

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный национальный исследовательский
университет»**

На правах рукописи

Перминов Анатолий Викторович

**ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ С РАЗЛИЧНОЙ РЕОЛОГИЕЙ ВО ВНЕШНИХ
СИЛОВЫХ ПОЛЯХ**

01.02.05 - Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор Любимова Т.П.

Пермь - 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
1 Актуальность избранной темы и степень её разработанности	7
2 Цели и задачи диссертационной работы	9
3 Научная новизна результатов	10
4 Теоретическая и практическая значимость работы	12
5 Методология и методы диссертационного исследования	15
6 Положения, выносимые на защиту	16
7 Степень достоверности и апробация результатов	18
8 Личный вклад автора	20
9 Структура и объем диссертации	21
ГЛАВА 1. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	23
1.1 Краткая классификация неньютоновских жидкостей	23
1.2 Реологические модели и структурно-механические свойства обобщенных ньютоновских жидкостей	26
1.2.1 Дилатантная жидкость	27
1.2.2 Псевдопластичная жидкость	29
1.2.3 Вязкопластичная жидкость	30
1.3 Проводящая жидкость в магнитном поле	35
1.4 Особенности гидродинамики бинарных смесей	37
1.5 Обзор литературы	40
1.5.1 Течения нелинейно-вязких жидкостей	40
1.5.2 Проводящая жидкость в магнитном поле	71
1.5.3 Конвекция в бинарных смесях	83

ГЛАВА 2. ПУЛЬСАЦИОННОЕ И СРЕДНЕЕ ТЕЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ ОКОЛО ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ	91
2.1 Основные приближения и реологические законы	92
2.2 Движение дилатантной жидкости в пределах вязкого пограничного слоя	95
2.2.1 Уравнения движения	95
2.2.2 Пульсационное поле скорости	103
2.2.3 Осредненное поле скорости	105
2.3 Обтекание бесконечно длинного твердого цилиндра жидкостью Уильямсона	108
2.3.1 Постановка задачи	108
2.3.2 Форма квазитвердых зон и структура течения	110
2.4 Основные результаты и выводы	114
ГЛАВА 3. ДВИЖЕНИЕ СЛОЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ	115
3.1 Стационарное течение в поле тяжести	119
3.1.1 Бингамовский пластик	119
3.1.2 Жидкость Уильямсона	121
3.1.3 Обсуждение и сравнение результатов расчета стационарного течения	123
3.2 Влияние вибраций на течение слоя вязкопластичной жидкости по наклонной плоскости в поле тяжести	124
3.2.1 Случай симметричных вибраций	124
3.2.2 Случай несимметричных вибраций	129
3.3 Устойчивость плоскопараллельного течения слоя жидкости Уильямсона	145
3.3.1 Постановка задачи устойчивости	145
3.3.2 Возмущения с конечными волновыми числами	148

3.3.3	Длинноволновая неустойчивость стационарного течения	150
3.4	Основные результаты и выводы	156
ГЛАВА 4. ТЕРМОВИБРАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЯХ		
4.1	Уравнения термовибрационной конвекции для обобщенной ньютоновской жидкости	160
4.2	Равновесные состояния нелинейно-вязких жидкостей в поле высокочастотных вибраций	169
4.2.1	Жесткое состояние наклонного слоя вязкопластичной жидкости	171
4.3	Устойчивость квазиравновесного состояния наклонного слоя нелинейно-вязкой жидкости	176
4.3.1	Постановка задачи устойчивости квазиравновесия обобщенной ньютоновской жидкости	176
4.3.2	Устойчивость равновесия обобщенной ньютоновской жидкости	179
4.3.3	Устойчивость жесткого состояния бесконечного слоя вязкопластичной жидкости	181
4.4	Вибрационная конвекция в вертикальном бесконечном слое нелинейно-вязкой жидкости	192
4.5	Основные результаты и выводы	199
ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ УИЛЬЯМСОНА В ПЛОСКОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ		
5.1	Свободная конвекция жидкости Уильямсона в вертикальном слое	202
5.1.1	Постановка задачи	202
5.1.2	Стационарное плоскопараллельное течение псевдопластичной жидкости	206

5.1.3 Стационарное плоскопараллельное течение вязкопластичной жидкости	210
5.2 Устойчивость стационарного плоскопараллельного течения жидкости Уильямсона	212
5.2.1 Уравнения для возмущений	212
5.2.2 Устойчивость течения псевдопластичной жидкости	214
5.2.3 Устойчивость течения вязкопластичной жидкости	224
5.3 Надкритические режимы конвекции жидкости Уильямсона в вертикальном слое	235
5.4 Основные результаты и выводы	243
ГЛАВА 6. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ	246
6.1 Влияние магнитного поля на устойчивость адвективного течения проводящей жидкости в горизонтальном канале прямоугольного сечения	247
6.1.1 Постановка задачи и основные уравнения	248
6.1.2 Основное течение	252
6.1.2.1 Случай нулевого числа Прандтля	255
6.1.2.2 Случай ненулевого числа Прандтля	264
6.1.3 Анализ устойчивости	268
6.1.3.1 Случай нулевого числа Прандтля	271
6.1.3.2 Случай ненулевого числа Прандтля	279
6.2 Математическая модель процессов тепломассопереноса и диффузии магнитного поля в индукционной печи	284
6.2.1 Геометрические и физические параметры задачи. Основные уравнения	285
6.2.1.1 Уравнения диффузии магнитного поля в расплав	289
6.2.1.2 Уравнения конвекции проводящей парамагнитной жидкости в высокочастотном магнитном поле	294

6.2.1.3	Граничные условия	298
6.2.2	Результаты численного моделирования распределения магнитного поля	300
6.3	Основные результаты и выводы	306
ГЛАВА 7. ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ПЛОСКОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ		309
7.1	Постановка задачи. Определяющие уравнения	310
7.2	Основное стационарное течение	313
7.3	Линейная задача устойчивости стационарного течения	318
7.4	Результаты численных расчетов	321
7.5	Основные результаты и выводы	330
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		332
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ		337

ВВЕДЕНИЕ

1 Актуальность избранной темы и степень её разработанности

Одним из достижений Пермской гидродинамической школы стало создание Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицким и Д.В. Любимовым теории вибрационных воздействий на гидродинамические системы. Однако в рамках этой теории остались неохваченными области, изучение которых может придать ей большую степень универсальности и законченности, а также существенно расширить возможности её фундаментального и прикладного применения. К числу таких практически неисследованных разделов относится поведение нелинейно-вязких и вязкопластических жидкостей в вибрационном поле. Расширение вибрационной теории на класс неньютоновских жидкостей определяет актуальность работы и является наиболее важным вкладом диссертации в науку.

В промышленности производится и перерабатывается множество жидкостей, обладающих различными структурно-механическими свойствами. Многие из них при своем течении проявляют нелинейную вязкость. К ярко выраженным нелинейно-вязким средам относятся нефть, нефтепродукты, растворы и расплавы полимеров, суспензии угольного топлива, лаки, краски, зубная паста, жидкие пищевые продукты. Технологические процессы, в которых имеют место обтекание нелинейно-вязкими жидкостями твердых тел или пленочные течения, как правило, происходят при наличии вибраций, создающихся специально или являющихся неустраняемыми. Вибрации существенно влияют на теплоперенос в неньютоновских средах, поэтому их влияние необходимо учитывать, особенно в связи с интенсификацией и повышением требований к технологиям производства и переработки нелинейно-вязких текучих сред. Несмотря на очевидные достижения в области количественного описания процессов в реологически сложных средах, теоретические основы гидродинамики и теплообмена в неньютоновских жидкостях при наличии вибраций

находятся еще в стадии разработки. При исследовании влияния нестационарных силовых полей на нелинейно-вязкие среды актуальными становятся задачи, связанные с исследованием устойчивости стационарных состояний. Формирующиеся после потери устойчивости стационарного состояния течения также представляют интерес для исследования, т.к. существенно изменяют режимы теплопереноса.

К жидкостям с особыми свойствами можно условно отнести также проводящие жидкости и бинарные смеси, хотя реология этих сред определяется ньютоновским законом. Исследование течений этих жидкостей актуально в связи с применениями в полупроводниковой микроэлектронике для получения монокристаллов методом Бриджмена. При выращивании кристаллов флуктуации температурного поля и поля скорости приводят к неизбежным колебаниям поверхности раздела кристалл-расплав и неоднородному распределению примесей в получаемом кристалле. В этой ситуации актуальной является информация об условиях устойчивости течений и возможности управлять движением расплава. Исследования адвективных течений в слоях и каналах являются также важными и актуальными с общетеоретической точки зрения (изучение гидродинамической устойчивости и закономерностей перехода к сложным режимам поведения). К течениям указанного типа относятся, в частности, атмосферная циркуляция Хэдли, некоторые типы движений в океане, коре и мантии Земли.

Воздействие внешних неоднородных и нестационарных магнитных полей на проводящие жидкости применяется в различных технологических процессах, таких как индукционное плавление, зонная плавка, упрочнение поверхности металлических изделий, выращивание кристаллов. Несмотря на широкое практическое применение индукционного нагрева проводящих материалов, теория этого явления и с ним связанных процессов развита достаточно слабо. Требования к энергоэффективности технологий и чистоте получаемых материалов определяют актуальность задач, связанных с изучением влияния

неоднородных переменных магнитных полей на разогрев проводящих жидкостей и возникающие в них конвективные течения.

Более подробно степень разработанности темы настоящей диссертации оценивается в обзоре литературы.

2 Цели и задачи диссертационной работы

Целью настоящей диссертации является разработка теоретических положений, описывающих влияние вибрационного, магнитного и гравитационного полей на поведение нелинейно-вязких, проводящих и бинарных жидкостей. К таким теоретическим положениям относятся:

- описание закономерностей изотермических и неизотермических течений нелинейно-вязких жидкостей при наличии вибраций;
- определение влияния магнитного поля на устойчивость адвективных течений и индукционный разогрев проводящих расплавов;
- выяснение влияния эффекта термодиффузии на структуру и устойчивость адвективных течений бинарных смесей.

Для достижения поставленной цели, в диссертации были решены следующие задачи:

1. Изучение обтекания твердого бесконечно-длинного цилиндра пульсационным потоком дилатантной и псевдопластичной жидкости.
2. Исследование стационарных течений тонких слоев жидкостей Уильямсона и Шведова-Бингама по колеблющейся наклонной твердой поверхности, анализ их устойчивости. Рассмотрение случаев симметричных и несимметричных колебаний подложки.
3. Исследование термовибрационной конвекции обобщенной ньютоновской жидкости; нахождение условий жесткого состояния и изучение его устойчивости для наклонного слоя вязкопластичной жидкости.
4. Изучение стационарных плоскопараллельных течений псевдопластичной и вязкопластичной жидкостей между двумя вертикальными плоскостями

нагретыми до разных температур; исследование линейной устойчивости этих течений и вторичных режимов конвекции.

5. Исследование стационарного адвективного течения слабо-проводящей жидкости в бесконечном канале прямоугольного сечения под действием однородного стационарного магнитного поля, анализ его устойчивости.

6. Построение математической модели конвекции проводящего расплава в рабочей области индукционной печи; нахождение структуры магнитного поля в расплаве.

7. Изучение структуры стационарного адвективного течения бинарной жидкости в плоском горизонтальном слое, ограниченном твердыми границами, с учетом эффекта Соре, анализ влияния эффекта Соре на линейную устойчивость стационарного течения.

3 Научная новизна результатов

В настоящей диссертации:

- получены уравнения пульсационного и осредненного движений степенной жидкости в вязком пограничном слое вблизи твердой поверхности в поле высокочастотных вибраций, проведены численные расчеты течений дилатантной жидкости в пределах пограничного слоя;
- получено эффективное граничное условие, которое возможно использовать для описания осредненного движения дилатантной жидкости за пределами пограничного слоя;
- получены аналитические выражения, описывающие стационарное движение жидкости Уильямсона по наклонной твердой поверхности;
- впервые исследованы течения вязкопластичных жидкостей при касательных симметричных и несимметричных вибрациях наклонной твердой поверхности; обнаружен эффект немонотонной зависимости среднего расхода жидкости от периода и амплитуды вибраций; показана принципиальная возможность движения вязкопластика против поля тяжести;

- впервые изучена линейная устойчивость стационарного течения псевдо- и вязкопластичных жидкостей по наклонной твердой поверхности;
- уравнения термовибрационной конвекции при высокочастотных неакустических вибрациях обобщены на случай неньютоновской жидкости;
- сформулированы условия квазиравновесия и жесткого состояния для бесконечного наклонного слоя обобщенной ньютоновской и вязкопластичной жидкостей;
- впервые решена задача линейной устойчивости жесткого состояния бесконечного наклонного слоя обобщенной ньютоновской и вязкопластичной жидкостей;
- получено решение задачи о стационарном плоскопараллельном конвективном течении жидкости Уильямсона между двумя твердыми вертикальными плоскостями, нагретыми до разных температур;
- решена задача о термовибрационной конвекции жидкости Уильямсона в бесконечном вертикальном слое, на твердых границах которого поддерживаются постоянные разные температуры;
- получено решение линейной задачи устойчивости плоскопараллельного конвективного течения псевдо- и вязкопластичной жидкостей в бесконечном вертикальном слое с границами, нагретыми до разных температур; рассчитаны надкритические режимы конвекции;
- впервые решена задача о стационарном адвективном течении проводящей жидкости в бесконечном горизонтальном канале прямоугольного сечения при наличии постоянного однородного магнитного поля;
- решена задача линейной устойчивости стационарного адвективного течения проводящей жидкости в бесконечном горизонтальном канале прямоугольного сечения при наличии постоянного однородного магнитного поля; обнаружен эффект дестабилизации течения горизонтальным поперечным к оси канала магнитным полем;
- создана математическая модель, описывающая осредненный и пульсационный тепломассоперенос и распределение магнитного поля в

проводящем парамагнитном расплаве в магнитном поле индукционной печи; предложено обоснование условия оптимального индукционного разогрева парамагнитного образца;

- впервые решена задача линейной устойчивости адвективного течения бинарной смеси в плоском горизонтальном слое с твердыми идеально теплопроводными границами, с учетом эффекта термодиффузии.

