивости горизонтального слоя жидкости со свободной поверхностью была впервые обнаружена Такашимой [20], который показал существование колебательных возмущений в спектре при нагреве сверху. При этом механизм развития этой неустойчивости связан с возбуждением капиллярных волн на поверхности слоя, так что для существования этой моды свободная поверхность должна быть деформируемой [21]. В дальнейшем многие исследователи делали попытки обнаружить колебательную моду конвекции Марангони для случая подогрева снизу, см., например, тщательный анализ [22]. Однако для таких условий нагрева авторами обнаруживалась только монотонная мода. Отдельно отметим работу Е.А. Рябицкого [23], в которой было обнаружено наличие колебательных возмущений в спектре, которые могут привести к развитию термокапиллярной неустойчивости при подогреве снизу. Тем не менее, из вида полученных в этой работе нейтральных кривых следует, что монотонные возмущения приводят к развитию неустойчивости при сколь угодно малом перепаде температуры. Таким образом, колебательная мода не является опасной и при данных условиях не может быть обнаружена в эксперименте. Только спустя почти два десятилетия был найден диапазон параметров, в котором колебательная мода конвекции Марангони опасна в случае подогрева снизу [24,25]. Однако предсказание авторов до сих пор не подтверждено экспериментально. Подробный обзор исследований неустойчивости Марангони можно найти в монографиях [26–27].

Анализ влияния деформируемости свободной границы на развитие конвекции Релея–Бенара был впервые проведен В.Х. Изаксоном и В.И. Юдовичем [28,29]. В работе [30] А.А. Непомнящий показал некорректность выводов Изаксона и Юдовича, т.к. обнаруженная ими новая, деформационная, мода неустойчивости существует при значениях параметров, выходящих за применяемое авторами приближение Буссинеска. Таким образом, А.А. Непомнящий впервые продемонстрировал, что предположение о деформируемости свободной границы плохо согласуется с приближением Буссинеска и может привести к нефизичным результатам. Обсудим подробней эту проблему.

Действительно, обычно при исследовании проблем тепловой конвекции используется приближение Буссинеска. В рамках этого приближения считается, что тепловое расширение жидкости мало, а физические характеристики среды (теплопроводность, кинематическая вязкость) постоянны. При этом зависимостью плотности от температуры (она считается линейной) пренебрегается всюду, кроме слагаемого с силой плавучести в уравнении движения [4,5,31]. В большинстве случаев использование приближения Буссинеска бывает оправдано в силу малости параметра температурной неоднородности плотности и большой величины силы тяжести [31,32]. Обобщение приближения Буссинеска в присутствии слабой сжимаемости, вязкого нагрева, а также обсуждение применимости этой модели для газов обсуждалось в работах [33–35]. Однако до сих пор предметом дискуссии является корректность использования стандартного приближения Буссинеска при исследовании систем со свободной поверхностью (границей раздела). Как упоминалось выше, часто при исследовании неустойчивости слоя жидкости свободная граница считается плоской. Действительно, для многих ситуаций (из-за характерных для земных условий значений ускорения свободного падения и достаточно сильно различающихся плотностей жидкостей для двухслойных систем) указанное предположение вполне оправдано, и влияние деформируемости границы раздела на конвективную устойчивость мало [36]. Отметим, что в случае недеформируемости границы сильно упрощается решение задачи. Существует, однако, целый класс задач, когда применение приближения Буссинеска не является оправданным. К нему относится проблема изучения конвекции в слое жидкости (системе слоев) с деформируемой свободной поверхностью (границей раздела). Последовательное описание влияния деформаций свободной поверхности на тепловую гравитационную конвекцию невозможно в рамках стандартного приближения Буссинеска [30,37]. Тем не менее, в некоторых работах авторы рассматривают деформацию свободной поверхности в приближении Буссинеска [38–43]. В действительности это означает, что некоторыми из малых слагаемых пренебрегают, а другие слагаемые того же порядка удерживаются в уравнениях, что может привести к физически неверным выводам о зависимости наблюдаемых эффектов от этих параметров.

Помимо систем с деформируемой границей, модель Буссинеска неприменима в условиях пониженной гравитации [44]. Интерес к задачам устойчивости слоев жидкости в условиях микрогравитации связан с проведением космических экспериментов по выращиванию кристаллов [45]. Впервые альтернативная модель описания тепловой конвекции была предложена В.В. Пухначевым [46]. Было показано, что модель Буссинеска непригодна к описанию конвекции, если некоторый параметр, названный параметром микроконвекции, достаточно мал. С физической точки зрения этот параметр равен отношению порядков скоростей, порожденных объемным расширением жидкости и фактором плавучести. В.К. Андреевым и соавторами эта модель была применена для решения задачи об устойчивости плоского слоя жидкости со свободной деформируемой поверхностью [47]. Расчеты проводились для газового уравнения состояния (удельный объем линейно зависит от температуры). В спектре обнаружены колебательные возмущения, которые, однако, не становятся наиболее опасными. Сопоставление альтернативной и традиционной моделей при прямом численном моделировании для слоя со свободной поверхностью обнаружило яркие различия в картинах течения при определенных условиях нагрева [48,49].

Д.В. Любимовым [50] предложена модель корректного учета влияния плавучести на неустойчивость Релея–Бенара–Марангони. Согласно этой модели, жидкость является изотермически несжимаемой, но зависимость плотности от температуры учитывается везде в уравнении Навье–Стокса, в уравнении непрерывности и в граничных условиях, а не только в подъемной силе. При этом результаты становятся чувствительными к виду уравнения состояния. В рамках упомянутой модели рассмотрена монотонная неустойчивость Релея–Бенара–Марангони. Обнаружены некоторые эффекты, которые не могут быть получены в рамках приближения Буссинеска. Так для случая двухслойной системы жидкостей с близкими плотностями эта модель позволила впервые обнаружить длинноволновую колебательную моду рэлеевской неустойчивости [51,52]. Для однослойной системы с деформируемой поверхностью при пониженной гравитации обнаружена полная стабилизация монотонной релеевской моды неустойчивости [50]. В [53] в рамках модели корректного учета плавучести рассмотрена колебательная мода неустойчивости Релея–Бенара–Марангони, при этом используется экспоненциальное уравнение состояния. Показано, что учет плавучести приводит к стабилизации колебательной неустойчивости. При этом знак эффекта в приближении Буссинеска и при корректном учете плавучести противоположен; кроме того, учет "небуссинесковских" эффектов приводит к более сильным изменениям количественных характеристик неустойчивости.

Рассмотрим некоторые результаты исследований, в которых встречается длинноволновая неустойчивость. Такая мода неустойчивости представляет особый интерес, т.к. она связана с существованием при любых параметрах нейтральных возмущений, не зависящих от продольной координаты. Наличие таких возмущений может быть связано, в частности, со специальными граничными условиями, например, с постоянством теплового потока через границы [14,26]. В этих случаях всегда существуют незатухающие возмущения температуры, не зависящие от пространственных переменных. Конкретные особенности задачи определяют, будут ли эти возмущения нарастающими или затухающими. В большинстве задач теории конвективной устойчивости горизонтального слоя длинноволновые возмущения затухают [1,30], однако в некоторых специальных ситуациях такие возмущения могут нарастать [50,53] и приводить к формированию крупномасштабного конвективного движения. При изучении конвекции в горизонтальном слое в [54] впервые было показано, что длинноволновые возмущения наиболее опасны в случае границ очень низкой теплопроводности.

Естественным образом длинноволновая неустойчивость возникает в системах, где характерный продольный масштаб много больше характерной толщины слоя. Примером таких систем являются тонкие пленки жидкости. В последние годы интерес к изучению поведения тонких пленок чрезвычайно возрос, появились целые отдельные области науки: микро- и нанофлюидика. При исследовании устойчивости тонких пленок объемные эффекты не учитываются, ведущую роль играют механизмы, сосредоточенные на свободной поверхности (термокапиллярный, термоконцентрационный). В связи с этим, оказывается важно учитывать деформацию поверхности пленки, с которой связаны многие интересные эффекты. Например, в случае подогрева снизу неустойчивость почти всегда приводит к разрыву тонкой пленки. При этом в зависимости от толщины пленки развитие неустойчивости приводит либо к полному разрыву пленки с образованием сухих областей, либо к образованию капель, соединенных ультра-тонкой пленкой [55–57]. Недавно был обнаружен эффект образования фрактальной структуры капель вследствие разрыва подогреваемой снизу тонкой пленки [58]. Обзор исследований по устойчивости тонких пленок можно найти в работах [59,60].

В связи с изучением конвекции в слое с деформируемой поверхностью необходимо упомянуть двухслойные системы. Действительно, наличие свободной границы над горизонтальным слоем жидкости означает, что в реальности над этим слоем расположен слой другой жидкости или газа. При этом часто свойства жидкости и газа над ней таковы, что можно рассматривать только конвекцию в слое жидкости, пренебрегая движениями и теплопередачей в слое газа (например, вязкость и теплопроводность воздуха малы по сравнению с вязкостью и теплопроводностью воды). Граница раздела в этом случае моделируется свободной поверхностью, на которой некоторые граничные условия приходится задавать несколько искусственным образом. Такой подход к описанию конвекции в реальных системах с деформируемой границей называется однослойным. Несмотря на то, что он является заметным упрощением реальной ситуации, этот подход часто позволяет получить вполне удовлетворительные оценки характеристик неустойчивости. Однако, двухслойный подход, в котором влияние газовой фазы учитывается явным образом через решение сопряженной задачи, позволяет выявить новые эффекты, обнаружение которых в рамках однослойного подхода принципиально невозможно. Например, Пирсоном [14] было показано существование монотонной термокапиллярной неустойчивости только в случае нагрева снизу, тогда как использование двухслойной модели позволило Смиту [18] обнаружить монотонную моду также и при противоположном направлении нагрева (при определенном соотношении толщин слоев газа и жидкости). В [61,62] также представлены результаты изучения устойчивости двухслойных систем, существенно отличающие их от однослойных систем. Кроме того, результаты, полученные в рамках двухслойного подхода, имеют лучшее согласие с экспериментальными данными [56]. В литературе отдельно обсуждается адекватность применения в однослойной модели теплового граничного условия Ньютона [63]. В отличие от двухслойной модели, в которой тепловые условия на границе раздела выражаются в условии непрерывности температуры и теплового потока через границу, в рамках однослойного подхода приходится использовать, по сути, феноменологическую зависимость теплопотока через свободную поверхность от температуры на этой поверхности – закон теплоотдачи Ньютона. В каждой точке искривленной свободной поверхности температура может оказываться различной, поэтому условие Ньютона на такой поверхности не может быть полностью адекватным. Например, это показано при изучении конвективной устойчивости тонкой пленки жидкости в [64,65].

Линейная теория устойчивости исходит из предположения о том, что возмущения основного состояния малы. Эта теория позволяет определить границу устойчивости. В области неустойчивости малые возмущения со временем нарастают, становятся конечными и перестают описываться линейной теорией. При этом возникают установившиеся движения, описание которых возможно только на основе полных нелинейных уравнений. Нелинейная теория устойчивости сталкивается с большими математическими трудностями. Достаточно строгую математическую основу удается подвести под исследования вторичных режимов в припороговой области. Согласно предложенной Л.Д. Ландау [66] идее исследования характера установившегося нестационарного движения в надкритической области, форма вторичных возмущений вблизи порога может описываться всего одной функцией – амплитудной функцией. В слабонелинейном анализе (анализе вторичных возмущений вблизи порога возникновения неустойчивости) используется также метод малого параметра, предложенный В.С. Сорокиным [7]. Сущность метода заключается в том, что решение нелинейной задачи ищется в виде рядов по степеням малого параметра задачи, связанного с надкритичностью [67–69]. При этом возникает проблема отбора физически реализуемых движений жидкости, т.е. становится необходимым анализ устойчивости вторичных течений. Обзор работ, посвященных слабонелинейному анализу и подробное изложение метода можно найти в книге [70] и обзорах [71,72].

Описанная выше методика для изучения конвективных структур, возникающих в слабонадкритической области параметров, при исследовании конвекции Рэлея–Бенара впервые была применена в [73,74]. Авторы получили амплитудное уравнение, по форме аналогичное известному уравнению Гинзбурга–Ландау. Бифуркационный анализ конвекции Релея–Бенара был впервые проведен в работах [75–77]. Описание других методик и обзор основных работ по формированию и отбору вторичных конвективных структур можно найти в книгах [78,79] и обзоре [80]. Для конвекции Рэлея–Бенара наиболее характерны три типа регулярных структур, которые наблюдаются в экспериментах: двумерные валы, гексагональные ячейки и квадратные ячейки [79]. При наличии асимметричных граничных условий (когда нижняя граница твердая, а верхняя свободная) преимущественно возникают валиковые структуры [71]. В присутствие термокапиллярного эффекта более предпочтительными оказываются гексагональные структуры, именно их наблюдал Бенар. Отбор вторичных структур в условиях взаимодействия двух механизмов неустойчивости, релеевском и термокапиллярном, исследовался теоретически [81] и экспериментально [82]. Чистая термокапиллярная конвекция преимущественно сопровождается образованием конвективных структур в виде гексагональных ячеек. В зависимости от толщины слоя, граничных условий могут наблюдаться квадратные ячейки, переходы между гексагонами и квадратами [83]. Длинноволновая термокапиллярная конвекция может приводить к совершенно иным нелинейным эффектам, например, к уже упоминавшимся выше разрывам слоя с образованием сухих пятен [56,59]. В работе [84] было теоретически предсказано возникновение уединенных волн в результате возбуждения длинноволновой термокапиллярной неустойчивости. Позже такие волновые режимы были обнаружены в эксперименте [85].

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы.

Конвекция, связанная с неоднородным нагревом, является без преувеличения самым распространенным видом течений газа и жидкости в природе. Механизмы свободной конвекции определяют различные процессы, имеющие широкое применение в технических приложениях и эвристическую ценность. Указанные процессы, возникающие в жидкости, характеризуются, как правило, нестационарностью и нелинейностью, что значительно затрудняет их изучение. Трудности экспериментального исследования таких задач часто связаны со сложностью воссоздания условий, в которых наблюдается данное явление. Поэтому математические аналитические и численные методы представляют в настоящее время важный и актуальный способ проведения исследования конвективных течений в самом широком диапазоне управляющих параметров. Знание закономерностей устойчивости равновесия и течений подводит нас к возможности управления механизмами кризиса устойчивости. Все это свидетельствует об актуальности изучения конвективной устойчивости, как в теоретическом плане, так и с точки зрения ее практических приложений.

Горизонтальный слой жидкости, помещенный на твердую подложку и ограниченный сверху свободной поверхностью с газовой фазой над ней, является классической системой для изучения конвекции Рэлея–Бенара–Марангони. В то же время эта система представляет большой интерес с практической точки зрения в связи с многочисленными приложениями теории конвективной устойчивости в метеорологии, астрофизике, геофизике и т.д. Настоящее исследование базируется на использовании нестандартной модели, предложенной в [50], позволяющей корректно учитывать влияние плавучести на деформационные моды конвективной неустойчивости. В работах других авторов [52,53] эта модель позволила обнаружить принципиально новые эффекты, связанные с деформацией свободной поверхности (границы раздела). В условиях пониженной гравитации эти эффекты могут приводить к развитию неустойчивостей, которые могут быть нежелательными в различных технологических процессах, протекающих на орбитальной космической станции.

Исследование термокапиллярной конвекции в тонких пленках имеет фундаментальный интерес в связи с тем, что сравнительно недавно были определены условия возникновения нестационарной конвекции Марангони в тонкой пленке при нагреве снизу [24,25]. Более детальное исследование этого явления, а также расширение границ применимости вышеупомянутого результата позволит глубже понять физические механизмы этой неустойчивости, а также будет способствовать экспериментальной реализации этого теоретического результата. С точки зрения практического применения знание закономерностей возникновения колебательной конвекции в ультратонких пленках важно для очень широко спектра областей: от области медицины, занимающейся проблемами доставки химических веществ до клетки, до технологии легирования поверхностного слоя металла. Изучение условий возбуждения термокапиллярной неустойчивости в слабых силовых полях чрезвычайно актуально в связи с космическими экспериментами по выращиванию кристаллов.

Исследования, проводившиеся в рамках данной диссертации, были поддержаны грантами Российского фонда фундаментальных исследований (№ 11-01-16048-моб_з_рос, № 12-01-09223-моб_з, № 14-01-00148), Научно-образовательного центра «Неравновесные переходы в сплошных средах» (№ 07-11н-019с, № 08-13н-16с, № 10-16н-08с), программой поддержки Ведущих научных школ (проект № 2.1.1.4463), Фонда поддержки некоммерческих программ «Династия».

Целью работы является теоретическое исследование различных типов неустойчивости горизонтальных слоев жидкости с деформируемой свободной поверхностью (границей раздела сред). В рамках модели корректного учета плавучести анализируется влияние физических характеристик жидкости на порог возникновения неустойчивости Рэлея–Бенара–Марангони и на структуру вторичного течения. Изучаются условия и механизм возникновения новой колебательной моды неустойчивости слоя со свободной поверхностью. Выясняются условия возбуждения колебательной моды термокапиллярной неустойчивости тонкой пленки жидкости при нагреве снизу, а также структура возникающих при этом вторичных течений.

Методы исследования. При получении результатов исследований используются как аналитические методы (это различные подходы функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и уравнений математической физики), так и численные методы решения однородных и неоднородных краевых задач.

Научная новизна работы.

1. Впервые изучено влияние изменения числа Прандтля на колебательную неустойчивость Рэлея–Бенара–Марангони в рамках небуссинесковской модели корректного учета плавучести для слоя со свободной поверхностью.
2. Обнаружена новая мода колебательной неустойчивости слоя жидкости со свободной поверхностью, основным механизмом которой является раскачка капиллярных волн за счет теплового расширения жидкости.
3. Обнаружена новая колебательная мода конвекции Марангони в тонкой пленке жидкости за рамками длинноволнового приближения
4. Выведены амплитудные уравнения термокапиллярной конвекции, описывающие эволюцию толщины тонкой пленки жидкости и осредненной по высоте температуры жидкости в рамках двухслойного подхода.
5. Проведен линейный и слабонелинейный анализ возникновения трехмерных структур на квадратной решетке в результате возбуждения термокапиллярной неустойчивости тонкой пленки жидкости.

Теоретическая и практическая значимость. Основные результаты имеют фундаментальное значение и широкий диапазон применения в различных прикладных вопросах. Результаты исследования неустойчивости Рэлея–Бенара–Марангони, возникающей в слое со свободной деформируемой поверхностью, а также анализ новой колебательной моды неустойчивости, связанной с тепловым расширением жидкости, могут быть использованы в технологических процессах и при постановке экспериментов на космической станции в условиях микрогравитации. Результаты вычисления порога возникновения и структуры термокапиллярной неустойчивости тонкой пленки могут быть применены в технологических процессах легирования поверхностного слоя металла.

Автор защищает

1. Результаты линейного анализа колебательной неустойчивости Рэлея–Бенара–Марангони в плоском слое со свободной деформируемой поверхностью в рамках небуссинесковской модели корректного учета плавучести.
2. Карту режимов, отражающую условия возникновения и устойчивости вторичных возмущений для конвекции Рэлея–Бенара–Марангони в плоском слое со свободной поверхностью.
3. Результаты линейного и асимптотического анализа колебательной моды, возникающей в слое жидкости со свободной деформируемой поверхностью в отсутствие термокапиллярного эффекта и подъемных сил.
4. Карту устойчивости, отражающую условия возникновения монотонной и колебательной конвекции Марангони в подогреваемой снизу тонкой пленке жидкости со свободной деформируемой поверхностью.
5. Амплитудные уравнения, описывающие термокапиллярную неустойчивость подогреваемой снизу тонкой пленки жидкости с деформируемой границей в рамках двухслойного подхода.
6. Пороги возникновения и карту вторичных режимов термокапиллярной неустойчивости подогреваемой снизу тонкой пленки жидкости с деформируемой границей в рамках двухслойного подхода.

Достоверность результатов подтверждается тестированием используемых программ расчетов; совпадением данных, полученных разными методами и в рамках разных подходов; соответствием численных и аналитических результатов в предельных случаях.

Апробация работы. Результаты работы были представлены на следующих конференциях: Конференции молодых ученых «Неравновесные процессы в сплошных средах», Пермь (2006, 2007); XV Зимняя школа по механике сплошных сред, Пермь, 2007; Межвузовская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Физика для Пермского края», Пермь, 2008; Всероссийская конференция молодых ученых «Фундаментальные и прикладные задачи нелинейной физики» в рамках XV Научной школы «Нелинейные волны», Нижний Новгород, 2010; XVII Зимняя Школа по механике сплошных сред, Пермь, 2011; 4-я Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения», Бийск, 2011; IMA6 – 6th Conference of the International Marangoni Association, Haifa, Israel, 2012; Всероссийская конференция молодых ученых «Фундаментальные и прикладные задачи нелинейной физики» в рамках XVI Научной школы «Нелинейные волны», Нижний Новгород, 2012; XVIII Зимняя Школа по механике сплошных сред, Пермь, 2013; IMA7 – 7th Conference of the International Marangoni Association, Vienna, Austria, 2014; 2-ая Международная конференция «Пермские гидродинамические научные чтения», Пермь, 2014; XIX Зимняя Школа по механике сплошных сред, Пермь, 2015; 18-ая Международная конференция «Потоки и структуры в жидкостях», Калининград, 2015; VIII Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», Новосибирск, 2015. Кроме того, результаты работы докладывались на Пермском гидродинамическом семинаре имени Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицкого (2014, 2015), учебно-методическом семинаре ПГГПУ (2015), семинаре лаборатории Физической гидродинамики ИМСС УрО РАН (2015).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, включающего обзор литературы, двух глав, заключения и списка литературы, содержащего 119 наименований. Диссертация содержит 22 рисунка. Общий объем диссертации составляет 120 страниц.

В первой главе рассматривается колебательная устойчивость плоского слоя жидкости, расположенного на твердой подложке, которая поддерживается при постоянной температуре. Слой ограничен сверху свободной поверхностью, которая может деформироваться. В параграфе 1.1 дана постановка задачи, приведены полные гидродинамические уравнения, обсуждается вопрос применимости приближения Буссинеска для слоя со свободной деформируемой границы. В параграфе 1.2 описана альтернативная модель тепловой конвекции, позволяющая корректно учесть влияние плавучести на деформационные моды конвекции Марангони. Выбраны единицы измерения и выписаны уравнения для малых возмущений равновесия в безразмерном виде. Получена краевая задача для амплитуд плоских нормальных возмущений. В 1.3 описаны численные методы решения линейной задачи устойчивости Рэлея–Бенара–Марангони. Основные результаты расчетов представлены в четвертом параграфе для двух случаев: аномального и нормального теплового расширения. Для последнего случая обнаружено возникновение колебательной неустойчивости в отсутствие термокапиллярного и подъемно-опускного механизмов. Слабонелинейный анализ конвекции Рэлея–Бенара–Марангони проведен в параграфе 1.5. Получены и проанализированы амплитудные уравнения, построена карта вторичных режимов в широком диапазоне управляющих параметров. В параграфе 1.6 исследуется новая колебательная мода, существующая в отсутствие термокапиллярных и архимедовых сил. Проведен анализ влияния различных характеристик жидкости и внешних сил на данную неустойчивость. В рамках коротковолновой асимптотики решена модельная задача об устойчивости слоя невязкой жидкости со свободной деформируемой границей. Показано, что природа новой моды связана с тепловым расширением жидкости.

Вторая глава посвящена изучению конвекции Марангони в подогреваемой снизу тонкой пленке жидкости со свободной деформируемой поверхностью. В первом параграфе рассматривается линейная задача об устойчивости тонкого слоя в области параметров, где ранее в рамках длинноволнового приближения предсказывалось существование колебательной моды конвекции Марангони для случая подогрева снизу. Численное решение краевой задачи устойчивости подтверждает возникновение колебательной моды конвекции Марангони при подогреве снизу. Проводится сопоставление с результатами длинноволнового анализа. Во втором параграфе эта задача рассматривается в рамках двухслойной модели: решается сопряженная задача о конвекции в тонком слое жидкости и о теплопереносе в газе. В длинноволновом приближении выводятся амплитудные уравнения для эволюции температуры и толщины пленки. Линейный анализ этих уравнений обнаруживает результаты, которые не могли были быть найдены в рамках однослойной модели. Проведен слабонелинейный анализ возникновения и устойчивости вторичных трехмерных структур на квадратной решетке, построена карта режимов.

Публикации и личный вклад автора. Основные материалы диссертации изложены в работах [86–106], из них 2 работы опубликованы в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК [102,105]. Работы [86,93–96,98,104,106–108] выполнены автором лично, в работах [87–92,97,99–103,105] получение и обработка результатов проведены диссертантом, анализ осуществлен совместно с соавторами.

ГЛАВА 1. КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО СЛОЯ СО СВОБОДНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Важный класс задач теории конвективной устойчивости – задачи, возникающие в системах со свободной поверхностью (границей раздела). Большинство этих исследований проводится в предположении о недеформируемости границы раздела. Для многих ситуаций указанное предположение вполне оправдано, поскольку при значениях ускорения свободного падения, характерных для земных условий, и достаточно большом поверхностном натяжении жидкости влияние деформируемости границы раздела на конвективную устойчивость мало [31,32]. В то же время предположение о недеформируемости границы сильно упрощает процедуру получения решения задачи.

Учет влияния деформируемости границы принципиально важен с точки зрения исследования новых механизмов неустойчивости. Рассмотрение конвективной неустойчивости с учетом деформируемости границы в рамках приближения Буссинеска проводилось ранее в ряде работ (см., например, [28,29,38,39]). Однако предположение о деформируемости границы входит в противоречие со стандартным приближением Буссинеска (см., например, анализ в [30], а также обзор [37]). В действительности это означает, что некоторыми из малых слагаемых пренебрегают, а другие слагаемые того же порядка удерживаются в уравнениях, что может привести к физически неверным выводам о зависимости наблюдаемых эффектов от этих параметров.

В данной главе в рамках небуссинесковской модели (предложена Д.В. Любимовым [50]) исследуется колебательная мода конвективной устойчивости горизонтального слоя жидкости со свободной поверхностью [86–99,101,107].

1.1. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия

Рассмотрим конвекцию в бесконечном слое вязкой жидкости, расположенном между двумя горизонтальными границами, нижняя из которых твердая, а верхняя – свободная и деформируемая. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы плоскость *X*–*Y* располагалась вдоль нижней границы, а ось *z* – перпендикулярно ей (Рис. 1). Средняя толщина слоя – h_0; динамическая вязкость, температуропроводность и коэффициент объемного расширения жидкости равны соответственно η, χ и β. Нижняя твердая граница поддерживается при постоянной температуре T_1; температура на верхней свободной границе – T_2, теплоотдача с неё описывается законом Ньютона.

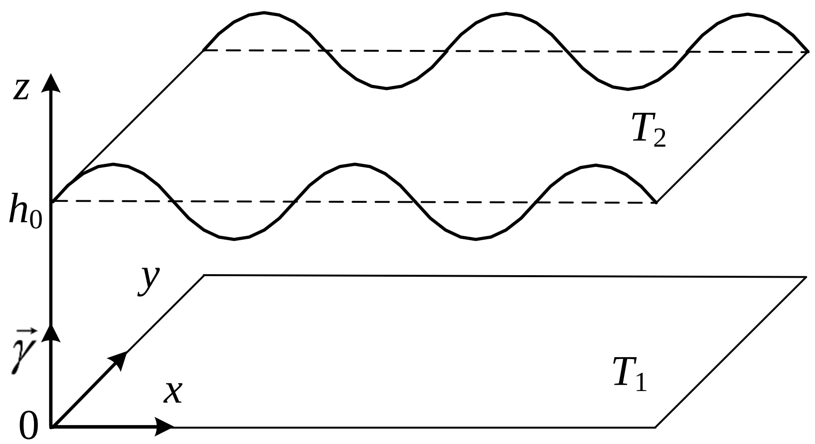

Рис. 1. Постановка задачи

Будем считать жидкость изотермически несжимаемой (плотность зависит только от температуры), а вязкость и теплопроводность жидкости – постоянными. Уравнения движения и теплопереноса (в пренебрежении диссипацией тепла из-за внутреннего трения) в такой жидкости имеют вид:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t}+\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\vec{\mathrm{v}}\right)=-\nabla p+\eta\Delta\vec{\mathrm{v}}+\frac{1}{3}\eta\nabla\left(\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)+\rho\vec{g}, \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{\mathrm{v}}\right) = 0. \tag{1.3}$$

Здесь приняты стандартные обозначения; $\vec{g} = -g\vec{\gamma}$ – вектор ускорения свободного падения ($\vec{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси *z*, Рис. 1). К этим уравнениям необходимо добавить уравнение состояния среды $\rho = \rho(T)$.

Уравнения (1.1) – (1.3) должны быть дополнены граничными условиями. На твердой нижней границе это условие прилипания и фиксированная температура (граница считается идеально теплопроводной):

$$z = 0: \ \vec{\mathrm{v}} = 0, \ T = T_1. \tag{1.4}$$

На свободной верхней границе, форма которой описывается уравнением $z = h_0 + \zeta\left(x, y, t\right)$, требуем выполнения баланса касательных и нормальных напряжений, кинематического условия и условия теплоотдачи Ньютона:

$$\sigma_{n\tau} + \vec{\tau} \cdot \nabla \alpha = 0, \tag{1.5}$$

$$-p + \sigma_{nn} = \alpha K, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}} \cdot \nabla \zeta = \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\gamma}, \tag{1.7}$$

$$\kappa \vec{n} \cdot \nabla T = b\left(T_\infty - T\right), \tag{1.8}$$

где α – коэффициент поверхностного натяжения (полагаем его зависящим от температуры по закону $\alpha = \alpha_0 - \alpha_T T$, α_T – температурный коэффициент поверхностного натяжения), $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ – нормальный и касательный к свободной поверхности единичные векторы, $K = \nabla \cdot \vec{n}$ – кривизна свободной поверхности, κ – теплопроводность жидкости, b – коэффициент теплоотдачи со свободной поверхности; σ – тензор вязких напряжений, определяющийся соотношением

$$\sigma_{ik} = \eta\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathrm{v}_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right). \quad (1.9)$$

Данная задача, описывающая тепловую конвекцию в жидкости, характеризуется рядом безразмерных параметров, среди которых выделим параметр Буссинеска $\varepsilon = \beta\Theta$ и число Галилея $Ga = gh_0^3/\nu\chi$ (где $\Theta = T_1 - T_2$ – характерный перепад температур в слое, $\nu = \eta/\rho_0$ – кинематическая вязкость жидкости).

При исследовании тепловой конвекции обычно используется приближение Буссинеска, в котором зависимостью плотности от температуры пренебрегается всюду в уравнениях (1.1) – (1.3), кроме слагаемого с подъемной силой в уравнении движения. Формально использование этого приближения означает, что совершается предельный переход $\varepsilon \to 0$, причем произведение εGa остается конечным, т.е. $Ga \to \infty$. Последнее условие приводит к требованию недеформируемости свободной границы. Действительно, при таком переходе главное слагаемое в уравнении движения (1.1) будет иметь вид

$$p = \rho gz + const,$$

а главная часть в условии баланса нормальных напряжений на свободной границе даст

$$\rho g\zeta = const,$$

т.е. поверхность остается плоской и горизонтальной, а нормальная компонента скорости на ней обращается в ноль (условие (1.7)).

Использование приближения Буссинеска оправдано в большинстве ситуаций из-за характерных для земных систем значений параметра Галилея, т.к. гравитационные силы подавляют возмущения горизонтальной свободной поверхности. Существует, однако, целый класс задач, когда применение приближения Буссинеска не является оправданным. Например, при исследовании конвекции в условиях микрогравитации деформация свободной поверхности может оказывать существенное влияние на конвективное движение в жидкости.

В ходе дальнейшего изложения будет использоваться модель корректного учета плавучести для систем с деформируемой границей, предложенная Д.В. Любимовым [50].

1.2. Небуссинесковская модель описания конвекции Рэлея–Бенара в слое с деформируемой границей раздела сред. Линейная задача устойчивости

В рамках небуссинесковской модели зависимость плотности от температуры учитывается в уравнениях (1.1) – (1.3) не только в слагаемом с подъемной силой, но и в инерционных членах и уравнении непрерывности; уравнение состояния предполагается экспоненциальным $\rho(T)=\rho_0 e^{-\beta T}$.

Краевая задача (1.1) – (1.8) допускает решение, соответствующее состоянию механического равновесия, когда жидкость покоится, $\vec{\mathrm{v}}=0$, свободная поверхность остается плоской, $\zeta=0$, а температура и давление в слое линейно зависят от вертикальной координаты:

$$T^{(0)}=T_1-z\frac{T_1-T_2}{h_0},\quad \frac{dp^{(0)}}{dz}=-\rho^{(0)}g\,,\quad \rho^{(0)}=\rho\left(T^{(0)}\right) \tag{1.10}$$

Исследуем устойчивость равновесия методом малых возмущений: рассмотрим отклонение физических полей от равновесных значений $T^{(0)}+T'$, $p^{(0)}+p'$, $\rho^{(0)}+\rho'$, которые приводят к конвективному движению со скоростью $\vec{\mathrm{v}}$ и отклонению ζ формы свободной поверхности от плоской. Линеаризованные уравнения для возмущений в рамках вышеописанной небуссинесковской модели имеют вид (штрихи для возмущенных полей далее опущены):

$$\rho^{(0)}\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial t}=-\nabla p+\eta\Delta\vec{\mathrm{v}}+\frac{1}{3}\eta\nabla\left(\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)+\rho^{(0)}\beta Tg\vec{\gamma}\,, \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla T^{(0)}=\chi\Delta T\,, \tag{1.12}$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}=\beta\chi\Delta T\,, \tag{1.13}$$

Далее ограничимся рассмотрением случая плоских возмущений, когда физические характеристики конвективного движения не меняются в направлении оси y.

Граничные условия (1.5) – (1.8) на свободной границе удобно перенести на невозмущенную поверхность, раскладывая физические величины в ряд Тейлора:

$$f\left(h_0+\zeta\right)=f\left(h_0\right)+f'\left(h_0\right)\zeta+\ldots \tag{1.14}$$

С учетом данного соотношения, линеаризованные граничные условия при $z=h_0$ для малых возмущений равновесия принимают вид:

$$\eta\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\alpha_T\left(\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\Theta}{h_0}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), \tag{1.15}$$

$$-p+\rho^{(0)}g\zeta+\eta\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)=\alpha_0\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\,, \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=w\,, \tag{1.17}$$

$$\kappa\frac{\partial T}{\partial z}=b\left(\frac{\Theta}{h_0}\zeta-T\right), \tag{1.18}$$

где принято обозначение $\vec{\mathrm{v}}=\left(u,0,w\right)$.

Запишем уравнения и граничные условия в безразмерном виде. В качестве масштабов физических величин выберем следующие: h_0 – для длины, Θ – для температуры, χ/h_0 – для скорости, h_0^2/χ – для времени, $\eta\chi/h_0^2$ – для давления, $\rho^{(0)}\left(z=h_0\right)$ – для плотности:

$$\frac{\rho_0}{Pr}\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial t}=-\nabla p+\Delta\vec{\mathrm{v}}+\frac{1}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)+\rho_0 RaT\vec{\gamma}\,, \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\Delta T+\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\gamma}\,, \tag{1.20}$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}=\varepsilon\Delta T\,, \tag{1.21}$$

$$z=0:\ \vec{\mathrm{v}}=0\,,\ T=0, \tag{1.22}$$

$$z=1:\ \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=-Ma\left(\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), \tag{1.23}$$

$$-p+Ga\zeta+2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}=Ca\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\,, \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=w\,, \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=-Bi\left(T-\zeta\right). \tag{1.26}$$

Данная краевая задача содержит следующие параметры подобия (кроме уже введенных параметра Буссинеска и числа Галилея):

$$Pr=\frac{\nu}{\chi},\ Ra=\frac{g\beta\Theta h_0^3}{\nu\chi},\ Ma=\frac{\alpha_T\Theta h_0}{\eta\chi},\ Ca=\frac{\alpha_0 h_0}{\eta\chi},\ Bi=\frac{bh_0}{\kappa} \tag{1.27}$$

– это числа Прандтля, Рэлея, Марангони, параметр капиллярности (также используется обратная величина $Cr=Ca^{-1}$, который в англоязычной литературе называется «crispation number») и число Био, соответственно. Отметим, что число Рэлея уже не является независимым параметром: $Ra=\varepsilon Ga$.

Задача (1.19) – (1.26) допускает решение в виде нормальных возмущений. В этом случае поля скорости, температуры и давления имеют вид $\left(\vec{\mathrm{v}},p,T,\zeta\right)=\left(\vec{V},P,\theta,\xi\right)\exp\left(\lambda t+ikx\right)$, где k – волновое число, $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i$ – инкремент. Спектральная задача для амплитуд возмущений запишется в форме:

$$\frac{\lambda\rho_0}{Pr}\vec{V}=-\nabla P+\Delta\vec{V}+\frac{1}{3}\nabla\left(ikU+W'\right)+\rho_0 Ra\theta\vec{\gamma}\,, \tag{1.28}$$

$$\lambda\theta=\Delta\theta+W\,, \tag{1.29}$$

$$ikU + W' = \varepsilon \Delta \theta, \qquad (1.30)$$

$$z = 0:\ U = W = \theta = 0, \qquad (1.31)$$

$$z = 1:\ ikW + U' = -ikMa\left(\theta - \xi\right), \qquad (1.32)$$

$$-P + Ga\xi + 2W' - \frac{2}{3}\left(ikU + W'\right) = -k^2 Ca\xi, \qquad (1.33)$$

$$\lambda\xi = W, \qquad (1.34)$$

$$\theta' = -Bi\left(\theta - \xi\right), \qquad (1.35)$$

где $\vec{V} = \left(U, 0, W\right)$, штрихом обозначено дифференцирование по вертикальной координате и принято обозначение $\Delta \equiv'' - k^2$. Уравнение состояния имеет вид $\rho_0 = e^{\varepsilon\left(z-1\right)}$.

1.3. Методы численного решения

В дальнейшем будем анализировать устойчивость по отношению к возмущениям с произвольной длиной волны. В этом случае краевая задача (1.28) – (1.35) не может быть решена аналитически и требует численных расчетов. Граничные условия являются асимметричными вследствие наличия свободной поверхности. Несмотря на это граничные условия оказываются двухточечно разделенными: ровно половина из них задана на нижней границе слоя, а другая половина – на верхней. Действительно, систему уравнений шестого порядка (1.28) – (1.30) легко свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка при помощи следующих обозначений:

$$y_1 = W, y_2 = U, y_3 = \theta, y_4 = p, y_5 = U', y_6 = \theta', \qquad (1.36)$$

а именно:

$$y_1' = -iky_2 + \varepsilon\left(\lambda y_3 - y_1\right), \qquad (1.37)$$

$$y_2' = y_5, \qquad (1.38)$$

$$y_3{}' = y_6, \tag{1.39}$$

$$y_4{}' = \left(\frac{4}{3}\varepsilon^2 - \frac{\lambda\rho_0}{Pr} - k^2\right)y_1 + \frac{4}{3}ik\varepsilon y_2 + \left(Ra\rho_0 - \frac{4}{3}\varepsilon^2\lambda\right)y_3 - \\ -iky_5 + \frac{4}{3}\varepsilon\lambda y_6, \tag{1.40}$$

$$y_5{}' = \left(k^2 + \frac{\lambda\rho_0}{Pr}\right)y_2 + iky_4 + \frac{1}{3}ik\varepsilon\left(y_1 - \lambda y_4\right), \tag{1.41}$$

$$y_6{}' = \left(k^2 + \lambda\right)y_3 - y_1. \tag{1.42}$$

Граничные условия принимают вид:

$$z = 0: \; y_1 = y_2 = y_3 = 0, \tag{1.43}$$

$$z = 1: \; iky_1 + y_5 = -ikMa\left(y_3 - \xi\right), \tag{1.44}$$

$$-y_4 + Ga\xi - 2iky_2 + \frac{4}{3}\varepsilon\left(\lambda y_4 - y_1\right) = -k^2 Ca\xi, \tag{1.45}$$

$$y_1 = \lambda\xi, \tag{1.46}$$

$$y_6 = -Bi\left(y_3 - \xi\right). \tag{1.47}$$

Для решения таких краевых задач существует несколько отработанных методик (см., например, [109,110]). Будем использовать метод стрельбы [111], который широко применяется при решении линейных задач конвективной устойчивости и хорошо себя зарекомендовал среди представителей Пермской гидродинамической школы. Суть метода заключается в том, что решение задачи (1.37) – (1.47) ищется в виде суперпозиции трех частных решений:

$$\vec{y}(z) = c_1\vec{y}^{(1)}(z) + c_2\vec{y}^{(2)}(z) + c_3\vec{y}^{(3)}(z), \tag{1.48}$$

где в качестве базиса для частных решений выбрана тройка ортонормированных векторов:

$$\vec{y}^{(1)}(0) = \left(0,0,0,1,0,0\right),$$

$$\vec{y}^{(2)}(0) = \left(0,0,0,0,1,0\right), \tag{1.49}$$

$$\vec{y}^{(3)}(0) = \left(0,0,0,0,0,1\right).$$

При интегрировании системы (1.37) – (1.42) с начальными условиями (1.49) применяется метод Рунге–Кутты–Мерсона (метод пятого порядка точности) [112,113].

Коэффициенты c_i находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений, получающейся при подстановке искомого решения (1.48) в граничные условия на верхней границе. Из этих условий также определяется ξ. Поэтому система линейных алгебраических уравнений содержит четыре уравнения для четырех неизвестных величин. Условием разрешимости получающейся однородной системы является равенство нулю определителя матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y_1^{\,1} & y_1^{\,2} & y_1^{\,3} & -\lambda \\ \left(-y_4^{\,1} - 2iky_2^{\,1} + \dfrac{4}{3}\lambda\varepsilon y_3^{\,1}\right)Cr & ... & ... & \left(Ga - \dfrac{4}{3}\lambda\varepsilon\right)Cr + k^2 \\ y_5^{\,1} + iky_1^{\,1} + ikMay_3^{\,1} & ... & ... & -ikMa \\ y_6^{\,1} + Biy_3^{\,1} & ... & ... & -Bi \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

Определитель этой матрицы комплексный, поэтому для определения собственных значений краевой задачи приходится решать систему двух нелинейных уравнений. Эта процедура осуществляется стандартным методом двумерных секущих:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left\{\det\left(\mathbf{A}\right)\right\} = 0 \\ \operatorname{Im}\left\{\det\left(\mathbf{A}\right)\right\} = 0. \end{cases} \tag{1.51}$$

При некоторых значениях параметров в системе уравнений (1.28) – (1.30) появляется малый параметр при старшей производной. В этом случае частные решения перестают быть независимыми и формально не могут быть использованы при построении фундаментальной системы решений. Для сохранения линейной независимости частных решений на каждом шаге интегрирования применялась процедура ортогонализации по Грама–Шмидту [116]. Для вычисления собственных значений написана программа на языке Fortran-90. В ходе нахождения обратных матриц, умножения матриц и вычисления определителя матрицы использованы операции и функции библиотеки IMSL Fortran-90 MP.

1.4. Основные результаты линейного анализа

В классической работе [20] Такашима показал, что колебательная мода неустойчивости Рэлея–Бенара существует при отрицательных значениях числа Марангони. Случай отрицательных Ma соответствует нагреву со стороны свободной границы (считаем, что $\alpha_T > 0$, т.е. рассматривается нормальный термокапиллярный эффект). При таком направлении нагрева параметр Буссинеска будет принимать положительные значения при наличии аномального теплового расширения (рост плотности жидкости с увеличением температуры), а отрицательные – при наличии нормального теплового расширения (уменьшение плотности жидкости с ростом температуры). Проанализируем по отдельности эти два случая: $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$.

Ниже в данном параграфе представлены результаты численного решения линейной задачи устойчивости: нейтральные кривые и карты устойчивости, которые позволяют определить физические условия возникновения конвекции в слое жидкости. Количественные данные были получены в широком диапазоне безразмерных параметров Pr, Ga, Cr. Это позволило изучить влияние различных факторов на возникновение колебательной неустойчивости: капиллярных и гравитационных сил, вязких и теплопроводных свойств жидкости.

Основные результаты, представленные ниже, получены при значении числа Био $Bi = 0$, что соответствует теплоизолированной верхней границе.

1.4.1. Положительный параметр Буссинеска

За отправную точку для расчетов была выбрана простейшая система: слой воды. Характерная нейтральная кривая (на которой $\lambda_r = 0$, $\lambda_i \equiv \omega$), отражающая зависимость числа Марангони от волнового числа, при котором возникает колебательная неустойчивость в такой системе, представлена на Рис. 2(а), область неустойчивости расположена под кривой. Проведено сопоставление нейтральных кривых: одни получены при решении задачи об устойчивости слоя в приближении Буссинеска, другие – при решении задачи (1.28) – (1.35). Как видно из Рис. 2, при очень малых значениях параметра Буссинеска результаты моделирования в рамках приближения Буссинеска и в рамках модели Д.В. Любимова практически совпадают (расхождение в значениях максимального Ma составляет 0.003 %), см. Рис. 2(а). Существенные различия начинают наблюдаться при больших ε, что соответствует сильной зависимости плотности от температуры, см. Рис. 2(б). Поэтому в дальнейших расчетах будут рассматриваться случаи больших ε.

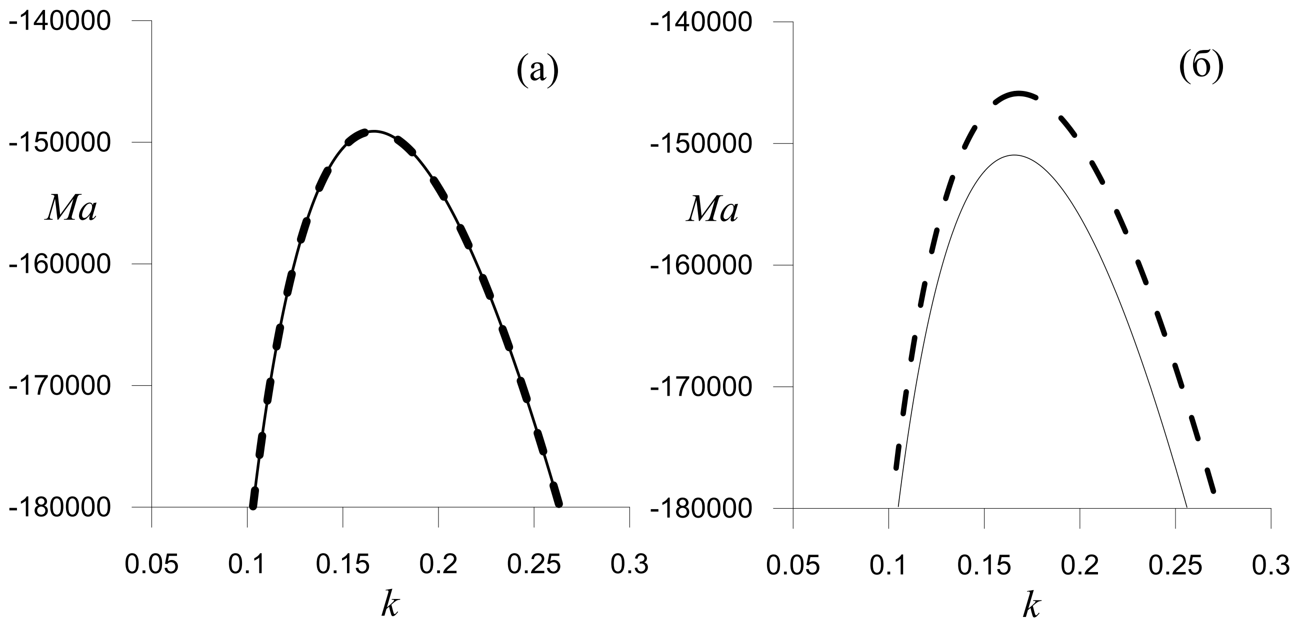

Рис. 2. Сопоставление результатов, полученных в рамках приближения Буссинеска (штриховые линии) и в рамках небуссинесковской модели (сплошные линии). Нейтральные кривые колебательной моды при различных значениях параметра Буссинеска: ε=0.0001 (а), ε=0.1 (б). Ga=70000, Cr=0.000002, Pr=10.

В ходе расчетов исследовалось влияние на данную неустойчивость физических характеристик жидкости: вязкости и теплопроводности, путем варьирования числа Прандтля в широком диапазоне значений. На Рис. 3(а-в) изображены нейтральные кривые для фиксированных значений параметров $\varepsilon = 0.1$, $Cr = 0.000002, Ga = 70000$ и различных значений числа Прандтля: $Pr = 100,\ 50,\ 20,\ 3,\ 1,\ 0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001$ (области устойчивости располагаются выше кривых). Как видно, при больших значениях числа Прандтля нейтральные кривые имеют характерный вид «сапожка» с одним локальным максимумом на верхней границе. При этом с уменьшением Pr критическое значение числа Марангони Ma_c по модулю уменьшается, а длина волны наиболее опасных возмущений увеличивается (Рис. 3(а)).

При $Pr \lesssim 0.1$ на верхней границе нейтральной кривой появляется ещё один локальный максимум в области бóльших волновых чисел, который, однако, никогда не становится наиболее опасным (Рис. 3(б)). При очень маленьких значениях числа Прандтля второй максимум исчезает, но появляется минимум – в области меньших волновых чисел. При $Pr \lesssim 0.001$ крайний левый минимум нейтральной кривой быстро опускается на плоскости $Ma - k$ с уменьшением Pr и при $Pr = 0.0001$ кривая фактически состоит из двух частей, которые не пересекаются даже в области очень больших по модулю значений числа Марангони (Рис. 3(в)). Этот третий минимум также не является наиболее опасным; на всем промежутке значений Pr критические возмущения характеризуются волновым числом $k \sim 0.1$.

Итоговая карта устойчивости представлена на Рис. 3(г), область неустойчивости расположена под кривой. Отчетливо видна стабилизация равновесия при увеличении числа Прандтля, что довольно типично для колебательной неустойчивости. На этом рисунке также изображена зависимость частоты критических возмущений от числа Прандтля, отражающая монотонный рост ω_c с ростом Pr.

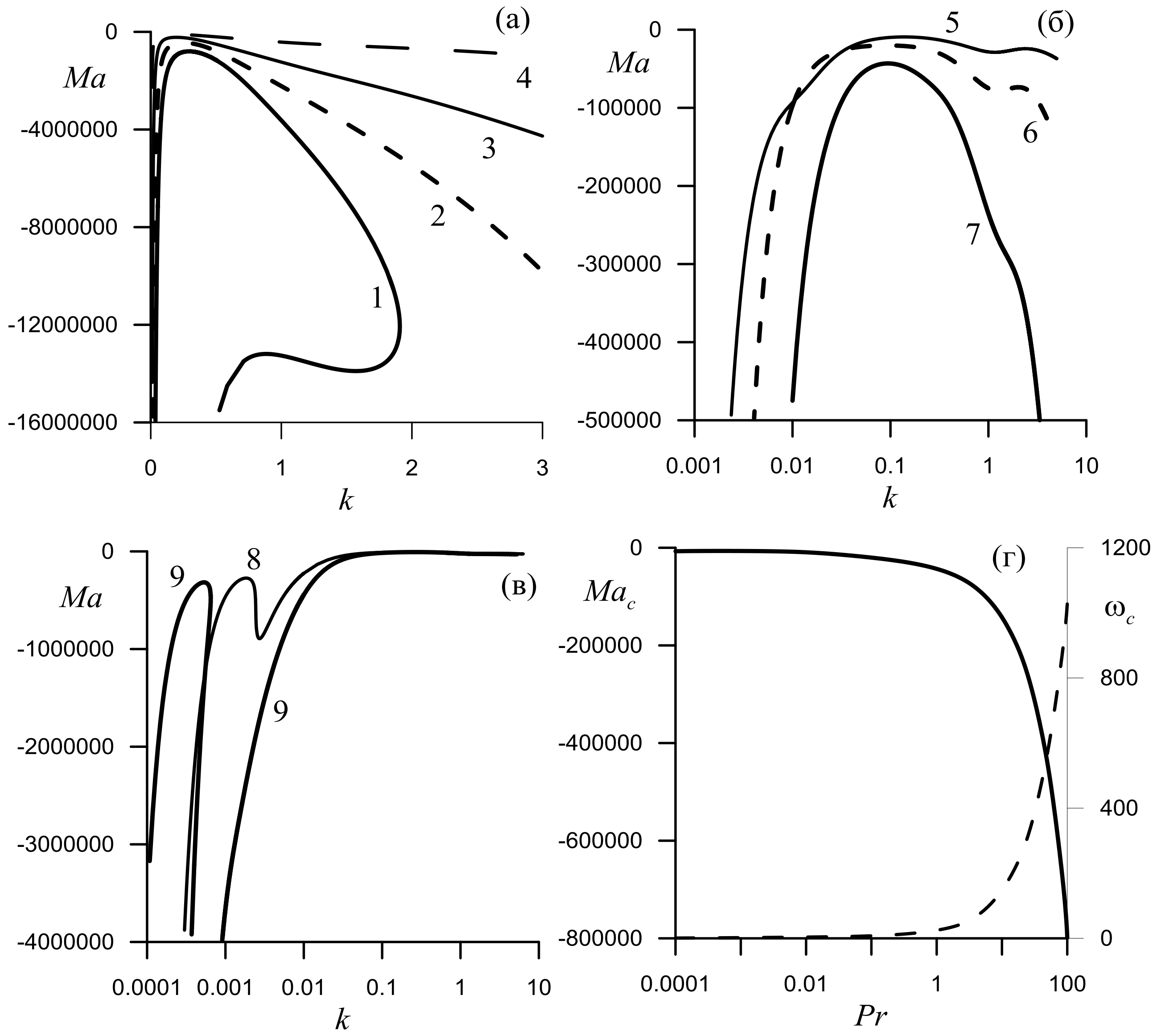

Рис. 3. Нейтральные кривые при различных значениях числа Прандтля: *Pr*=100, 50, 20, 3, 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 (кривые 1-9) (а)-(в). Зависимость критического числа Марангони (сплошная кривая) и частоты критических возмущений (штриховая кривая) от числа Прандтля (г). ε=0.1, *Ga*=70000, *Cr*=0.000002

Аналогичное исследование влияния числа Прандтля на колебательную неустойчивость равновесия проводилось для условия невесомости ($Ga=0$). На Рис. 4(а-в) представлены нейтральные кривые для фиксированных значений параметров $\varepsilon=0.1$, $Cr=0.000002, Ga=0$ и различных значений числа Прандтля: $Pr=100,\ 25,\ 7,\ 1,\ 0.1,\ 0.005,\ 0.001,\ 0.0001$. Каждая нейтральная кривая имеет вид перевернутого «сапожка» с различным количеством локальных максимумов на верхней границе, как и в случае ненулевого Ga (область неустойчивости расположена внутри нейтральной кривой). Однако в случае невесомости эти локальные максимумы конкурируют между собой. По-прежнему, при больших значениях числа Прандтля нейтральные кривые имеют один локальный максимум; Ma_c по модулю уменьшается, а длина волны наиболее опасных возмущений растет с уменьшением Pr (Рис. 4(а)). При $Pr \lesssim 0.1$ на верхней границе нейтральной кривой появляется ещё один локальный максимум в области бо́льших волновых чисел (он менее опасный), а при $Pr \lesssim 0.01$ главный максимум расщепляется на два максимума, левый из которых становится наиболее опасным (Рис. 4(б)).

При очень маленьких значениях числа Прандтля наблюдается сложное поведение нейтральной кривой: при $Pr \lesssim 0.0001$ кривая разделяется на две части, которые не пересекаются даже в области очень больших $|Ma|$; наиболее опасным становится максимум, расположенный на левой части кривой и соответствующий возмущениям с бо́льшей длиной волны (Рис. 4(в)).

Результирующая карта устойчивости представлена на Рис. 4(г). Описанная выше конкуренция максимумов, соответствующих более длинным и более коротким возмущениям, приводит к тому, что итоговая карта устойчивости фактически состоит из двух частей (сплошная линия). По той же причине зависимость критического волнового числа (штриховая линия) от числа Прандтля имеет достаточно необычный вид. Как видно, с уменьшением Pr наблюдается существенная дестабилизация равновесия.

Для наглядности на Рис. 4(д) изображена характерная дисперсионная кривая при малом значении числа Прандтля ($Pr = 0.0001$). Как видно, в длинноволновой области (при $k \lesssim 0.01$) частота возмущений на зависит от волнового числа, а в области более коротковолновых возмущений – практически совпадает с дисперсионным соотношением для капиллярных волн (штриховая кривая).

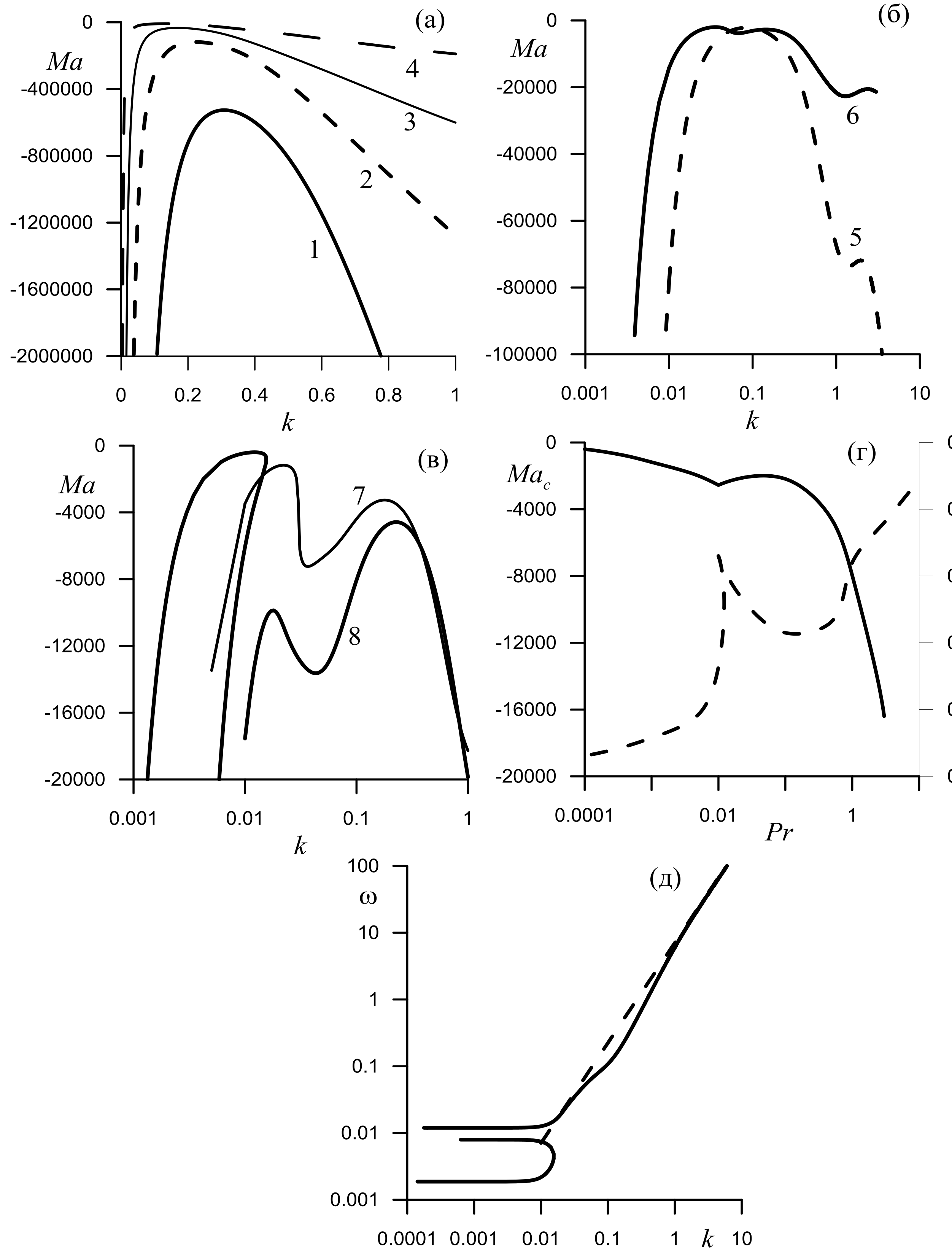

Рис. 4. Нейтральные кривые при различных значениях числа Прандтля: *Pr*=100, 25, 7, 1, 0.1, 0.005, 0.001, 0.0001 (кривые 1-8) (а)-(в). Зависимость критического числа Марангони (сплошная кривая) и критического волнового числа (штриховая кривая) от числа Прандтля (г). Дисперсионная кривая для *Pr*=0.0001 (д). ε=0.1, *Ga*=0, *Cr*=0.000002

1.4.2. Отрицательный параметр Буссинеска

Перейдем к изложению результатов линейного анализа для случая отрицательного параметра Буссинеска, что, как упоминалось выше, соответствует эффекту нормального теплового расширения жидкости (эта ситуация встречается в природе намного чаще, чем аномальное тепловое расширение). Как известно, для слоя воды, который мы выбрали за отправную точку для наших расчетов, в широком диапазоне температур имеет место как раз эффект нормального теплового расширения (кроме диапазона 0 – 4°C). Тем не менее, параметр Буссинеска при этом имеет реальные значения много меньшие, чем в наших расчетах (см. обсуждение в начале параграфа 1.4.1 и Рис. 2).

На Рис. 5(а-б) изображены нейтральные кривые колебательной неустойчивости, возникающей в системе, характеризующейся безразмерными параметрами $Ga = 70000$, $Cr = 0.000002$, $\varepsilon = -0.1$ при различных значениях числа Прандтля.

Как видно, при больших Pr нейтральные кривые для случая $\varepsilon < 0$ похожи на кривые при $\varepsilon > 0$: они имеют вид перевернутого «сапожка» с одним локальным максимумом на верхней границе. Область неустойчивости находится внутри кривой. С уменьшением числа Прандтля область неустойчивости расширяется, число Марангони и волновое число для критических возмущений по абсолютному значению уменьшаются (Рис. 5(а)). С дальнейшим уменьшением числа Прандтля после $Pr = 0.1$ возникает второй, более коротковолновый максимум, который быстро становится более опасным, чем первый, более длинноволновый максимум (Рис. 5(б)).