4 Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты, представленные в диссертации, важны с общетеоретической точки зрения для развития знаний в области гидродинамики и теплообмена нелинейно-вязких систем при воздействии на них вибрационных полей. Применение результатов возможно при изучении нестационарных и неизотермических течений неньютоновских жидкостей и исследовании устойчивости стационарных состояний таких сред.

В диссертации рассмотрено несколько важных с практической точки зрения проблем, связанных с движением обобщенных ньютоновских жидкостей. Результаты, полученные при изучении обтекания обобщенными ньютоновскими жидкостями твердых тел, могут быть применены при совершенствовании реометрических методик. Кроме того, эти результаты будут полезны при моделировании технологических процессов в пищевой и химической промышленности, где перерабатывается и используется большое количество жидких сред, относящихся к обобщенным ньютоновским жидкостям. Условия добычи, хранения и транспортировки нефти и нефтепродуктов, которые проявляют псевдопластичные и вязкопластичные свойства часто связаны с движением около твердой поверхности или стеканием по ней. Неустраняемыми в этих ситуациях являются динамические (вибрационные) воздействия на жидкости. Встречающиеся при промышленной переработке неньютоновских сред ситуации, как правило, связаны с неоднородным распределением температуры. Результаты, описывающие стекание вязкопластичной жидкости по наклонной

твердой поверхности, могут быть полезны при изучении таких природных явлений как оползни, селевые потоки и снежные лавины.

Важным практическим приложением результатов по адвективным течениям проводящих жидкостей и бинарных смесей является выращивание кристаллов горизонтальным методом Бриджмена. При выращивании кристаллов флуктуации температурных полей и течений приводят к неоднородному распределению примесей в кристалле. В этой ситуации важно иметь возможность управлять движением жидкости, например, с помощью магнитного поля. Изучение адвективных течений и их устойчивости важно и с общетеоретической точки зрения, в частности, к течениям указанного типа относятся атмосферная циркуляция Хэдли, некоторые типы движений в океане, коре и мантии Земли, а также процессы тепло- и массопереноса в мелких водоемах.

Неоднородные и нестационарные магнитные поля играют определяющую роль в таких технологических процессах, как индукционная и зонная плавка, упрочнение поверхности металлических изделий, выращивание кристаллов. Поэтому с практической точки зрения важно создание адекватной теоретической модели, описывающей индукционный нагрев проводящих материалов. Такая теоретическая модель позволит получить инженерные решения, удовлетворяющие современным требованиям, которые предъявляются к энергоэффективности технологий и чистоте получаемых материалов.

Исследования, представленные в диссертации, были выполнены в рамках следующих грантов и программ:

1. Государственная программа поддержки ведущих научных школ, грант № 96-01-00932, 1997-1999, рук. Гершуни Г.З., Любимов Д.В.
2. Программа по совместным исследованиям и подготовке аспирантов при финансовой поддержке Министерства исследований и образования Франции, 1997-2000, рук. Любимов Д.В., Любимова Т.П.
3. Государственная программа поддержки ведущих научных школ, грант № 00-15-96112, 2000-2002, рук. Любимов Д.В.

4. Grant INTAS № 00-0617 "New ways of active control of flows in liquid systems with interfaces. Applications to crystal growth, for zero gravity or for terrestrial conditions", 2001-2003, рук. Любимов Д.В., Любимова Т.П.
5. Стипендия пост-докторанта «L'Universite Claude Bernard Lyon 1-UMR CNRS 5509 Laboratoire de mecanique des fluids et d'acoustique Ecole Centrale de Lyon » Франция, с 01.11.2002 по 01.09.2003, рук. Hamda Benhadid.
6. Грант РФФИ №04-01-00893 «Теоретическое исследование устойчивости равновесия и течений многокомпонентных смесей в различных внешних полях», 2004-2007, рук. Любимова Т.П.
7. Грант НОЦ «Неравновесные переходы в сплошных средах» №06-09Н-010и. Устойчивость адвективного течения бинарной смеси в плоском горизонтальном слое. 2006, рук. Любимов Д.В.
8. Грант НОЦ «Неравновесные переходы в сплошных средах» №07-09Н-011и. Устойчивость адвективного течения бинарной смеси в плоском горизонтальном слое с идеально теплопроводными границами. 2007, рук. Любимов Д.В.
9. Грант РФФИ №10-01-96057 «Гидродинамика многофазных перистальтических течений в биологических системах», 2010-2012. рук. Д.В. Любимов.
10. НИР №1.33.11 «Математическое моделирование нестационарных процессов в нелинейно-вязких многофазных средах» в рамках тем. плана госбюджетных НИР ПНИПУ по заданиям Мин. обр. и науки РФ №01201161100 на 2011, рук. Цаплин А.И.
11. НИР №1.3927.2011 «Математическое моделирование нестационарных процессов в жидкостях с особыми» в рамках тем. плана госбюджетных НИР ПНИПУ по заданиям Мин. обр. и науки РФ на 2012-2014 г., рук. Цаплин А.И.
12. Грант РФФИ р_урал_a №13-08-96004 "Математическое моделирование влияния внешних воздействий на технологию производства жаропрочных никелевых сплавов и губчатого титана с учетом фазовых переходов и химической кинетики.", 2013-2015 г., рук. Цаплин А.И.

13. НИР №1599 "Математическое моделирование тепломассопереноса в расплаве ипористой среде при электромагнитных воздействиях" в рамках тем. плана госбюджетных НИР ПНИПУ по заданиям Мин. обр. и науки РФ на 2014-2016 г., рук. Цаплин А.И.

14. Грант Российского Научного Фонда №14-01-00090, 2014-2016 г., рук. Любимова Т.П.

15. Государственная программа поддержки ведущих научных школ, грант НШ-4022.2014.1, рук. Любимова Т.П., Козлов В.Г., Путин В.Ф., Фрик П.Г.

5 Методология и методы диссертационного исследования

Все основные результаты диссертации получены численно с применением современных вычислительных методов. При расчете двумерных течений жидкостей применялся метод конечных разностей, в котором все пространственные производные аппроксимировались центральными разностями, а структура течения определялась функцией тока и завихренностью [1]. Линейная устойчивость равновесных состояний и одномерных стационарных течений исследовалась методом построения фундаментальной системы с использованием процедур дифференциальной прогонки и ортогонализации. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений решались методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности [2, 3].

Для исследования устойчивости неодномерных течений применялись эволюционный метод, основанный на методе конечных разностей, и метод, в котором система дифференциальных уравнений, описывающих поля возмущений путем конечноразностной аппроксимации производных, сводилась к обобщенной алгебраической проблеме на собственные значения. Алгебраическая задача, полученная в последнем случае, решалась с помощью пакета программ разработанного в [4].

При высокочастотных вибрационных или электромагнитных воздействиях на жидкие системы выводились осредненные уравнения движения жидкостей. Для

вывода таких уравнений использовались известные методы многих масштабов [5] и осреднения [6].

6 Положения, выносимые на защиту

Автор защищает:

- уравнения пульсационного и осредненного движений степенной жидкости в вязком пограничном слое вблизи твердой поверхности в поле высокочастотных вибраций;
- результаты численного моделирования обтекания твердого бесконечно-длинного цилиндра стационарным и пульсационным потоками степенной и вязкопластичной жидкостями;
- вид эффективного граничного условия для описания осредненного движения дилатантной жидкости за пределами стоксового слоя;
- аналитические выражения, описывающие стационарное движение жидкости Уильямсона по наклонной твердой поверхности;
- результаты численного исследования пульсационного и осредненного течений вязкопластичных жидкостей при касательных симметричных и несимметричных вибрациях наклонной твердой поверхности;
- результаты исследования устойчивости стационарного течения псевдо- и вязкопластичных жидкостей по наклонной твердой поверхности;
- осредненные уравнения термовибрационной конвекции обобщенной ньютоновской жидкости для высокочастотных неакустических вибраций;
- условия квазиравновесия и жесткого состояния бесконечного наклонного слоя обобщенной ньютоновской жидкости в поле тяжести при наличии высокочастотных поступательных вибраций;
- результаты решения исследования устойчивости равновесия обобщенной ньютоновской жидкости и устойчивости жесткого состояния вязкопластичной жидкости в наклонном бесконечном слое;

- результаты решения задачи о термовибрационном конвективном течении жидкости Уильямсона между двумя твердыми плоскостями, нагретыми до разных температур;
- результаты исследования стационарных плоскопараллельных конвективных течений псевдо- и вязкопластичной жидкостей между двумя твердыми плоскостями, нагретыми до разных температур;
- результаты исследования линейной устойчивости плоскопараллельного конвективного течения жидкости Уильямсона и надкритических режимов конвекции такой жидкости между двумя твердыми плоскостями, нагретыми до разных температур;
- результаты численного моделирования адвективного течения проводящей жидкости в бесконечном горизонтальном канале прямоугольного сечения во внешнем стационарном однородном магнитном поле;
- результаты численного решения линейной задачи устойчивости стационарного адвективного течения проводящей жидкости в бесконечном горизонтальном канале прямоугольного сечения при различных направлениях внешнего стационарного магнитного поля;
- эффект дестабилизации стационарного адвективного течения проводящей жидкости горизонтальным поперечным к оси канала магнитным полем;
- математическую модель, описывающую осредненный и пульсационный тепломассоперенос, в проводящем расплаве в индукционной печи при воздействии внешнего переменного неоднородного высокочастотного магнитного поля;
- условие эффективного индукционного прогрева парамагнитного материала, полученное на основании численного моделирования проникновения переменного неоднородного высокочастотного магнитного поля в расплав;
- результаты решения линейной задачи устойчивости стационарного адвективного течения бинарной смеси в плоском горизонтальном слое с учетом термодиффузионного эффекта.

7 Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением апробированных теоретических подходов и численных методов; согласием результатов в предельных случаях с имеющимися в литературе; тестированием, применяемых алгоритмов и программ путем сопоставления с известными результатами; исследованием сходимости конечно-разностных схем при уменьшении пространственного шага сетки.

Материалы диссертации докладывались на ряде конференций, научных школ, конгрессов и семинаров:

1. 12-я Международная зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь: ИМСС УрО РАН, 1999 г.
2. 16th IMACS World Congress. Lausanne, 2000 г.
3. VII Международная конференция "Устойчивость гомогенных и гетерогенных жидкостей". Новосибирск, 2000 г.
4. VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Пермь, 2001 г.
5. International Conference «Advanced Problems in Thermal Convection». Perm, Russia, 2003 г.
6. Зимняя школа по механике сплошных сред (пятнадцатая). Пермь: ИМСС УрО РАН, 2007 г.
7. Всероссийская конференция молодых ученых (с международным участием) «Неравновесные процессы в сплошных средах», материалы конференции, Пермь, 2007 г.
8. Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 130-летию Томского государственного университета и 60-летию механико-математического факультета. Томск: Томский государственный университет, 2008 г.
9. 8th International Meeting on Thermodiffusion. Germany, Bonn, 2008 г.

10. XVI Зимняя школа по механике сплошных сред (механика сплошных сред как основа современных технологий) – Пермь: ИМСС УрО РАН, 2009 г.
11. XIX Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках». Пермь, 2010 г.
12. XVII Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь: ИМСС УрО РАН, 2011 г.
13. 4-я Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения». Бийск, 2011 г.
14. XXXIX Summer School “Advanced Problems in Mechanics”. St. Petersburg (Repino), Russia, 2011 г.
15. Российская конференция по магнитной гидродинамике. Пермь: ИМСС УрО РАН, 2012 г.
16. 10th International Meeting on Thermodiffusion. Brussels, Belgium, 2012 г.
17. XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь: ИМСС УрО РАН, 2013 г.
18. Конференция с международным участием "VIII Всероссийский семинар вузов по теплофизике и энергетике". Екатеринбург: УрФУ, 2013 г.
19. Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные задачи механики сплошных сред». ПГГПУ. Пермь, 2014 г.
20. Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы современного машиностроения». Юрга, 2014 г.
21. 2-я Международная конференция «Пермские гидродинамические научные чтения, посвященные памяти профессоров Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова». Пермь, 2014 г.
22. XIX Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь: ИМСС УрО РАН, 2015 г.
23. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 20-24 августа 2015 г.