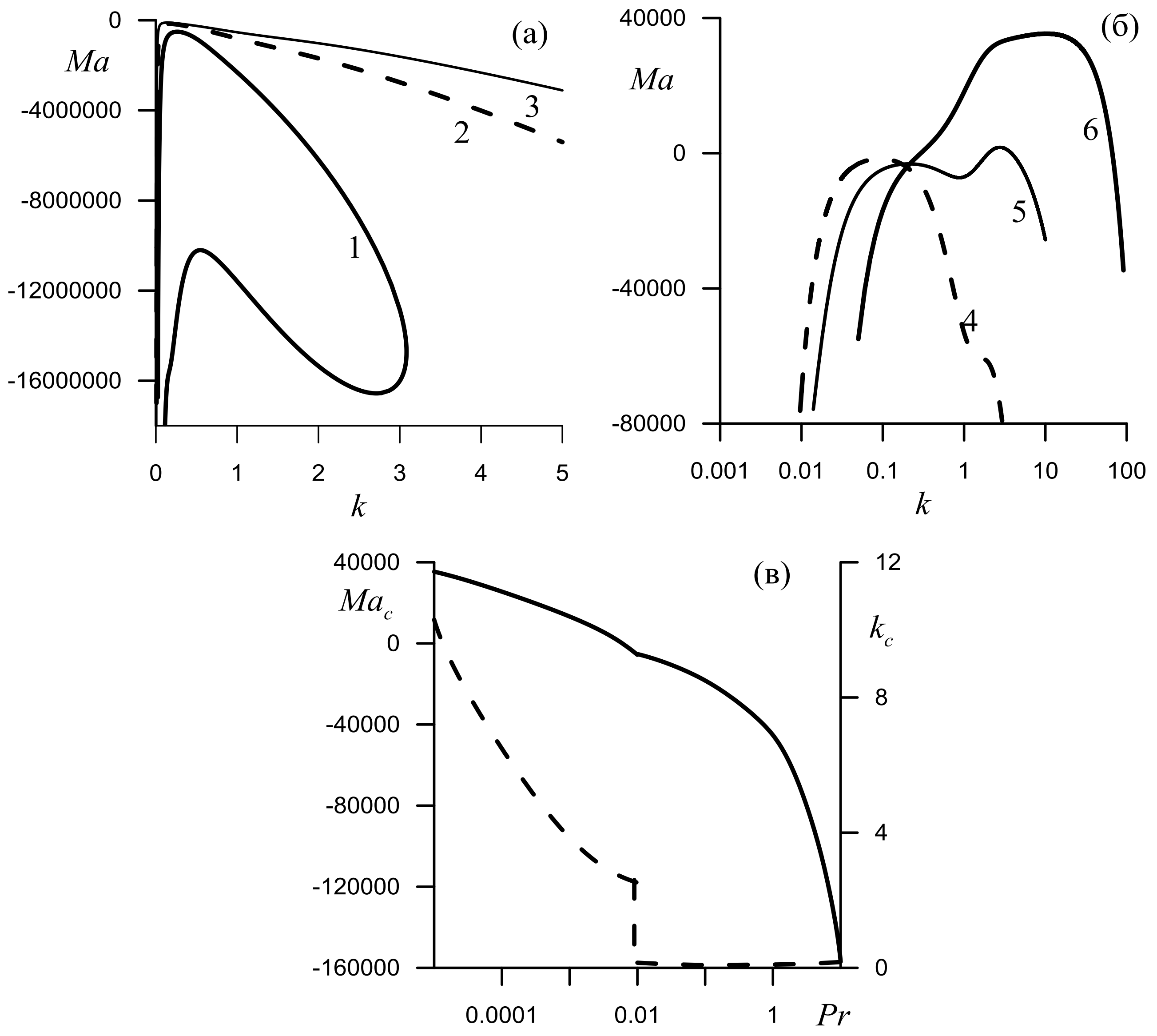

Рис. 5. Нейтральные кривые при различных значениях числа Прандтля: *Pr*=50, 10, 5, 0.1, 0.005, 0.00001 (кривые 1-6) (а)-(б). Зависимость критического числа Марангони (сплошная кривая) и критического волнового числа (штриховая кривая) от числа Прандтля (в); ε=-0.1, *Ga*=70000, *Cr*=0.000002

Нейтральные кривые колебательной устойчивости в области очень малых значений числа Прандтля для случая $\varepsilon < 0$ существенно отличаются от нейтральных кривых для случая $\varepsilon > 0$. При $Pr \lesssim 0.005$ нейтральные кривые для отрицательного параметра Буссинеска по непрерывности пересекают ось $Ma = 0$ и располагаются одновременно в области отрицательных и положительных значений числа Марангони; наиболее опасными становятся возмущения с $Ma > 0$ (Рис. 5(б)). Точки пересечения нейтральной кривой и оси $Ma = 0$, очевидно, соответствуют возникновению чисто Рэлеевской неустойчивости (без термокапиллярного эффекта); а часть кривой, располагающуюся в области $Ma > 0$, можно интерпретировать как неустойчивость в условиях аномального термокапиллярного эффекта.

Конкуренция двух локальных максимумов, коротковолнового и длинноволнового, приводит к тому, что итоговая карта устойчивости фактически состоит из двух частей (Рис. 5(в)).

Ещё более интересное и нетривиальное поведение нейтральных кривых обнаружено для случая $Ga = 0$. На Рис. 6(а-в) представлены нейтральные кривые колебательной неустойчивости при фиксированных значениях параметров $Cr = 0.000002$, $Ga = 0$, $\varepsilon = -0.1$ и различных значениях числа Прандтля: $Pr = 100, 50, 7, 1, 0.01, 0.005, 0.0005, 0.00001$. На этих графиках изображены только верхние части нейтральных кривых, которые, по-прежнему, имеют вид перевернутого «сапожка», внутри которого находится область неустойчивости. При больших значениях числа Прандтля $Pr \geq 1$ на верхней границе нейтральной кривой имеется только один локальный максимум, который соответствует возмущениям с большой длиной волны (Рис. 6(а)).

С уменьшением числа Прандтля на верхней границе нейтральной кривой появляется второй локальный максимум, описывающий коротковолновые возмущения, который быстро растет и становится наиболее опасным (Рис. 6(б)). Почти одновременно с этим максимумом возникает третий локальный максимум, описывающий возмущения с наибольшей длиной волны (по сравнению с остальными максимумами), однако он не становится наиболее опасным. В области очень малых Pr этот третий максимум разделяется на два: нейтральная кривая состоит из двух частей, не пересекающихся даже в области больших $|Ma|$ (Рис. 6(в)). График дисперсионного соотношения, соответствующий данной нейтральной кривой, показан на Рис. 6(д): длинноволновая часть не зависит от k, а коротковолновая часть близка к дисперсионной кривой для капиллярных волн (штриховая линия).

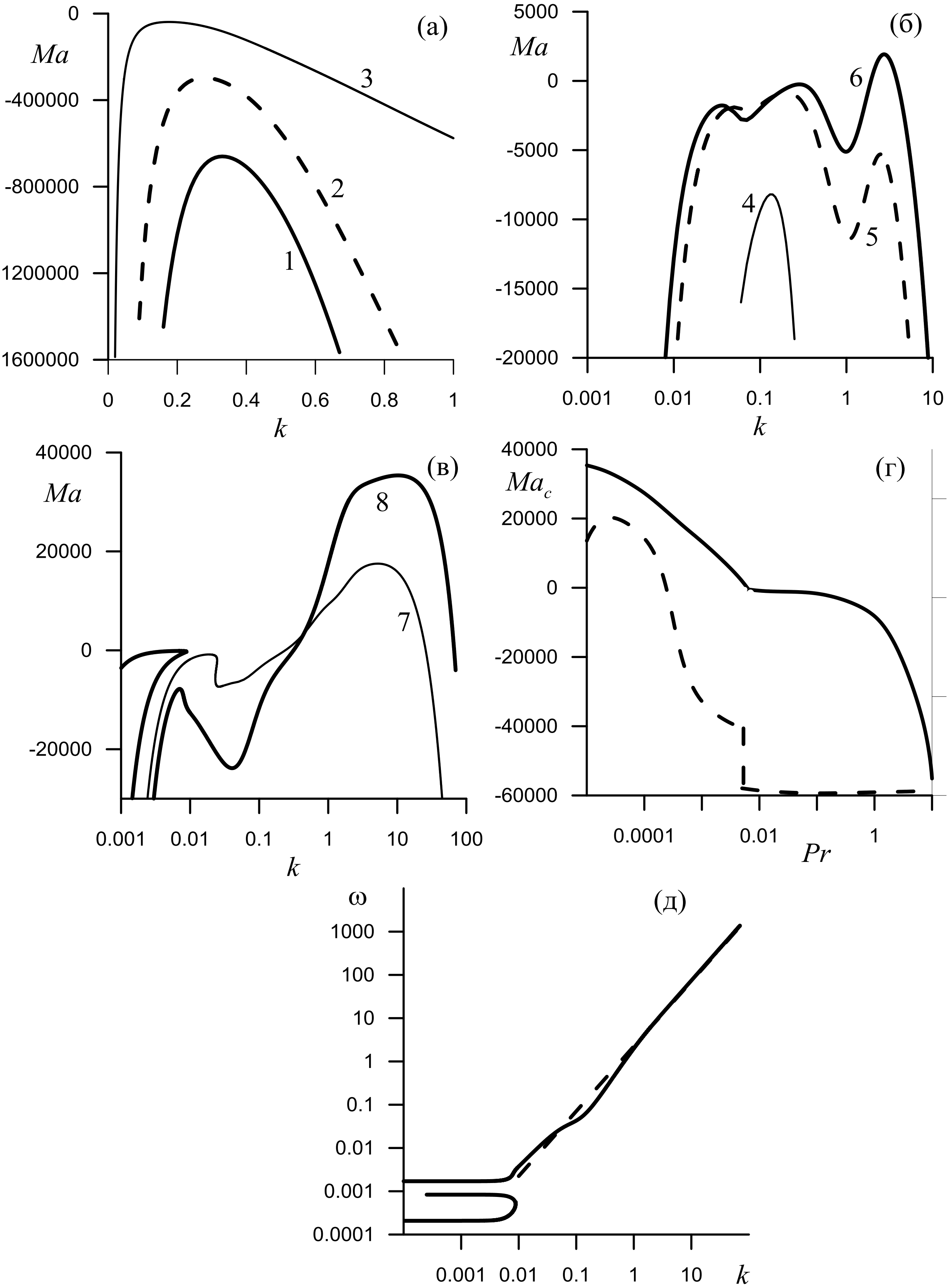

Рис. 6. Нейтральные кривые при различных значениях числа Прандтля: *Pr*=100, 50, 7, 1, 0.01, 0.005, 0.0005, 0.00001 (кривые 1-8) (а-в). Зависимость критического числа Марангони (сплошная кривая) и критического волнового числа (штриховая кривая) от числа Прандтля (г). Дисперсионная кривая для *Pr*=0.00001 (д); ε=-0.1, *Ga*=0, *Cr*=0.000002

Итоговая карта устойчивости, отражающая зависимость критических значений числа Марангони и характерных волновых чисел наиболее опасных возмущений от числа Прандтля, изображена на Рис. 6(г). Описанная выше конкуренция максимумов, соответствующих возмущениям с различными длинами волн, приводит к сложному виду кривых, изображенных на данном рисунке. Как видно, длина волны критических возмущений при малых и больших значениях числа Прандтля различается на несколько порядков. При этом во всем диапазоне Pr наблюдается стабилизация равновесия при увеличении числа Прандтля.

Как видно из Рис. 6, в случае нулевой гравитации нейтральные кривые в области малых Pr пересекают ось $Ma = 0$ аналогично кривым Рис. 5. Точки пересечения нейтральной кривой с осью $Ma = 0$ представляют собой большой интерес, т.к. фактически описывают возникновение неустойчивости в отсутствие основных механизмов: гравитационного и термокапиллярного. Исследованию этой моды неустойчивости будет посвящен параграф 1.6 данной главы.

1.5. Слабонелинейный анализ конвективных структур

Линейный анализ позволяет определить физические условия возникновения неустойчивости, но не дает представления о том, как будет развиваться неустойчивость. Слабонелинейный анализ позволяет изучить поведение системы вблизи порога устойчивости. Неустойчивость равновесия приводит к формированию конвективного течения. В данной главе исследуется возникновение и форма конвективных течений в припороговой области параметров.

1.5.1. Метод амплитудных функций

В отличие от линейной теории, в слабонелинейном анализе рассматриваются возмущения конечной величины, поэтому для описания движения нужно использовать полные нелинейные уравнения. Как и в случае линейной устойчивости здесь ограничимся рассмотрением двумерных возмущений в плоскости *X*-*Z* (Рис. 1). Для таких возмущений полные нелинейные уравнения и граничные условия в безразмерном виде получаются из уравнений и граничных условий (1.1) – (1.8) с использованием тех же масштабов, что в параграфе 1.2 при выводе безразмерной линейной краевой задачи. Они имеют следующий вид:

$$\frac{\rho}{Pr}\left(\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t}+\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\vec{\mathrm{v}}\right)=-\nabla p+\Delta\vec{\mathrm{v}}+\frac{1}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)-\rho Ga\vec{\gamma}\,, \tag{1.52}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla T=\Delta T\,, \tag{1.53}$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}=\varepsilon\Delta T\,, \tag{1.54}$$

$$\rho=e^{-\varepsilon T}\,, \tag{1.55}$$

$$z=0:\ \vec{\mathrm{v}}=0\,,\ T=1, \tag{1.56}$$

$$z=1+\zeta:\ \frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}=w, \tag{1.57}$$

$$-p+2\left[\frac{\partial w}{\partial z}+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]F^{-2}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}=$$
$$=Ca\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}F^{-3}, \tag{1.58}$$

$$2\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left[1-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right]=$$
$$=-Ma\left(\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)F, \tag{1.59}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)F^{-1}=Bi\left(T_\infty-T\right), \tag{1.60}$$

где введено обозначение $F=\sqrt{1+\left(\partial\zeta/\partial x\right)^2}$.

Вблизи порога устойчивости вторичное течение близко к основному состоянию, поэтому решение задачи (1.52) – (1.60) можно искать в виде рядов по малому параметру:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_0 + \delta \vec{\mathrm{v}}_1 + \delta^2 \vec{\mathrm{v}}_2 + \delta^3 \vec{\mathrm{v}}_3 + \ldots, \tag{1.61}$$

$$p = p_0 + \delta p_1 + \delta^2 p_2 + \delta^3 p_3 + \ldots, \tag{1.62}$$

$$T = T_0 + \delta T_1 + \delta^2 T_2 + \delta^3 T_3 + \ldots, \tag{1.63}$$

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho_1 + \delta^2 \rho_2 + \delta^3 \rho_3 + \ldots, \tag{1.64}$$

$$\zeta = \zeta_0 + \delta \zeta_1 + \delta^2 \zeta_2 + \delta^3 \zeta_3 + \ldots, \tag{1.65}$$

Чтобы включить в рассмотрение новую моду, существующую при $Ma = Ga = 0$, выберем параметр Буссинеска основным управляющим параметром. Он также должен быть разложен в ряд:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta \varepsilon_1 + \delta^2 \varepsilon_2 + \ldots \tag{1.66}$$

Основной идеей при описании конвективных течений в припороговой области является то, что при небольшом превышении критического значения управляющего параметра (в данном случае параметра Буссинеска) основное состояние становится неустойчивым только по отношению к медленно нарастающим возмущениям с волновыми числами, лежащими в узком интервале вблизи k_c. С этим обстоятельством связана относительно простая форма конвективного течения, которое удается описать с помощью медленно меняющихся в пространстве и во времени функций, называемых амплитудными функциями [70].

Вторичные течения в припороговой области характеризуются сильно различающимися временными и пространственными масштабами. Так, характерное время нарастания возмущений, которые вызывают неустойчивость основного состояния, велико по сравнению с периодом колебаний. Это обстоятельство позволяет применить метод многих масштабов [117]. В соответствии с идеей метода производную по времени представим в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t_0}+\delta\frac{\partial}{\partial t_1}+\delta^2\frac{\partial}{\partial t_2}+\ldots. \qquad (1.67)$$

Таким образом, вводятся «быстрое» и «медленное» время.

1.5.2.Вывод и анализ амплитудных уравнений

Подставляя разложения (1.61) – (1.67) в задачу (1.52) – (1.60), мы получаем уравнения, содержащие слагаемые разной степени малости, которые можно рассортировать по порядкам величины малого параметра. При этом в старших порядках ($\sim\delta^2$ и выше) имеем неоднородные краевые задачи. Стандартная схема вывода амплитудного уравнения, которое описывает эволюцию медленно меняющейся амплитудной функции, опирается на выполнение условия разрешимости неоднородной краевой задачи высшего порядка малости [70].

В **нулевом порядке** по δ легко найти решение краевой задачи:

$$\vec{\mathrm{v}}_0=0,\ \zeta_0=0,\ T_0=1-z,\ \rho_0=e^{\varepsilon_0(z-1)},\ \frac{dp_0}{dz}=-\rho_0 Ga. \qquad (1.68)$$

Как и ожидалось, это решение совпадает с основным состоянием системы (1.10) в безразмерной форме.

Задача первого порядка совпадает с линейной задачей устойчивости (1.19) – (1.26), в которой $\varepsilon=\varepsilon_0$ (при выводе учтено, что $\rho_1=-\rho_0\varepsilon_0 T_1$):

$$\frac{\rho_0}{Pr}\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}_1}{\partial t}=-\nabla p_1+\Delta\vec{\mathrm{v}}_1+\frac{1}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}_1\right)-\rho_0 Ra T_1\vec{\gamma}, \qquad (1.69)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}-w_1=\Delta T_1, \qquad (1.70)$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}_1=\varepsilon_0\Delta T_1, \qquad (1.71)$$

$$\rho_0=e^{\varepsilon_0(z-1)}, \qquad (1.72)$$

$$z = 0: \ \vec{\mathrm{v}}_1 = 0, \ T_1 = 0, \tag{1.73}$$

$$z = 1: \ \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = w_1, \tag{1.74}$$

$$-p_1 + Ga\rho_0\zeta_1 + 2\frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{2}{3}\nabla \cdot \vec{\mathrm{v}}_1 = Cr^{-1}\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}, \tag{1.75}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = -Ma\left(\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right), \tag{1.76}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = -Bi\left(T_1 - \zeta_1\right). \tag{1.77}$$

Здесь граничные условия на верхней границе снесены на невозмущенную поверхность в соответствии с выражением (1.14).

Решение первого порядка можно искать в виде двух бегущих в противоположных направлениях волн:

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathrm{v}}_1 \\ p_1 \\ T_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix}(x,z,t) = A(t_1,...)e^{ikx+\lambda t_0}\begin{pmatrix} \vec{\mathrm{v}}_1^{(1)} \\ p_1^{(1)} \\ T_1^{(1)} \\ \zeta_1^{(1)} \end{pmatrix}(z) + B(t_1,...)e^{-ikx+\lambda t_0}\begin{pmatrix} \vec{\mathrm{v}}_1^{(2)} \\ p_1^{(2)} \\ T_1^{(2)} \\ \zeta_1^{(2)} \end{pmatrix}(z) + \textit{к.с.},$$

где $\vec{\mathrm{v}}_1^{(1)}$, $p_1^{(1)}$, $T_1^{(1)}$, $\zeta_1^{(1)}$ – решение линейной задачи (1.28) – (1.35) при $k = k_c$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_c$ и $\lambda = i\omega_c$, A и B – медленно меняющиеся во времени комплексные функции, играющие роль огибающих системы волн (амплитудные функции); буквами *к.с.* обозначено комплексно-сопряженное решение.

Как видно, уравнения и граничные условия в задаче первого порядка инварианты относительно замены $k \to -k$, $u \to -u$, поэтому для второй волны $u_1^{(2)} = -u_1^{(1)}$, $w_1^{(2)} = w_1^{(1)}$, $p_1^{(2)} = p_1^{(1)}$, $T_1^{(2)} = T_1^{(1)}$, $\zeta_1^{(2)} = \zeta_1^{(1)}$.

Как упоминалось выше, для вывода амплитудных уравнений необходимо выполнение условия разрешимости неоднородных краевых задач, которые получаются в высших порядках. Условие разрешимости включает в себя решение задачи, сопряженной с линейной. Сопряженная задача в нашем случае имеет вид:

$$\tilde{p}_1' = -ik\tilde{u}_1, \tag{1.78}$$

$$\tilde{w}_1' = \varepsilon_0\left(\tilde{w}_1 - \frac{ik}{3}\tilde{u}_1\right) + \tilde{T}_1 + \left(\frac{\lambda\rho_0}{Pr} + k^2 - \frac{4}{3}\varepsilon_0^2\right)\tilde{p}_1, \tag{1.79}$$

$$\tilde{u}_1'' = \left(2k^2 + \frac{\lambda\rho_0}{Pr}\right)\tilde{u}_1 - ik\tilde{w}_1 + \frac{4}{3}ik\varepsilon_0\tilde{p}_1, \tag{1.80}$$

$$\tilde{T}_1'' = \left(k^2 + \lambda\right)\tilde{T}_1 + \varepsilon_0\lambda\tilde{w}_1 + ik\varepsilon_0\lambda\tilde{u}_1 + \left(Ra\rho_0 - \frac{4}{3}\varepsilon^2\lambda\right)\tilde{p}_1, \tag{1.81}$$

$$z = 0:\ \tilde{p}_1 = \tilde{u}_1 = \tilde{T}_1 = 0, \tag{1.82}$$

$$z = 1:\ \tilde{u}_1 + ik\tilde{p}_1 = 0, \tag{1.83}$$

$$\tilde{T}_1' + Bi\tilde{T}_1 + ikMa\tilde{u}_1 = 0, \tag{1.84}$$

$$\lambda\tilde{w}_1 + Bi\tilde{T}_1 + \left(Ga\rho_0 + \frac{k^2}{Cr} - \frac{4}{3}\varepsilon_0 Ma\right)\tilde{p}_1 = 0, \tag{1.85}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по вертикальной координате.

Задачи второго и третьего порядков содержат неоднородные дифференциальные уравнения, левые части которых совпадают с уравнениями линейной задачи. Например, во **втором порядке** разложения по малому параметру получаем задачу:

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_0}{Pr}\frac{\partial u_2}{\partial t_0} + \frac{\partial p_2}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial z}\right) = F_1 = \\ &= -\frac{\rho_0}{Pr}\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + w_1\frac{\partial u_1}{\partial z}\right) - \frac{\rho_1}{Pr}\frac{\partial u_1}{\partial t_0}, \end{aligned} \tag{1.86}$$

$$\frac{\rho_0}{Pr}\frac{\partial w_2}{\partial t_0}+\frac{\partial p_2}{\partial z}-\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}\right)-Ra\rho_0 T_2=F_2=$$
$$=-\frac{\rho_0}{Pr}\left(u_1\frac{\partial w_1}{\partial x}+w_1\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)-\frac{\rho_1}{Pr}\frac{\partial w_1}{\partial t_0}-Ga\rho_0\frac{\left(\varepsilon_0 T_1\right)^2}{2},\tag{1.87}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t_0}-w_2-\left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}\right)=F_3=-u_1\frac{\partial T_1}{\partial x}-w_1\frac{\partial T_1}{\partial z},\tag{1.88}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial z}-\varepsilon_0\left(\frac{\partial T_2}{\partial t_0}-w_2\right)=F_4=\varepsilon_0 F_3,\tag{1.89}$$

$$z=0:\ \vec{\mathrm{v}}_2=0,\ T_2=0,\tag{1.90}$$

$$z=1:\ w_2+\zeta_1\frac{\partial w_1}{\partial z}=\frac{\partial \zeta_2}{\partial t_0}+u_1\frac{\partial \zeta_1}{\partial x},\tag{1.91}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial z}-\frac{\partial T_1}{\partial x}\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}\zeta_1=-Bi\left(T_2-\zeta_2+\frac{\partial T_1}{\partial z}\zeta_1\right),\tag{1.92}$$

$$-p_2+Ga\rho_0\zeta_2-\frac{\partial p_1}{\partial z}\zeta_1+2\left(\frac{\partial w_2}{\partial z}-\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial z}-\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}+\zeta_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon_0 Ga\rho_0\zeta_1^2-\frac{2}{3}\left(\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}_2+\zeta_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}+\zeta_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial z\partial x}\right)=Cr^{-1}\frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x^2},\tag{1.93}$$

$$2\left(\frac{\partial w_1}{\partial z}-\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right)\zeta_1=$$
$$=-Ma\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}-\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}+\frac{\partial T_1}{\partial z}\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial x\partial z}\zeta_1\right).\tag{1.94}$$

Для таких задач должно выполняться условие разрешимости:

$$\int_0^1\left(\tilde{u}_1 F_1+\tilde{w}_1 F_4+\tilde{T}_1 F_3+\tilde{p}_1 F_2\right)dz=0,\tag{1.95}$$

где тильда обозначает решение сопряженной задачи (1.78) – (1.85).

Из условия разрешимости задачи второго порядка следует равенство нулю первого медленного времени и линейной добавки к параметру Буссинеска:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = 0, \ \varepsilon_1 = 0. \tag{1.96}$$

Становится понятным смысл малого параметра в разложении – это корень квадратный от величины относительной надкритичности:

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}}. \tag{1.97}$$

Однако амплитудного уравнения получить во втором порядке не удается. Прежде чем перейти к рассмотрению задачи третьего порядка, обсудим решение задачи второго порядка, которое, так или иначе, появится в неоднородностях в следующем порядке разложения.

Из вида неоднородностей F_i уравнений (1.86) – (1.89) и с учетом решения линейной задачи заключаем, что решение задачи второго порядка следует искать в виде:

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathrm{v}}_2 \\ p_2 \\ T_2 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}(x,z,t) = |A|^2 \begin{pmatrix} \vec{\mathrm{v}}_{20}{}^{(1)} \\ p_{20}{}^{(1)} \\ T_{20}{}^{(1)} \\ \zeta_{20}{}^{(1)} \end{pmatrix}(z) + |B|^2 \begin{pmatrix} \vec{\mathrm{v}}_{20}{}^{(2)} \\ p_{20}{}^{(2)} \\ T_{20}{}^{(2)} \\ \zeta_{20}{}^{(2)} \end{pmatrix}(z) + A^2 e^{2i(kx+\omega t)} \begin{pmatrix} \vec{\mathrm{v}}_{21}{}^{(1)} \\ p_{21}{}^{(1)} \\ T_{21}{}^{(1)} \\ \zeta_{21}{}^{(1)} \end{pmatrix}(z) +$$

$$+B^2 e^{-2i(kx-\omega t)} \begin{pmatrix} \vec{\mathrm{v}}_{21}{}^{(2)} \\ p_{21}{}^{(2)} \\ T_{21}{}^{(2)} \\ \zeta_{21}{}^{(2)} \end{pmatrix}(z) + AB^* e^{2ikx} \begin{pmatrix} \vec{\mathrm{v}}_{22}{}^{(1)} \\ p_{22}{}^{(1)} \\ T_{22}{}^{(1)} \\ \zeta_{22}{}^{(1)} \end{pmatrix}(z) + ABe^{2i\omega t} \begin{pmatrix} \vec{\mathrm{v}}_{22}{}^{(2)} \\ p_{22}{}^{(2)} \\ T_{22}{}^{(2)} \\ \zeta_{22}{}^{(2)} \end{pmatrix}(z) + \kappa.c.$$

Для данных шести наборов собственных функций, зависящих от вертикальной координаты, несложно получить краевые задачи, которые мы не приводим здесь вследствие их громоздкого вида. Заметим только, что в этом решении только три набора являются независимыми, т.к. в каждой паре собственных векторов с одинаковыми нижними обозначениями (например, «20», «21» или «22») и разными верхними индексами (1) и (2) существует связь: $u_{20}^{(2)} = -u_{20}^{(1)}$, $w_{20}^{(2)} = w_{20}^{(1)}$, $p_{20}^{(2)} = p_{20}^{(1)}$, $T_{20}^{(2)} = T_{20}^{(1)}$, $\zeta_{20}^{(2)} = \zeta_{20}^{(1)}$ (так же для двух других пар собственных функций).

Задача в **третьем порядке** имеет вид:

$$\frac{\rho_0}{Pr}\frac{\partial u_3}{\partial t_0} + \frac{\partial p_3}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial x \partial z}\right) = F_1 =$$
$$= \frac{\rho_0 \varepsilon_0}{Pr} T_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial t_0} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) - \frac{\rho_0}{Pr}\left(\frac{\varepsilon_0^2}{2} T_1^2 - \varepsilon_0 T_2\right)\frac{\partial u_1}{\partial t_0} - \tag{1.98}$$
$$-\frac{\rho_0}{Pr}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t_2} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + w_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + w_2 \frac{\partial u_1}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\rho_0}{Pr}\frac{\partial w_3}{\partial t_0} + \frac{\partial p_3}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial z^2}\right) - Ra\rho_0 T_3 = F_2 =$$
$$= \frac{\rho_0 \varepsilon_0}{Pr} T_1 \left(\frac{\partial w_2}{\partial t_0} + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) + \frac{\rho_0}{Pr}\left(\frac{\varepsilon_0^2}{2} T_1^2 - \varepsilon_0 T_2\right)\frac{\partial w_1}{\partial t_0} -$$
$$-\frac{\rho_0}{Pr}\left(\frac{\partial w_1}{\partial t_2} + u_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial z} + u_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) - \tag{1.99}$$
$$-Ga\rho_0\left(\varepsilon_0^2 T_1 T_2 + \varepsilon_0 \varepsilon_2 T_0 T_1 - \frac{(\varepsilon_0 T_1)^3}{6} - \varepsilon_2 T_1\right),$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t_0} - w_3 - \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2}\right) = F_3 =$$
$$= -\frac{\partial T_1}{\partial t_2} - u_2 \frac{\partial T_1}{\partial x} - w_2 \frac{\partial T_1}{\partial z} - u_1 \frac{\partial T_2}{\partial x} - w_1 \frac{\partial T_2}{\partial z}, \tag{1.100}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial w_3}{\partial z} - \varepsilon_0\left(\frac{\partial T_3}{\partial t_0} - w_3\right) = F_4 = \varepsilon_0 F_3 + \varepsilon_2\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}\right), \tag{1.101}$$

$$z = 0: \ \vec{\mathrm{v}}_3 = 0, \ T_3 = 0, \tag{1.102}$$

$$z=1:\ w_3+\frac{\partial w_2}{\partial z}\zeta_1+\frac{\partial w_1}{\partial z}\zeta_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}\zeta_1{}^2=$$
$$=\frac{\partial\zeta_3}{\partial t_0}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial t_2}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\zeta_1+u_2\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}+u_1\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}, \tag{1.103}$$

$$-p_3+Ga\rho_0\zeta_3-\frac{\partial p_1}{\partial z}\zeta_2-\frac{\partial p_2}{\partial z}\zeta_1+\varepsilon_0 Ga\rho_0\zeta_1\zeta_2-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}\zeta_1{}^2+$$
$$+\frac{1}{6}\varepsilon_0{}^2 Ga\rho_0\zeta_1{}^3+2\left(\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial u_1}{\partial x}-\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial w_1}{\partial z}+\frac{\partial w_3}{\partial z}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial z}\right.$$
$$-\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial z}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}+\zeta_1\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\zeta_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial z}+ \tag{1.104}$$
$$\left.+\zeta_2\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\zeta_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}\right)-\frac{2}{3}\left(\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}_3+\zeta_1\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}+\zeta_2\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}+\zeta_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial z}+\right.$$
$$\left.+\zeta_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial z}+\frac{1}{2}\zeta_1{}^2\frac{\partial^3 u_1}{\partial x\partial z^2}-\zeta_1{}^2\frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3}\right)=\frac{1}{Cr}\left(\frac{\partial^2\zeta_3}{\partial x^2}-\frac{3}{2}\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2\right),$$

$$2\left(\frac{\partial w_2}{\partial z}-\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}+2\left(\frac{\partial w_1}{\partial z}-\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}+\frac{\partial w_3}{\partial z}+\frac{\partial u_3}{\partial z}-$$
$$-2\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial z}\right)\zeta_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)\zeta_1+\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right)\zeta_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x\partial z^2}+\frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3}\right)\zeta_1{}^2= \tag{1.105}$$
$$=-Ma\left(\frac{\partial T_3}{\partial x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial T_1}{\partial x}-\frac{\partial\zeta_3}{\partial x}+\frac{\partial T_1}{\partial z}\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial z}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^3+\frac{\partial^2 T_1}{\partial x\partial z}\zeta_2+\frac{\partial^2 T_2}{\partial x\partial z}\zeta_1+\frac{1}{2}\zeta_1{}^2\frac{\partial^3 T_1}{\partial x\partial z^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}\zeta_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right).$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial z}-\frac{\partial T_2}{\partial x}\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}-\frac{\partial T_1}{\partial x}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial T_1}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}-$$
$$-\frac{\partial^2 T_1}{\partial x \partial z}\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\zeta_1+\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}\zeta_2+\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}\zeta_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 T_1}{\partial z^3}\zeta_1{}^2= \tag{1.106}$$
$$=-Bi\left(T_3-\zeta_3+\frac{\partial T_1}{\partial z}\zeta_2+\frac{\partial T_2}{\partial z}\zeta_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}\zeta_1{}^2\right),$$

Условие разрешимости этой задачи приводит к системе дифференциальных уравнений для амплитудных функций:

$$\begin{cases}\dfrac{dA}{dt_2}=\left(\mu\varepsilon_2-K_0\left|A\right|^2-K_1\left|B\right|^2\right)A\\ \dfrac{dB}{dt_2}=\left(\mu\varepsilon_2-K_0\left|B\right|^2-K_1\left|A\right|^2\right)B\end{cases} \tag{1.107}$$