24. Пермский городской гидродинамический семинар им. Г.З Гершуни и Е.М. Жуховицкого.

25. Научный семинар ИМСС УрО РАН, Пермь.

Основные результаты, изложенные в настоящей диссертации, опубликованы в 25 статьях [7-31], из них 15 статей [10, 16-28, 31] в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий установленный Министерством образования и науки Российской Федерации для представления результатов докторских диссертаций. В международных системах цитирования Web of Science и SCOPUS проиндексировано 11 статей [10, 16-18, 21-23, 25-27, 31].

8 Личный вклад автора

Постановка задач и обсуждение результатов исследований, представленных во второй и третьей главах диссертации, проводились совместно с профессором Д.В. Любимовым. Результаты, описанные в этих главах, получены автором лично и опубликованы в [7-11, 15, 18, 21, 27]. В работах [11, 27] диссертант является единственным автором.

В четвертой главе автором лично получены уравнения термовибрационной конвекции обобщенной ньютоновской жидкости и выражения для осредненных тензоров вязких напряжений ряда неньютоновских сред. Поставлены и решены все задачи, за исключением задачи о вибрационной конвекции в вертикальном бесконечном слое нелинейно-вязкой жидкости (параграф 4.4), в которой некоторые расчеты выполнены аспиранткой Шулеповой Е.В. Материалы четвертой главы опубликованы в трех работах [19, 20, 26].

Постановка задач и обсуждение результатов, описанных в пятой главе, выполнялись совместно с профессором Любимовой Т.П., численные результаты получены автором лично и представлены в работах [28, 29, 31].

Задача об адвективном течении проводящей жидкости представлена в работах [12, 16] совместным российско-французским коллективом. Диссертант принимал участие в постановке задач, обсуждении и интерпретации результатов, проводил расчеты основного состояния и его линейной устойчивости.

Задача о конвективном движении расплава в индукционной печи рассматривалась совместно с Никулиным И.Л. Результаты, полученные в рамках этой задачи, опубликованы в работах [23-25, 30]. Автору диссертации принадлежит вывод уравнений для осредненных и пульсационных полей, описывающих тепловую конвекцию расплава в переменном высокочастотном неоднородном магнитном поле. Решение задачи о диффузии магнитного поля в расплавах выполнено совместно с Никулиным И.Л. при участии в качестве консультанта профессора Цаплина А.И.

Постановка задачи и обсуждение результатов, описанных в седьмой главе диссертации, выполнялись совместно с профессорами Любимовым Д.В. и Любимовой Т.П. Кроме того, Любимовым Д.В. получены выражения, определяющие зависимость амплитуды стационарного течения от числа Релея и границы области неоднозначности. Автору диссертации принадлежат результаты решения линейной задачи устойчивости адвективного течения бинарной смеси в плоском горизонтальном слое с учетом эффекта Соре для случая идеально-теплопроводных границ. Результаты седьмой главы опубликованы в работах [13, 14, 17, 22]. Границы длинноволновой неустойчивости в [17, 22] аналитически определены Любимовым Д.В. и Любимовой Т.П. В [17] Никитин Д.А. выполнил ряд тестовых расчетов с целью проверки данных, полученных диссертантом; аналогичные расчеты проведены автором диссертации в рамках работы [22].

9 Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, основной части, заключения и списка литературы. Во введении к диссертации определены актуальность избранной темы, степень её разработанности, цели и задачи, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, методология и методы диссертационного исследования, положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов, личный вклад автора. В первой главе приводится краткая характеристика структурно-механических свойств, рассматриваемых жидких систем, и обзор литературы. Главы со второй по седьмую отражают содержание

научных исследований, проведенных в рамках диссертационной работы. В заключение изложены основные результаты диссертации и определяются перспективы дальнейшей разработки темы исследований. Общий объем диссертации 374 страницы; работа содержит 92 рисунка и 9 таблиц. Список литературы насчитывает 372 наименования.

ГЛАВА 1. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1 Краткая классификация неньютоновских жидкостей

В большом количестве задач классической механики вязких несжимаемых жидкостей используется линейный закон связи тензора вязких напряжений τ_{ij} с тензором скоростей сдвига e_{ij} (скоростей деформации)

$$\tau_{ij} = \eta e_{ij}, \quad e_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (1.1)$$

где η - динамическая вязкость. Такие жидкости принято называть ньютоновскими [32, 33].

Однако, многие жидкости, участвующие в технологических процессах, при своем течении проявляют нелинейность вязкости, а также другие свойства, такие как пластичность, упругость. К нелинейно-вязкими средам можно отнести нефть, нефтепродукты; растворы и расплавы полимеров, суспензии угольного топлива, лаки, краски, зубную пасту; пищевые продукты: масло, маргарин, сгущенное молоко и т.д. Реальные жидкости обладают широким спектром свойств, структурно-механических характеристик и составов. Любая их классификация и любой подход к их изучению является в известной степени идеализацией и упрощением действительного поведения вещества.

Существует множество различных методов изучения неньютоновских жидкостей. Один из весьма эффективных подходов - теоретико-реологический, когда для некоторого класса жидкостей, обладающих сходными свойствами, записывается определенная реологическая модель и на ее основе объясняется поведение жидкостей этого класса. В настоящее время известно большое количество различных реологических моделей, или, как их еще называют,

уравнений состояния, описывающих с известной степенью точности реальные жидкости. Наиболее простая и разумная классификация этих моделей была предложена Доджем [34] и описана Уилкинсоном У.Л. в работе [35], а также Шульманом З.П. и Берковским Б.М. в монографии [36].

Согласно этой классификации неньютоновские жидкости в зависимости от характера кривой течения, т.е. вида реологического уравнения $\tau = f(\dot{\gamma})$, где τ - напряжение сдвига, а $\dot{\gamma} = \partial u / \partial z$ - скорость сдвига, можно разделить на три большие группы:

1. жидкости, для которых скорость сдвига в каждой точке представляет некоторую функцию только от вязких напряжений в этой точке;
2. системы, в которых скорость сдвига в точке определяется не только величиной приложенных вязких напряжений, но и предъисторией деформирования, т.е. реологические характеристики таких жидкостей зависят от времени;
3. вязкоупругие жидкости, обладающие свойствами, как вязкой жидкости, так и твердого тела, т.е. обладающие упругостью.

Данная диссертация посвящена изучению течений, возникающих в жидкостях, относящихся к первой группе представленной классификации. Эти жидкости называют обобщенными ньютоновскими жидкостями. Данный термин встречается, например, в работах [37, 38]. Такие жидкие системы в зависимости от формы реологической кривой можно разделить на несколько видов [35-37]. Простая классификация видов обобщенных ньютоновских жидкостей, принятая в настоящей работе, приведена, например, в [39]. На рисунке 1.1 схематически представлены реологические кривые, характерные для плоскопараллельных течений обобщенных ньютоновских жидкостей.

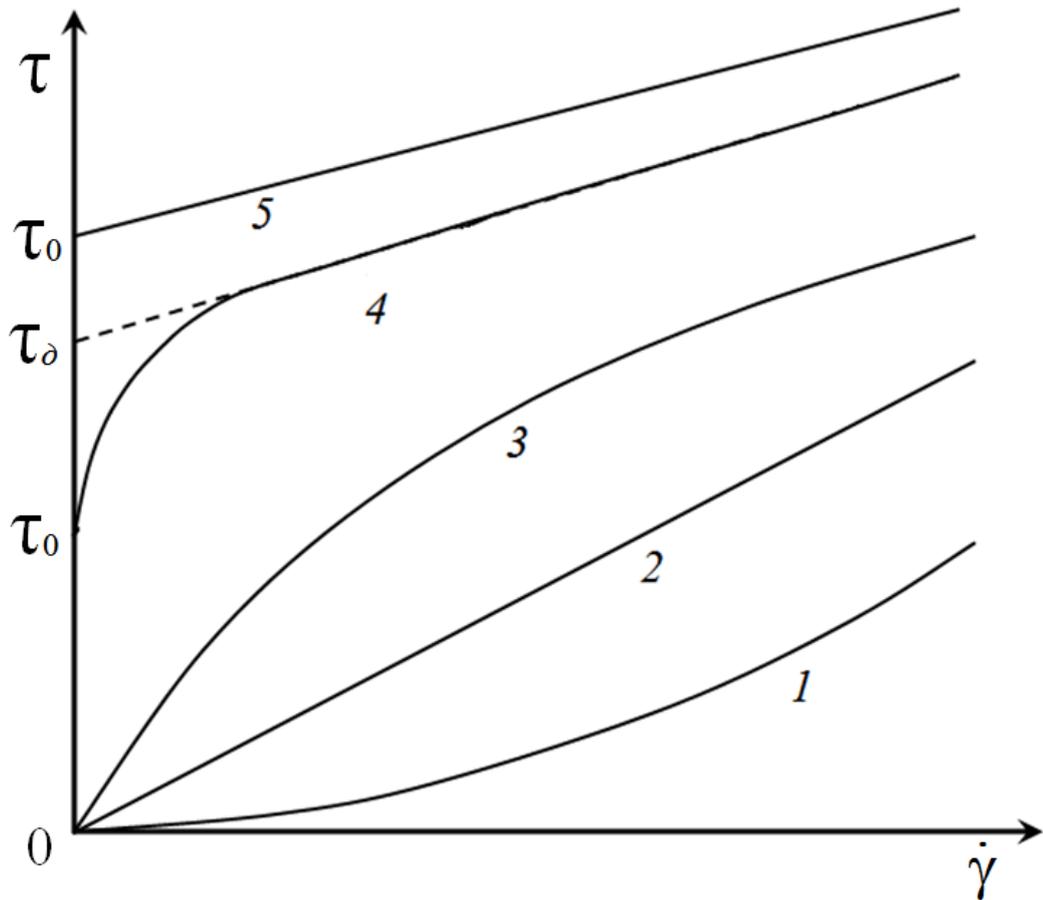


Рис. 1.1 Кривые течения, отражающие зависимости напряжения сдвига τ от скорости сдвига $\dot{\gamma} = \partial u / \partial z$ для разных видов обобщенных ньютоновских жидкостей

Кривая 1 на рисунке 1.1 соответствует дилатантной жидкости; кривая 2 - ньютоновской жидкости; кривая 3 - псевдопластичной жидкости; кривая 4 - нелинейно-вязкопластичная жидкость с предельным напряжением сдвига; кривая 5 - линейно-вязкопластичная жидкость Бингама (Шведова-Бингама).

Эффективная вязкость или кажущаяся вязкость η обобщенной ньютоновской жидкости определяется как отношение

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}. \quad (1.2)$$

Её величина пропорциональна тангенсу угла наклона касательной линии в каждой точке соответствующей реологической кривой.

1.2 Реологические модели и структурно-механические свойства обобщенных ньютоновских жидкостей

В данном параграфе дается краткое описание структурно-механических свойств и реологических моделей, которые используются в диссертации при исследовании поведения нелинейно-вязких жидкостей. Существует большое количество работ, например, упоминавшиеся выше [35-37, 39], а также работы [40-46], где анализируется внутреннее строение жидкостей, их реологические свойства. На основании такого анализа делается вывод о применимости той или иной реологической модели (уравнения) для описания поведения системы.

Необходимо отметить, что, несмотря на большое количество работ и разнообразие подходов, в области реологии жидкостей пока не существует удовлетворительной количественной теории, связывающей реологические свойства сред с параметрами их структуры. Реологические модели в большинстве своем не являются физическими законами, а представляют собой эмпирические уравнения, описывающие кривые течения в определенном интервале скоростей сдвига. В литературе упоминается огромное количество реологических уравнений, например, в работах [47-51] можно найти информацию о более чем 50 их видах. Выбор реологического уравнения, для описания всей реологической кривой (см. рис. 1.1) или ее отдельной части в заданном интервале скоростей сдвига предоставляется исследователю. Зачастую бывает весьма затруднительно отыскать среди известных законов или предложить новое реологическое уравнение, описывающее полностью экспериментальную кривую течения исследуемой жидкости. Ситуация сильно осложняется, когда ставится задача охватить единым реологическим законом целый класс жидкостей. В работах [52-54] отмечается, что примерно с одинаковой точностью можно описать одним и тем же реологическим уравнением экспериментальные данные, относящиеся к разным по физико-химической природе жидкостям; с другой стороны, что одну и

ту же неньютоновскую жидкость можно описать различными реологическими законами.

При выборе реологических моделей для различных видов обобщенных ньютоновских жидкостей автор диссертации руководствовался некоторыми формальными, но достаточно логичными правилами [47, 55, 56]. Реологические уравнения должны:

- давать хорошую аппроксимацию экспериментальных данных в широком диапазоне скоростей сдвига;
- включать в себя минимальное количество независимых констант, которые должны поддаваться определению в эксперименте и обладать физическим смыслом;
- в пределе модели давать реологическое уравнение Ньютона для обычной жидкости.

Обсудим конкретные реологические законы обобщенных ньютоновских жидкостей, которые используются в настоящей работе. Напомним, что для описания обычной ньютоновской жидкости (кривая 2 на рис. 1.1) используется линейная зависимость между тензором вязких напряжений и тензором скоростей сдвига (1.1).

1.2.1 Дилатантная жидкость

Дилатантное поведение (см. кривую 1 на рис. 1.1), при котором кажущаяся вязкость возрастает с увеличением скорости сдвига, встречается достаточно редко. Впервые дилатантное поведение при движении жидкости было обнаружено Рейнольдсом в суспензиях с большим содержанием твердой фазы: влажный песок, мокрый крахмал, густые краски. Можно говорить о том, что в состоянии покоя подобные системы имеют минимальный объем жидких прослоек между твердыми частицами. При небольших значениях скорости сдвига жидкость служит смазкой между частицами и уменьшает трение их друг о друга, при этом действующие напряжения оказываются небольшими. Большие скорости сдвига

приводят к нарушению плотной упаковки частиц, и материал несколько увеличивается в объеме, т.е. размеры жидких прослоек увеличиваются. При новой структуре жидкости уже не достаточно для смазки трущихся друг о друга частиц, что приводит к увеличению сдвиговых напряжений и быстрому нарастанию кажущейся вязкости.

К дилатантным жидкостям можно отнести также жидкие среды, не являющиеся в обычном смысле суспензиями и не расширяющиеся при сдвиге, но кажущаяся вязкость которых растет с увеличением скорости сдвига, например крахмальный клейстер. Приведенное выше объяснение проявления дилатантных свойств к ним не подходит. Тем не менее, их называют дилатантными жидкостями.

В настоящей диссертации для описания поведения дилатантных систем используется широко применяемый в реологии степенной закон, описывающий поведение большого класса неньютоновских жидкостей

$$\tau = k |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma}, \quad (1.3)$$

где k - мера консистенции жидкости – чем выше вязкость, тем больше k ; n - показатель неньютоновости жидкости, (для дилатантной жидкости $n > 1$, кривая 1 на рис. 1.1). Размерность k зависит от показателя степени n . Уравнение (1.3) впервые предложено Оствальдом де-Вилем [57] и усовершенствовано Рейнером [58]

В ряде работ для исследования течений нелинейно-вязких жидкостей используются модели, являющиеся регуляризацией степенного реологического уравнения (1.3) [59, 60, 61]

$$\tau = \mu_0 \left(1 + k_r |\dot{\gamma}|\right)^{n-1} \dot{\gamma} \quad (1.4)$$

Параметр μ_0 играет роль начальной динамической вязкости. С ростом $\dot{\gamma}$ модель (1.4) асимптотически переходит в (1.3). Введение в степенной закон начальной вязкости основано на экспериментальных данных, которые показывают, что при малых скоростях сдвига для многих жидкостей имеет место линейная связь τ и $\dot{\gamma}$, характерная для ньютоновской жидкости. Обе модели (1.3) и (1.4) дают модель Ньютона (1.1), когда $n = 1$.

1.2.2 Псевдопластичная жидкость

Из формы кривой 3 на рисунке 1.1 следует, что кажущаяся вязкость псевдопластичных материалов убывает с возрастанием скорости сдвига. Такое поведение характерно для суспензий, содержащих асимметричные частицы, и растворов высокополимеров, подобных производным целлюлозы. С физической точки зрения псевдопластичное поведение жидкости можно объяснить тем, что с возрастанием скорости сдвига главные оси длинных молекул полимерных материалов совершают поворот на некоторый угол (ориентируются) в направлении потока. Кажущаяся вязкость будет убывать до тех пор, пока сохраняется возможность ориентирования молекул вдоль линий тока, а затем кривая течения становится линейной. Поскольку структурно – механические свойства псевдопластиков не зависят от времени, ориентирование частиц совершается мгновенно, как только возрастает скорость сдвига, или так быстро, что время поворота не может быть с необходимой точностью определено с помощью вискозиметрических измерений.

Для описания поведения псевдопластичных жидкостей можно использовать степенное реологическое уравнение вида (1.3) или (1.4), где показатель неньютоновости $n < 1$. Однако, при малых показателях неньютоновости появляются трудности в численных расчетах, связанные с видом реологического закона. Поэтому для описания реологии псевдопластиков в работе используется эмпирическая реологическая модель Уильямсона [35, 62]

$$\tau = \left(\frac{A}{B + |\dot{\gamma}|} + \mu_{\infty} \right) \dot{\gamma}, \quad (1.5)$$

где A и B - реологические константы, μ_{∞} - вязкость при бесконечно большой скорости сдвига. Кемпбелл применил реологический закон (1.5) к течению расплавленного шоколада [63]. Позднее модель аналогичная (1.5) предлагалась Джиллеспи [64] для описания процессов коагуляции, происходящих в сдвиговом течении суспензий.

В настоящей работе реологическое уравнение Уильямсона (1.5) принимается за основное, т.е. большинство задач, связанных с рассмотрением движения неньютоновских жидкостей, решается с использованием именно этого уравнения. Это связано с аналитическим, непрерывным и относительно простым видом закона (1.5), даже в общем тензорном виде. Кроме того, при определенном подборе параметров реологические кривые, построенные на основе уравнения (1.5), близки к виду кривых 4 или 5 на рисунке 1.1. Таким образом, уравнение Уильямсона может быть применено для описания широкого класса неньютоновских жидкостей, в том числе вязкопластичных сред. Отметим, что реологическое закон Уильямсона переходит в уравнение Ньютона (1.1), когда реологический параметр $A = 0$.

1.2.3 Вязкопластичная жидкость

По мнению Тетельмина В.В. [45] современная реология, как наука, началась, когда Юджин Бингам установил, что масляная краска, нанесенная на поверхность, является до засыхания твердым пластическим телом, а не жидкостью. Вместе с Маркусом Райнером, Бингам ввел в научный оборот термин «реология». Вязкопластичные тела, способные оказывать сопротивление сдвигу не только за счет вязкости, но и за счет статического трения, называют бингамовскими жидкостями. Одно из первых реологических уравнений, описывающих вязкопластичные среды, предложил Бингам в 1916 г. [65]. Однако, как отмечал

профессор А.В. Лыков в редакционной сноске в [35], «аналогичная зависимость была предложена в 1889 г. Ф.Н. Шведовым задолго до появления работы Бингама». Вид закона Шведова-Бингама для одномерного сдвигового стационарного течения можно записать в форме

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 \operatorname{sign}(\dot{\gamma}) + \mu_p \dot{\gamma} & |\tau| > \tau_0, \\ \dot{\gamma} &= 0 & |\tau| \leq \tau_0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь τ - напряжение сдвига; $\dot{\gamma} = \partial u / \partial z$ - скорость сдвига (z - поперечная координата); μ_p - пластическая вязкость или коэффициент жесткости при сдвиге, численно равный тангенсу угла наклона кривой течения (см. рисунок 1.1 кривая 5); τ_0 - предел текучести, при $|\tau| > \tau_0$ имеем зону вязкого течения (жидкая фаза), при $|\tau| \leq \tau_0$ жидкость движется, как твердое тело (жесткая фаза).

Граница жесткой зоны вязкопластичной жидкости Шведова-Бингама может быть определена из условий

$$\tau_0 \geq \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}}, \quad I_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} = 0. \quad (1.7)$$

С усовершенствованием техники реометрии обнаружилась нелинейность кривой течения в области малых скоростей сдвига (см. кривую 4 на рис. 1.1). Это создало дополнительные трудности при описании течений сред, обладающих предельным напряжением сдвига. При использовании реологической модели (1.6) для описания вязкопластичных сред искривленностью начального участка реологической кривой пренебрегают. В этом случае экстраполируют прямолинейную часть зависимости $\tau = f(\dot{\gamma})$, как это показано на рисунке 1.1. На вертикальной оси отсекается значение вязких напряжений τ_0 , которое называется

динамическим напряжением сдвига или динамическим пределом текучести [45, 46].

Для нелинейно-вязкопластичных жидкостей (кривая 4 на рис. 1.1) различают статическое τ_0 и динамическое τ_∂ предельные напряжения сдвига. Первое из них характеризует прочность пространственной структуры жидкости, которая является достаточно жесткой, чтобы сопротивляться напряжению сдвига, меньшему чем τ_0 . При $\tau \geq \tau_0$ наступает разрушение структуры. Когда действующие на жидкость сдвиговые напряжения становятся меньше τ_0 , жесткая структура снова восстанавливается. В интервале напряжений $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_\partial$ течение жидкости происходит со статическим напряжением сдвига τ_0 и большой кажущейся вязкостью. При напряжениях $\tau > \tau_\partial$ вязкость жидкости резко изменяется, а предельное напряжение сдвига становится равным динамическому пределу текучести τ_∂ .

Можно утверждать, что для вязкопластичных жидкостей Бингама статическое и динамическое предельные напряжения становятся практически одинаковыми. В этом случае форма кривой 4 на рисунке 1.1 стремится к форме кривой 5, однако, необходимо помнить о существовании нелинейного участка на кривой течения при малых скоростях сдвига $\dot{\gamma}$.

Экспериментальное определение τ_0 для вязкопластичных жидкостей существенно зависит от чувствительности прибора. Для истинного вязкопластичного материала $\eta \rightarrow \infty$ при $\dot{\gamma} \rightarrow 0$. В работах [66-68] отмечается, что факт существования предельного напряжения сдвига у многих жидкостей является следствием невозможности измерения вязкостей (вязких напряжений) при малых скоростях сдвига обычными вискозиметрами. Например, Скотт Блейр подчеркивает условность понятия предельного напряжения сдвига, утверждая, что это «напряжение, ниже которого течение не наблюдается при данных условиях эксперимента» [56]. Современные вискозиметры позволяют

фиксировать скорости сдвига порядка 10^{-6} с^{-1} и изменения вязкости в $\sim 10^6$ раз при изменении $\dot{\gamma}$ [39].

Для аппроксимации нелинейных участков кривых течения обобщенных ньютоновских жидкостей можно применить двух-вязкостную (кусочно-линейную) реологическую модель

$$\begin{aligned} \tau &= \mu_1 \dot{\gamma} & |\tau| \leq \tau_0 \\ \tau &= \tau_0 \text{sign}(\dot{\gamma}) + \mu_2 (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0) & |\tau| > \tau_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Пример использования этой модели для описания конвективных течений псевдопластичных ($\mu_1 > \mu_2$), дилатантных ($\mu_1 < \mu_2$) и бингамовских ($\mu_1 \rightarrow \infty$) жидкостей можно найти в работах [69, 70]. Отметим, что в коммерческом вычислительном пакете ANSYS FLUENT нелинейная вязкость жидкостей описывается с помощью модели (1.8). В [71, 72], этот пакет применялся для изучения двумерных стационарных режимов тепловой конвекции жидкости Шведова-Бингама в прямоугольных замкнутых полостях подогреваемых сбоку.

Для учета нелинейного участка на кривой течения нелинейно-вязкопластичных жидкостей были предложены различные реологические законы, наиболее общим из которых является феноменологическое уравнение Шульмана [73]

$$\tau = \left(\tau_0^n + (\mu_p \dot{\gamma})^n \right)^{\frac{1}{m}} \quad (1.9)$$

Большинство известных реологических уравнений можно получить из (1.9), выбирая значения показателей степени n и m . Например, уравнение Шведова-Бингама (1.6) получается при $m = n = 1$, известное уравнение Кэссона [74] – при $m = n = 2$, модификация уравнения Оствальда (1.3) (так называемое уравнение

Гершеля-Балкли [75]) получается, если $n = 1$. Уравнение (1.9) сводится к уравнению Ньютона при $\tau_0 = 0$ и $m = n$. Во всех перечисленных уравнениях присутствует статический предел текучести.

В работе [39] для описания реологических свойств широкого класса неньютоновских жидкостей, в том числе и нелинейно-вязкопластичных, было предложено обобщенное уравнение Кэссона

$$\tau^{1/2} = \left(\frac{\tau_c^{1/2}}{\chi + \dot{\gamma}^{1/2}} + \mu_\infty^{1/2} \right) \dot{\gamma}^{1/2} \quad (1.10)$$

При $\chi \rightarrow 0$ коэффициент Кэссона $\tau_c^{1/2}$ приобретает смысл динамического предела текучести. Само уравнение (1.10), в этом случае, учитывает нелинейный характер кривой течения при малых скоростях сдвига.

Использование модели (1.6) обусловлено её простотой и популярностью при описании бингамовских жидкостей. Однако, как отмечалось выше, данная модель не учитывает нелинейности реологической кривой в области малых скоростей сдвига. Кроме того, модель Шведова-Бингама, являясь разрывной, требует четкого определения положения границы раздела жидкой и жесткой зон, а также постановки дополнительных условий на этой границе. Данное обстоятельство осложняет решение многомерных и нестационарных задач, в которых рассматривается течение вязкопластичных сред. Некоторые подходы к решению нестационарных краевых задач вязкопластических течений с учетом движения границы раздела жестких зон представлены в монографии [76].

В настоящей работе для описания реологических свойств вязкопластичных сред используются уравнения Шведова-Бингама (1.6) и Уильямсона (1.5). Модель Уильямсона впервые было предложено использовать для описания течений вязкопластической жидкости в работах [77, 78]. Показано, что при малых значениях реологического параметра B эта модель описывает поведение вязкопластичных сред, в тоже время реологический закон Уильямсона является

аналитической и непрерывной функцией. Положение границы раздела жесткой (квазитвердой) и жидкой зон определяется в ходе решения задачи, а на самой границе не требуется постановка дополнительных условий.