Здесь μ, K_0 и K_1 – это комплексные коэффициенты, определяемые формулами:

$$\mu=\frac{\int_0^1\left(\tilde{w}_1\left(T_1''-k^2T_1\right)+\rho_0 Ga\tilde{p}_1T_1\left(1-\varepsilon_0T_0\right)\right)dz}{\int_0^1\left(\frac{\rho_0}{Pr}\tilde{u}_1u_1+\frac{\rho_0}{Pr}\tilde{p}_1w_1+\tilde{T}_1T_1+\varepsilon_0\tilde{w}_1T_1\right)dz}, \tag{1.108}$$

$$K_0=\frac{\int_0^1\left(\tilde{u}_1\alpha_0+\tilde{p}_1\beta_0+\tilde{T}_1\gamma_0+\tilde{w}_1\varphi_0\right)dz}{\int_0^1\left(\frac{\rho_0}{Pr}\tilde{u}_1u_1+\frac{\rho_0}{Pr}\tilde{p}_1w_1+\tilde{T}_1T_1+\varepsilon_0\tilde{w}_1T_1\right)dz}, \tag{1.109}$$

$$K_1=\frac{\int_0^1\left(\tilde{u}_1\alpha_1+\tilde{p}_1\beta_1+\tilde{T}_1\gamma_1+\tilde{w}_1\varphi_1\right)dz}{\int_0^1\left(\frac{\rho_0}{Pr}\tilde{u}_1u_1+\frac{\rho_0}{Pr}\tilde{p}_1w_1+\tilde{T}_1T_1+\varepsilon_0\tilde{w}_1T_1\right)dz}, \tag{1.110}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_0 = {} & \frac{2i\omega\varepsilon_0}{Pr}\rho_0 T_1^* u_{21}^{(1)} - \frac{ik\varepsilon_0}{Pr}\rho_0 T_1^* u_1^2 - \frac{\varepsilon_0}{Pr}\rho_0 T_1\left(u_1^{*\prime} w_1 + u_1{}' w_1^*\right) + \\
& + \frac{i\omega\varepsilon_0^2}{2Pr}\rho_0\left(u_1^* T_1^2 - 2u_1\left|T_1\right|^2\right) + \frac{i\omega\varepsilon_0}{Pr}\rho_0\left(u_1 T_{20} - u_1^* T_{21}^{(2)}\right) + \\
& + \frac{2ik}{Pr}\rho_0 u_1^* u_{21}^{(1)} + \frac{1}{Pr}\rho_0\left(u_{21}^{(1)\prime} w_1^* + u_{20}{}' w_1\right) + \\
& + \frac{ik}{Pr}\rho_0\left(u_1 u_{20} - u_1^* u_{21}^{(1)}\right) + \frac{1}{Pr}\rho_0\left(u_1^{*\prime} w_{21}^{(1)} + u_1{}' w_{20}\right),
\end{aligned} \tag{1.111}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0 = {} & -\frac{ik\varepsilon_0}{Pr}\rho_0\left[T_1\left(u_1^* w_1 - u_1 w_1^*\right) + T_1^* u_1 w_1\right] - \\
& - \frac{\varepsilon_0}{Pr}\rho_0\left[T_1\left(w_1^{*\prime} w_1 + w_1{}' w_1^*\right) + T_1^* w_1{}' w_1\right] + \frac{2i\omega\varepsilon_0}{Pr}\rho_0 T_1^* w_{21}^{(1)} + \\
& + \frac{i\omega\varepsilon_0^2}{2Pr}\rho_0\left(2w_1\left|T_1\right|^2 - w_1^* T_1^2\right) - \frac{Ga\varepsilon_0^2}{2} T_1\left|T_1\right|^2 - \\
& - \frac{i\omega\varepsilon_0}{Pr}\rho_0\left(w_1 T_{20} - w_1^* T_{21}^{(1)}\right) + \frac{1}{Pr}\rho_0\left(w_{21}^{(1)\prime} w_1^* + w_{20}{}' w_1\right) + \\
& + \frac{ik}{Pr}\rho_0\left(w_1 u_{20} - w_1^* u_{21}^{(1)}\right) + \frac{1}{Pr}\rho_0 w\left(w_1^{*\prime} w_{21}^{(1)} + w_1{}' w_{20}\right) + \\
& + \frac{2ik}{Pr}\rho_0 u_1^* w_{21}^{(1)} + Ga\varepsilon_0^2\left(T_1 T_{20} + T_1^* T_{21}^{(1)}\right),
\end{aligned} \tag{1.112}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_0 = {} & ik\left(T_1 u_{20} - T_1^* u_{21}^{(2)}\right) + \left(T_1' w_{20} - T_1^{*\prime} w_{21}^{(1)}\right) + \\
& + 2iku_1^* T_{21}^{(1)} + \left(T_{20}{}' w_1 + T_{21}^{(1)\prime} w_1^*\right),
\end{aligned} \tag{1.113}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0 = {} & ik\varepsilon_0\left(T_1 u_{20} - T_1^* u_{21}^{(2)}\right) + \varepsilon_0\left(T_1' w_{20} - T_1^{*\prime} w_{21}^{(1)}\right) + \\
& + 2ik\varepsilon_0 u_1^* T_{21}^{(1)} + \varepsilon_0\left(T_{20}{}' w_1 + T_{21}^{(1)\prime} w_1^*\right),
\end{aligned} \tag{1.114}$$

$$\alpha_1 = \frac{2i\omega\varepsilon_0}{Pr}\rho_0 T_1^* u_{21}^{(2)} + \frac{2ik\varepsilon_0}{Pr}\rho_0 T_1 |u_1|^2 + \frac{2\varepsilon_0}{Pr}\rho_0 T_1 u_1^{*\prime} w_1 -$$
$$-\frac{i\omega\varepsilon_0^2}{Pr}\rho_0 u_1^* T_1^2 + \frac{i\omega\varepsilon_0}{Pr}\rho_0\left(u_1 T_{20} - u_1 T_{22}^{(1)} + u_1^* T_{22}^{(2)}\right) -$$
$$-\frac{2ik}{Pr}\rho_0 u_1 u_{22}^{(1)} + \frac{1}{Pr}\rho_0\left(u_{20}{}' w_1 + u_{22}^{(1)\prime} w_1 + u_{22}^{(2)\prime} w_1^*\right) - \quad (1.115)$$
$$-\frac{ik}{Pr}\rho_0\left(u_1 u_{20} - u_1 u_{22}^{(1)} + u_1^* u_{21}^{(2)}\right) +$$
$$+\frac{1}{Pr}\rho_0\left(u_1{}' w_{20} - u_1{}' w_{22}^{(1)} - u_1^{*\prime} w_{22}^{(2)}\right),$$

$$\beta_1 = \frac{2i\omega\varepsilon_0}{Pr}\rho_0 T_1^* w_{22}^{(2)} - \frac{2\varepsilon_0}{Pr}\rho_0\left[T_1\left(w_1^{*\prime} w_1 + w_1{}' w_1^*\right) + T_1^* w_1{}' w_1\right] +$$
$$+\frac{2ik\varepsilon_0}{Pr}\rho_0 T_1^* u_1 w_1 + \frac{1}{Pr}\rho_0\left(w_1{}' w_{20} + w_1{}' w_{22}^{(1)} + w_1^{*\prime} w_{22}^{(2)}\right) -$$
$$-\frac{i\omega\varepsilon_0}{Pr}\rho_0\left(w_1 T_{20} + w_1 T_{22}^{(1)} - w_1^* T_{22}^{(2)}\right) + \frac{i\omega\varepsilon_0^2}{Pr}\rho_0\left(w_1 |T_1|^2 - w_1^* T_1^2\right) + \quad (1.116)$$
$$+\frac{1}{Pr}\rho_0\left(w_{20}{}' w_1 + w_{22}^{(1)\prime} w_1 + w_{22}^{(2)\prime} w_1^*\right) - Ga\varepsilon_0^2 T_1 |T_1|^2 - \frac{2ik}{Pr}\rho_0 u_1 w_{22}^{(1)} +$$
$$+Ga\varepsilon_0^2\left(T_1 T_{20} + T_1 T_{22}^{(1)} + T_1^* T_{22}^{(2)}\right) - \frac{ik}{Pr}\rho_0\left(w_1 u_{20} + w_1 u_{22}^{(1)} - w_1^* u_{22}^{(2)}\right),$$

$$\gamma_1 = -ik\left(T_1 u_{20} + T_1 u_{22}^{(1)} - T_1^* u_{22}^{(2)}\right) + \left(T_1{}' w_{20} + T_1{}' w_{22}^{(1)} + T_1^{*\prime} w_{22}^{(2)}\right) -$$
$$-2iku_1 T_{22}^{(1)} + \left(T_{20}{}' w_1 + T_{22}^{(1)\prime} w_1 + T_{22}^{(2)\prime} w_1^*\right), \quad (1.117)$$

$$\varphi_1 = -ik\varepsilon_0\left(T_1 u_{20} + T_1 u_{22}^{(1)} - T_1^* u_{22}^{(2)}\right) + \varepsilon_0\left(T_1{}' w_{20} + T_1{}' w_{22}^{(1)} + T_1^{*\prime} w_{22}^{(2)}\right) +$$
$$+\varepsilon_0\left(T_{20}{}' w_1 + T_{22}^{(1)\prime} w_1 + T_{22}^{(2)\prime} w_1^*\right) - 2ik\varepsilon_0 u_1 T_{22}^{(1)}, \quad (1.118)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по вертикальной координате, а звездочкой – комплексное сопряжение.

Характеризующие нелинейность коэффициенты K_0 и K_1 называются прямой и перекрестной константами Ландау [70], соответственно. Характер ветвления решений вблизи порога зависит от знаков этих констант. Для выяснения этой зависимости проведем анализ системы (1.107). Домножим первое уравнение этой системы на A^*, второе – на B^*, затем умножим сопряженные уравнения соответственно на A и B, сложим попарно получившиеся уравнения – получим систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{a} = \tilde{\mu}a - \tilde{K}_0 a^2 - \tilde{K}_1 ab \\ \dot{b} = \tilde{\mu}b - \tilde{K}_0 b^2 - \tilde{K}_1 ab \end{cases} \tag{1.119}$$

Здесь введены обозначения $a = |A|^2$, $b = |B|^2$, $\tilde{\mu} = \mathrm{Re}\{\mu\}\varepsilon_2$, $\tilde{K}_0 = \mathrm{Re}\{K_0\}$, $\tilde{K}_1 = \mathrm{Re}\{K_1\}$; точкой обозначено дифференцирование по t_2.

На фазовой плоскости $a-b$ помимо тривиального решения существуют три положения равновесия (с учетом зависимости амплитудных функций от быстрого времени этим положениям равновесия соответствуют циклы на фазовых плоскостях $\dot{a}-a$ и $\dot{b}-b$):

$$\begin{aligned} &1)\, a = 0, b = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{K}_0} > 0; \\ &2)\, b = 0, a = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{K}_0} > 0; \\ &3)\, a = b = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{K}_0 + \tilde{K}_1} > 0. \end{aligned} \tag{1.120}$$

Первые два отвечают решению в виде бегущей волны, третье – решению в виде стоячей волны.

Определим характер возбуждения вторичных режимов. В зависимости от знаков и величин констант $\tilde{\mu}$, $\tilde{K}_0$ и $\tilde{K}_1$ реализуются различные ситуации. Рассмотрим случай, когда $\tilde{K}_0 > 0$ и $\tilde{K}_0 + \tilde{K}_1 > 0$. Если при этом $\tilde{\mu} > 0$, то существуют четыре положения равновесия: вышеперечисленные три и нулевое, т.е. мы находимся в надкритической области (Рис. 7(a)). Нулевое положение равновесия неустойчиво. Если $\tilde{\mu} < 0$, то система имеет только тривиальное решение, которое устойчиво относительно малых возмущений; мы находимся в подкритической области.

В случае $\tilde{K}_0 < 0$ и $\tilde{K}_0 + \tilde{K}_1 < 0$ при $\tilde{\mu} > 0$ существует только нулевое положение равновесия (подкритическая область), малые возмущения которого нарастают (Рис. 7(б)). При $\tilde{\mu} < 0$ существуют ещё три, помимо нулевого, положения равновесия (надкритическая область); нулевое положение здесь устойчиво по отношению к малым возмущениям.

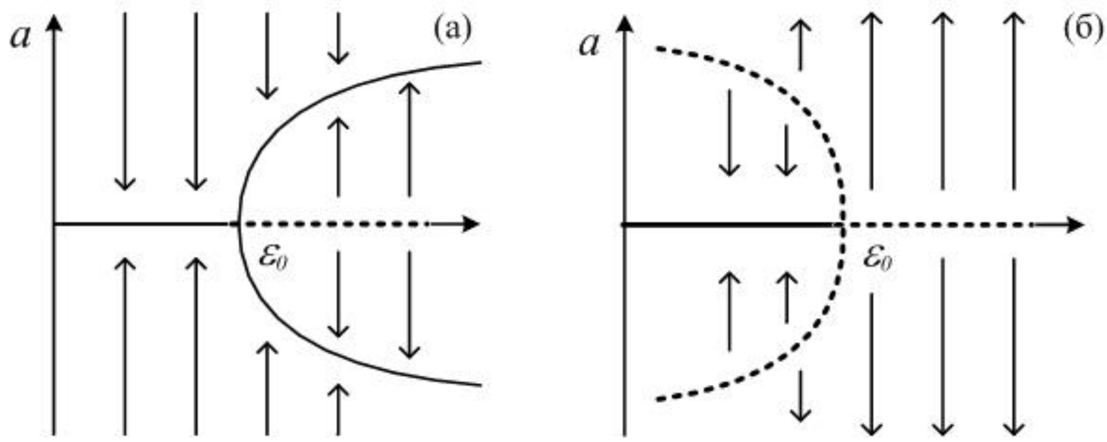

Рис. 7. Мягкий (а) и жесткий (б) тип возбуждения конвекции. Пунктирной линией обозначены неустойчивые ветви решений.

Из вышесказанного следует, что случай $\tilde{K}_0 < 0$, $\tilde{K}_0 + \tilde{K}_1 < 0$ отвечает жесткому возбуждению вторичного режима, а случай $\tilde{K}_0 > 0$, $\tilde{K}_0 + \tilde{K}_1 > 0$ – мягкому возбуждению. Для последнего случая имеет смысл исследовать, в какой из форм – бегущей или стоячей волны – возбуждается вторичный режим. Из анализа устойчивости положений равновесия (1.120) следует, что при $\tilde{K}_0 < \tilde{K}_1$ одновременно устойчивы равновесия 1) и 2), т.е. вторичное возмущение формируется в виде бегущей волны. При $\tilde{K}_0 > \tilde{K}_1$ устойчивым оказывается равновесие 3), возбуждается стоячая волна.

1.5.3. Численные методы и результаты вычислений

Для вычисления коэффициентов, входящих в амплитудные уравнения (1.107), необходимо найти собственные значения и собственные функции линейной задачи, сопряженной задачи, а также решения неоднородных задач второго порядка. Для этого использовался метод стрельбы с ортогонализацией, как и в случае построения нейтральных кривых (см. параграф 1.3). Но в случае решения неоднородных задач применялась иная процедура ортогонализации, предложенная в [114,115]. При таком алгоритме тройка векторов частных решений поворачивается так, чтобы последние три компоненты этих векторов являлись элементами единичной матрицы. При таких манипуляциях с векторами частных решений собственные значения задачи не меняются, но собственные функции претерпевают существенные изменения. Поэтому перед нахождением общего решения $\vec{y}$ некоторой задачи следует восстановить векторы частных решений в каждой точке ортогонализации. Пусть на некотором шаге интегрирования m в ходе ортогонализации решение (1.48) приняло вид:

$$\vec{y}(z_m) = C_i \left(T_m \cdot \ldots \cdot T_2 T_1\right)^{-1} \tilde{\vec{y}}^{(i)}(z_m), \tag{1.121}$$

где T_m, …, T_2, T_1 – матрицы преобразований частных решений на m-ом шаге ортогонализации, $\tilde{\vec{y}}^{(i)}$ – преобразованные векторы частных решений. После каждой процедуры ортогонализации проводится обратное преобразование: вычисляется матрица

$$G_m = T_m G_{m-1},\ G_0 = E, \tag{1.122}$$

где E – единичная матрица, и восстанавливается частное решение:

$$\vec{y}^{(i)}(z_m) = G_m^{-1} \tilde{\vec{y}}^{(i)}(z_m). \tag{1.123}$$

При составлении программы было замечено, что в области экстремальных значений параметров задачи из-за неоднократного применения процедуры нахождения обратной матрицы очень быстро накапливалась существенная ошибка округления. Поэтому описанная процедура восстановления частных решений была модифицирована: вместо преобразования $\tilde{\vec{y}}^{(i)}$ преобразовывались коэффициенты C_i, поворачиваясь вслед за $\tilde{\vec{y}}^{(i)}$.

С помощью описанных выше численных методов были найдены собственные функции линейной и нелинейной задач и вычислены значения коэффициентов Ландау в широком диапазоне параметров задачи. Здесь в первую очередь интерес представляет новая колебательная мода, обнаруженная при нагреве со стороны свободной поверхности в отсутствие термокапиллярного эффекта и гравитации. На Рис. 8 представлены зависимости коэффициентов Ландау от числа Прандтля, полученные по карте устойчивости с Рис. 6(г). Из Рис. 8(а) видно, что в небольшой области чисел Прандтля может наблюдаться мягкое возбуждение конвекции ($\tilde{K}_0 > 0$, $\tilde{K}_0 + \tilde{K}_1 > 0$).

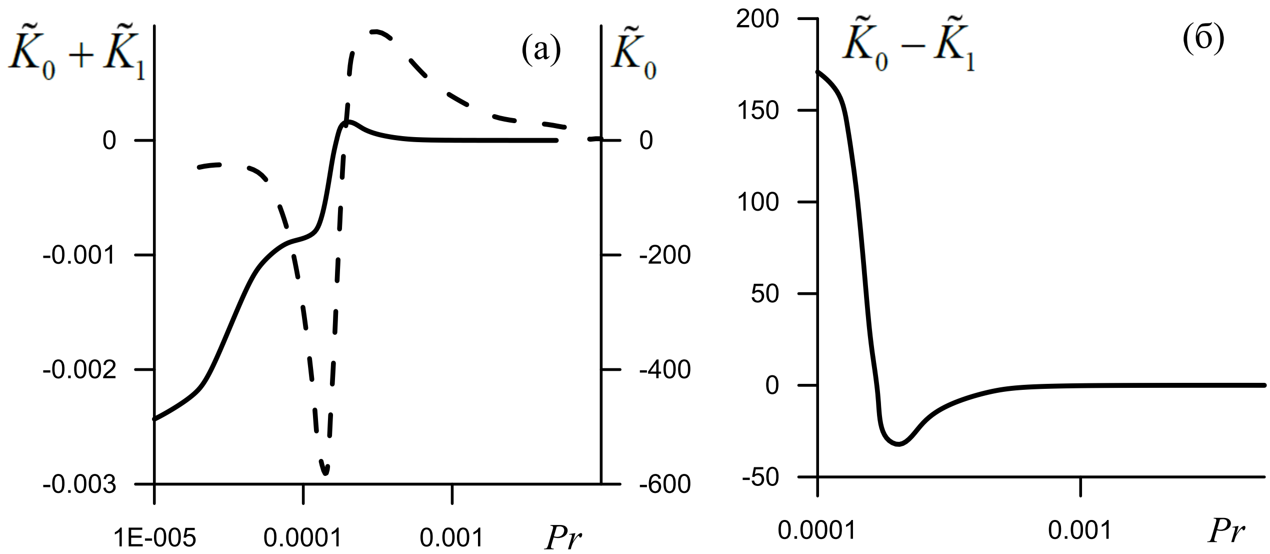

Рис. 8. Зависимость коэффициентов Ландау и их комбинаций от числа Прандтля. Область мягкого возбуждения конвекции – область, где штриховая и сплошная линии одновременно лежат выше нуля (а). Область возбуждения стоячей волны – там, где кривая лежит выше нуля, в противном случае возбуждается бегущая волна (б). ε=-0.1, Ga=0, Cr=0.000002

На Рис. 8(б) изображена кривая, которая разделяет области возбуждения вторичных возмущений в виде стоячей или бегущей волны.

Суммируя зависимости коэффициентов Ландау в широком диапазоне числа Прандтля и параметра Буссинеска, получаем итоговую карту режимов при $Ga=0$, $Cr=0.000002$, Рис. 9. На ней изображены области мягкого (+) и жесткого (–) возбуждения конвекции, а также показан отбор двух типов структур: бегущих валов (TR) и стоячих валов (SR). Как видно, во всем исследованном диапазоне параметров бегущие валы возбуждаются только жестким образом.

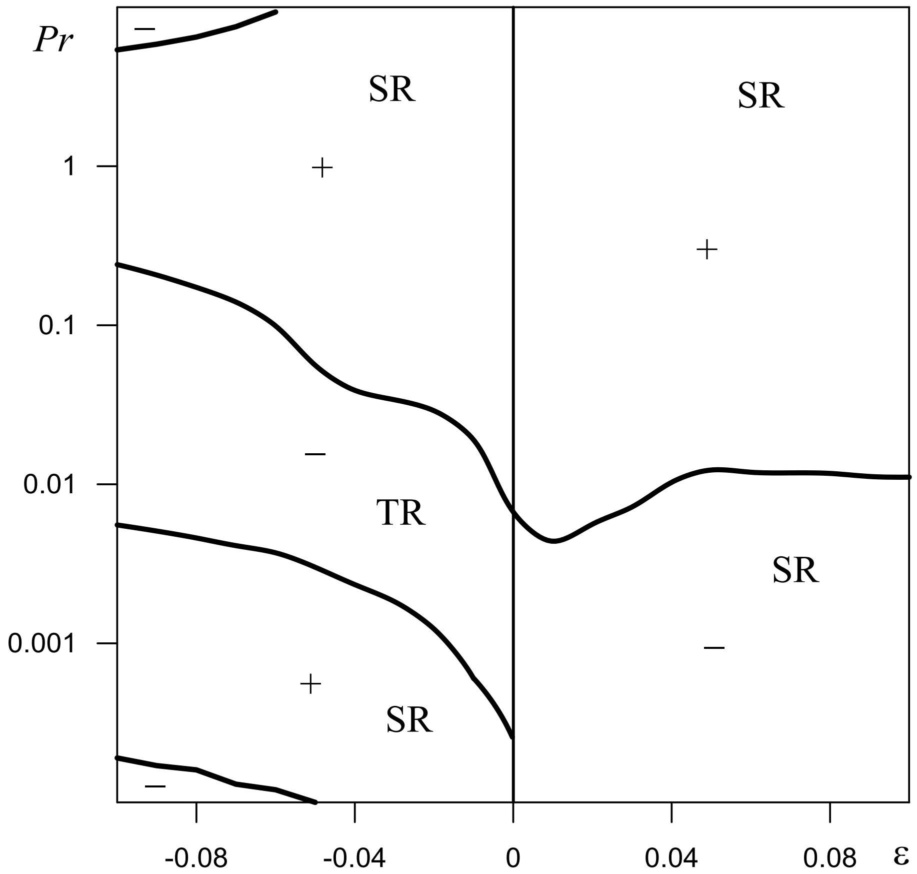

Рис. 9. Карта режимов при *Ga*=0, *Cr*=0.000002. Знак (+) соответствует мягкому возбуждению, знак (-) – жесткому возбуждению конвекции. «TR» обозначает область, где формируется бегущая волна, «SR» обозначает область, где формируется стоячая волна

1.6. Колебательная неустойчивость в отсутствие гравитации и термокапиллярного эффекта

В параграфе 1.4.2 показано существование новой колебательной моды неустойчивости слоя жидкости со свободной деформируемой границей. Удивительно, но эта мода может существовать в отсутствие термокапиллярного и гравитационного механизмов развития тепловой конвекции. Новая мода возникает в условиях нагрева со стороны свободной поверхности (при нормальном тепловом расширении) в области малых значений числа Прандтля; возмущения носят коротковолновый характер (см. Рис. 6).

1.6.1. Линейный анализ устойчивости в широком диапазоне волновых чисел

В данном параграфе будет уделено отдельное внимание исследованию влияния различных параметров задачи на новую колебательную моду, возникающую в слое жидкости со свободной деформируемой границей в отсутствие гравитации и термокапиллярного эффекта ($Ma = Ga = 0$). При таком условии в краевой задаче (1.28) – (1.35) остается один управляющий параметр – параметр Буссинеска, поэтому нейтральные кривые для такой неустойчивости представляют зависимость $\varepsilon(k)$.

На Рис. 10(а) изображены нейтральный кривые данной моды неустойчивости, которые имеют вид замкнутых областей с одним локальным максимумом на верхней границе, соответствующим наиболее опасным возмущениям (область неустойчивости находится внутри кривых). Характерная дисперсионная кривая представлена на Рис. 10(в), на котором дополнительно для наглядности приведена дисперсионная кривая для капиллярных волн (штриховая линия). Сопоставление этих двух кривых позволяет судить о том, что механизм развития новой моды колебательной неустойчивости связан с развитием капиллярных волн. Как видно из Рис. 10(а), с увеличением поверхностного натяжения (уменьшение Cr) область неустойчивости сужается в горизонтальном сечении, длина волны наиболее опасных возмущений увеличивается, при этом незначительно понижается порог возникновения неустойчивости.

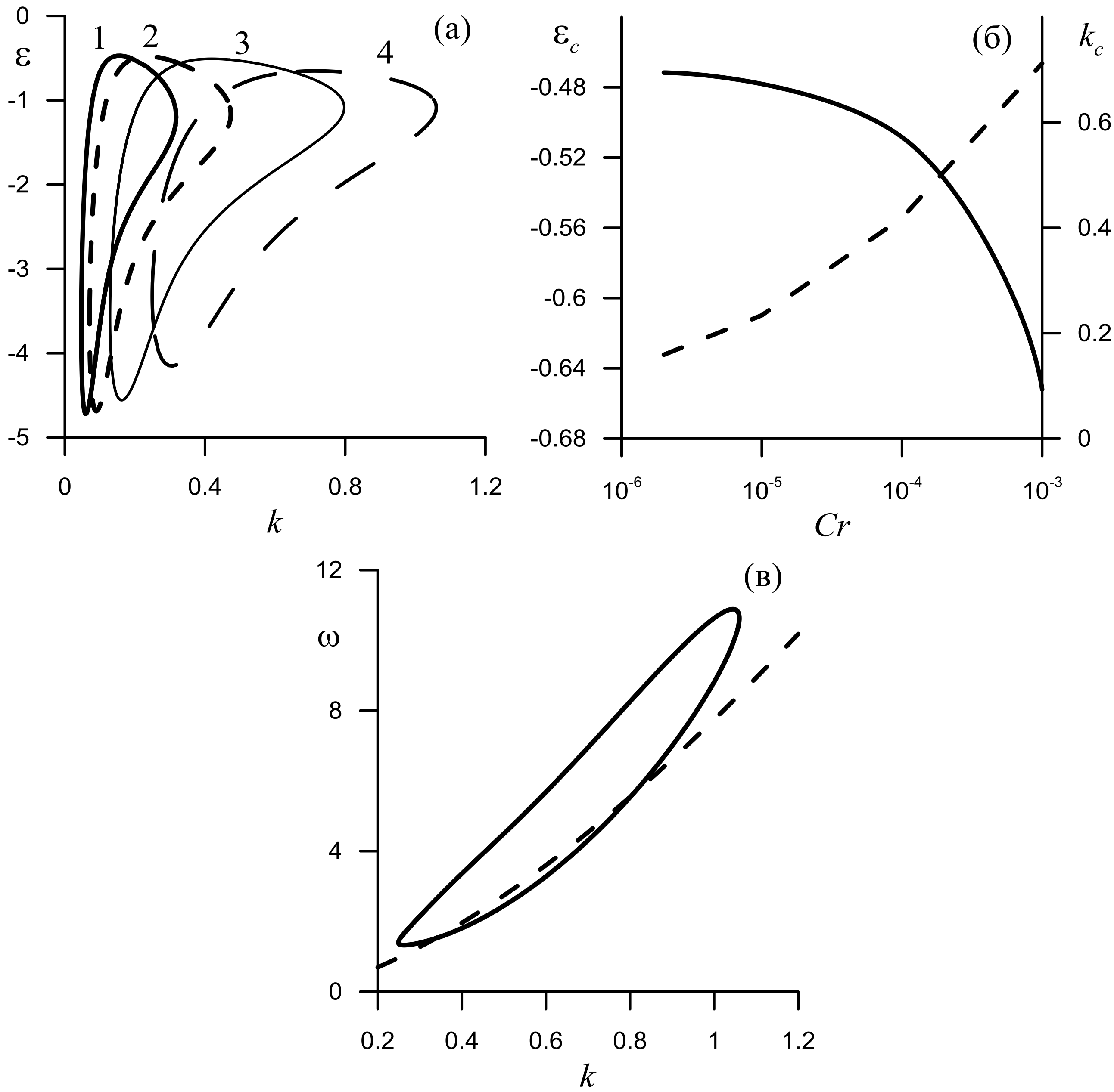

Рис. 10. Нейтральные кривые колебательной моды в отсутствие гравитации и термокапиллярного эффекта при различном поверхностном натяжении Cr=0.000002, 0.00001, 0.0001, 0.001 (кривые 1-4) (а). Зависимость критического параметра Буссинеска и критических волновых чисел от поверхностного натяжения (б). Дисперсионная кривая для Cr=0.000002 (сплошная линия), дисперсионная кривая для капиллярных волн (штриховая линия) (в). Pr=0.06

Итоговая карта устойчивости представлена на Рис. 10(б). Увеличение параметра капиллярности, отражающее ослабление поверхностного натяжения (т.е. фактически повышение деформируемости свободной поверхности), приводит к стабилизации равновесия и также уменьшению длины волны критических возмущений.

Обсудим влияние на новую моду неустойчивости других факторов (Рис. 11). На Рис. 11(а) показано стабилизирующее влияние силы тяжести на развитие неустойчивости; при этом длина волны критических возмущений практически не меняется. На Рис. 11(б) видна существенная стабилизация данной неустойчивости при увеличении числа Прандтля. Длина волны наиболее опасных возмущений с ростом Pr увеличивается.

Отметим, что выше было указано, что все расчеты проводятся при фиксированном значении числа Био $Bi = 0$. На Рис. 11(в) показано существование новой колебательной неустойчивости и при других значениях числа Био. Видно, что увеличение теплоотдачи со свободной поверхности приводит к стабилизации равновесия.

Отличительной чертой модели Д.В. Любимова, в рамках которой проводится наше исследование, является корректный учет деформационных мод конвекции. Очевидно, деформируемость свободной границы играет существенную роль в формировании новой моды неустойчивости. Это подтверждается стабилизирующим влиянием на равновесие увеличения поверхностного натяжения и гравитации (Рис. 10, 11). Вторым важным фактором возникновения новой неустойчивости является зависимость плотности от температуры, учет которой проведен в используемой небуссинесковской модели конвекции не только в слагаемом с подъемной силой. Одновременный учет этих факторов и позволил обнаружить новую моду колебательной неустойчивости.