Уравнение Уильямсона, так же как и уравнение (1.10), удовлетворительно описывает экспериментально наблюдаемую форму кривой течения вязкопластичной жидкости во всем диапазоне скоростей сдвига. Вид уравнения (1.5) существенно проще, чем у реологических законов (1.9) и (1.10).

В отличие от моделей (1.6) и (1.9) в реологическом уравнении Уильямсона нет предельного статического вязкого напряжения сдвига. В рамках модели (1.5) не предполагается восстановление жесткой внутренней структуры материала, если вязкие напряжения меньше некоторого предельного значения. Под жесткой (квазитвердой) зоной в рамках модели Уильямсона понимается такая область в нестационарном потоке жидкости, где скорости сдвига пренебрежимо малы по сравнению с окружающей жидкостью. Граница жесткой зоны вязкопластичной жидкости в рамках модели Уильямсона определяется условием похожим на (1.7)

$$A \geq \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}}, \quad I_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \rightarrow 0$$

1.3 Проводящая жидкость в магнитном поле

К жидкостям, обладающим особыми свойствами, можно отнести также различные проводящие жидкости, такие как жидкие металлы, расплавы металлов, электролиты, плазма. Движение проводящей жидкости или газа в магнитном поле существенно зависит от взаимодействия между полем и электрическими токами, имеющими место в движущейся среде. Под электрическим током понимается любое движение зарядов, вызванное как влиянием магнитного поля, так и движением самой проводящей жидкости. Магнитогидродинамическое взаимодействие может порождать конвективное движение в жидкости, оказывать влияние на структуру и устойчивость такого движения.

В главе 6 настоящей диссертации рассматриваются две задачи, имеющие прикладное значение, в которых объектом исследований является конвективное течение проводящей жидкости в магнитном поле. Система уравнений, описывающих такие течения, приведена в классических монографиях [79, 80]. В наиболее общем виде эта система включает в себя уравнения Максвелла для электромагнитного поля, где пренебрегается токами смещения

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J}, \quad \operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e, \quad \operatorname{div}\vec{H} = 0, \quad (1.11)$$

закон Ома

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \mu\mu_0[\vec{v} \times \vec{H}]) \quad (1.12)$$

и уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} + g\beta T\vec{\gamma} + \frac{\mu\mu_0}{\rho}\vec{J} \times \vec{H}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)T = \chi\Delta T + \frac{\vec{J}^2}{\rho c\sigma}. \quad (1.14)$$

Система уравнений (1.11) – (1.14) записана в международной системе единиц (СИ), где \vec{E} и \vec{H} напряженности электрического и магнитного полей, \vec{J} – плотность тока, μ – магнитная проницаемость, μ_0 – магнитная постоянная, σ – удельная электрическая проводимость, ε – диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 – электрическая постоянная, ρ_e – объемная плотность электрических зарядов, \vec{v} , p , T – поля скорости, давления и температуры, ρ – плотность жидкости, c –

удельная теплоёмкость, ν – кинематическая вязкость, g – ускорение свободного падения, β – коэффициент объёмного расширения, χ – коэффициент температуропроводности жидкости, $\vec{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Применяя к закону Ома (1.12) операцию rot и пользуясь уравнениями Максвелла, можно получить уравнение диффузии магнитного поля в движущейся проводящей среде

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{H} - (\vec{H} \nabla) \vec{v} = \frac{1}{\mu \mu_0 \sigma} \Delta \vec{H} \quad (1.15)$$

Отличительной особенностью уравнений конвекции проводящей жидкости в магнитном поле является учет в уравнении движения (1.13) электромагнитной (пондеромоторной) силы $\frac{\mu \mu_0}{\rho} \vec{J} \times \vec{H}$, действующей со стороны магнитного поля на токи, индуцируемые в жидкости. Кроме того, в уравнении теплопроводности (1.14) учитывается джоулевый нагрев среды $\frac{\vec{J}^2}{\rho c \sigma}$, который может возникать за счет индукционных токов.

В заключение, отметим, что реология проводящей жидкости определяется ньютоновским законом.

1.4 Особенности гидродинамики бинарных смесей

Еще одним осложняющим фактором, влияющим на движение жидких систем, является их состав. В седьмой главе диссертации рассматривается конвективное течение бинарной смеси, состоящей из нереагирующих компонент, и устойчивость такого течения. В неизотермической смеси конвективная сила определяется неоднородностью температуры и концентрации, а диссипация энергии происходит за счет теплопроводности и диффузии. Это приводит к

качественному отличию в поведении таких систем в сравнении с чистой жидкостью. Например, конкуренция диффузии и теплопроводности может при определенных условиях привести к неустойчивости таких состояний смеси, где градиент плотности направлен вниз. Кроме прочего, на устойчивость стационарных состояний бинарных жидкостей могут существенно влиять так называемые перекрестные эффекты – термодиффузия и диффузионная теплопроводность.

Уравнения конвекции двухкомпонентной жидкости могут быть получены из общих уравнений гидродинамики несжимаемой смеси [32]. Подробный вывод этих уравнений в приближении Буссинеска можно найти в работах [79, 81], где предполагается линейная зависимость плотности смеси от температуры и концентрации легкой компоненты

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta_1 T - \beta_2 C). \quad (1.16)$$

В (1.16) ρ_0 – плотность смеси, соответствующая некоторым средним значениям температуры и концентрации, а T и C – отклонения температуры и концентрации от этих средних значений; β_1 – коэффициент теплового расширения, β_2 – коэффициент, определяющий зависимость плотности от концентрации ($\beta_2 > 0$).

Уравнения конвективного движения бинарной жидкости с учетом (1.16) имеют вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + g (\beta_1 T + \beta_2 C) \vec{\gamma}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1.17)$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости смеси.

Уравнения теплопроводности и диффузии с учетом перекрестных эффектов записываются в форме

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)T = \chi\Delta T + \alpha^2 DN\Delta T + \alpha DN\Delta C, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)C = D\Delta C + \alpha D\Delta T. \quad (1.19)$$

Здесь χ – коэффициент температуропроводности смеси; D – коэффициент диффузии; $\alpha = k_T/T$, где k_T – термодиффузионное отношение, T – абсолютная температура; N – термодинамический параметр, определяющий эффект диффузионной теплопроводности.

Все параметры среды соответствуют средним значениям температуры и концентрации и предполагаются постоянными. Жидкость считается ньютоновской.

В правой части уравнения (1.18) первое слагаемое описывает обычную теплопроводность жидкости, т.е. поток тепла, возникающий из-за наличия градиента температуры. Второе и третье слагаемые описывают явление диффузионной теплопроводности, т.е. поток тепла за счет градиента концентрации. В (1.19) первое слагаемое в правой части описывает обычную молекулярную диффузию, т.е. поток вещества за счет градиента концентрации примеси, а второе слагаемое – эффект термодиффузии, т.е. поток вещества за счет градиента температуры.

В большинстве случаев эффект диффузионной теплопроводности мал, при этом вторым и третьим слагаемыми в правой части (1.18) можно пренебречь. В свою очередь, эффект термодиффузии во многих ситуациях оказывает значительное влияние на структуру течения и его устойчивость. Влияние термодиффузии (эффект Соре) определяется безразмерным параметром разделения $\varepsilon = -\alpha\beta_2/\beta_1$. В случае нормальной термодиффузии, когда $\alpha < 0$, $\varepsilon > 0$, поток легкой компоненты направлен в сторону нагретой границы, что приводит к увеличению подъемной силы. В случае аномальной термодиффузии, когда $\alpha > 0$, $\varepsilon < 0$, легкая компонента диффундирует в сторону холодной границы. Этот

эффект приводит к уменьшению подъемной силы, и при определенном значении параметра разделения в системе реализуется механическое равновесие невозможное в чистой жидкости при данных условиях подогрева.

1.5 Обзор литературы

1.5.1 Течения нелинейно-вязких жидкостей

Во второй главе диссертации описываются результаты исследований, посвященных изучению пульсационных и осредненных течений нелинейно-вязких жидкостей вблизи твердой поверхности. Рассматриваются дилатантные жидкости, реология которых определяется уравнением (1.3), и псевдопластичные жидкости, подчиняющиеся закону (1.5). В главе подробно изучены осредненные течения, которые генерируются около твердого осциллирующего цилиндра, благодаря возникающему около твердой поверхности вязкому пограничному слою (скин-слою).

Исследования динамического вибрационного воздействия на течения жидкостей имеют большую историю и им посвящено значительное количество работ, где в основном рассматриваются ньютоновские среды. В качестве примера здесь можно привести ряд обзорных статей, относящихся к последней трети прошлого века [82-87].

Возникающий при обтекании нагретого цилиндра вязкий пограничный слой оказывает существенное влияние на процессы теплопереноса, а также определяет механизмы переноса импульса в движущейся жидкости. Структура течения жидкости и интенсивность теплопереноса зависят от толщины пограничных слоев. В [88] показано, что наряду с квазистационарным первичным пограничным слоем, образующимся около той части цилиндра, которая обращена к потоку, в кормовой части цилиндра появляются неустойчивые вторичные пограничные слои. При числах Рейнольдса, меньших 500, основная доля теплоотвода приходится на первичный пограничный слой. С ростом Re первичный пограничный слой становится тоньше, градиенты скорости и температуры в нем

возрастают, что приводит к увеличению теплоотдачи от лобовой поверхности цилиндра. Вклад кормовой части цилиндра также возрастает и может превысить теплоотдачу в первичном пограничном слое [89, 90]. Высокий уровень теплоотдачи на кормовой стороне цилиндра определяется большими градиентами температуры, возникающими в тонких вторичных пограничных слоях вблизи кормовой части цилиндра.

Результаты численных расчетов [88] и экспериментальных исследований [91] показали, что при обтекании цилиндра ньютоновской жидкостью структура течения, форма вязких пограничных слоев и тепловой поток определяются двумерными механизмами неустойчивости. Влияние трехмерных эффектов сказывается на величинах сопротивления и подъемной силы, и не существенно для структуры потока вблизи поверхности цилиндра. Ламинарное неизотермическое обтекание вращающегося кругового цилиндра вязкой жидкостью с твердыми частицами исследовано в [92], где проанализировано влияние примеси на картину течения и определены зависимости коэффициента сопротивления, амплитуды подъемной силы и числа Нуссельта от относительной скорости вращения поверхности цилиндра. На основе численного решения уравнений Навье–Стокса и Рейнольдса в [93, 94] проведен анализ физических процессов, происходящих при ламинарном и турбулентном обтекании кругового цилиндра, окруженного кожухом с окнами для перетока среды. Показано, что такая компоновка обеспечивает стабилизацию следа за цилиндром, снижает его лобовое сопротивление и препятствует действию знакопеременной поперечной силы при больших числах Рейнольдса.

Теория вязкого пограничного слоя, возникающего в ньютоновской жидкости, развита в классических трудах Шлихтинга Г. [95, 96] и Лойцянского Л.Г. [97, 98].

Высокочастотное пульсационное течение вязкой ньютоновской жидкости вблизи твердой плоской поверхности и возникающее на его фоне осредненное течение впервые были исследованы Релеем [99, 100] при рассмотрении распространения акустической волны в канале. В работах Шлихтинга [95, 96] были изучены механизмы генерации осредненных течений в жидкости около

твёрдого осциллирующего цилиндра. Показано, что высокочастотные вибрации твёрдого тела, погруженного в обычную ньютоновскую жидкость, приводят к генерации осредненного течения в вязком пограничном слое вблизи поверхности тела. Такое течение имеет вихревой характер и распространяется за пределы скин-слоя.

Любимовым Д.В. задача о генерации осредненных течений была обобщена на случай трехмерных пульсационных течений с неоднородной фазой колебаний [101 - 103]. Осреднение пульсационного течения в пограничном слое определяет касательную к поверхности тела компоненту среднего течения на границе скин-слоя и основного потока. Она служит эффективным граничным условием для среднего течения жидкости в ядре.

Экспериментальное исследование течения жидкости, возникающего в вязком пограничном слое около вибрирующего с высокой частотой цилиндра, который находится в обычной жидкости Ньютона, представлено в статье [104]. Там же исследуется устойчивость этого пограничного слоя. Теоретически устойчивость течения в пограничном слое, возникающем вблизи осциллирующего в обычной вязкой жидкости цилиндра была рассмотрена в работе [105]. Термовибрационная конвекция ньютоновской жидкости, находящейся в зазоре между двумя сферами в отсутствие поля тяжести, изучалась в [106]. Рассматривались термовибрационные и шлихтинговские течения и их взаимодействие. Проведены как аналитические, так и численные исследования.

В работах [107, 108] экспериментально, а в работе [109] численно исследовано влияние амплитуды, частоты и направления гармонических колебаний цилиндра кругового сечения на структуру течения ньютоновской жидкости около него. Большинство расчетов в [110] проведено при $Re=1000$. Показано, что в случае колеблющегося цилиндра кругового сечения роль нестационарных вторичных пограничных слоев в процессах переноса энергии и импульса в движущейся жидкости существенно возрастает. Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными из [107, 108], где кроме случая

цилиндра кругового сечения рассматривалось обтекание цилиндров треугольного и квадратного сечений.

Одной из первых монографий по гидродинамике, тепло- и массообмену неньютоновских жидкостей в пределах динамического пограничного слоя является книга Шульмана З.П. и Берковского Б.М. [36], в которой анализируются течения жидкостей, описываемых степенной реологической моделью. Получены уравнения движения и теплопереноса таких жидкостей в приближении пограничного слоя. Предложены методы решения динамических и тепловых задач на основе этих уравнений. Найден и подробно исследован класс автомодельных решений задач пограничного слоя.

В статье [110] рассматривается конвективное течение степенной жидкости в вязком пограничном слое вблизи твердой стенки. Обнаружено, что скорость течения псевдопластичной жидкости в пограничном слое выше, чем ньютоновской и дилатантной жидкостей при одинаковых скоростях внешнего потока. В работах Ванга (Wang T.Y.) исследуется устойчивость конвективных течений степенной жидкости около горизонтальной [111] и вертикальной [112] нагретых пластин. Рассматриваются дилатантные жидкости с показателем неньютоновости $1 < n < 2$ и псевдопластики, у которых $0 < n < 1$. Изучается влияние вязких пограничных слоев, возникающих вблизи твердой пластины, на устойчивость конвективного движения. Обнаружено, что в псевдопластичной жидкости с ростом показателя неньютоновости увеличивается толщина пограничного слоя, а также растет тепловой поток поперек него. В дилатантной жидкости увеличение n приводит к уменьшению толщины пограничного слоя и к росту теплотока.

Некоторая систематизация исследований по нестационарному движению вязкопластичных сред была предпринята в монографии Огибалова П.М. и Мирзаджанзаде А.Х. [113]. Приведены постановки нестационарных краевых задач вязкопластичности, рассмотрены эффективные методы их решения. Даны решения некоторых важных задач нефтепромысловой механики и проведен их гидродинамический анализ. Для описания движения вязкопластичных сред в ряде

случаев использовались дифференциальные уравнения Генки-Ильюшина [114], которые обобщают реологическую модель Шведова-Бингама для случая произвольных течений. Влияние вибраций на течения вязкопластичных сред в монографии не обсуждается.

Отметим несколько работ, в которых изучается обтекание твердых поверхностей неньютоновскими жидкостями с реологическими свойствами, отличными от тех, что рассматриваются в представленной диссертации. Продольное обтекание полубесконечной пластины упруговязкой жидкостью с учетом теплообмена исследуется в [115]. Авторами проведен численный анализ стационарного течения такой жидкости и распределения температуры в вязком пограничном слое, образующемся на твердой поверхности. Численному исследованию установившегося течения вязкоупругой жидкости около бесконечного цилиндра кругового сечения, который находится между двумя параллельными твердыми поверхностями, посвящена статья [116]. Расчеты проводились методом конечных элементов с использованием дивергентной схемы представления уравнений движения. Экспериментальные и численные исследования вторичных течений вязкоупругой жидкости в протяженных каналах различной формы описаны в работе [117]. Указанные течения возникают в движущейся по каналу вязкоупругой жидкости вследствие появляющейся в ней разности нормальных напряжений. В работе [118] анализируется движение жидкостей Фан-Тьена-Таннера [119] и Гисекуса [120] в пограничном слое, возникающем при стационарном движении жидкостей около плоской твердой поверхности. Исследовался случай больших чисел Вейсенберга. Авторами с помощью асимптотических методов получены уравнения движения указанных жидкостей в приближении пограничного слоя. В ряде работ [121-124] создана математическая модель течения упруговязкой жидкости Олдройда и Фан-Тьен-Таннера в канале вискозиметра с падающим грузом. Авторы детально исследовали особенности течения жидкости при обтекании цилиндра и груза, имеющего форму тела со скругленной передней стенкой. Изучено влияние степени ориентации макромолекул в процессе течения на сопротивление вблизи

цилиндра и груза; исследовано влияние реологических свойств полимерной жидкости на величину силы сопротивления.

О современном состоянии проблемы, связанной с движением нелинейно-вязких сред, которые можно отнести к классу обобщенных ньютоновских жидкостей, и о влиянии на течение таких сред различных факторов можно также судить из обзоров [125-127]. В [125] описаны основные направления научных исследований, связанных с динамикой неньютоновских сред, получившие развитие во второй половине двадцатого века. Показано, что даже в известных классах течений нелинейная вязкость приводит к качественно новым эффектам, не проявляющимся в обычной ньютоновской жидкости. Обзор [126] посвящен работам, где рассматривается движение и устойчивость вязкопластичных (бингамовских) сред по отношению к возмущениям различного вида. Рассмотрены различные подходы к изучению проблем устойчивости. Большое внимание уделяется работам Ильюшина, который в конце 1930-х и начале 1940-х годов двадцатого века был одним из пионеров в изучении течений нелинейно-вязких сред. В [127] обобщены экспериментальные данные исследований движения нелинейно-вязких сред, которые можно отнести к классу обобщенных ньютоновских жидкостей. Приводятся данные о течениях в прямых каналах, стационарных течениях в каналах переменного сечения (экструзия), течениях через пористые среды, потоках при обтекании препятствий и возникающих при этом вязких скин-слоях.

В 21 веке интерес исследователей к течению нелинейно-вязких сред усилился. Связано это с развитием технологий, в которых требуется точный учет зависимости вязкости жидкости от скорости сдвига, температуры и т.д. Проведем анализ некоторых, выполненных в 21 веке работ, которые касаются обтекания обобщенными ньютоновскими жидкостями твердых цилиндрических поверхностей, либо движения этих жидкостей в цилиндрических каналах.

В экспериментальной работе [128] определялись коэффициенты потерь на трение при ламинарном течении ксантановой смолы через запорную арматуру различной геометрии. Реологические свойства псевдопластичной среды

описывались моделью Освальда де-Вилля. Результаты исследований показали, что потери на трение возрастают с уменьшением обобщенного числа Рейнольдса.

Численные расчеты изотермического сдвигового течения степенной псевдопластической жидкости в зазоре между двумя концентрическими цилиндрами, обеспеченного осевым градиентом давления, были выполнены в [129]. Внешний цилиндр является фиксированным и имеет «скребки», вызывающие перемешивание потока. Вращение внутреннего цилиндра вокруг своей оси обеспечивает закрутку тонкого слоя жидкости. Цель состояла в том, чтобы определить влияние вращения и внешнего давления на структуру потока жидкости. Расчеты показали, что вблизи вращающегося цилиндра образуется вязкий пограничный слой, существенно влияющий на течение псевдопластика.

Эксперименты по изучению течения шоколада в цилиндрическом канале кругового сечения и в узком зазоре между коаксиальными цилиндрами описаны в работе [130]. Экспериментальные кривые зависимости вязкости шоколада от скорости сдвига аппроксимировались реологической моделью Кессона. Определены реологические параметры модели для различных диапазонов скоростей сдвига. В качестве отступления, отметим здесь обзорную работу [131], посвященную реологическим свойствам шоколада и особенностям поведения этого стратегического продукта в технологических процессах.

В работе [132] рассматривалось обтекание степенной жидкостью твердого бесконечного кругового нагретого цилиндра. Изучалось влияние пограничных слоев на структуру течения и перенос тепла от цилиндра. Установлено, что в псевдопластических жидкостях в сравнении с дилатантными толщина вязких пограничных слоев меньше, что обеспечивает более высокие коэффициенты теплопередачи в псевдопластиках.

В работе [133] выполнено численное моделирование спирального течения псевдопластической жидкости, находящейся в зазоре между двумя бесконечными цилиндрами. По сути, рассматривалось течение Тейлора-Куэтта в условиях, когда внутренний цилиндр совершает вращение с некоторой угловой скоростью, а оси цилиндров не совпадают. Реология жидкости задавалась степенным уравнением

Освальда де-Вилия. Исследовалась зависимость структуры течения от скорости вращения внутреннего цилиндра и эксцентриситета системы. Изучение устойчивости течения Тейлора-Куэтта псевдопластической жидкости, находящейся между вращающимися бесконечными коаксиальными цилиндрами, проводилось в [134, 135] на основании анализа бифуркационных диаграмм. Реология жидкости описывалась моделью Карро-Берда [136], которая, по сути, является модификацией степенной модели Освальда де-Вилия (1.3). На основе уравнений движения и граничных условий в [134, 135] строилась динамическая система низкого порядка, определялись критические числа Тейлора, строились бифуркационные и фазовые диаграммы для различных сценариев развития неустойчивости, а также рассчитывалась структура вторичных течений.

В работах Матвиенко О.В. с соавторами исследовано течение закрученного потока псевдопластической [137] и дилатантной [138] жидкостей в цилиндрическом канале. Реология жидкостей описывалась степенной моделью (1.3). Для вязкопластика установлено, что с увеличением пластической вязкости воздействие закрутки на структуру течения ослабевает. Показано, что при одном и том же числе Россби интенсивность рециркуляции усиливается по мере увеличения пластической вязкости. В дилатантной жидкости с ростом сдвиговых напряжений, вызванных закруткой потока, происходит увеличение эффективной вязкости жидкости. При увеличении показателя неньютоновости интенсивность рециркуляции жидкости ослабевает.

В статье [139] течение Тейлора-Куэтта ньютоновской, дилатантной и псевдопластической жидкостей численно исследовано для случая коаксиальных цилиндров, имеющих конечную длину. Реология жидкостей определялась моделью Освальда де-Вилия. Полагалось, что внутренний цилиндр вращается, а наружный цилиндр и торцевые стенки находятся в состоянии покоя. Изучены различные режимы течения и их устойчивость. Получена карта режимов на плоскости число Рейнольдса – показатель неньютоновости. Показано, что при увеличении числа Рейнольдса вблизи внутреннего цилиндра возникает вязкий пограничный слой.

Ламинарное обтекание тонким слоем степенной псевдопластичной жидкости горизонтального бесконечного изотермического цилиндра исследовано в [140]. Струя жидкости, температура которой отличается от температуры цилиндра, падает на него сверху. Расчеты показали, что толщина пленки и тепловой поток существенно зависят от скорости подачи жидкости и полярного угла, который отмеряется от оси падающей струи. Проводится сравнение результатов вычислений с экспериментальными данными [141, 142].

В работе [143] рассматривается плоская задача о течении псевдопластичной жидкости в пограничном слое вблизи бесконечного изотермического цилиндра, температура которого отличается от температуры обтекающей жидкости. Реология жидкости описывается степенным законом (1.3). Полагается, что свойства жидкости близки к свойствам вязкопластичной среды, но вязкие напряжения в потоке существенно превышают предельное напряжение сдвига. Основным параметром, определяющим влияние различных факторов на структуру течения, является параметр $\lambda = Gr/Re^2$, где число Рейнольдса Re характеризует интенсивность набегающего потока, а число Грасгофа Gr характеризует интенсивность свободной тепловой конвекции. Установлено, что нагрев цилиндра ($\lambda > 0$) сдерживает отрыв пограничного слоя с его поверхности. Точка отрыва смещается к заднему полюсу сечения. При больших λ происходит полное подавление отрывного течения. Охлаждение цилиндра ($\lambda < 0$) приводит к перемещению точки отрыва потока ближе к переднему полюсу сечения цилиндра и исчезновению ламинарного пограничного слоя. Результаты расчетов для случая $|\lambda| < 1$ сравнивались с данными, приведенными в статье Меркина (Merkin) [144].

В работе [145] проведено численное моделирование установившегося течения жидкости Бингама около твердого бесконечного цилиндра кругового сечения. Цилиндр находился в слое вязкопластичной жидкости ограниченном твердыми поверхностями. В результате расчетов исследована структура течения. Показано, что вдали от цилиндра жидкость движется как твердое тело. Вблизи цилиндра появляется зона вязкого течения с вкраплениями жестких областей.

Исходя из анализа упомянутых выше работ, можно заключить, что вибрационное воздействие на нелинейно-вязкие жидкости и механизмы генерации осредненных течений изучены слабо.

Во второй главе диссертации изучается обтекание твердого бесконечного цилиндра пульсационным потоком неньютоновской жидкости. Методом многих масштабов [5] с использованием осреднения по периоду вибраций [6, 96] получены уравнения для пульсационного и осредненного течения степенной жидкости в скин-слое, решение которых проводилось численно для случая дилатантной жидкости.

Путем прямого численного моделирования на основе полных уравнений движения изучено течение вязкопластичной жидкости, описанной моделью Уильямсона (1.5). Использовалась дивергентная конечно-разностная схема [146], обоснование применения которой в случае вязкопластической жидкости было дано в работе [147]. Эта схема была с успехом использована в различных задачах о течении жидкости Уильямсона при наличии таких осложняющих факторов, как пористая среда [148]; зависимость реологических параметров жидкости от температуры при ее нагреве с боку [149] и снизу [150]; слабое гравитационное поле [151].

В третьей главе диссертации рассматривается ламинарное течение вязкопластичной жидкости по наклонной твердой поверхности в поле тяжести. Поверхность может совершать поступательные вибрации в своей плоскости. Задача считается изотермической. Для описания жидкости использованы реологические уравнения состояния Шведова-Бингама (1.6) и Уильямсона (1.5).