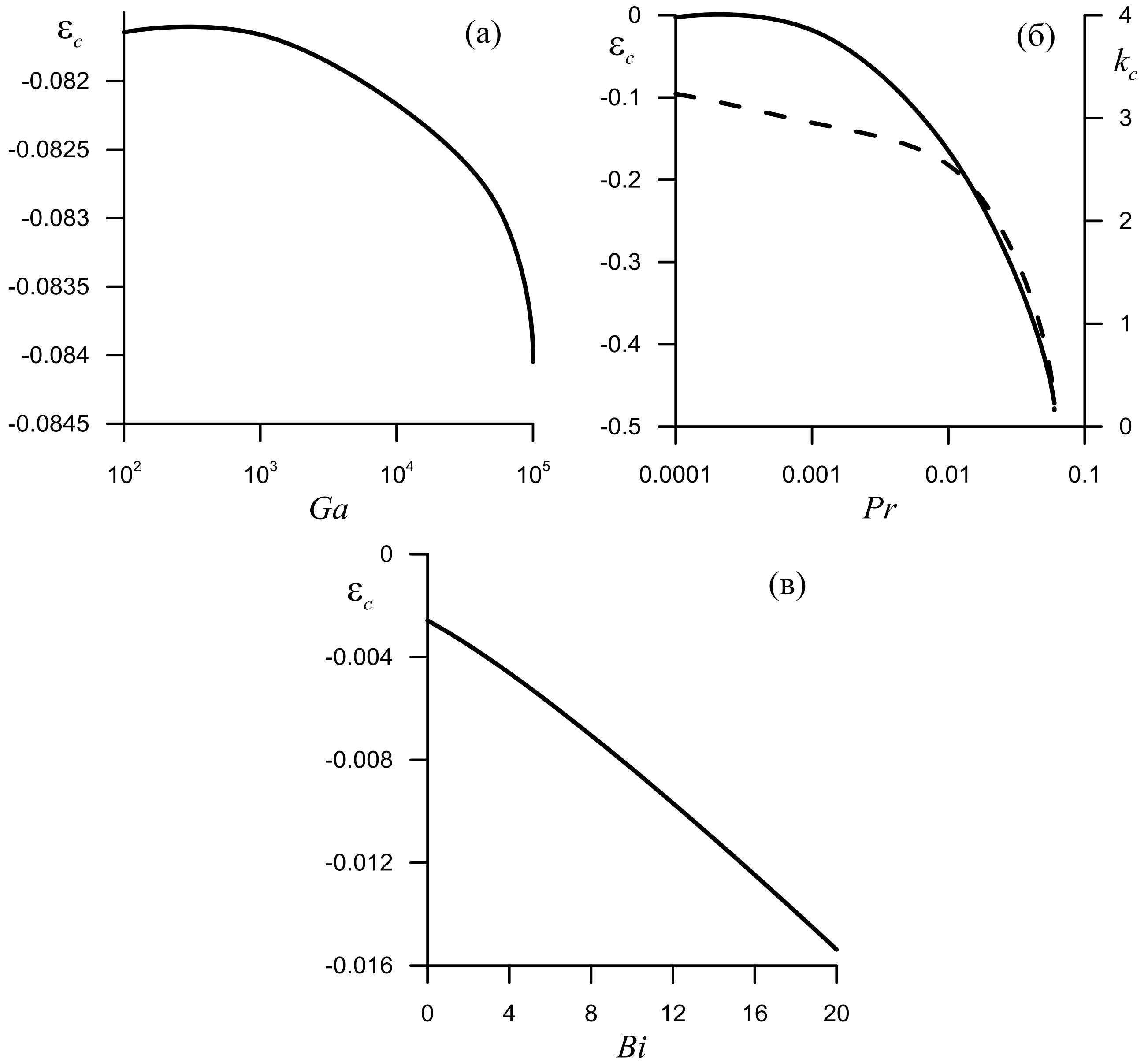

Рис. 11. Зависимость критического значения параметра Буссинеска от параметра Галилея, *Ma*=0, *Cr*=0.000002, *Pr*=0.005 (а). Зависимость критического значения параметра Буссинеска и критических волновых чисел от числа Прандтля, *Ma*=0, *Cr*=0.000002, *Ga*=0 (б). Критический параметр Буссинеска при различных значениях числа Био, *Ma*=0, *Cr*=0.000002, *Ga*=0, *Pr*=0.0001 (в).

1.6.2. Асимптотический анализ устойчивости слоя невязкой жидкости относительно коротковолновых возмущений

В данном параграфе обсуждается механизм возникновения новой моды неустойчивости.

Далее будем предполагать, что эта мода имеет невязкий характер (т.к. характерные значения Pr малы). Поэтому для выяснения механизма формирования неустойчивости рассмотрим модельную задачу об устойчивости слоя невязкой жидкости. Уравнения и граничные условия для малых возмущений в размерном виде в рамках модели Д.В. Любимова в отсутствие термокапиллярного эффекта, гравитации и при нулевой теплоотдаче со свободной поверхности имеют вид:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p, \tag{1.124}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T^{(0)} = \chi \Delta T, \tag{1.125}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \beta \chi \Delta T, \tag{1.126}$$

$$z = 0: \; w = T = 0, \tag{1.127}$$

$$z = 1: \; -p = \alpha \Delta \zeta, \; \frac{\partial \zeta}{\partial t} = w, \; \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \tag{1.128}$$

где $T^{(0)} = \Theta\left(z-1\right)/h_0$ – распределение температуры в состоянии механического равновесия при условии нагрева со стороны свободной границы (охлаждение нижней границы); $\rho_0 = e^{-\beta T^{(0)}}$.

При обезразмеривании задачи (1.124) – (1.128) используются те же тепловые масштабы величин, что применялись при выводе уравнений (1.19) – (1.26) с тем лишь отличием, что теперь единицы измерения давления не содержат коэффициента вязкости $[p] = \rho_0 \chi^2 / h_0^2$, а характерный перепад температуры по вертикали Θ имеет противоположный знак. Безразмерная спектрально-амплитудная задача для нормальных плоских возмущений пропорциональных $\exp(\lambda t + ikx)$ принимает вид:

$$\rho_0 \lambda U = -ikP, \tag{1.129}$$

$$\rho_0 \lambda W = -P', \tag{1.130}$$

$$\lambda\theta + W = \theta'' - k^2\theta, \tag{1.131}$$

$$ikU + W' = \varepsilon\left(\theta'' - k^2\theta\right), \tag{1.132}$$

$$z = 0:\ W = \theta = 0, \tag{1.133}$$

$$z = 1:\ P = \frac{k^2}{Cr}\xi,\ \lambda\xi = W,\ \theta' = 0. \tag{1.134}$$

Здесь $Cr = \chi^2 / \alpha h_0$ связан с введенным ранее параметром капиллярности как $Cr = Cr/Pr$. Уравнение состояния имеет вид $\rho_0 = e^{\varepsilon(1-z)}$, при этом $\varepsilon > 0$ соответствует нормальному тепловому расширению.

Принципиальным является то, что деформируемость свободной поверхности и поверхностное натяжение играют важную роль в формировании данной неустойчивости, так что движение сосредоточено вблизи свободной границы в слое толщиной $l \sim 1/k$ (Рис. 12).

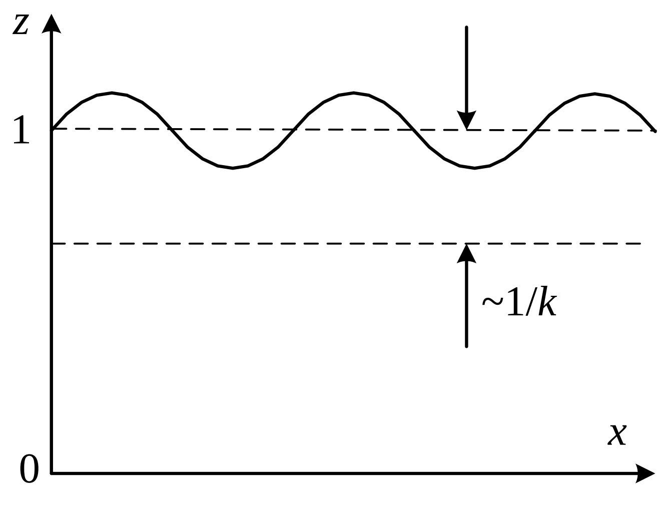

Рис. 12. Геометрия задачи для асимптотического анализа

Поэтому далее решается задача (1.129) – (1.134) в приближении коротковолновых возмущений, $k >> 1$. При этом вертикальная координата и производная по ней перешкаливаются (для удобства начало отсчета переносим на невозмущенную свободную поверхность):

$$z = 1 + \frac{Z}{k},\ \frac{\partial}{\partial z} = k\frac{\partial}{\partial Z}. \tag{1.135}$$

Считая, что основным механизмом колебательного движения в такой системе являются капиллярные волны на поверхности слоя, введем перемасштабированный инкремент $\lambda = k^{3/2}\Lambda$; полагаем давление $P = O(1)$. В соответствии с (1.135) плотность представим в виде:

$$\rho_0 = e^{-\varepsilon\frac{Z}{k}} = 1 - \varepsilon\frac{Z}{k} + \ldots,\ \rho_0{}' = -\frac{\varepsilon}{k} + \ldots \tag{1.136}$$

Из уравнений и граничных условий (1.129) – (1.134) следует, что остальные физические поля зависят от волнового числа следующим образом:

$$U, W = k^{-1/2}\left(\mathrm{U}, \mathrm{W}\right),\ \theta = k^{-5/2}\vartheta,\ \xi = k^{-2}\Xi. \tag{1.137}$$

Подставляя выражение (1.137) и выражение для инкремента в задачу (1.129) – (1.134) и учитывая перемасштабирование вертикальной координаты (1.135), получаем следующую краевую задачу в терминах новых переменных U, W, ϑ, Ξ

$$\rho_0\Lambda\,\mathrm{U} = -iP, \tag{1.138}$$

$$\rho_0\Lambda\,\mathrm{W} = -P', \tag{1.139}$$

$$\mathrm{W} = \vartheta'' - \vartheta - \Lambda\vartheta k^{-1/2}, \tag{1.140}$$

$$i\,\mathrm{U} + \mathrm{W}' = \varepsilon\left(\vartheta'' - \vartheta\right)k^{-1}, \tag{1.141}$$

$$Z = 0:\ P = \frac{\Xi}{Cr},\ \Lambda\Xi = \mathrm{W},\ \vartheta' = 0, \tag{1.142}$$

$$Z \to -\infty:\ \mathrm{U}, \mathrm{W}, \vartheta \to 0. \tag{1.143}$$

Исключая скорость из уравнений и граничных условий, получаем задачу для нахождения полей температуры и давления:

$$P'' - P - \frac{\rho_0{}'}{\rho_0}P' = -\Lambda\rho_0\varepsilon\left(\vartheta'' - \vartheta\right)k^{-1}, \tag{1.144}$$

$$P' = -\rho_0 \Lambda \left(\vartheta'' - \vartheta \right) + \rho_0 \Lambda^2 \vartheta k^{-1/2}, \qquad (1.145)$$

$$Z = 0: \; P' = -PCr\rho_0 \Lambda^2, \; \vartheta' = 0, \qquad (1.146)$$

$$Z \to -\infty: \; P, \vartheta \to 0. \qquad (1.147)$$

Видно, что уравнения содержат малый параметр $\sim 1/k$, поэтому для рассмотрения этой задачи аналитически разложим поля температуры и давления, а также инкремент в ряд по малому параметру $\delta = k^{-1/2}$:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \delta \vartheta_1 + \delta^2 \vartheta_2 + \delta^3 \vartheta_3 \ldots,$$

$$P = P_0 + \delta P_1 + \delta^2 P_2 + \delta^3 P_3 + \ldots, \qquad (1.148)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \delta \Lambda_1 + \delta^2 \Lambda_2 + \delta^3 \Lambda_3 + \ldots$$

Подставляя эти разложения, а также разложение для плотности (1.136) в задачу (1.144) – (1.147), в **нулевом порядке** получаем

$$P_0'' - P_0 = 0, \qquad (1.149)$$

$$\vartheta_0'' - \vartheta_0 = -\frac{P_0'}{\Lambda_0}, \qquad (1.150)$$

$$Z = 0: \; P_0' = -P_0 Cr \Lambda_0^2, \; \vartheta_0' = 0, \qquad (1.151)$$

$$Z \to -\infty: \; P_0, \vartheta_0 \to 0. \qquad (1.152)$$

Выпишем решение этой задачи:

$$P_0 = C_0 e^Z, \; \vartheta_0 = \frac{C_0}{2\Lambda_0} \left(1 - Z \right) e^Z. \qquad (1.153)$$

Подстановка решения для давления в граничное условие (1.151) дает выражение для инкремента:

$$\Lambda_0 = i\Omega, \; \Omega^2 = \frac{1}{Cr}, \qquad (1.154)$$

которое соответствует капиллярным волнам. Далее нас будут интересовать добавки к Λ_0, имеющие положительную действительную часть, которая будет означать возникновение неустойчивости.

Задача в **первом порядке** разложения по малому параметру имеет вид:

$$P_1'' - P_1 = 0, \tag{1.155}$$

$$\vartheta_1'' - \vartheta_1 = -\frac{P_1'}{\Lambda_0} + \Lambda_0 \vartheta_0 - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}\left(\vartheta_0'' - \vartheta_0\right), \tag{1.156}$$

$$Z = 0:\ P_1' = -P_1 Cr \Lambda_0^2 - 2P_0 Cr \Lambda_0 \Lambda_1,\ \vartheta_1' = 0, \tag{1.157}$$

$$Z \to -\infty:\ P_1, \vartheta_1 \to 0. \tag{1.158}$$

Легко видеть, что поправка первого порядка к инкременту $\Lambda_1 = 0$, что ожидаемо, т.к. нелинейности в уравнении для давления (1.144) имеют порядок не ниже δ^2.

Решение задачи (1.155) – (1.158) имеет вид:

$$P_1 = C_1 e^Z,\ \vartheta_1 = \left[\left(Z - 1\right)\left(\frac{3C_0}{8} - \frac{C_1}{2\Lambda_0}\right) - Z^2 \frac{C_0}{8}\right] e^Z, \tag{1.159}$$

Во **втором порядке** разложения удается «зацепить» ключевое нелинейное слагаемое в уравнении для давления, содержащее параметр Буссинеска:

$$P_2'' - P_2 = -\varepsilon P_0' - \Lambda_0 \varepsilon \left(\vartheta_0'' - \vartheta_0\right), \tag{1.160}$$

$$\vartheta_2'' - \vartheta_2 = -\frac{P_2'}{\Lambda_0} + \Lambda_0 \vartheta_1 - \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_0} - \varepsilon Z\right)\left(\vartheta_0'' - \vartheta_0\right), \tag{1.161}$$

$$Z = 0:\ P_2' = -P_2 Cr \Lambda_0^2 - 2P_0 Cr \Lambda_0 \Lambda_2,\ \vartheta_2' = 0, \tag{1.162}$$

$$Z \to -\infty:\ P_2, \vartheta_2 \to 0. \tag{1.163}$$

Однако правая часть в уравнении (1.160) зануляется, как видно, при учете выражения (1.150). Таким образом, в этом порядке, добавка к инкременту тоже отсутствует $\Lambda_2 = 0$.

Неустойчивость удается обнаружить при решении задачи **третьего порядка** малости. Задачи для давления и температуры расцепляются, поэтому приведем здесь только уравнения и граничные условия для давления:

$$P_3'' - P_3 = -\varepsilon P_1' - \Lambda_0 \varepsilon \left(\vartheta_1'' - \vartheta_1 \right), \tag{1.164}$$

$$Z = 0: \; P_3' = -P_3 Cr \Lambda_0^2 - 2 P_0 Cr \Lambda_0 \Lambda_3, \tag{1.165}$$

$$Z \to -\infty: \; P_3 \to 0. \tag{1.166}$$

С учетом решения задачи первого порядка (1.159) несложно найти выражение для добавки давления в третьем порядке:

$$P_3 = C_1 e^Z + \frac{3C_0}{8} \Lambda_0 \left(Z - 3 \right) Z e^Z, \tag{1.167}$$

подстановка которого в граничное условие (1.165) позволяет найти добавку к инкременту в третьем порядке малости:

$$\Lambda_3 = \frac{3\varepsilon}{16 Cr}. \tag{1.168}$$

Как упоминалось выше, в данной постановке нормальному тепловому расширению соответствует положительный параметр Буссинеска $\varepsilon > 0$, так что $\Lambda_3 > 0$, т.е. в такой системе действительно возникает неустойчивость. Как видно, инкремент напрямую зависит от параметра Буссинеска и величины поверхностного натяжения.

Основной целью анализа устойчивости в такой модельной системе было выяснение механизма новой колебательной неустойчивости, описанной в параграфе 1.6.1. Поэтому важно сопоставить результаты численного решения задачи (1.28) – (1.35) о линейной устойчивости плоского слоя со свободной деформируемой границей при $Ma = Ga = Bi = 0$ с результатами асимптотического анализа, проведенного в данном параграфе. Для этого мы представим выражение для инкремента с полученной добавкой к нему в исходном виде (до перешкаливания):

$$\lambda = ik^{3/2}\sqrt{\frac{Pr}{Cr}} + \frac{3\varepsilon Pr}{16Cr}. \qquad (1.169)$$

На Рис. 13 представлено сопоставление результатов численного исследования задачи (1.28) – (1.35) при значениях параметров $Ma = Ga = Bi = 0$, $\varepsilon = -1$ с результатами асимптотического анализа, описываемыми формулой (1.169). Как видно, частота возмущений полностью совпадает с мнимой частью инкремента из (1.169), Рис. 13(а). А действительная часть инкремента при $Pr \to 0$ стремится к поправке, найденной в ходе коротковолнового анализа, Рис. 13(б).

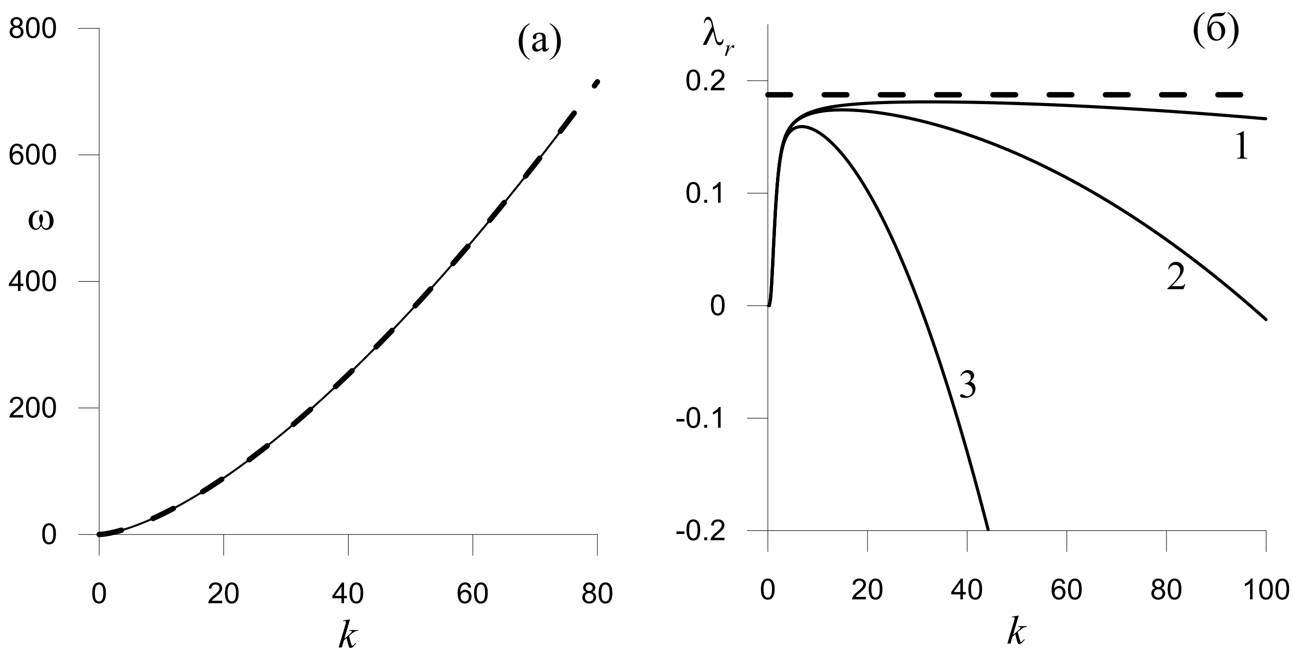

Рис. 13. Сопоставление результатов численного счета (сплошные линии) и асимптотического анализа коротковолновой неустойчивости (штриховые линии). Зависимость частоты от волнового числа при *Pr*=0.0001, *Cr*=0.0001(а). Зависимость действительной части инкремента от волнового числа для различных *Pr*=0.000001, *Pr*=0.00001, *Pr*=0.0001 (кривые 1-3) при фиксированном отношении *Pr/Cr*=1 (б).

ГЛАВА 2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МАРАНГОНИ В ТОНКОЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В данной главе рассматриваются тонкие слои жидкости (пленки жидкости), в которых можно пренебречь эффектами плавучести (зависимостью плотности от температуры) [1]. Основным механизмом возникновения конвекции в таких системах оказывается термокапиллярный механизм.

Исследованиям термокапиллярной неустойчивости посвящено множество работ, однако сравнительно недавно была обнаружена колебательная мода в случае нагрева снизу в длинноволновом пределе [24,25]. Оказалось, что эта мода существует в довольно узком диапазоне параметров, поэтому ранее исследователям не удавалось её обнаружить экспериментально. В связи с этим в данной главе делается попытка значительно расширить границы применимости результатов, полученных авторами в работах [24,25] с целью более полно описать эту новую моду и дать наиболее точные рекомендации для экспериментального обнаружения колебательных режимов конвекции Марангони.

2.1. Исследование линейной устойчивости тонкой пленки в широком диапазоне волновых чисел

В данном параграфе изучается возникновение колебательной моды за рамками длинноволнового приближения. А именно, рассматривается неустойчивость той же системы, что исследовалась в работе [24], относительно возмущений с произвольной длиной волны [99,100,102].

2.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим устойчивость бесконечного горизонтального слоя вязкой жидкости, помещенного на твердую подложку. Слой находится в поле силы тяжести. Жидкость подогревается со стороны подложки; теплопроводность жидкости κ считается постоянной и большой по сравнению с теплопроводностью подложки, так что на нижней границе слоя оказывается фиксирован вертикальный поток тепла величиной κA, где A – характерный вертикальный градиент температуры в слое (идеально теплопроводная подложка). Верхняя граница слоя – свободная и деформируемая. Толщина слоя в невозмущенном состоянии h_0 считается малой, так что влияние сил плавучести не учитывается [1]. Плотность ρ, температуропроводность χ и кинематическая вязкость жидкости ν предполагаются постоянными. Предполагается линейная зависимость поверхностного натяжения от температуры $\alpha = \alpha_0 - \alpha_T T$.

Декартова система координат выбрана так, что подложка находится в плоскости $X - Y$, а вертикальная ось z направлена перпендикулярно подложке (Рис. 1).

Полные уравнения и граничные условия в безразмерном виде, описывающие конвекцию в данной системе:

$$\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right) = -\nabla p + \Delta\vec{v} - Ga\vec{\gamma}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla T = \Delta T, \tag{2.2}$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0, \tag{2.3}$$

$$z = 0:\ \vec{v} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial z} = -1, \tag{2.4}$$

$$z = h(x,y,t):\ \frac{\partial h}{\partial t} = w - \vec{u}\cdot\nabla h, \tag{2.5}$$

$$\sigma_{nn} = p - CaK, \tag{2.6}$$

$$\sigma_{n\tau} = -Ma\frac{\partial}{\partial\tau}\left(T\big|_{z=h}\right), \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -BiT. \tag{2.8}$$

Здесь введено обозначение для компонент скорости $\vec{\mathrm{v}} = (\vec{\mathrm{u}}, w)$; σ – тензор вязких напряжений (1.9), приведенный к безразмерной форме; $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ – нормальный и касательный единичные векторы к свободной поверхности, соответственно; $K = -\nabla^2 h\left(1+(\nabla h)^2\right)^{-3/2}$ – кривизна свободной поверхности.

Задача (2.1) – (2.8) характеризуется следующим набором критериев подобия:

$$Pr = \frac{\nu}{\chi},\ Ga = \frac{gh_0^3}{\nu\chi},\ Ma = \frac{\alpha_T A h_0^2}{\rho\nu\chi},\ Ca = \frac{\alpha_0 h_0}{\rho\nu\chi},\ Bi = \frac{bh_0}{\kappa}. \tag{2.9}$$

Обезразмеривание уравнений и граничных условий проводилось с использованием таких масштабов величин: h_0 – для длины, h_0^2/χ – для времени, χ/h_0 – для скорости, Ah_0 – для температуры, $\rho\nu\chi/h_0^2$ – для давления.

Данная задача допускает решение, отвечающее состоянию механического равновесия:

$$\vec{\mathrm{v}}^{(0)} = 0,\ h^{(0)} = 1,\ T^{(0)} = 1 - z + \frac{1}{Bi},\ p^{(0)} = Ga(1-z), \tag{2.10}$$

что соответствует гидростатическому распределению для давления и линейному профилю температуры в покоящейся жидкости с неискривленной свободной поверхностью.

Исследуем устойчивость основного состояния относительно малых возмущений. Будем рассматривать плоские возмущения, не зависящие от координаты *y*. Подставляя в задачу (2.1) – (2.8) возмущенные поля в виде $\tilde{\vec{\mathrm{v}}} = (\tilde{u}, 0, \tilde{w})$, $p = p_0 + \tilde{p}$, $T = T_0 + \tilde{T}$, и $h = 1 + \tilde{\zeta}$, получаем линейную задачу (в дальнейшем знак тильда над полями возмущений опустим):

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \vec{\mathrm{v}}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + w, \tag{2.12}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{2.13}$$

$$z = 0:\ \vec{v} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \tag{2.14}$$

$$z = 1:\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -Ma\left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right), \tag{2.15}$$

$$-p + Ga\zeta + 2\frac{\partial w}{\partial z} = Ca\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = w, \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -Bi\left(T - \zeta\right). \tag{2.18}$$

Удобно исключить из рассмотрения давление, введя функцию тока ψ, определяемую соотношениями:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z},\ w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2.19}$$

Тогда в терминах функции тока и вихря скорости линейная задача перепишется в виде:

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{2.21}$$

$$z = 0:\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \tag{2.22}$$

$$z = 1:\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -Ma\left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right), \tag{2.23}$$

$$-p+Ga\zeta-2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}=Ca\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=-Bi\left(T-\zeta\right), \tag{2.26}$$

где $\varphi=\Delta\psi$ – завихренность.

Эта задача допускает решение в виде нормальных возмущений, т.е. пропорциональных $e^{ikx+\lambda t}$. Для амплитуд таких возмущений спектральная задача принимает вид:

$$\frac{\lambda}{Pr}\left(\Psi''-k^2\Psi\right)=\Psi^{IV}-2k^2\Psi''+k^4\Psi, \tag{2.27}$$

$$\lambda\theta=\theta''-k^2\theta-ik\Psi, \tag{2.28}$$

$$z=0:\ \Psi=\Psi'=\theta'=0, \tag{2.29}$$

$$z=1:\ \Psi''+k^2\Psi=-ikMa\left(\theta-\xi\right), \tag{2.30}$$

$$\Psi'''-\left(\frac{\lambda}{Pr}+3k^2\right)\Psi'=ik\left(Ga+Cak^2\right)\xi, \tag{2.31}$$

$$\lambda\xi=-ik\Psi, \tag{2.32}$$

$$\theta'=-Bi\left(\theta-\xi\right). \tag{2.33}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по вертикальной координате, а Ψ^{IV} означает четвертую производную по z от функции тока.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению результатов, приведем некоторые результаты из работы [24] для удобства последующего сравнения с ними в предельных случаях.

2.1.2. Длинноволновая асимптотика

В работах [24,25] задача устойчивости решена в длинноволновом пределе. Предполагается, что $k << 1$, при этом $\lambda = O(k^2)$, $Bi = O(k^2)$, $Ca = O(k^{-2})$. С применением таких перемасштабирований получена система амплитудных уравнений, описывающих эволюцию толщины пленки и осредненной по высоте температуры жидкости. Линейный анализ этих амплитудных уравнений привел к тому, что были обнаружены две моды возникновения неустойчивости: монотонная и колебательная. Нейтральные кривые этих мод даются выражениями:

$$Ma_m = \frac{48\left(Bi + k^2\right)\left(Ga + Cak^2\right)}{k^2\left(72 + Ga + Cak^2\right)}, \qquad (2.34)$$

$$Ma_o = 3 + \frac{3Bi}{k^2} + Ga + Cak^2. \qquad (2.35)$$

Частота нейтральных колебательных возмущений определяется формулой

$$\omega = \frac{k^2}{12}\sqrt{\left(72 + Ga + Cak^2\right)\left(Ma_m - Ma_o\right)}, \qquad (2.36)$$

из которой видно, что колебательная мода может существовать только при $Ma_o < Ma_m$.

Показано, что порог возбуждения как монотонной, так и колебательной мод конвекции Марангони определяется произведением $\beta = BiCa$, а не параметром капиллярности и числом Био по отдельности.

Далее перейдем к изложению наших результатов и сопоставлению их с вышеописанными результатами длинноволнового анализа.

2.1.3. Монотонная мода

Для монотонных нейтральных возмущений ($\lambda = 0$) задача на собственные значения имеет следующее аналитическое решение (с учетом условий на нижней границе):

$$\Psi = C_1\left(\sinh kz - kz\cosh kz\right) + C_2 kz\sinh kz\,, \tag{2.37}$$

$$\begin{gathered}\theta = \frac{i}{4k}\Big[C_1\left(3kz\cosh kz - 3\sinh kz - k^2z^2\sinh kz\right) + \\ + C_2\left(k^2z^2\cosh kz - kz\sinh kz\right) + C_3\cosh kz\Big].\end{gathered} \tag{2.38}$$

Подставляя это решение в граничные условия на свободной поверхности, мы получаем выражение, описывающее нейтральную кривую

$$Ma_m = \frac{8kG\left(Bi\sinh k\cosh^2 k - k^2\sinh k - kBi\cosh k + k\cosh^3 k - k\cosh k\right)}{G\left(\cosh^3 k - k^3\sinh k - 2k\sinh k - \cosh k + k^2\cosh k\right) + 8k^5\sinh k}, \tag{2.39}$$

где принято обозначение $G = Ga + Cak^2$.

Как видно, возникновение монотонной неустойчивости не зависит от числа Прандтля. Нейтральная кривая имеет одни минимум при любых значениях параметров Ga, Ca, Bi.

Несложно показать, что в пределе $k << 1$ и с учетом $Bi \sim k^2$, $Ca \sim k^{-2}$ формула (2.39) переходит в формулу (2.34).

2.1.4. Колебательная мода

В отличие от монотонной моды, задача (2.20) – (2.26) для колебательных возмущений ($\lambda = i\omega$) не может быть решена аналитически, и требуется численное исследование. При этом используется метод стрельбы, описанный выше в параграфе 1.3 первой главы.

Отметим, что в длинноволновом пределе число Прандтля никак не влияет на возникновение неустойчивости, см. формулы (2.34), (2.35). В ходе расчетов для конечных k обнаружено, что число Прандтля также не оказывает влияния на результаты. Поэтому в дальнейшем для всех представленных результатов $Pr = 1$.

Как упоминалось выше, основная цель данного исследования – подтверждение существования ранее обнаруженной колебательной моды за рамками длинноволнового предела. Поэтому в расчетах сосредоточимся на области параметров, где Ca довольно большое, а Bi относительно невелико, при этом их произведение $\beta = BiCa$ конечно. Область, в которой существует новая колебательная мода, также ограничена по значениям числа Галилея: оно не должно быть слишком большим, чтобы гравитация не подавляла деформационные моды. Обычно при изучении конвекции в тонких слоях в условиях земной гравитации выбираются $Ga \sim 1000$, но для ультратонких пленок при такой же тяжести $Ga \sim 10$.

На Рис. 14 показан характерный вид нейтральных кривых монотонной и колебательной неустойчивости при $Ca = 1000$ и $Ga = 10$ и различных Bi; область неустойчивости расположена над кривыми. Как видно, при небольших значениях числа Био ($Bi = 0.05$) колебательная мода более опасная, чем монотонная, т.к. минимум нейтральной кривой $Ma_o(k)$ лежит ниже минимума кривой $Ma_m(k)$, Рис. 14(а). При бóльших числах Био ($Bi = 1$) колебательная мода перестает быть опасной, Рис. 14(б). На этом рисунке также представлено сопоставление результатов численных расчетов в широком диапазоне волновых чисел с результатами длинноволнового анализа (см. формулы (2.34) – (2.35)). Как видно, при $Bi = 1$ заметно существенное расхождение результатов, в то время как при $Bi = 0.05$ нейтральные кривые полностью совпадают. Стоит отметить, что расхождение результатов при большом числе Био вполне ожидаемо, т.к. при таких параметрах мы выходим за границы применимости асимптотического анализа, в котором $\beta = BiCa \sim 1$.

Результат минимизации этих нейтральных кривых по волновому числу представлен на Рис. 15. Нашим расчетам соответствуют жирные линии (сплошные – для монотонной моды, штриховые линии – для колебательной моды), результатам длинноволнового анализа соответствуют тонкие линии.

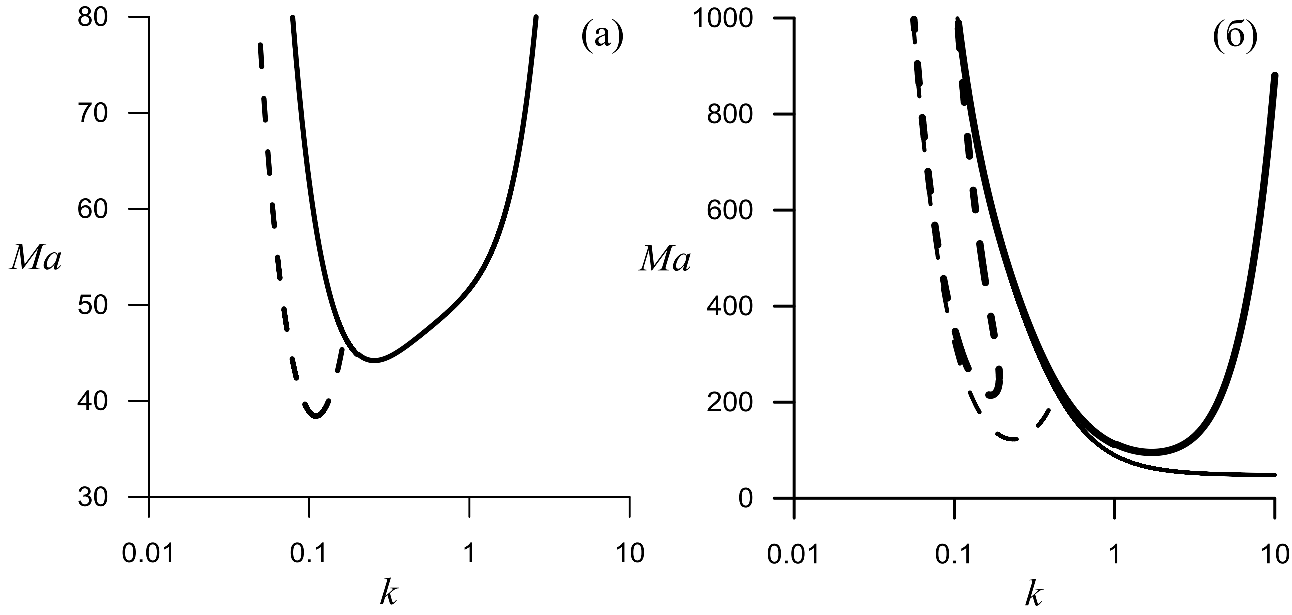

Рис. 14. Нейтральные кривые монотонной (сплошные линии) и колебательной (штриховые линии) неустойчивости при *Ca*=1000, *Ga*=10. *Bi*=0.05 (а). Сопоставление результатов численного счета (жирные линии) с результатами длинноволнового анализа (тонкие линии) при *Bi*=1 (б)

В представляемых расчетах характеристики неустойчивости определялись не произведением $\beta = BiCa$, как в длинноволновом анализе, а параметром капиллярности и числом Био по отдельности. Так жирные кривые на Рис. 15 получены путем варьирования Bi при фиксированном $Ca = 1000$. Отметим, что аналогичные кривые, полученные путем варьирования Ca при постоянном $Bi = 0.05$, неотличимы от этих жирных кривых. Так что эти кривые вполне отражают зависимость критических параметров развития неустойчивости от параметра β. Однако это справедливо лишь для достаточно малых Bi и достаточно больших Ca. Например, варьируя Ca при фиксированном $Bi = 1$ (или варьируя Bi при фиксированном $Ca = 1$), мы получаем существенно отличающуюся карту устойчивости от той, что изображена на Рис. 15(а,б).

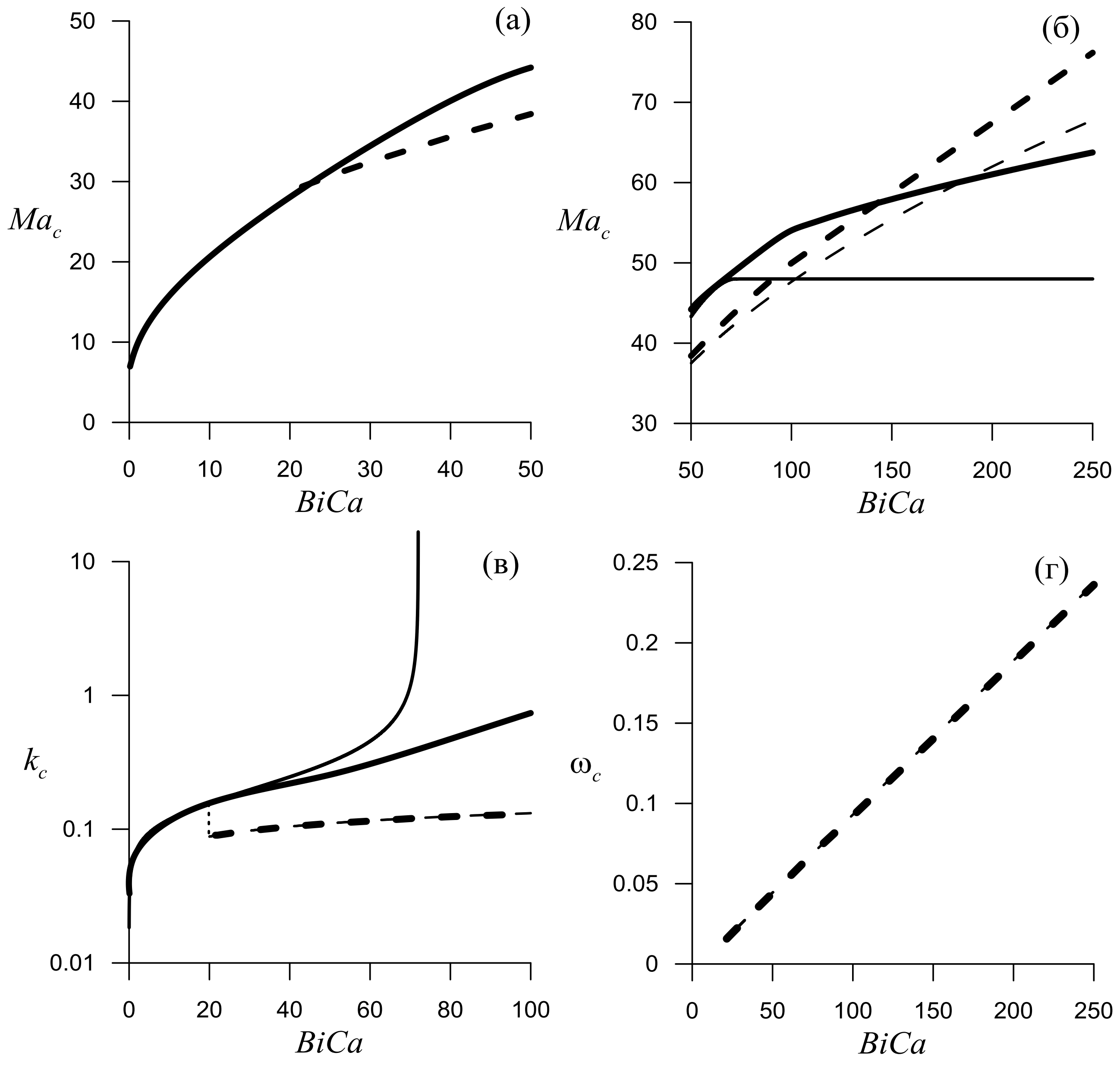

Рис. 15. Зависимость критического числа Марангони (а,б), критического волнового числа (в) и частоты критических возмущений (г) от произведения чисел *Bi* и *Ca* (меняется *Bi* при фиксированном *Ca*=1000), *Ga*=10. Сплошные линии соответствуют монотонной моде, штриховые – колебательной (жирные линии – результаты расчетов для произвольных *k*, тонкие линии – длинноволновый анализ)

На панелях (а) и (б) Рис. 15 представлена карта устойчивости (область устойчивости расположена под кривыми), из которой видно, что существует довольно широкий диапазон параметров, в котором колебательная мода более опасна (т.е. $Ma_{oc} < Ma_{mc}$ при данном β). На этих графиках также проведено сопоставление наших расчетов с результатами длинноволнового анализа: при конечных значениях $BiCa$ обнаруживается хорошее количественное совпадение (на Рис. 15(а) полученные в ходе расчетов нейтральные кривые фактически неразличимы с результатами длинноволнового анализа). При $BiCa > 72$ согласованность результатов для монотонной моды ухудшается, т.к. в длинноволновом пределе критическое значение волнового числа быстро растет, стремясь к бесконечности при $\beta = 72$ (таким образом, покидая область применения длинноволнового анализа), Рис. 15(в). В этом случае кривая зависимости $Ma_{mc}(BiCa)$ выходит на горизонтальное плато со значением $Ma_{mc} = 48$. Для возмущений с произвольным волновым числом критическое значение числа Марангони, напротив, продолжает увеличиваться с ростом $BiCa$ при $BiCa > 72$. Таким образом, в наших расчетах область, в которой колебательная мода опасней монотонной, расширяется.

В дополнение было изучено влияние гравитации на данную неустойчивость. Как видно из Рис. 16, увеличение числа Галилея ведет к стабилизации основного состояния и сужению области, в которой более опасна колебательная мода.

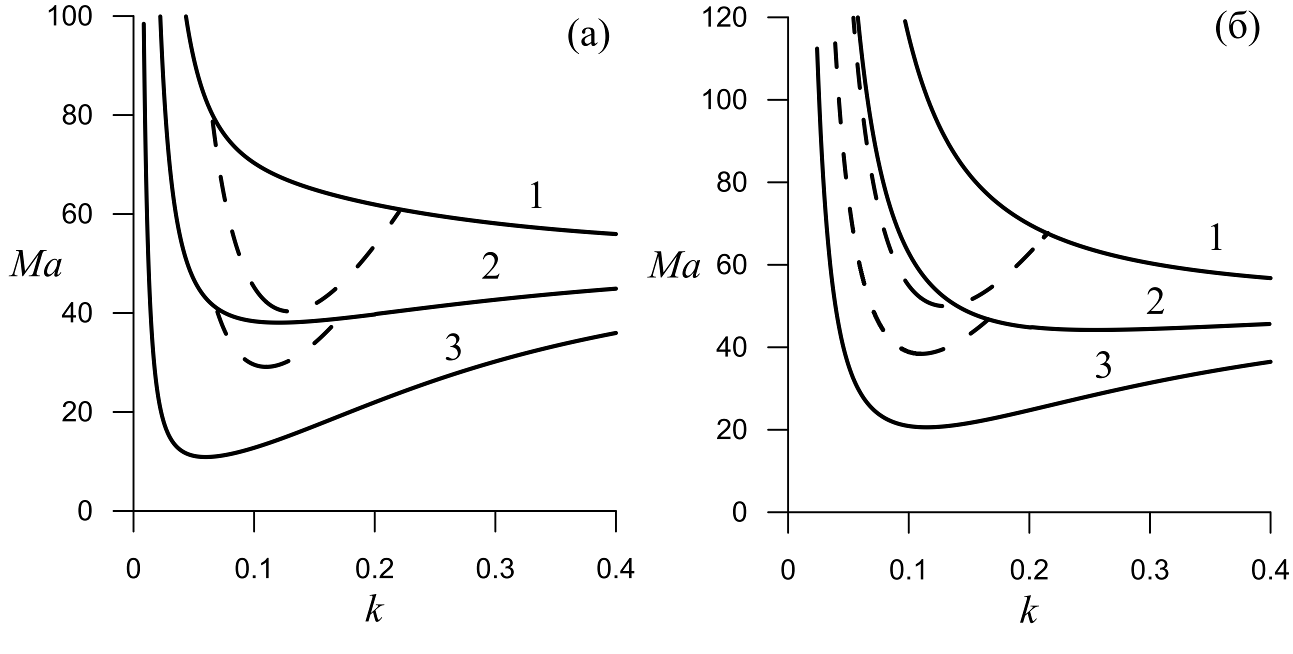

Рис. 16. Нейтральные кривые монотонной (сплошные линии) и колебательной (штриховые линии) моды неустойчивости при различных значениях числа Био и числа Галилея. Ca=1000, Bi=0.1, 0.05, 0.01 (кривые 1-3), Ga=1 (а) и Ga=10 (б)

Следует отметить необычную смену вида нейтральных кривых с ростом числа Био, Рис. 17(а,б). Для большего значения числа Био ветка колебательной моды уже не ответвляется от нейтральной кривой монотонной моды. Как видно из Рис. 17(в), спектр возмущений перестраивается вследствие взаимодействия двух веток колебательной моды.

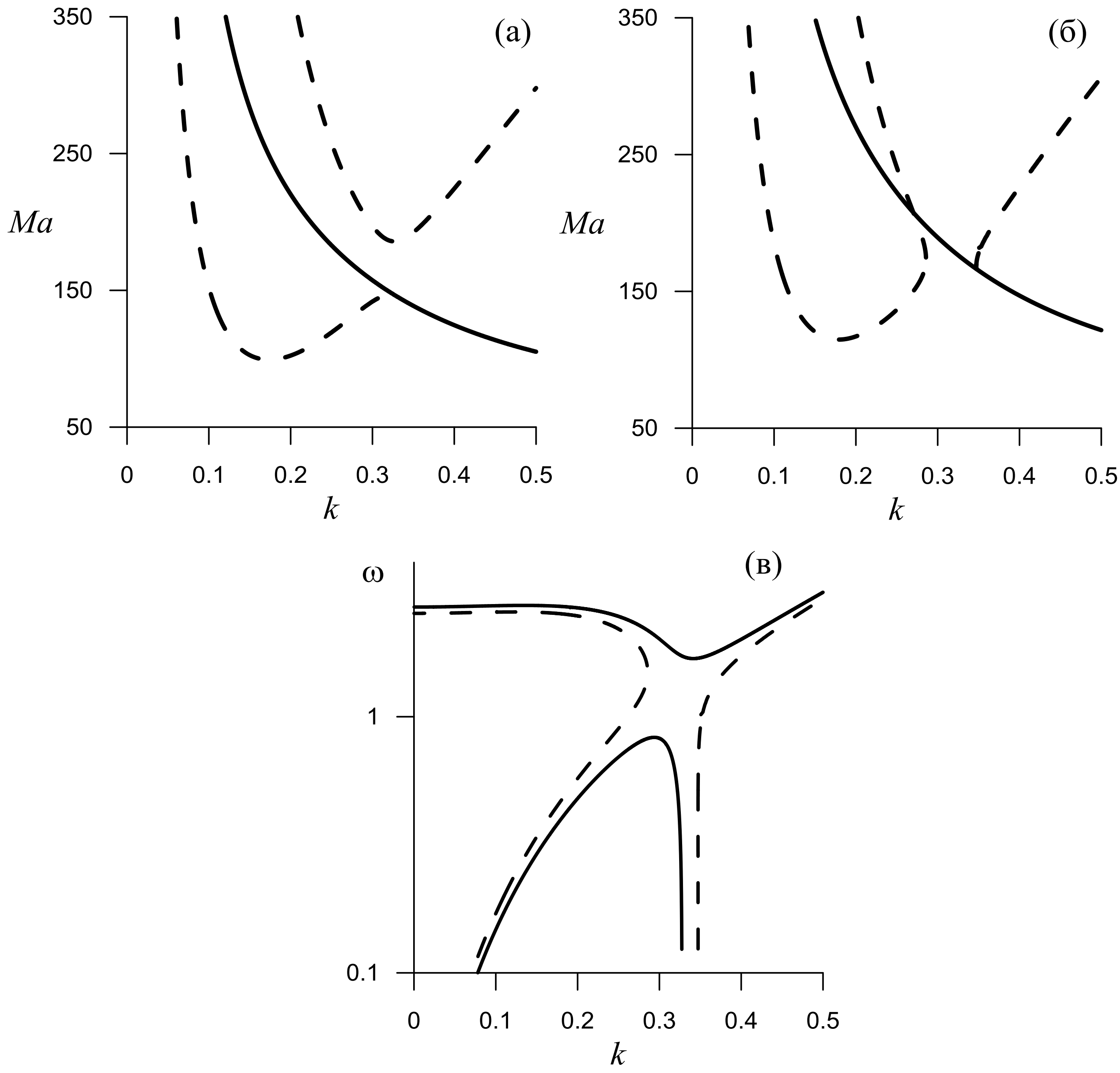

Рис. 17. Изменение вида нейтральной кривой при варьировании числа Био (сплошные линии – монотонная мода, штриховые линии – колебательная мода) при *Ga*=10, *Ca*=1000. (а) соответствует *Bi*=0.4, (б) соответствует *Bi*=0.5. (в) отражает изменение частоты колебаний нейтральных возмущений при *Bi*=0.4 (сплошная линия) и *Bi*=0.5 (штриховая линия)

Такая перестройка приводит в итоге к качественным различиям между нейтральными кривыми для конечных значений волнового числа и кривыми, полученными в рамках длинноволнового анализа, когда значения числа Био перестают быть малыми, Рис. 14(б).

Предполагая в будущем проведение натурных экспериментов по обнаружению новой колебательной моды, сделаем некоторые оценки для двух реальных физических систем. На Рис. 18(а, б) приведены нейтральные кривые для слоя воды толщиной 0.05 мм и слоя силиконового масла толщиной 0.1 мм, соответственно. Как видно, в обоих случаях, возможно обнаружение колебательной моды. Однако с точки зрения экспериментальной реализации вторая физическая система представляется более подходящей, т.к. при работе с водой требуется проводить дополнительные мероприятия по очистке свободной поверхности [118]. Для силиконового масла толщиной 0.1 мм с кинематической вязкостью 100 сСт получаем, что критическое значение числа Марангони достигается при разности температур в 5 K. При этом характерный масштаб конвективных структур составляет 1 мм а период колебаний – 2 с.

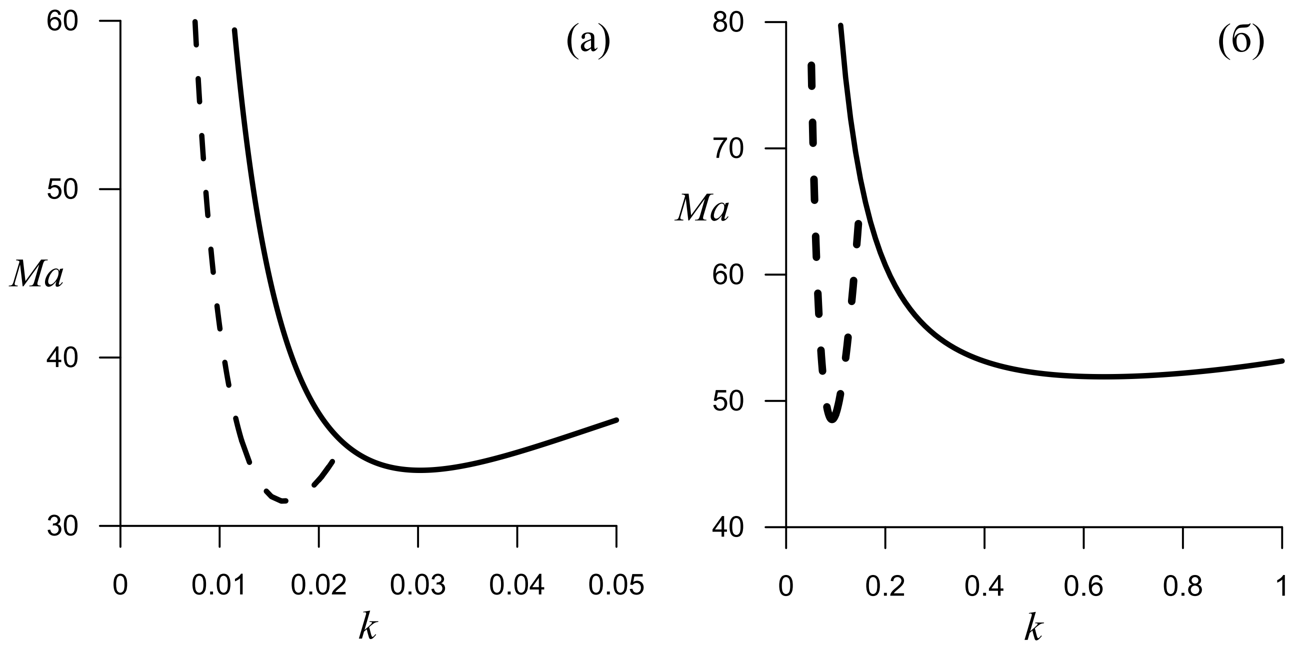

Рис. 18. Нейтральные кривые для реальных систем (сплошные линии – монотонная мода, штриховые линии – колебательная мода): слой воды толщиной 0.05 мм, Bi=0.001, Pr=7, Ga=10, Ca=50000 (a); слой силиконового масла толщиной 0.1 мм Bi=0.05, Pr=100, Ga=10, Ca=2000 (b)

2.2. Длинноволновая неустойчивость Марангони в тонкой пленке в рамках двухслойного подхода

В этом параграфе расширяются границы применимости результатов исследования длинноволновой конвекции Марангони в тонкой пленке [24,25], путем решения этой задачи в рамках двухслойного подхода [103–106,108]. По сравнению с однослойным подходом планируется отказаться от условия Ньютона, рассматривая теплоотдачу в слое воздуха, ограничивающем жидкость сверху. Аналогичные исследования для монотонной моды [64,65] продемонстрировали, что условия теплоотдачи Ньютона дают адекватные предсказания только при весьма ограниченных условиях. Такого рода рассмотрение позволит дать более точные рекомендации по экспериментальному обнаружению колебательных режимов.

Отметим, что основной целью исследования является обнаружение аналогичной колебательной моды, что была обнаружена для однослойного случая. Поэтому в своем длинноволновом анализе будем использовать то же масштабирование: параметр капиллярности, отвечающий за поверхностное натяжение, будем считать большим (это позволит рассматривать крупномасштабные деформации поверхности), число Галилея будем считать не слишком большим, порядка единицы (чтобы гравитация не подавляла деформации). Малая теплоотдача со свободной поверхности, которая в однослойной модели задается условием малости числа Био, в нашей задаче определяется соотношением теплопроводностей жидкости и газа над ней.

2.2.1.Постановка задачи

Рассматривается двухслойная система «жидкость-газ» с деформируемой границей раздела, помещенная между двумя твердыми стенками, Рис. 19. Система находится в поле силы тяжести и подогревается снизу. При этом теплопроводность жидкости κ_l полагается большой по сравнению с теплопроводностью подложки, так что на нижней границе слоя оказывается фиксирован вертикальный поток тепла величиной $\kappa_l A$ (теплоизолированная подложка).

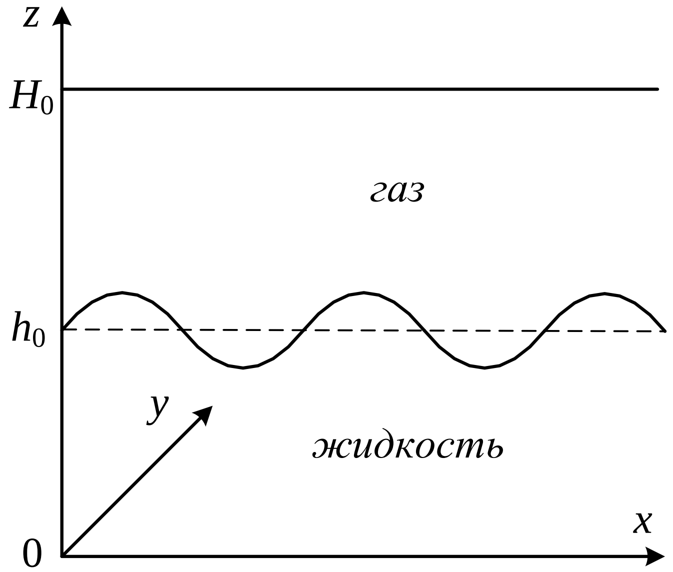

Рис. 19. Геометрия двухслойной системы «жидкость-газ»

Теплопроводность газа κ_g считается низкой по сравнению с теплопроводностью жидкости и теплопроводностью верхней стенки (идеально теплопроводная верхняя граница). Плотность и вязкость газа считаются настолько малыми по сравнению с плотностью и вязкостью жидкости, что движения газа не принимаются во внимание, учитывается перенос тепла в газе только за счет теплопроводности.

Толщина слоя жидкости в положении равновесия h_0 достаточно мала, так что основное влияние на развитие неустойчивости оказывает термокапиллярный механизм, влиянием плавучести пренебрегаем. Предполагается линейная зависимость коэффициента натяжения границы раздела от температуры.

Полные уравнения и граничные условия в безразмерном виде, описывающие конвекцию в данной системе очень похожи на аналогичные уравнения (2.1) – (2.8) для однослойной ситуации, к которым добавлено уравнение теплопроводности в газе и изменены тепловые условия на границе раздела:

$$\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t}+\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\vec{\mathrm{v}}\right)=-\nabla p+\Delta\vec{\mathrm{v}}-Ga\vec{\gamma}\,, \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla T=\Delta T\,, \tag{2.41}$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}}=0, \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial T_g}{\partial t}=\chi\Delta T_g\,, \tag{2.43}$$

$$z=0:\ \vec{\mathrm{v}}=0\,,\ \frac{\partial T}{\partial z}=-1, \tag{2.44}$$

$$z=h(x,y,t):\ \frac{\partial h}{\partial t}=w-\vec{\mathrm{u}}\cdot\nabla h\,, \tag{2.45}$$

$$\sigma_{nn}=p-CaK\,, \tag{2.46}$$

$$\sigma_{n\tau}=-Ma\frac{\partial}{\partial\tau}\left(T\big|_{z=h}\right), \tag{2.47}$$

$$T=T_g\,,\ \frac{\partial T}{\partial n}=\kappa\frac{\partial T_g}{\partial n}, \tag{2.48}$$

$$z=H:\ T_g=0\,. \tag{2.49}$$

Здесь физические поля без нижнего индекса относятся к слою жидкости, а те, что с индексом «g» относятся к слою газа; H – безразмерная толщина всей системы.

При обезразмеривании используются стандартные тепловые масштабы, неоднократно приводившиеся в этой диссертации, выраженные через физические параметры жидкости (вязкость, плотность, температуропроводность).

В дополнение к уже упоминавшимся числу Прандтля, параметру капиллярность, числам Галилея и Марангони (см. формулу (2.9)) задача (2.40) – (2.49) характеризуется ещё двумя безразмерными критериями:

$$\kappa = \frac{\kappa_g}{\kappa_l}, \ \chi = \frac{\chi_g}{\chi_l}. \tag{2.50}$$

Существует решение данной задачи, отвечающее состоянию равновесия:

$$\vec{\mathrm{v}}^{(0)} = 0, \ h^{(0)} = 1, \ T^{(0)} = 1 - z + \frac{H-1}{\kappa}, \ T_g^{(0)} = \frac{H-z}{\kappa}, \ p^{(0)} = Ga\left(1-z\right). \tag{2.51}$$

2.2.2.Амплитудные уравнения

В качестве дальнейшей цели выступает изучение крупномасштабного движения жидкости в тонкой пленке. Поэтому координаты, время и скорость должны быть перемасштабированы в соответствие с приближением тонких пленок:

$$X = \varepsilon x, \ Y = \varepsilon y, \ Z = z, \ \tau = \varepsilon^2 t, \ \vec{U} = \varepsilon \vec{u}, \ W = \varepsilon^2 w, \tag{2.52}$$

где роль малого параметра ε может играть отношение толщины слоя жидкости h_0 к характерному горизонтальному масштабу конвективного движения.

Поля скорости, давления и температуры раскладываются в ряды по малому параметру:

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + \varepsilon^2 \vec{U}_1 + \ldots, \ W = W_0 + \varepsilon^2 W_1 + \ldots, \ p = p_0 + \varepsilon^2 p_1 + \ldots, \tag{2.53}$$

$$T = -z + \frac{H-1}{\kappa} + T_0 + \varepsilon^2 T_1 + \ldots, \ T_g = \frac{H-z}{\kappa} + T_{g0} + \varepsilon^2 T_{g1} + \ldots \tag{2.54}$$

Рассматриваются конечные деформации свободной поверхности, поэтому величина h в ряд не раскладывается.

Как видно, в разложении поля температуры мы не отбрасываем составляющие, соответствующие основному состоянию. При этом состоянию равновесия соответствуют значения $T_0 = 1$ и $p_0 = p^{(0)}$.

Также перешкаливаются некоторые безразмерные параметры:

$$Ca = \varepsilon^{-2} C, \ \kappa = \varepsilon^2 \varkappa, \tag{2.55}$$

При этом число Галилея и отношение толщин слоев газа и жидкости $a \equiv H - 1$ считаются конечными, т.е. $O(1)$. Такой выбор масштабов для параметров позволит удовлетворить основным условиям, при которых в однослойном подходе колебательная мода оказывается наиболее опасной. Как упоминалось выше, это условия, позволяющие организовать сосуществование и взаимодействие двух длинноволновых монотонных мод: пирсоновской (проявляющейся при слабой теплоотдаче с поверхности раздела) и деформационной.

Учитывая все эти разложения, из задачи (2.40) – (2.49) вытекает следующая краевая задача нулевого порядка:

$$\frac{\partial p_0}{\partial Z} = -Ga, \ \nabla p_0 = \frac{\partial^2 \vec{U}_0}{\partial Z^2}, \tag{2.56}$$

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial Z^2} = 0, \ \frac{\partial^2 T_{g0}}{\partial Z^2} = 0 \tag{2.57}$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial Z} = -\nabla \cdot \vec{U}_0, \tag{2.58}$$

$$Z = 0: \ \vec{U}_0 = W_0 = 0, \ \frac{\partial T_0}{\partial Z} = 0, \tag{2.59}$$

$$Z = h(x, y, t): \ \frac{\partial h}{\partial \tau} = W_0 - \vec{U}_0 \cdot \nabla h, \tag{2.60}$$

$$p_0 = -C \Delta h, \ \frac{\partial \vec{U}_0}{\partial Z} = -Ma \nabla \left(T_0 - h \right) \tag{2.61}$$

$$T_0 - h = T_{g0}, \ \frac{\partial T_0}{\partial Z} = \frac{\partial T_{g0}}{\partial Z}, \tag{2.62}$$

$$z = H: \ T_{g0} = 0. \tag{2.63}$$

Здесь и далее $\nabla = \left(\partial/\partial X, \partial/\partial Y, 0 \right)$, $\Delta = \partial^2/\partial X^2 + \partial^2/\partial Y^2$.

Решение этой задачи несложно найти аналитически:

$$p_0 = P\left(X, Y, \tau \right) - GaZ, \tag{2.64}$$

$$\vec{U}_0 = \frac{Z}{2}\left(Z - 2h \right)\nabla P - MaZ\nabla f, \tag{2.65}$$

$$W_0 = \frac{Z^2}{2}\nabla \cdot \left[\frac{1}{3}\left(3h - Z \right)\nabla P + Ma\nabla f \right], \tag{2.66}$$

$$T_0 = \Theta\left(X, Y, \tau \right),\ T_{g0} = \frac{H - Z}{H - h}\Theta, \tag{2.67}$$

где $P = Gah - C\Delta h$, $f = \Theta - h$. Фактически f описывает возмущения поверхностного натяжения границы раздела.

Выражение для временной эволюции толщины пленки жидкости получается из известного соотношения $\partial h/\partial \tau = -\nabla \cdot \int_0^h \vec{U}_0 dZ$, которое фактически отражает сохранение массы в тонкой пленке [59]. Таким образом, получается амплитудное уравнение:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \nabla \cdot \left(\frac{h^3}{3}\nabla P + Ma\frac{h^2}{2}\nabla f \right) = \nabla \cdot \vec{j}, \tag{2.68}$$

где вектор $-\vec{j}$ имеет смысл продольного потока жидкости, осредненного по толщине слоя.