Задача о ламинарном течении вязкой жидкости со свободной поверхностью на твердой плоскости под действием силы тяжести имеет давнюю историю. В первую очередь отметим работу Рейнольдса [152], создавшего на основании экспериментов Тауэrsa основы теории смазки. В 1916 г. Нуссельт на основании уравнений Навье-Стокса получил точное решение этой задачи для ньютоновской жидкости, приведенное в [32]. В конце 40-х годов 20-го века Капица П.Л. и Капица С.П. экспериментально и теоретически изучили стекание жидких пленок

по вертикальным поверхностям и описали режимы течения с плоской свободной поверхностью и с поверхностью, покрытой волновыми структурами [153, 154].

В 1959 г. была опубликована монография Дерягина Б.В. и Леви С.М. [155]. Значительное место в ней отведено технологическим и физико-химическим аспектам проблемы движения слоев и пленок нелинейно-вязких жидкостей. Теоретический анализ касается в основном реологически простых (ньютоновских) жидкостей. Для вязкопластичной жидкости Шведова-Бингама определены зависимости толщины слоя, остающегося на твердой поверхности, от предельного напряжения сдвига при малых значениях этого параметра. Поля скоростей и касательных напряжений не рассчитывались. Отметим еще две специализированные монографии Воронцова Е.Г. и Танайко Ю.М. [156, 157], посвященные пленкам ньютоновских жидкостей, стекающих по неподвижным твердым поверхностям.

Одно из первых систематических описаний реодинамики и теплообмена в пленках неньютоновских жидкостей при ламинарном режиме течения дано в книге Шульмана З.П. и Байкова В.И. [158]. Получены решения стационарных и нестационарных краевых задач течения и теплообмена для случаев: стекания пленки в ламинарном и ламинарно-волновом режимах; увлечения покоящейся жидкости движущимся телом; движения пленки при вибрациях стенки. Для описания реологических свойств нелинейно-вязких жидкостей авторами использовались модели (1.3) и (1.6). Влияние вибраций на течение изучалось для псевдопластичной жидкости с $0.15 \leq n \leq 1$ и идеально пластичного тела Сен-Венана.

В работе [159] теоретически и экспериментально рассматривалась классическая задача Стокса о распространении сдвиговой волны в горизонтальном слое вязкопластичной жидкости, находящейся на твердой поверхности, совершающей колебания в своей плоскости. Жидкость описывалась реологической моделью Гершеля-Балкли. Найдены пороговые значения частоты и амплитуды колебаний поверхности, при которых в жидкости возникает сдвиговое течение, а также описана динамика жестких зон.

В работе [160] получено выражение для скорости стационарного безволнового режима движения пленки Шведова-Бингама и определено положение границы раздела фаз. Решена задача ламинарного волнового течения тонкой пленки вязкопластичной жидкости по вертикальной поверхности. Показано, что увеличение предельного напряжения сдвига приводит к подавлению образования волн на поверхности пленки.

Гидродинамике и теплообмену в неньютоновских жидкостях при пленочном и свободно-конвективном течении в гравитационном поле применительно к процессам химической технологии посвящена диссертация Байкова В.И. [161]. Предложен общий подход для расчета течений пленок и определения остатков жидкостей на стенках полости при их опорожнении. Получены аналитические выражения для основных параметров ламинарного и ламинарно-волнового течений, а также теплообмена пленки вязкопластичной жидкости. На основе предложенных автором методов проведен расчет основных характеристик течения в зависимости от реологических свойств и термочувствительности жидкости, параметров вибраций, касательного напряжения на границе раздела фаз. Динамическому воздействию на движение слоя вязкопластичной жидкости посвящена статья [162]. Структура течения вязкопластичной пленки при гидродинамическом взаимодействии жидкой и квазитвердой фаз обсуждаются в работе [163].

Пленочные течения широко встречаются в различных областях промышленности. Так в деревообрабатывающей промышленности применяется процесс нанесения лакокрасочных покрытий наливом, когда детали проходят под устройством, формирующим плоскую струю падающего вниз лакокрасочного материала. Основным параметром процесса является толщина покрытия. В [164] рассматривается стационарное, стабилизированное течение плоской струи жидкости Шульмана (1.8) вдоль подвижной наклонной пластины. Исследуется зависимость толщины пленки жидкости, остающейся на твердой поверхности, от расхода лакокрасочного материала. Извлечение твердой подложки из жидкости широко используется в промышленности при получении фотоматериалов,

керамических конденсаторов, декоративных и защитных покрытий. Толщина пленки вязкопластичной жидкости Шведова-Бингама, получаемой при извлечении из нее твердой подложки, была предметом экспериментальных исследований работы [165]. Влияние реологических свойств обобщенной ньютоновской жидкости на медленное растекание пленки по горизонтальной твердой поверхности изучено в статье Городцова В.А. [166].

Ползущее течение тонкого слоя вязкопластичной жидкости на основании кусочной модели с двумя вязкостями, моделей Шведова-Бингама, Гершеля-Балкли и Сен-Венана изучалось в работах [167, 168]. Позднее, медленное стационарное движение тонкого полубесконечного слоя жидкости Шведова-Бингама по наклонной твердой поверхности было исследовано в работе [169], где, как и в настоящей диссертации, определялись профили скорости, вязких напряжений и скоростей сдвига. В этой работе проводилось сравнение результатов, полученных для модели Шведова-Бингама, кусочной модели и модели Гершеля-Балкли. Отдельно изучалось движение переднего фронта, и рассчитывались функции, описывающие изменение толщины слоя и положение границы раздела жидкой и жесткой зон.

Реологическая модель Гершеля-Балкли применялась в работах [170, 171] для моделирования геофизических явлений. В [170] в приближении тонкого слоя рассматривалось растекание вязкопластичной жидкости от точечного источника. В [171] была создана математическая модель движения селевого потока, который представлялся в виде слоя вязкопластичной жидкости движущейся по наклонной криволинейной поверхности. Численно исследовалось влияние кривизны поверхности на структуру стационарного течения и его устойчивость. Результаты численных расчетов сопоставлялись с данными модельных экспериментов, выполненных в этой же работе.

В [172, 173] в приближение мелкой воды численно исследованы движения слоев идеально-пластичной жидкости Сен-Венана и вязкоупругой жидкости Максвелла. В работе [172] в рамках модели, учитывающей искривление твердой поверхности, по которой стекает вязкопластичная жидкость, проводится расчет

одномерных и двумерных течений. Показано что модель может быть применена для описания движения мелких плотных снежных лавин. В [174] рассмотрено движение тонкого вязкопластического слоя бингамовской жидкости по наклонной искривленной поверхности. Анализ производился для ползущего течения при конечном и малом углах наклона. Решение задачи в рамках предложенной физической модели привело авторов к выводу, что либо модель Шведова-Бингама некорректно описывает движение смазки по неровной поверхности, либо приближение теории смазки терпит неудачу при описании тонких бингамовских слоев.

В третьей главе диссертации рассматривается задача устойчивости плоскопараллельного течения пленки жидкости Уильямсона (1.5) по наклонной твердой поверхности, относительно малых плоских возмущений.

Первые результаты, касающиеся устойчивости стационарного течения пленки ньютоновской жидкости, получены в работах [175, 176], где показано, что возмущения вида $\exp(ikx - \lambda t)$ нарастают при значениях чисел Рейнольдса $Re > 1.25 \operatorname{tg}(\alpha)$, где α - угол наклона плоскости, отмеряемый от вертикали.

Выше уже отмечалось, что неустойчивость ламинарного течения слоя жидкости приводит к появлению на его свободной поверхности волновых структур. Волновые структуры на поверхности вязкопластичных пленок в диссертационной работе не изучались, однако, уместно упомянуть ряд работ посвященных их описанию.

Впервые уравнения, описывающие волновую динамику тонких слоев ньютоновской жидкости для бесконечно малых чисел Рейнольдса, были получены в работе [177]. Система нелинейных уравнений, описывающая волны в слое конечной толщины при умеренных числах Рейнольдса, была предложена Шкадовым В.Я. в работе [178] и использована в этой работе для описания линейной устойчивости движущегося слоя. Волновые числа, соответствующие области неустойчивости, полученные на основании уравнений Шкадова, фактически совпадает с данными работ [175, 176].

При малых расходах изучение эволюции длинноволновых возмущений в ньютоновской жидкости сводится к решению нелинейного приближенного уравнения, описывающего изменение толщины пленки [179 - 181]. Аналитически установившиеся волны удастся получить только для волновых чисел k , близких к значению волнового числа k_n , соответствующего нейтральным возмущениям по линейной теории [180, 181]. Периодические решения для конечного интервала волновых чисел $0.5k_n \leq k \leq k_n$ численно получены в работе [182]. В статьях Цвелодуба О.Ю. [183, 184] эти решения найдены практически во всем диапазоне волновых чисел $0 \leq k \leq k_n$, соответствующем области неустойчивости по линейной теории. В частности, получены солитонные решения [184]. Численному исследованию эволюции конечных возмущений на поверхности тонкого слоя вязкой ньютоновской жидкости посвящена работа [185]. Показано, что формирующаяся волновая структура проходит через сложные промежуточные формы, картина которых зависит от начальных условий. При больших временах в слое формируется волновой режим, близкий к оптимальному для данного значения волнового числа. Некоторую систематизацию данных о методах и подходах к решению задач о течении тонких жидких слоев по твердой поверхности, а также теоретические и экспериментальные результаты решения таких задач можно найти в монографии [186] и в обзорах [187, 188].

Развитие вычислительной техники в последнее время привело к появлению новых подходов в данной области. Например, в работах Трифонова Ю.Я. [189, 190] разработан метод решения полной краевой задачи для уравнений Навье-Стокса. Автор рассматривает периодические вдоль слоя решения, что позволяет представить их в виде рядов Фурье.

В монографии [76] приводятся обобщенные постановки задач устойчивости плоскопараллельных течений вязкопластичных жидкостей. Для течений Куэтта, Пуазейля и движения слоя по наклонной плоскости получены интегральные оценки устойчивости.

Волновая динамика пленок степенной (1.3) и бингамовской (1.6) жидкостей впервые была описана в упоминавшейся выше монографии [158]. Авторами на

основе метода Шкадова найдены первые нелинейные приближения. В работах [191-193] этот метод был развит и применен для более детального описания волн, возникающих на поверхности пленки степенной жидкости. В [193] подробно изучены регулярные периодические нелинейные волны, исследованы различные семейства решений такого типа и их ветвление. В работе Цвелодуба О.Ю. и Шушеначева В.Ю. [194] рассмотрено стекание тонкой пленки степенной жидкости по вертикальной поверхности. Для случая малых расходов в длинноволновом приближении получено уравнение, описывающее распространение волн по поверхности пленки. Найдена область линейной устойчивости тривиального решения, кроме того получены аналитические решения данного уравнения в слабонелинейном приближении. Показано, как происходит ветвление семейств решений в особой точке нейтральной кривой. Обобщение полученного в [194] уравнения для произвольной формы тензора вязких напряжений представлено в работе [38]. Для степенной жидкости были выполнены численные расчеты и найдены солитонные решения.

Необходимо отметить ряд работ Могилевского Е.И., выполненных под руководством Шкадова В.Я. В [195, 196] изучено стационарное течение пленки ньютоновской жидкости по криволинейной вращающейся поверхности и найдена форма поверхности, на которой растекающаяся пленка сохраняет постоянную толщину. Найдены значения безразмерных параметров, при которых отклонение поверхности от плоскости приводит к стабилизации течения. Описана эволюция нелинейных волн. В работах [197-200] рассматриваются задачи линейной устойчивости плоскопараллельных течений обобщенных ньютоновских жидкостей. Решены задачи устойчивости течения пленок степенной жидкости, жидкостей Эйринга и Шведова-Бингама по вертикальной плоскости. Для жидкости Шведова-Бингама, где толщина квазитвердой зоны полагалась бесконечно малой по сравнению с толщиной пленки, течение оказалось наиболее устойчивым. Показано, что для псевдопластических жидкостей область волновых чисел, соответствующих растущим возмущениям, шире, чем для дилатантных. Обнаружен эффект стабилизации пленки степенной жидкости при малых

значениях показателя неньютоновости. Выведена система эволюционных уравнений, описывающая развитие нелинейных волн в пленке обобщенной ньютоновской жидкости. Изучено влияние неньютоновских свойств и реологических моделей на течение пленки, его устойчивость и характеристики нелинейных волн. Показано, что при слабом проявлении неньютоновских свойств модели Освальда де-Вилля и Эйринга дают близкие результаты.

В [201, 202] рассмотрено стекание пленки ньютоновской жидкости, по осциллирующей наклонной твердой поверхности. В [201] приведен профиль основного течения пленки в случае, когда поверхность колеблется в своей плоскости со скоростью $V_0 \cos(\omega t)$. В линейном приближении для таких колебаний плоскости получены условия устойчивости течения жидкой пленки. Устойчивость течения пленки жидкости по наклонной пластине, подверженной периодическим колебаниям, под действием силы тяжести и с учетом поверхностного натяжения исследуется в работах [203, 204], где для анализа используется теория Флоке. Численные результаты, приведенные в [203], показывают, что колебания твердой поверхности значительно повышают устойчивость системы относительно длинноволновых возмущений, а при малых углах наклона, существует критическая амплитуда вибраций, ниже которой полностью подавляются волны Фарадея. В [204] определены собственные значения линейной задачи устойчивости. Проведено исследование бифуркаций для резонансных мод, рассчитаны коэффициенты усиления и фазовые скорости для поверхностных волн, волн Толмина-Шлихтинга и резонансных волн. Изучено влияние наклона плоскости, поверхностного натяжения и толщины слоя на устойчивость.