Из задачи, получающейся в первом порядке, нам понадобится только уравнения и граничные условия для температуры жидкости:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial Z^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \Delta\Theta + \vec{U}_0 \cdot \nabla\Theta - W_0, \tag{2.69}$$

$$Z = 0:\ \frac{\partial T_1}{\partial Z} = 0, \tag{2.70}$$

$$Z = h: \ \frac{\partial T_1}{\partial Z} = \nabla h \cdot \nabla \Theta - \frac{\varkappa}{H-h} f \ . \tag{2.71}$$

Условие разрешимости такой задачи позволяет нам получить второе амплитудное уравнение. Интегрирование уравнения (2.69) с учетом граничных условий (2.70), (2.71) дает:

$$h\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \nabla \cdot \left(h \nabla \Theta \right) - \frac{\varkappa}{H-h} f + \vec{j} \cdot \nabla f + \nabla \cdot \left(\frac{h^4}{8} \nabla P + \frac{h^3}{6} Ma \nabla f \right). \tag{2.72}$$

Уравнения (2.68) и (2.72) образуют замкнутую систему амплитудных уравнений, определяющих нелинейную динамику тонкой пленки жидкости. Основное состояние соответствует значениям $\Theta = 1$ и $h = 1$. Эти уравнения описывают следующие эффекты. Уравнение для эволюции толщины пленки (2.68) включает слагаемые, описывающие подавление деформаций границы раздела за счет гравитации и сил поверхностного натяжения, а также слагаемое, описывающее влияние термокапиллярного эффекта на толщину пленки. Уравнение (2.72) в правой части содержит слагаемое, соответствующее продольной теплопередаче, слагаемое, отвечающее за теплоотдачу с границы раздела в газовую среду, а также слагаемые, связанные с адвективным теплопереносом.

Амплитудные уравнения, полученные в рамках двухслойного подхода, похожи на амплитудные уравнения, полученные в работах [24,25] в рамках однослойного подхода. Основные отличия находятся в нелинейных слагаемых. В линейном порядке, как будет показано ниже, различия двух подходов заключаются в переобозначении $\varkappa/a \to \beta$.

2.2.3. Линейный анализ

Рассмотрим малые возмущения основного состояния $\Theta = 1 + \theta$ и $h = 1 + \zeta$. Подставляя их в уравнения (2.68), (2.72) и линеаризуя получающиеся выражения, приходим к следующим уравнениям для малых возмущений:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = \Delta \left[\frac{1}{3}\left(Ga\zeta - C\Delta\zeta \right) + \frac{1}{2} Ma\left(\theta - \zeta \right) \right], \tag{2.73}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \Delta \left[\theta + \frac{1}{8}\left(Ga\zeta - C\Delta\zeta \right) + \frac{1}{6} Ma\left(\theta - \zeta \right) \right] - \frac{\varkappa}{a}\left(\theta - \zeta \right). \tag{2.74}$$

Эти уравнения допускают решение в виде нормальных возмущений, т.е. возмущений пропорциональных $\exp\left(\lambda\tau + ikX \right)$. Учитывая это, получается квадратичное уравнение для инкремента λ:

$$\begin{gathered} \lambda^2 + \lambda \left[k^2 \left(1 + \frac{Ga + Ck^2 - Ma}{3} \right) + \frac{\varkappa}{a} \right] + \\ + \frac{k^2}{3}\left(k^2 + \frac{\varkappa}{a} \right)\left(Ga + Ck^2 \right) - \frac{Mak^4}{2}\left(1 + \frac{Ga + Ck^2}{72} \right) = 0. \end{gathered} \tag{2.75}$$

Несложно показать, что это уравнение имеет как вещественные, так и мнимые корни $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$. Для нейтральных возмущений ($\lambda_r = 0$) в случае монотонной моды получается следующая зависимость числа Марангони от волнового числа:

$$Ma_m = \frac{48\left(k^2 + \frac{\varkappa}{a} \right)\left(Ga + Ck^2 \right)}{k^2\left(72 + Ga + Ck^2 \right)}, \tag{2.76}$$

а для колебательной моды

$$Ma_o = 3 + \frac{3}{k^2}\frac{\varkappa}{a} + Ga + Ck^2. \tag{2.77}$$

Нейтральная кривая для монотонной моды, описываемая выражением (2.76), имеет один минимум при любых значениях параметров, причем этот минимум достигается при конечных k только в области, где выполняется соотношение

$$\frac{\varkappa}{a} C < 72.$$

В противном случае минимальное значение $Ma_{mc} = 48$ достигается при $k \to \infty$, т.е. реализуется коротковолновая неустойчивость.

Минимизация по волновому числу даёт выражение для критического k:

$$k_{mc}^2 = \frac{GaC\dfrac{\varkappa}{a} + \sqrt{72GaC\dfrac{\varkappa}{a}\left(72 + Ga - C\dfrac{\varkappa}{a}\right)}}{72 - C\dfrac{\varkappa}{a}}.$$

Частота колебаний нейтральных возмущений определяется формулой

$$\omega = \frac{k^2}{12}\sqrt{\left(72 + Ga + Ck^2\right)\left(Ma_m - Ma_0\right)}, \tag{2.78}$$

из которой видно, что колебательная мода существует только при условии $Ma_0 < Ma_m$. Минимизация выражения (2.77) по волновому числу дает критическое значение Ma_o и k:

$$k_{oc} = \sqrt[4]{3\frac{\varkappa}{aC}},\ Ma_{oc} = 3 + Ga + 2\sqrt{3C\frac{\varkappa}{a}}.$$

Одной из основных задач является предоставление рекомендаций для проведения экспериментов, поэтому имеет смысл привести выражения для нейтральных кривых монотонной и колебательной моды, представленные в исходных (до перемасштабирования) параметрах:

$$Ma_m = \frac{48\left(K^2 + \dfrac{\kappa_g}{a}\right)\left(Ga + CaK^2\right)}{K^2\left(72 + Ga + CaK^2\right)}, \tag{2.79}$$

$$Ma_o = 3 + \frac{3}{K^2}\frac{\kappa_g}{a} + Ga + CaK^2, \tag{2.80}$$

где учтено $K = \varepsilon k$.

Как видно, данные выражения совпадают с аналогичными выражениями в однослойной задаче с точностью до введения обозначения $\kappa_g / a \equiv Bi$, см.

формулы (2.34) – (2.36). Для сравнения на Рис. 20(а) представлена карта устойчивости на плоскости $Ga-\kappa_g Ca/a$, на которой показаны области, в которых оказывается критической одна из трех типов мод: длинноволновая монотонная (LM), коротковолновая монотонная (SM) и длинноволновая колебательная (LO). Эта карта устойчивости полностью совпадает с аналогичной картой из работы [24], если переобозначить $\kappa_g/a \equiv Bi$.

Тем не менее, линейный анализ, проведенный в рамках двухслойного подхода, позволил выявить существенное ограничение на область параметров, в которой может наблюдаться колебательная мода конвекции Марангони при подогреве снизу. На Рис. 20(б) приведена карта устойчивости на плоскости параметров $Ga-a$ для реальной системы «силиконовое масло – воздух», которая соответствует параметрам $Ca=1000$, $\kappa_g=0.1$. Как видно, наблюдать колебательную моду неустойчивости Марангони при подогреве снизу в такой системе можно только в довольно узком диапазоне по относительным толщинам слоев жидкости и газа: слой газа должен быть таким же тонким, как и слой жидкости под ним.

На основе этого уточнения удается оценить условия возникновения колебательной моды конвекции Марангони в подогреваемой снизу системе «силиконовое масло – воздух». Рассматривая 1 мм слоя воздуха над 0.1 мм слоем силиконового масла с кинематической вязкостью 100 сСт, получаем характерные значения безразмерных параметров $Ga=10$ и $Ca=2000$. Характерный масштаб конвективных структур будет составлять 1 см, а период колебаний – 50 с. Критическое значение числа Марангони будет достигнуто при разности температур в 4К.

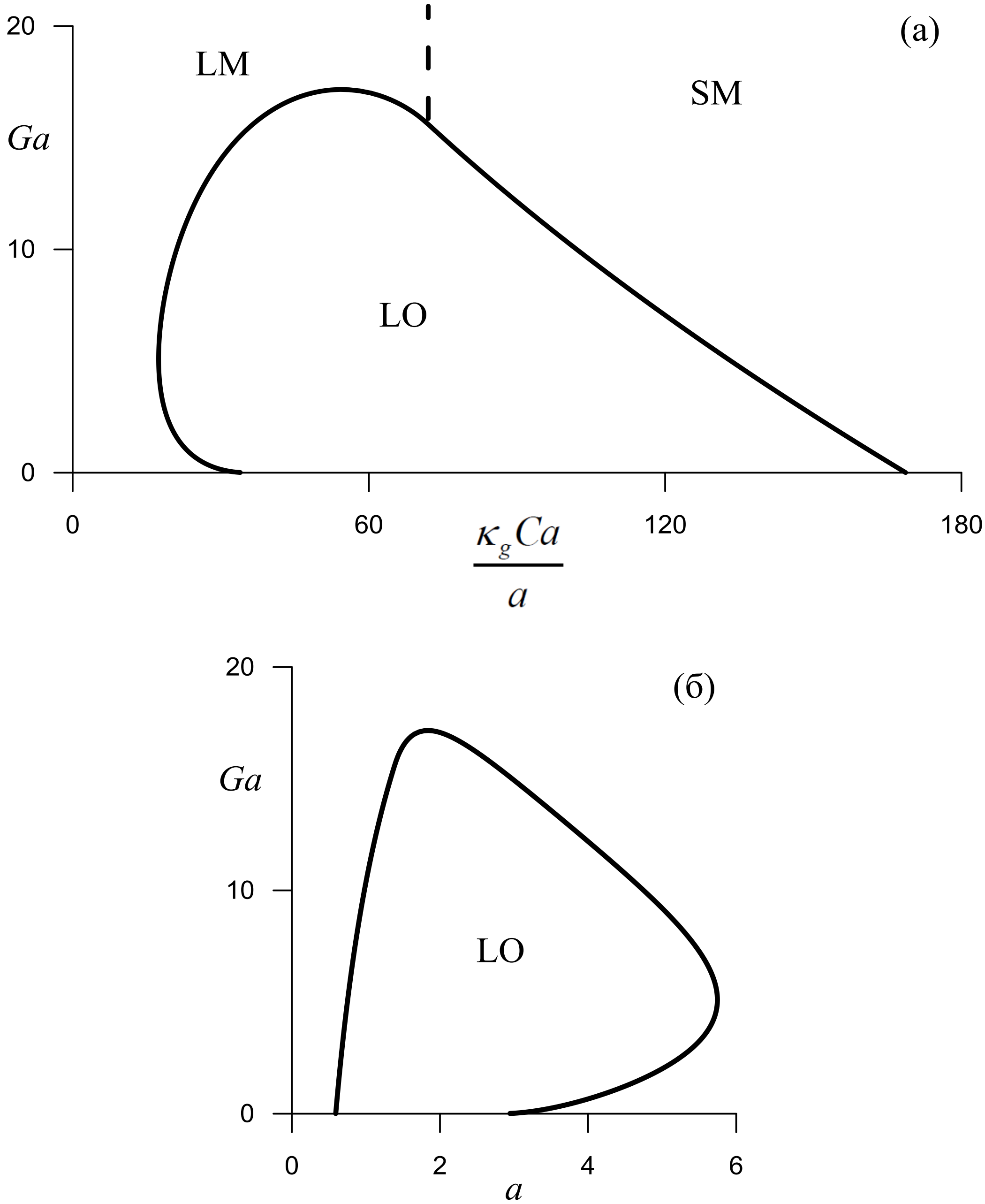

Рис. 20. Карта устойчивости. Буквами «LO» обозначена область, в которой наиболее опасной является длинноволновая колебательная мода, «LM» – длинноволновая монотонная мода, «SM» – коротковолновая монотонная мода. Штриховая линия соответствует границе между коротковолновой и длинноволновой монотонными модами при $\kappa_g Ca/a$=72. (а) Область возбуждения колебательной области в реальной системе силиконовое масло-воздух при Ca=1000, κ_g=0.1 (б)

2.2.4. Слабонелинейный анализ

В конце параграфа 2.2.2 было отмечено, что принципиальные отличия полученных амплитудных уравнений (2.68) и (2.72), описывающих эволюцию толщины пленки и средней температуры слоя жидкости, от аналогичных уравнений, выведенных в рамках однослойного подхода, заключены в нелинейных слагаемых. Поэтому отдельный интерес представляет слабо-нелинейный анализ этих амплитудных уравнений.

Вновь воспользуемся описанными в параграфе 1.5 методом малых масштабов и методом амплитудных функций.

Находясь вблизи критической точки, раскладываем поля и число Марангони в ряд по малому параметру:

$$h = 1 + \delta\xi_1 + \delta^2\xi_2 + \ldots,$$

$$\Theta = 1 + \delta\theta_1 + \delta^2\theta_2 + \ldots,$$

$$Ma = Ma_0 + \delta Ma_1 + \delta^2 Ma_2 + \ldots,$$

где $Ma_0 = Ma_c(k_c)$.

Вводим медленные и быстрые времена:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau_0} + \delta\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \delta^2\frac{\partial}{\partial\tau_2} + \ldots$$

Подставляя эти разложения в уравнения (2.68) и (2.72), получаем в первом порядке линейную задачу (2.73) – (2.74):

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial\tau_0} = \Delta\left(\frac{1}{3}P_1 + \frac{Ma_0}{2}f_1\right),$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau_0} = \Delta\left(\theta_1 + \frac{1}{8}P_1 + \frac{Ma_0}{6}f_1\right) - \frac{\varkappa}{a}f_1,$$

где $P_1 = Ga\xi_1 - C\Delta\xi_1$, $f_1 = \theta_1 - \xi_1$.

Будем рассматривать отбор структур на квадратной решетке, поэтому решение этих уравнений будем искать в виде

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^{n} A_j\left(\tau_1, \tau_2\right) e^{i\left(\vec{k}_j \cdot \vec{R} - \omega\tau_0\right)} + к.с. \tag{2.81}$$

$$\theta_1 = \alpha \sum_{j=1}^{n} A_j\left(\tau_1, \tau_2\right) e^{i\left(\vec{k}_j \cdot \vec{R} - \omega\tau_0\right)} + к.с., \tag{2.82}$$

где $\alpha = 1 - 2\left(Ga + Ck^2\right) / 3Ma_0 + 2i\omega / Ma_0 k^2$, $\left|\vec{k}_j\right| = k$, $n = 2$, $\vec{k}_1 = k\left(1{,}0\right)$, $\vec{k}_2 = k\left(0{,}1\right)$.

Во втором порядке по малому параметру уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial\xi_2}{\partial\tau_0} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{3}\nabla P_2 + \frac{Ma_0}{2}\nabla f_2\right) = -\frac{\partial\xi_1}{\partial\tau_1} + \nabla \cdot \left(\xi_1 \nabla P_1 + Ma_0 \xi_1 \nabla f_1 + \frac{Ma_1}{2}\nabla f_1\right), \tag{2.83}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau_0} - \Delta\left(\theta_2 + \frac{1}{8}P_2 + \frac{Ma_0}{6} f_2\right) + \frac{\varkappa}{a} f_2 = -\xi_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial\tau_1} + \\ + \nabla \cdot \left(\xi_1 \nabla \theta_1\right) - \frac{\varkappa}{a^2}\xi_1 f_1 + \nabla\left(\frac{1}{3}P_1 + \frac{Ma_0}{2} f_1\right) \cdot \nabla f_1 + \\ + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}\xi_1 \nabla P_1 + \frac{Ma_0}{2}\xi_1 \nabla f_1 + \frac{Ma_1}{6}\nabla f_1\right).\end{gathered} \tag{2.84}$$

Здесь $P_2 = Ga\xi_2 - C\Delta\xi_2$, $f_2 = \theta_2 - \xi_2$. Из условия разрешимости данной системы мы получаем $\partial / \partial\tau_1 = Ma_1 = 0$.

В третьем порядке разложения уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\xi_3}{\partial\tau_0} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{3}\nabla P_3 + \frac{Ma_0}{2}\nabla f_3\right) = -\frac{\partial\xi_1}{\partial\tau_2} + \nabla \cdot \left(\xi_1 \nabla P_2 + \xi_2 \nabla P_1 + \right. \\ \left. + Ma_0 \xi_1 \nabla f_2 + Ma_0 \xi_2 \nabla f_1 + \frac{Ma_2}{2}\nabla f_1\right),\end{gathered} \tag{2.85}$$

$$\frac{\partial\theta_3}{\partial\tau_0}-\Delta\left(\theta_3+\frac{1}{8}P_3+\frac{Ma_0}{6}f_3\right)+\frac{\varkappa}{a}f_3=-\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau_2}-\xi_1\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau_0}-\xi_2\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau_0}+$$
$$+\nabla\cdot\left(\xi_1\nabla\theta_2+\xi_2\nabla\theta_1\right)+\nabla\left(\frac{1}{3}P_2+\frac{Ma_0}{2}f_2\right)\cdot\nabla f_1+$$
$$+\frac{Ma_2}{6}\Delta f_1-\frac{\varkappa}{a^2}\xi_1 f_2-\frac{\varkappa}{a^2}\xi_2 f_1+ \tag{2.86}$$
$$+\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\xi_2\nabla P_1+\frac{1}{2}\xi_1\nabla P_2+\frac{3}{4}\xi_1^{\,2}\nabla P_1+\frac{Ma_0}{2}\xi_1\nabla f_2+\frac{Ma_0}{2}\xi_2\nabla f_1\right),$$

где $P_3=Ga\xi_3-C\Delta\xi_3,\ f_3=\theta_3-\xi_3$.

Рассмотрим далее по отдельности монотонную и колебательную моды.

Для **монотонной** моды $\omega=0,\quad \alpha=1-2\left(Ga+Ck^2\right)\big/3Ma_0$. Решение уравнений второго порядка будем искать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix}\xi_2\\ \theta_2\end{pmatrix}\left(X,Y,\tau_2\right)=\begin{pmatrix}0\\ B_{00}\end{pmatrix}\left(\left|A_1\right|^2+\left|A_2\right|^2\right)+\begin{pmatrix}A_{20}\\ B_{20}\end{pmatrix}\left(A_1^2e^{2ikX}+A_2^2e^{2ikY}\right)+$$
$$+\begin{pmatrix}A_{11}\\ B_{11}\end{pmatrix}\left(A_1A_2e^{ik(X+Y)}+A_1A_2^*e^{ik(X-Y)}\right)+\text{к.с.} \tag{2.87}$$

При подстановке этого решения в уравнения (2.83) – (2.84) получаются алгебраические уравнения для нахождения вещественных коэффициентов $A_{11,20}$ и $B_{00,11,20}$.

Условие разрешимости системы неоднородных уравнении третьего порядка приводит к выражению:

$$3F_1=(Ga+Ck^2)F_2, \tag{2.88}$$

где $F_{1,2}$ – неоднородности в правой части уравнений (2.85) и (2.86), соответственно. Уравнение (2.88) позволяет получить следующую систему уравнений, описывающих медленную эволюцию амплитудных функций $A_{1,2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dA_1}{d\tau_2} = \left(\mu Ma_2 - K_0\left|A_1\right|^2 - K_1\left|A_2\right|^2\right)A_1 \\ \dfrac{dA_2}{d\tau_2} = \left(\mu Ma_2 - K_0\left|A_2\right|^2 - K_1\left|A_1\right|^2\right)A_2. \end{cases} \tag{2.89}$$

Здесь $\mu = (1-\alpha)\left(k^2 + \varkappa/a\right)\Big/Ma_0 > 0$, а прямая и перекрестная константы Ландау определяются следующими формулами:

$$K_0 = G\left(3k^2 + +Gk^2\left(\alpha + \frac{3}{8}\right)Ma_0\,\alpha^2k^2 + \frac{7}{16}Ma_0\alpha\,k^2 + \frac{3\varkappa\,\alpha}{a^2}\right) +$$

$$A_{20}G\left(\frac{8}{3}C\alpha\,k^4 + \frac{5}{4}Ck^4 + \frac{2}{3}Ga\,\alpha\,k^2 + \frac{5}{16}Ma_0\alpha\,k^2 + \frac{1}{2}Gak^2 +\right.$$

$$\left.\alpha\,k^2 - k^2 + \frac{\varkappa\,\alpha}{a}\right) + A_{20}\left(3Gak^2 + 21Ck^4 - 3Ma_0\alpha k^2\right) +$$

$$6B_{20}Ma_0k^2 + B_{20}G\left(\frac{2}{3}k^2G + 2Ma_0\alpha k^2 + \frac{1}{2}Ma_0k^2 - 2k^2 + \frac{\varkappa}{a}\right)$$

$$+\frac{\beta}{a}GB_{00} + 1.5Ma_0\alpha k^2,$$

$$K_1 = A_{11}\left(12Ck^4 - 6Ga\,k^2\right) + 6Ma_0\,B_{11}k^2 + 6Ck^4 +$$

$$A_{11}G\left(\frac{4}{3}\alpha Ck^4 + \frac{3}{4}Ck^4 + \frac{2}{3}\alpha Gak^2 + \frac{3}{8}Ma_0\alpha k^2 + \frac{1}{2}Gak^2 - 2k^2 + 2\frac{\varkappa\,\alpha}{a}\right)$$

$$B_{11}G\left(2Ma_0\alpha k^2 + \frac{2}{3}Gak^2 + \frac{1}{12}Ma_0k^2 - 2k^2 + 2\frac{\varkappa}{a}\right) +$$

$$G\left(2\alpha Ck^4 + 2Ma_0\,\alpha^2k^2 + \frac{3}{4}Ck^4 + 2\alpha Gak^2 + \frac{2}{3}Ck^4 + \frac{7}{8}Ma_0\alpha k^2\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}Gak^2 + \frac{\varkappa}{a}B_{00}\right) + 3Ma_0\,\alpha\,k^2 + 6Ga\,k^2 + 6\frac{\varkappa\,\alpha}{a^2},$$

где введено обозначение $G = Ga + Ck^2$.

Анализ системы (2.89) был уже проведен в параграфе 1.5.2. Применительно к квадратной решетке этот анализ позволяет заключить, что вторичные возмущения в виде валов, $A_1 = \sqrt{\mu Ma_2 / K_0}$, $A_2 = 0$, возникают через прямую бифуркацию Хопфа при $K_0 > 0$. Возмущения в виде квадратов, $A_1 = A_2 = \sqrt{\mu Ma_2 / (K_0 + K_1)}$, возбуждаются мягким образом при $K_0 + K_1 > 0$. При этом отбор той или иной структуры определяется соотношением между прямым и перекрестным коэффициентом Ландау: при $K_0 > K_1$ отбираются квадраты, в противном случае – валы.

Области параметров, соответствующие отбору структур в виде валов или квадратов представлены на Рис. 21. Как видно, устойчивыми могут быть стационарные структуры в виде квадратов или двумерных валов, в зависимости от параметров. При этом квадраты могут наблюдаться в довольно узкой области параметров при небольших значениях числа Галилея и параметра $\kappa_g Ca / a$.

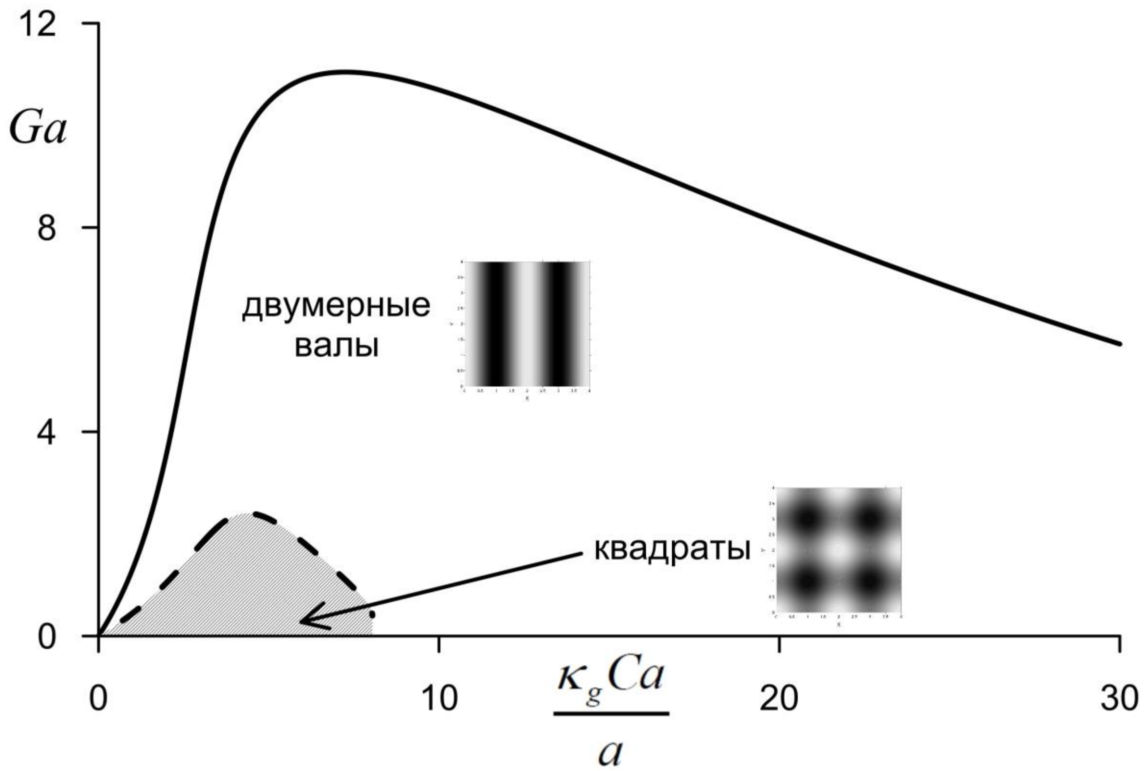

Рис. 21. Карта отбора стационарных структур при *a*=10. Сплошная линия – граница мягкого возбуждения для двумерных валов; штриховая линия – граница отбора (устойчивости) валов или квадратов.

Отметим, что в отличие от линейных уравнений, нелинейные уравнения зависят не только от числа Галилея и комбинации параметров $\kappa_g Ca/a$, но и дополнительно от относительной толщины слоев a. Поэтому для сопоставления карты отбора структур с картой режимов с Рис. 20(а), приходится задавать значение параметра a.

Для **колебательной** моды удобно записать решение уравнений первого порядка в виде:

$$\xi_1 = \left(A_1 e^{ikX} + A_2 e^{ikY} + B_1 e^{-ikX} + B_2 e^{-ikY} \right) e^{-i\omega\tau_0} + \kappa.c. \qquad (2.90)$$

Такой вид решения позволяет учесть взаимодействие структур, распространяющихся в противоположные стороны с одинаковой скоростью.

Тогда решение уравнений второго порядка будем искать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \xi_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} (X, Y, \tau_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{00} \end{pmatrix} \left(|A_1|^2 + |A_2|^2 + |B_1|^2 + |B_2|^2 \right) +$$

$$+ \begin{pmatrix} A_{20} \\ B_{20} \end{pmatrix} \left(A_1 B_1^* e^{2ikX} + A_2 B_2^* e^{2ikY} \right) +$$

$$+ \begin{pmatrix} A_{10} \\ B_{10} \end{pmatrix} \left[\left(A_1 B_2^* + A_2 B_1^* \right) e^{ik(X+Y)} + \left(A_1 A_2^* + B_1^* B_2 \right) e^{ik(X-Y)} \right] +$$

$$+ \begin{pmatrix} A_{02} \\ B_{02} \end{pmatrix} \left(A_1 B_1 + A_2 B_2 \right) e^{-2i\omega\tau_0} +$$

$$+ \begin{pmatrix} A_{22} \\ B_{22} \end{pmatrix} \left(A_1^2 e^{2ikX} + A_2^2 e^{2ikY} + B_1^2 e^{-2ikX} + B_2^2 e^{-2ikY} \right) e^{-2i\omega\tau_0} +$$

$$+ \begin{pmatrix} A_{11} \\ B_{11} \end{pmatrix} \left(A_1 A_2 e^{ik(X+Y)} + B_1 B_2 e^{-ik(X+Y)} + \right.$$

$$\left. + A_1 B_2 e^{ik(X-Y)} + A_2 B_1 e^{-ik(X-Y)} \right) e^{-2i\omega\tau_0} + \kappa.c.$$

Значения комплексных коэффициентов $A_{11,02,20,10,22}$ и $B_{00,10,20,02,22,11}$ получаются из алгебраических уравнений при подстановке этого решения в уравнения (2.83) – (2.84).

Условие разрешимости уравнений третьего порядка имеет вид

$$\left(k^2\left(1-\frac{Ma_0}{48}\right)+\frac{\varkappa}{a}-i\omega\right)F_1=\frac{Ma_0k^2}{2}F_2, \tag{2.91}$$

где $F_{1,2}$ – неоднородности в правой части уравнений (2.85) и (2.86), соответственно. Выполнение этого условия приводит к системе уравнений для амплитудных функций $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$:

$$\begin{cases}\dfrac{dA_1}{d\tau_2}=\left[\mu Ma_2-K_0\left|A_1\right|^2-K_1\left|B_1\right|^2+K_2\left(\left|A_2\right|^2+\left|B_2\right|^2\right)\right]A_1-K_4A_2B_1^*B_2\\ \dfrac{dB_1}{d\tau_2}=\left[\mu Ma_2-K_0\left|B_1\right|^2-K_1\left|A_1\right|^2+K_2\left(\left|A_2\right|^2+\left|B_2\right|^2\right)\right]B_1-K_4A_2A_1^*B_2\\ \dfrac{dA_2}{d\tau_2}=\left[\mu Ma_2-K_0\left|A_2\right|^2-K_1\left|B_2\right|^2+K_2\left(\left|A_2\right|^2+\left|B_2\right|^2\right)\right]A_2-K_4A_1B_2^*B_1\\ \dfrac{dB_2}{d\tau_2}=\left[\mu Ma_2-K_0\left|B_2\right|^2-K_1\left|A_2\right|^2+K_2\left(\left|A_2\right|^2+\left|B_2\right|^2\right)\right]B_2-K_4A_1A_2^*B_1\end{cases} \tag{2.92}$$

Здесь коэффициент μ и коэффициенты Ландау $K_{0,1,2,4}$ являются комплексными числами. Коэффициенты Ландау определяются следующими выражениями:

$$K_j=\left(c_1K_{j1}-\frac{Ma_0k^2}{2}K_{j2}\right)\Big/c_2,$$

$$c_1=\varkappa-i\omega+k^2\left(1-\frac{Ma_0}{48}\right),\ c_2=\varkappa-i\omega+k^2\left(1-\frac{Ma_0}{48}\right)-\frac{1}{2}Ma_0k^2\left(\alpha+\frac{5}{8}\right),$$

$$K_{01}=A_{22}\left(Gak^2+7Ck^4-Ma_0\alpha^*k^2\right)+Ma_0k^2\left(\alpha-\frac{\alpha^*}{2}\right)+2k^2Ma_0B_{22}+Gk^2,$$

$$K_{11}=A_{20}\left(7Ck^4+Gak^2-Ma_0k^2\alpha\right)+2B_{20}Ma_0k^2+Ma_0\alpha^*k^2+2Gk^2,$$

$$K_{21}=\left(A_{10}+A_{11}\right)\left(2Ck^4+Gak^2\right)+Ma_0k^2\left(B_{10}+B_{11}\right)+Ma_0\alpha k^2+2Gk^2,$$

$$K_{41}=A_{10}^*\left(4Ck^4+2Gak^2\right)+2B_{10}^*Ma_0k^2+Ma_0\alpha^*k^2+2Gk^2,$$

$$K_{02}=A_{22}\left(-\frac{5}{4}Ck^4-\frac{5}{8}i\omega+k^2-\frac{1}{2}Gak^2+i\omega\alpha^*-k^2\alpha^*-\frac{8}{3}Ck^4\alpha^*-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}Gak^2\alpha^*-\frac{\beta\alpha^*}{a}-\frac{5}{16}Ma_0k^2\alpha^*\right)-2\frac{\beta\alpha}{a^2}-\frac{\beta\alpha^*}{a^2}-\frac{\beta}{a}B_{00}+$$

$$+B_{22}\left(-2i\omega-\frac{1}{2}k^2Ma_0-\frac{2}{3}Gk^2+2k^2-2Ma_0\alpha^*k^2-\frac{\beta}{a}\right)-\frac{5}{16}Ma_0k^2\alpha^*-$$

$$-\frac{3}{8}Gk^2-\frac{1}{8}Ma_0k^2\alpha-Gk^2\alpha^*+Ma_0k^2\alpha^2-2Ma_0k^2\alpha\alpha^*,$$

$$K_{12}=A_{20}\left(-\frac{5}{4}Ck^4-\frac{5}{8}i\omega+k^2-\frac{1}{2}Gak^2-i\omega\alpha-k^2\alpha-\frac{8}{3}Ck^4\alpha-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}Gak^2\alpha-\frac{\beta\alpha}{a}-\frac{5}{16}Ma_0k^2\alpha\right)-2\frac{\beta\alpha^*}{a^2}-4\frac{\beta\alpha}{a^2}-\frac{\beta}{a}\left(B_{00}+B_{02}\right)+$$

$$+B_{20}\left(-2i\omega-\frac{1}{2}k^2Ma_0-\frac{2}{3}Gk^2+2k^2-2Ma_0\alpha k^2-\frac{\beta}{a}\right)-$$

$$-\frac{1}{8}Ma_0k^2\alpha^*-\frac{3}{4}Gk^2-\frac{3}{4}Ma_0k^2\alpha-Gk^2\alpha-2Ma_0k^2\alpha^2,$$

$$K_{22}=\left(A_{10}+A_{11}\right)\left(-\frac{3}{8}Ck^4-\frac{5}{8}i\omega+k^2-\frac{1}{4}Gak^2\right)+i\omega\left(A_{11}\alpha^*-A_{10}\alpha\right)+$$

$$+\left(A_{10}\alpha+A_{11}\alpha^*\right)\left(-\frac{2}{3}Ck^4-\frac{3}{16}Ma_0k^2-\frac{1}{3}Gak^2-\frac{\beta}{a}\right)-$$

$$-\frac{\beta}{a}\left(B_{00}+B_{10}+B_{11}\right)+\left(B_{10}+B_{11}\right)\left(k^2-\frac{1}{3}Gk^2-\frac{1}{4}k^2Ma_0\right)-2i\omega B_{11}-$$

$$-Ma_0k^2\left(B_{10}\alpha+B_{11}\alpha^*\right)-2\frac{\beta\alpha^*}{a^2}-4\frac{\beta\alpha}{a^2}-\frac{3}{4}Gk^2-Gk^2\left(\alpha+\alpha^*\right)-$$

$$-\frac{3}{8}Ma_0k^2\alpha^*-\frac{1}{2}Ma_0k^2\alpha-2Ma_0k^2\alpha\alpha^*,$$

$$K_{42} = A_{10}^{*}\left(-\frac{3}{4}Ck^4 - \frac{5}{4}i\omega + 2k^2 - \frac{1}{2}Gak^2 - 2i\omega\alpha - \frac{4}{3}Ck^4\alpha - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{3}Gak^2\alpha - 2\frac{\beta\alpha}{a} - \frac{3}{8}Ma_0k^2\alpha\right) - 2\frac{\beta\alpha^*}{a^2} - 4\frac{\beta\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a}\left(2B_{10}^{*} + B_{02}\right) +$$

$$+B_{10}^{*}\left(2k^2 - \frac{1}{2}k^2Ma_0 - \frac{2}{3}Gk^2 - 2Ma_0\alpha k^2\right) - 2i\omega B_{02} -$$

$$-\frac{1}{8}Ma_0k^2\alpha^* - \frac{3}{4}Gk^2 - \frac{3}{4}Ma_0k^2\alpha - 2Gk^2\alpha - 2Ma_0k^2\alpha^2,$$

где звездочкой отмечено комплексное сопряжение.

Анализ уравнений (2.92) показывает, что существует несколько основных решений: 1) $A_1 \neq 0$, $A_2 = B_1 = B_2 = 0$ (бегущие валы); 2) $A_1 = B_1 \neq 0$, $A_2 = B_2 = 0$ (стоячие валы); 3) $A_1 = A_2 \neq 0$, $B_1 = B_2 = 0$ (бегущие квадраты); 4) $A_1 = A_2 = B_1 = B_2$ (стоячие квадраты); 5) $A_1 = B_1 = iA_2 = iB_2$ (перемежающиеся валы) [119]. Условие возникновения каждой из этих структур через прямую бифуркацию Хопфа определяется знаком одной или нескольких постоянных Ландау $K_{0,1,2,4}$. Анализируя устойчивость этих решений, можно определить границы существования устойчивых структур. Вычисления показывают, что среди всех структур, возникающих через прямую бифуркацию Хопфа, устойчивыми оказываются только структуры в виде бегущих валов, Рис. 22.

Отметим, что слабонелинейный анализ вторичных структур, проведенный нами в рамках двухслойного подхода, дает существенно иные результаты, по сравнению с теми, что были получены в работе [25] в рамках однослойного подхода. Это объясняется тем, что полные нелинейные уравнения (2.68), (2.72) не могут быть сведены к нелинейным уравнениям из работы [25] простым переобозначением $\kappa_g / a \equiv Bi$, как в линейном анализе.

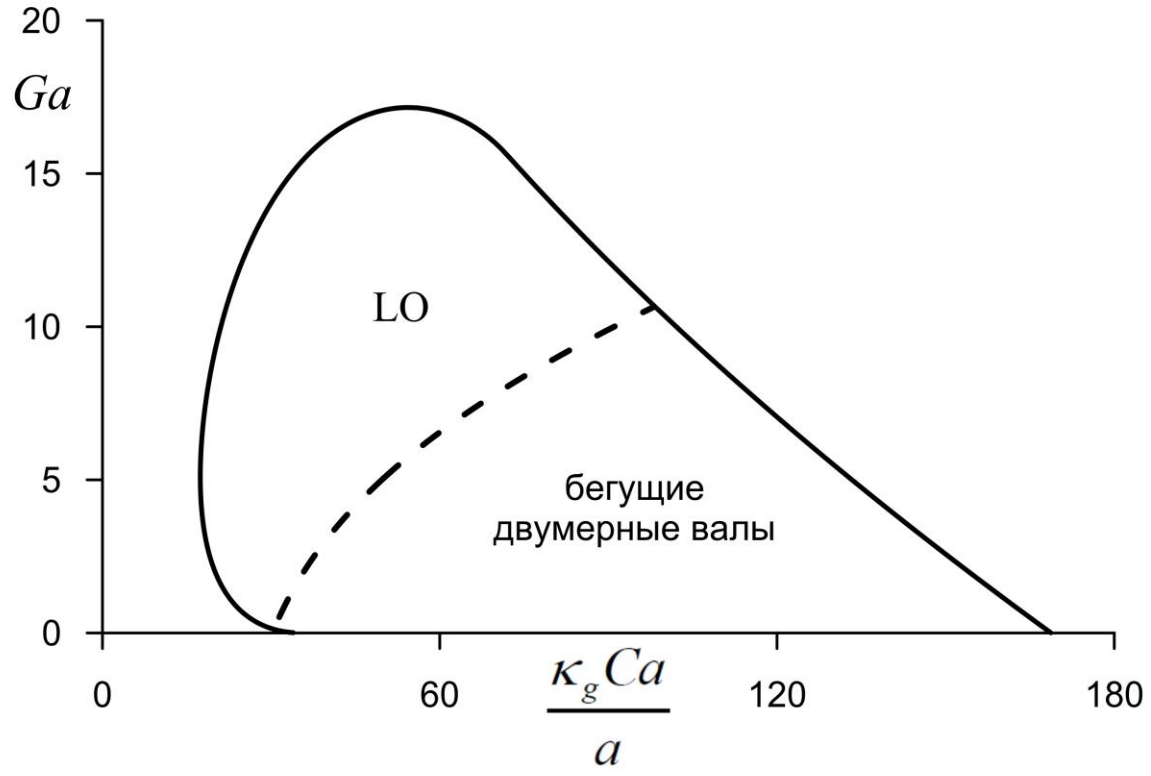

Рис. 22. Карта отбора колебательных структур при a=10. Сплошная жирная кривая разграничивает области монотонной (LM) и колебательной (LO) неустойчивости, штриховая – области длинноволновой и коротковолновой (SM) монотонных мод. Штриховая линия ограничивает область устойчивых вторичных возмущений в виде бегущих валов

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках настоящего диссертационного исследования изучена колебательная неустойчивость Релея–Бенара–Марангони в горизонтальном слое жидкости с деформируемой свободной поверхностью в рамках небуссинесковской модели корректного учета плавучести. Рассмотрены случаи нормального и аномального теплового расширения, а также ситуации, соответствующие земной гравитации и невесомости. Для них по результатам численных расчетов построены нейтральные кривые, карты устойчивости и дисперсионные соотношения. Показано дестабилизирующее влияние уменьшения числа Прантдля во всем диапазоне рассматриваемых параметров. Обнаружены сложные деформации нейтральных кривых колебательных возмущений в области очень малых значений числа Прандтля. В случае нормального теплового расширения обнаружен переход нейтральной кривой в область с противоположным знаком термокапиллярного эффекта. Обнаружено существование колебательной неустойчивости в условиях отсутствия термокапиллярного и рэлеевского механизмов.

Проведен слабонелинейный анализ задачи о колебательной неустойчивости плоского горизонтального слоя жидкости с деформируемой свободной поверхностью. Получена система амплитудных уравнений Гинзбурга–Ландау, описывающая эволюцию вторичных возмущений в виде двумерных валов. Вычислены коэффициенты Ландау, построена карта режимов для случая нулевой гравитации в широком диапазоне значений числа Прандтля и параметра Буссинеска. Показано, что вторичное течение в виде бегущих валов возбуждается только жестким образом. Нестационарное вторичное течение в виде стоячих валов в широком диапазоне параметров возбуждается мягким образом и устойчиво.

Исследовано влияние характеристик жидкости, силы тяжести, поверхностного натяжения и теплоотдачи со свободной поверхности на новую колебательную моду неустойчивости плоского слоя жидкости, возникающую в отсутствие термокапиллярных сил и плавучести. Получены типичные нейтральные кривые, карты устойчивости и дисперсионные соотношения. Показано, что сила тяжести стабилизируют равновесие; в то время как поверхностное натяжение сужает область существования новой моды неустойчивости. Увеличение значения числа Прандтля и теплоотдачи со свободной границы также повышают порог возникновения данной моды неустойчивости.

Проведен асимптотический анализ устойчивости относительно коротковолновых возмущений слоя невязкой жидкости со свободной границей в отсутствие термокапиллярного эффекта и сил тяжести. Определены поправки к инкременту вплоть до третьего порядка. Сопоставление данных результатов с результатами вычислений для произвольной длины волны позволило сделать вывод об основном механизме развития новой колебательной моды неустойчивости. А именно, имеет место невязкий механизм возникновения такой неустойчивости, который связан с температурной зависимостью плотности: к развитию неустойчивости приводит эффект растекания жидкости от более нагретых мест к менее нагретым на деформированной из-за капиллярных волн поверхности.

Исследована термокапиллярная неустойчивость подогреваемой снизу тонкой пленки жидкости по отношению к возмущениям с произвольной длиной волны. Построены нейтральные кривые, карты устойчивости и дисперсионные соотношения. Определены границы применимости ранее полученного результата длинноволнового анализа, в котором была обнаружена новая колебательная мода. В рамках диссертационной работы показано, что область параметров, в которой колебательная мода является наиболее опасной, значительно расширяется. В соответствующем пределе продемонстрировано хорошее согласование результатов настоящей работы с результатами длинноволнового анализа. Приведены оценки реальных параметров, при которых колебательная неустойчивость может наблюдаться в эксперименте.

Проведен асимптотический анализ термокапиллярной неустойчивости подогреваемой снизу тонкой пленки жидкости в рамках двухслойной модели. В результате длинноволнового разложения получены амплитудные уравнения, описывающие локально эволюцию толщины пленки и осредненную температуру пленки. Линейный анализ этих уравнений подтвердил существование аналога новой колебательной моды для случая двухслойной системы. Получены нейтральные кривые и карты устойчивости для монотонной и колебательной мод. Обнаружено существенное ограничение на условия обнаружения колебательной моды при нагреве со стороны подложки: слой газа над пленкой должен быть порядка толщины пленки.

Проведен слабонелинейный анализ амплитудных уравнений эволюции толщины и температуры пленки в рамках двухслойной модели. Для монотонной моды получено амплитудное уравнение Гинзбурга-Ландау, описывающее эволюцию вторичных возмущений в виде валов и квадратов. Построена карта отбора стационарных вторичных структур; показано, что в широком диапазоне параметров устойчивыми оказываются возмущения в виде квадратов. Для колебательной моды получены амплитудные уравнения для возмущений на квадратной решетке. Показано, что в узком диапазоне, в котором колебательная мода опасна, устойчивыми являются возмущения в виде бегущих валов.

Перспективы дальнейших исследований связаны с наблюдением реальных картин течений, возникающих вследствие изученных в настоящей работе неустойчивостей. В первую очередь может быть проведено прямое численное моделирование поведения горизонтального слоя жидкости с деформируемой границей раздела. Ещё больший интерес представляют эксперименты по наблюдению новых описанных режимов тепловой конвекции. Оба направления требуют тщательной разработки, включающей освоение новых методик исследования.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит научного руководителя доктора физико-математических наук Демина В.А. за поддержку и помощь, оказанную при работе над диссертацией.

Автор выражает глубокую благодарность своему первому научному руководителю доктору физико-математических наук Лобова Н.И за постановку задач, постоянное внимание к работе и неоценимую поддержку.

Автор благодарен кандидату физико-математических наук Шкляеву С.В. за постоянное внимание к работе, полезные советы и замечания.

Автор искренне признателен доценту кафедры английского языка профессиональной коммуникации ПГНИУ Рукавишниковой Н.А. за поддержку и помощь при написании научных статей на английском языке.

Автор отдельно выражает благодарность своей семье за понимание, поддержку и помощь на всех этапах работы над диссертацией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Bénard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquid // Rev. Gén. Sci. Pures Appl. 1900. Vol.11, N 23. P. 1261–1271.
3. Lord Rayleigh. On the convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side // Phil. Mag. 1916. Vol. 32, N 192. P. 529–546.
4. Boussinesq J. V. Theorie Analytique de la Chaleur, vol.2. Paris: Gauthier–Villars, 1903. 625 p.
5. Oberbeck A. Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen // Ann. Phys. Chem. 1879. Vol. 7, N 6. P. 271-292.
6. Jeffreys H. The surface elevation in cellular convection // J. Mech. and Applied Math. 1951. Vol. 4, N 3. P. 283–288.
7. Сорокин В.С. О стационарных движениях жидкости, подогреваемой снизу // ПММ. 1954. Т.18, №2. С. 197–204.
8. Pellew A., Southwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below // Proc. Roy. Soc. Series A. 1940. Vol. 176, N 966. C. 312–343.
9. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 654 p.
10. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости // М.: Мир, 1981. 638 с.
11. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости // М.: Мир, 1971. 350 с.
12. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность // Новосиб.: Наука, 1977. 366 с.

13. Block M. J. Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid film // Nature. 1956. Vol. 178. P. 650–651.

14. Pearson J.K.A. On convection cells induced by surface tension // J. Fluid Mech. 1958. Vol. 4, N 5. P. 489–495.

15. Nield D.A. Surface tension and buoyancy effects in cellular convection // J. Fluid Mech. 1964. Vol. 19. P. 341–352.

16. Davis S.H. Thermocapillary instabilities // Annu. Rev. Fluid Mech. 1987. Vol. 19. P. 403–435.

17. Scriven L.E., Sterling C.V. On cellular convection driven by surface-tension gradients: Effects of mean surface tension and surface viscosity // J. Fluid Mech. 1964. Vol. 19. P. 321–332.

18. Smith K.A. On convection instability induced by surface tension gradient // J. Fluid Mech. 1966. Vol. 24. P. 401–414.

19. Takashima M. Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. I. Stationary convection // J. Phys. Soc. Jpn. 1981. Vol. 50. N 8. P. 2745–2750.

20. Takashima M. Surface-tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. II. Overstability // J. Phys. Soc. Jpn. 1981. Vol. 50, N 8. P. 2751–2756

21. García-Ybarra P. L., Velarde M. G. Oscillatory Marangoni–Bénard interfacial instability and capillary–gravity waves in single-and two-component liquid layers with or without Soret thermal diffusion //Phys. Fluids. 1987. Vol. 30, N 6. P. 1649–1655.

22. Birikh R.V., Briskman V.A., Velarde M.G., Legros J.-C. Liquid Interfacial Systems: Oscillations and Instability. New York: CRC Press, 2003. 367 p.

23. Рябицкий Е. А. Термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя при наличии вертикального градиента температуры // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 3. С. 19–23.

24. Shklyaev S., Khenner M., and Alabuzhev A.A. Oscillatory and monotonic modes of long-wave Marangoni convection in a thin film // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 82. P. 025302.

25. Shklyaev S., Khenner M., and Alabuzhev A.A. Long-wave Marangoni convection in a thin film heated from below // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. P. 016328.

26. Nepomnyashchy A.A., Velarde M.G., and Colinet P. Interfacial Phenomena and Convection. Boca Raton: CRC Press, 2001. 365 p.

27. Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосиб.: Наука, 2000. 280 с.

28. Изаксон В.Х., Юдович В.И. О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. N 4. С. 23–28.

29. Изаксон В.Х., Юдович В.И. О влиянии поверхностного натяжения на возникновение конвекции в слое жидкости со свободной границей // ПМТФ. 1969. N 3. С. 89–92.

30. Непомнящий А.А. О длинноволновой конвективной неустойчивости в горизонтальных слоях с деформируемой границей // Конвективные течения. 1983. С. 25–31.

31. Spiegel E. A., Veronis G. On the Boussinesq approximation for a compressible fluid // Astrophys. J. 1960. Vol. 131, N 2. P. 442–447.

32. Mihaljan J. M. A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid // Astrophys. J. 1962. Vol. 136, N 3. P. 1126–1133.

33. Veronis G. The Magnitude of the Dissipation Terms in the Boussinesq Approximation // Astrophys. J. 1962. Vol. 135, N 2. P. 655–656.

34. Cordon R. P., Velarde M. G. On the (non linear) foundations of Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid // J. Physique. 1975. Vol. 36, N 7–8. P. 591–601.

35. Velarde M. G., Cordon R. P. On the (non-linear) foundations of boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid (II). Viscous dissipation and large cell gap effects // J. Physique. 1976. Vol. 37, N 3. P. 177–182.

36. Davis S. H., Segel L. A. Effects of surface curvature and property variation on cellular convection // Phys. Fluids. 1968. Vol. 11, N. 3. P. 470–476.

37. Drasin P.G., Reid W.H. Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge University Press, 1981. 312 p.

38. Davis S.H., Homsy G.M. Energy stability theory for free-surface problems: buoyancy-thermocapillary layers // J. Fluid Mech. 1980. Vol.98, N 3. P. 527–553.

39. Renardy Y., Joseph D.D. Oscillatory instability in a Bernard problem of two fluids // Phys. Fluids. 1985. Vol. 28, N 3. P. 788–793.

40. Perez-Garcia C., Carneiro G. Linear stability analysis of Benard-Marangoni convection in fluids with a deformable free surface // Phys. Fluids. 1991. Vol. 3, N 2. P. 292–298.

41. Regnier V.C., Dauby P.C., Lebon G. Linear and nonlinear Rayleigh-Benard-Marangoni instability with surface deformations // Phys. Fluids. 2000. Vol. 12, N 11. P. 11-19.

42. Hashim I., Wilson S. K. The onset of Bénard–Marangoni convection in a horizontal layer of fluid // Int. J. Eng. Sci. 1999. Vol. 37, N. 5. P. 643–662.

43. Bengyria R.D., Derassier M.C. On the linear stability of Benard-Marangoni convection // Phys. Fluids A. 1989. Vol. 1, N 7. P. 1123–1127.

44. Андреев В. К., Бекежанова В. Б. Устойчивость неизотермических жидкостей. Красноярск: СФУ, 2010. — 356 с.

45. Бабский В. Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.

46. Пухначев В.В. Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, N 4. – С. 47–56.

47. Андреев В. К., Рябицкий Е. А. Возникновение микроконвекции в плоском слое со свободной границей // ПМТФ. 2004. Т. 45, N. 1. С. 29–38.

48. Гончарова О.Н. Микроконвекция в области со свободной границей // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, N 2. С. 14–25.

49. Гончарова О.Н. Математические модели конвекции при пониженной гравитации: Автореф. дис… докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2005. 32 с.

50. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Alexander Iwan J.D. and Lobov N.I. On the Boussinesq approximation for fluid systems with deformable interfaces // Adv. Space Res. 1998. Vol. 22, N 8. P. 1159–1168.

51. Любимова Т. П., Паршакова Я. Н. Устойчивость равновесия двухслойной системы с деформируемой поверхностью раздела и заданным тепловым потоком на внешних границах // Изв. РАН. МЖГ. 2007. Т. 5. С. 19–29.

52. Паршакова Я. Н. Конвекция в системах с деформируемыми поверхностями раздела сред: Автореф. дис… канд. физ.-мат. наук. Пермь, 2008. 16 с.

53. Лобов Н.И. Устойчивость равновесия и течений неоднородных сред в слоях и каналах: Автореф. дис… докт. физ.-мат. наук. Пермь, 2005. 27 с.

54. Hurle D.T.J., Jakeman E., Pike E.R. On the Solution of the Bernard Problem with Boundaries of Finite Conductivity // Proc. Roy. Soc. 1967. Vol. 296, N 1447. P. 469–475.

55. Krishnamoorthy S., Ramaswamy B., Joo S. W. Spontaneous rupture of thin liquid films due to thermocapillarity: A full-scale direct numerical simulation // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7, N 9. P. 2291–2293.

56. VanHook S. J., M. Schatz, J. Swift, W. McCormick, H. Swinney. Long-wavelength surface-tension-driven Bénard convection: experiment and theory //J. Fluid Mech. 1997. Vol. 345. P. 45–78.

57. Oron A. Three-dimensional nonlinear dynamics of thin liquid films // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85, N 10. P. 2108.

58. Shklyaev S., Straube A. V., Pikovsky A. Superexponential droplet fractalization as a hierarchical formation of dissipative compactons // Phys. Rev E. 2010. Vol. 82, N 2. P. 020601.

59. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-scale evolution of thin liquid films // Rev. Mod. Phys. 1997. Vol. 69, N 3. P. 931.

60. Craster R.V., Matar O.K. Dynamics and stability of thin liquid films // Rev. Mod. Phys. 2009. Vol. 81. P. 1131.

61. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О неустойчивости равновесия системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей при нагреве сверху // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. №6. С.28–34.

62. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О монотонной и колебательной неустойчивости двухслойной системы несмешивающихся жидкостей, подогреваемой снизу // Докл. АН СССР. 1982. Т.265. №2. С.302–305.

63. Nepomnyashchy A., Legros J. C., Simanovskii I. Interfacial convection in multilayer systems. New York: Springer, 2006. 306 p.

64. Golovin A.A., Nepomnyashchy A.A., Pismen L.M. Pattern formation in large-scale Marangoni convection with deformable interface // Physica D. 1995. Vol. 81. P. 117.

65. Golovin A. A., Nepomnyashchy A. A., Pismen L. M. Nonlinear evolution and secondary instabilities of Marangoni convection in a liquid–gas system with deformable interface // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 341. P. 317–341.

66. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

67. Горьков Л. П. Стационарная конвекция в плоском слое жидкости вблизи критического режима теплопередачи // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 402–411.

68. Malkus W. V. R., Veronis G. Finite amplitude cellular convection // J. Fluid Mech. 1958. Vol. 4, N 3. P. 225–260.

69. Schlüter A., Lortz D., Busse F. On the stability of steady finite amplitude convection // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 23, N 1. P. 129–144.

70. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.

71. Буссе Ф.Г. Переход к турбулентности в конвекции Рэлея Бенара // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. С. 124–168.

72. Busse F. H. Non-linear properties of thermal convection // Rep. Prog. Phys. 1978. Vol. 41, N 12. P. 1929.

73. Newell A. C., Whitehead J. A. Finite bandwidth, finite amplitude convection // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 38, N 2. P. 279–303.

74. Segel L. A. Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 38, N 1. P. 203–224.

75. Уховский М. Р., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции // ПММ. 1963. Т. 27(2). С. 295–300.

76. Юдович В. И. О возникновении конвекции // ПММ. 1966. Т. 30 (6), С. 1000–1005.

77. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление // ПММ. 1967. Т. 31 (1). С. 101–111.

78. Hoyle R. B. Pattern formation: an introduction to methods. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 422 p.

79. Гетлинг А. В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. М.: Эдиториал УРСС. 1999. 248 с.

80. Cross M. C., Hohenberg P. C. Pattern formation outside of equilibrium // Rev. Mod. Phys. 1993. Vol. 65, N 3. P. 851.

81. Perez-Garcia C., Cerisier P., Occelli R. Pattern Selection in the Bénard-Marangoni Instability // Propagation in Systems Far from Equilibrium. Berlin: Springer-Verlag, 1988, P. 232–239

82. Koschmieder E. L. Bénard cells and Taylor vortices. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 337 p.

83. Nitschke K., Thess A. Secondary instability in surface-tension-driven Bénard convection // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, 6. P. R5772.

84. Chu X. L., Velarde M. G. Korteweg–de Vries soliton excitation in Bénard-Marangoni convection // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43, 2. P. 1094.

85. Linde H., Chu X., Velarde M. G. Oblique and head-on collisions of solitary waves in Marangoni–Bénard convection // Phys. Fluids A. 1993. Vol. 5, N 4. P. 1068–1070.

86. Самойлова А.Е. Колебательная неустойчивость Марангони при малых числах Прандтля // Конференция молодых ученых «Неравновесные процессы в сплошных средах»: тез. докл. Пермь, 2006. С.65–66.

87. Лобов Н.И., Самойлова А.Е. О колебательной неустойчивости плоского слоя с деформируемой границей // 15 Зимняя школа по механике сплошных сред: сб. статей. Пермь, 2007. С. 291–294.

88. Лобов Н.И., Самойлова А.Е. Неустойчивость Марангони в слое жидкости со свободной деформируемой поверхностью в невесомости // Всероссийская конференция молодых ученых «Неравновесные процессы в сплошных средах»: мат. конф. Пермь, 2007. С. 274–277.

89. Лобов Н.И., Самойлова А.Е. Колебательная неустойчивость Марангони в слое с деформируемой границей // Гидродинамика. 2007. Вып. 16. С. 149–160.

90. Лобов Н.И., Любимов Д.В., Самойлова А.Е. О колебательной неустойчивости плоского слоя с деформируемой поверхностью в невесомости // Межвузовская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Физика для Пермского края»: тез. докл. Пермь, 2008. С. 23–24.

91. Лобов Н.И., Самойлова А.Е. Колебательная устойчивость плоского слоя жидкости со свободной деформируемой поверхностью // Конвективные течения. 2009. Вып.4. С. 35–50.

92. Любимов Д.В., Самойлова А.Е. Тепловая раскачка капиллярных волн // Конвективные течения. 2009. Вып.4. С. 29-34.

93. Самойлова А.Е. Слабонелинейный анализ задачи Релея–Бенара–Марангони в слое с деформируемой поверхностью // XV Научная школа «Нелинейные волны», всероссийская конференция молодых ученых «Фундаментальные и прикладные задачи нелинейной физики»: тез докл. Нижний Новгород, 2010. С. 114.

94. Самойлова А.Е. Слабонелинейный анализ неустойчивости плоского слоя жидкости со свободной деформируемой поверхностью // XVII Зимняя Школа по механике сплошных сред: тез. докл. Пермь, 2011. С. 279.

95. А.Е. Самойлова. О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной поверхностью. Слабонелинейный анализ // Вестник Пермского университета. Сер. Физика. 2011. С. 3–8.

96. Самойлова А.Е. Слабонелинейный анализ колебательной неустойчивости плоского слоя с деформируемой поверхностью // 4-я Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения»: тез. докл. Новосибирск, 2011. С.88

97. Samoilova A.E. and Lobov N.I. The buoyancy effect on oscillatory Marangoni instability in liquid layer with a deformable surface // IMA6 – 6th Conference of the International Marangoni Association: book of abstracts. Haifa, Israel, 2012. P. 44

98. Самойлова А.Е. Неустойчивость Бенара–Марангони в слое жидкости со свободной деформируемой поверхностью // Всероссийская конференция молодых ученых «Фундаментальные и прикладные задачи нелинейной физики»: тез. докл. Нижний Новгород, 2012. С. 114.

99. Самойлова А.Е., Лобов Н.И. Численный анализ конвекции Марангони в подогреваемом снизу слое жидкости со свободной поверхностью // XVIII Зимняя Школа по механике сплошных сред: тез. докл. Пермь, 2013. С. 302

100. Samoilova A.E. and Lobov N.I. On the oscillatory Marangoni instability in a thin film heated from below // Phys. Fluids. 2014. Vol. 26. P. 064101.

101. Lyubimov D. V., Lyubimova T P., Lobov N. I. and Samoilova A. E. Benard-Marangoni instability in a fluid with a deformable free surface // IMA7 – 7th Conference of the International Marangoni Association: book of abstracts. Vienna, Austria, 2014. P. 85.

102. Samoilova A. E. and Lobov N. I. Oscillatory Marangoni instability in thin film heated from below // IMA7 – 7th Conference of the International Marangoni Association: book of abstracts. Vienna, Austria, 2014. P. 111.

103. Самойлова А.Е., Шкляев С.В. Длинноволновя конвекция Марангони в системе «жидкость-газ» с деформируемой границей при подогреве снизу // Пермские гидродинамические научные чтения – 2014: сб. материалов конф. Пермь, 2014. С. 71–72.

104. Самойлова А.Е. Численное и аналитическое исследование конвекции Марангони в тонком слое жидкости, подогреваемом снизу // XIX Зимняя Школа по механике сплошных сред: тезисы докл. Пермь, 2015. С. 278.

105.Samoilova A.E. and Shklyaev S. Oscillatory Marangoni convection in a liquid-gas system heated from below // Eur. Phys. J. Special Topics. 2015. Vol. 224, N 2. P. 241–248.

106.Samoilova A.E. Long-wave Marangoni convection in a two-layer liquid-gas system heated from below //Fluxes and Structures in Fluids. Proceedings of international conference. Kaliningrad, 2015. P. 208–209.

107.Самойлова А.Е., Лобов Н.И., Любимов Д.В. Колебательная неустойчивость слоя жидкости со свободной деформируемой границей // VIII Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике»: тезисы докл. Новосибирск, 2015. С. 155

108.Самойлова А.Е., Шкляев С.В. Конвекция Марангони в тонкой пленке с деформируемой поверхностью // VIII Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике»: тезисы докл. Новосибирск, 2015. С. 156

109.Лобов Н.И., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Численные методы решения задач теории гидродинамической устойчивости: Учебное пособие. Пермь: Пермский ун-т, 2004. 101 с.

110.Schmid P. J., Henningson D. S. Stability and transition in shear flows. New York: Springer, 2001. 556 p.

111.Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Т. 16, N 3. С. 171–174.

112.Арушунян О.В., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 336 с.

113.Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер М. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.

114. Бирих Р.В., Рудаков Р.Н. Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений. Часть I // Гидродинамика. 1974. Вып. 5. С. 149–158.

115. Бирих Р.В., Рудаков Р.Н., Семакин И.Г. Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений. Часть II // Конвективные течения. 1979. С. 58–60.

116. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.

117. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

118. Мизев А.И., Трофименко А.И. Влияние пленки нерастворимого сурфактанта на устойчивость концентрационного течения Марангони // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 1. С. 32–44.

119. Silber M. and Knobloch E. Hopf bifurcation on a square lattice // Nonlinearity. 1991. Vol. 4. P. 1063.