Гидродинамическая устойчивость периодического во времени течения пленки вязкопластичной жидкости в зависимости от расхода, частоты и амплитуды колебаний твердой подложки, касательного напряжения на границе раздела фаз исследовались в уже упоминавшейся выше работе [160]. Показано, что колебания подложки дестабилизируют течение и вызывают развитие волн,

при определенных частотах колебаний возможно подавление волнообразования в пленке.

Большой раздел третьей главы посвящен исследованию влияния асимметричных вибраций твердой подложки на течение слоя вязкопластичной жидкости. Отметим, что в классической механике наиболее полно изучено влияние линейно-поляризованных гармонических колебаний на механические системы. Асимметричные колебания рассматриваются значительно реже. В тоже время в работах Тарунина Е.Л. [205-207] показано, что именно этот вид колебаний дает некоторые интересные эффекты. Существует несколько вариантов асимметричных колебаний [208]. В диссертации используется вариант, который предложен в работе [209]. Асимметрия колебаний обуславливается различными временами движения несущей поверхности (подложки) в противоположных направлениях. В обзоре [205] показано, что в различных задачах механики асимметричные воздействия существенно влияют на поведение системы и её устойчивость, особенно на резонансных частотах. Вопрос о роли асимметричных колебаний в задачах гидродинамики почти не исследовался. Автору известны лишь три работы [206, 207, 210], касающиеся этой тематики. В работе [210] было показано, что асимметричные вибрации твердого тела в нелинейно-вязкой среде приводят к осредненному смещению вибрирующей поверхности. Это смещение зависит от степени асимметричности вибраций и величины нелинейного трения. Статьи [206, 207] посвящены влиянию асимметричных вибраций на конвективное движение ньютоновской жидкости. Показано, что несимметричные модуляции поля тяжести оказывают существенное влияние на интегральные характеристики, определяющие устойчивость системы. Для горизонтального слоя и замкнутой полости, подогреваемых снизу, получены зависимости критической амплитуды модуляции и предельных характеристик течения от параметра асимметрии. Описано влияние асимметричных вращательных колебаний замкнутой полости на критическое значение амплитуды и на вид бифуркационной диаграммы.

При описании поведения обобщенных ньютоновских сред весьма популярными являются различные модификации степенной реологической

модели. Например, в недавней работе [211] для описания движения закрученного слоя вязкопластичной жидкости по вертикальной цилиндрической поверхности использована реологическая модель Гершеля-Балкли, которая является одним из вариантов модели Шульмана (1.8). В работе были получены распределения компонент скорости и толщины пленки по осевой координате для различных значений реологических параметров жидкости. В статье [212] проводится сравнение различных реологических моделей на примере задач о течении пленки и о плоском течении Пуазейля. Исследуются различия гидродинамических характеристик течения при условии, что реологические свойства сред близки. Рассмотрено несколько псевдопластичных сред (полиэтилен, кровь, мыло, целлюлоза), для которых известны значения реологических параметров в различных моделях. Показано, что для жидкостей имеющих явно выраженные вязкопластичные свойства, степенные модели, в частности модель (1.3), не позволяют получать адекватные результаты.

В большинстве работ, посвященных движению пленок вязкопластичных материалов, например, упоминавшиеся здесь работы [155, 158, 160, 162-165], авторы используют модель Шведова-Бингама, которая имеет один, весьма существенный, недостаток. В рамках этой модели между жидкой и жесткой зонами должна быть определена четкая граница, на которой ставятся дополнительные условия, связывающие решения в различных областях течения жидкости. Само положение границы раздела зон определяется в ходе решения задачи. Ситуация сильно осложняется, когда рассматриваются нестационарные задачи или задачи устойчивости течения вязкопластичных пленок. Модель (1.6) не позволяет корректно единым образом описать сложное нестационарное движение пленки во всей области течения. В упоминавшейся выше работе [174] отмечается, что возникающие в рамках модели Шведова-Бингама проблемы при описании ползущей по искривленной твердой поверхности пленки вязкопластика могут быть связаны с приближением абсолютной жесткости слоя жидкости примыкающего к свободной поверхности пленки.

Учитывая все вышесказанное, представляется целесообразным применять реологические модели, сохраняющие физически важное свойство вязкопластичных сред – резкое уменьшение текучести при малых скоростях деформации и являющиеся, в то же время, аналитическими. Особенно интересны реологические уравнения, которые допускают предельный переход к модели Шведова-Бингама (1.6). Этим требованиям удовлетворяет, использованная в настоящей диссертации, модель Уильямсона (1.5).

Четвертая и пятая главы диссертации посвящены изучению неизотермических состояний обобщенных ньютоновских жидкостей. Известно, что наличие градиента температуры в жидкости может привести к нарушению её равновесного состояния и возникновению в ней конвективных течений. Основы теории гидродинамической устойчивости неоднородно нагретых жидкостей обсуждаются в [1, 2, 79, 80, 213, 214].

Одним из эффективных средств воздействия на устойчивость равновесия и структуру конвективных течений являются вибрации. Нелинейность реологической модели существенно увеличивает многообразие эффектов связанных вибрациями, что демонстрируется в четвертой главе на примере классических задач термовибрационной конвекции.

Высокочастотные колебания полости с жидкостью в неоднородном поле температуры вызывают вибрационно-конвективные течения, в котором все физические поля разделяются на пульсационную и осредненную компоненты [215, 216]. Когда период колебаний много меньше всех гидродинамических времен, а амплитуда смещения в некотором смысле мала, возможно применение метода осреднения [217], который позволяет получить замкнутую систему уравнений для осредненных полей. Вывод уравнений термовибрационной конвекции на основании этого метода был впервые предложен Симоненко И.Б. и Зеньковской С.М. [218]. Систематическое описание основных положений термовибрационной конвекции приведено в монографии Гершуни Г.З и Любимова Д.В. [219]. В первой части этой монографии рассмотрены задачи о влиянии однородных вибраций на возникновение конвективных течений и их

устойчивость, при этом применялись уравнения конвекции в приближении Зеньковской-Симоненко [218]. Во второй части монографии показано, что в случае неоднородных вибраций возникающих, например, при наличии свободной поверхности раздела или границы раздела фаз уравнения термовибрационной конвекции отличаются от уравнений Зеньковской-Симоненко. В них появляются слагаемые более низкого порядка малости.

Известно, что вибрации не только влияют на конвективное течение, но и сами могут являться его причиной. Вибрационно-конвективные течения в невесомости впервые изучались в работах Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицкого [215, 216]. Влияние вибраций на конвекцию ньютоновской жидкости, находящейся в полости между двумя сферами в отсутствие поля тяжести, исследовалось в [106]. В указанной работе рассматривались термовибрационные и шликтинговские течения и их взаимодействие. Проведены как аналитические, так и численные исследования. Как было показано в работе Бириха Р.В. [220], в плоском слое жидкости с продольным градиентом температуры при линейнополяризованных высокочастотных вибрациях возникает плоскопараллельное адвективное течение даже в отсутствие поля тяжести. Структура возникающего течения близка к гравитационному адвективному течению в плоском слое при продольных вибрациях [221], или конвективному течению в вертикальном слое с наклонным градиентом температуры. Интенсивность и устойчивость таких течений зависит от направления вибраций. В работе [222] показано, что высокочастотные поперечные вибрации повышают устойчивость плоскопараллельного адвективного течения между двумя твердыми плоскостями при всех значениях числа Прандтля, кроме диапазона, в котором неустойчивость вызывается спиральной колебательной модой.

В четвертой главе с помощью метод многих масштабов [5] и метода осреднения [6] выводятся уравнения термовибрационной конвекции для обобщенной ньютоновской жидкости. На основании полученных уравнений формулируется условие квазиравновесия для обобщенной ньютоновской жидкости. Для обычной ньютоновской жидкости такое условие можно найти в

[80]. Под квазиравновесием понимается такое состояние, при котором на фоне быстрого периодического пульсационного движения в жидкости отсутствуют осредненные течения.

В диссертации из общего условия квазиравновесия было сформулировано условие жесткого состояния для наклонного бесконечного слоя вязкопластичной жидкости, ограниченного твердыми поверхностями. В жестком состоянии вязкопластик ведет себя как твердое тело, т.е. в нем практически отсутствует какое-либо течение. Впервые подобное условие для вертикального слоя жидкости Шведова-Бингама было сформулировано в [223]. Обобщение условия жесткого состояния вертикального слоя на случай зависящих от температуры реологических параметров, можно найти в работе [224]. Один из вариантов этого условия для вертикального слоя жидкости Бингама при наклонном градиенте температуры можно найти в статье [225].

Работы, связанные с исследованием устойчивости жестких состояний вязкопластичных жидкостей автору не известны. Однако следует отметить, что результаты исследования устойчивости жесткого состояния вязкопластичной жидкости в плоском наклонном слое подверженном вибрациям в пределе ньютоновской жидкости согласуются с данными работ [226 - 228].

В пятой главе диссертации изучается устойчивость стационарного конвективного течения жидкости Уильямсона в вертикальном бесконечном слое. Особое внимание, как и в предыдущих главах, уделяется вязкопластичному пределу этой модели.

Остановимся подробнее на известных работах связанных с конвективным течением нелинейно-вязких сред, которые относятся к классу обобщенных ньютоновских жидкостей. Как уже отмечалось выше, одной из первых монографий, где описывались среди прочего явления тепло- и массопереноса в неньютоновских жидкостях является монография [36], в которой для модели Освальда де-Вилля приведены уравнения движения и теплопереноса в пределах пограничного слоя, возникающего вблизи твердой поверхности. Конвективное течение степенной жидкости вблизи твердой нагретой стенки и устойчивость

такого течения рассматривались также в более поздних работах [229-231]. Систематическому описанию свободной конвекции в неньютоновских жидкостях посвящена монография Шульмана З.П., Байкова В.И. и Зальцгендера Э.А. [232].

Проблема устойчивости равновесия степенных жидкостей при подогреве снизу обсуждалась в работе [233], где с помощью энергетического метода была получена оценка для критических чисел Релея, определяющих возникновение конвекции. Однако, для нулевой или бесконечно большой вязкости при нулевой скорости сдвига, конечные критические числа Релея, определяющие порог неустойчивости равновесия по отношению к бесконечно малым возмущениям, отсутствуют. Для суждения об устойчивости равновесия степенной жидкости необходимо рассматривать конечные возмущения. Некорректность применения энергетического метода в [233] была отмечена в статье [234]. Для жидкостей с конечной по величине начальной вязкостью может быть применен линейный анализ устойчивости, а измерение критических градиентов температуры может служить достаточно точным методом определения начальной вязкости [235].

Примером использования различных вариантов степенной реологической модели при изучении конвективных течений в нелинейно-вязких средах могут служить работы Семакина И.Г [59, 60, 236 - 238]. В статьях [59, 60] рассмотрена устойчивость конвективного течения нелинейно-вязкой жидкости на основе трехпараметрической модели (1.4). Показано, что псевдопластические свойства жидкостей оказывают дестабилизирующее действие, а дилатантные стабилизируют течение. В случае чисто степенной модели в работе [236] развит приближенный подход, основанный на введении понятия эффективной вязкости. Согласно этому подходу рассматривается истинное (неньютоновское) распределение скорости основного течения [237], а уравнения возмущений записываются в том же виде, что и для обычной ньютоновской жидкости с заменой вязкости на эффективную. В статье [238] методом конечных разностей изучались конечно-амплитудные движения степенной жидкости, развивающиеся после потери устойчивости основного течения; роль регуляризующего степенную модель фактора выполнял при этом дискретный шаг пространственной сетки.

Конвективные движения, возникающие в степенной неньютоновской жидкости при вертикальном или почти вертикальном подогреве, исследовались также в работах Любимовой Т.П. и Любимова Д.В. [61, 239], где были построены реологические модели, обобщающие степенную реологическую модель на случай конечной по величине начальной вязкости (текучести). В рамках этих моделей определены критические значения числа Релея и слабо-нелинейное поведение вблизи порога возникновения конвекции. Показано, что для псевдопластической жидкости с конечной по величине начальной вязкостью имеет место подкритическая бифуркация, а в случае дилатантной жидкости с конечной по величине начальной вязкостью – надкритическая бифуркация. Ответвляющиеся в результате подкритической бифуркации стационарные режимы конвекции псевдопластической жидкости неустойчивы, а ответвляющиеся в результате надкритической бифуркации стационарные режимы конвекции дилатантной жидкости устойчивы.

Возникновение и нелинейные режимы конвекции степенной жидкости в подогреваемой снизу квадратной полости численно исследованы в [240]. Обнаружено, что равновесие псевдопластической жидкости при подогреве снизу устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям при всех числах Релея; конвекция возбуждается в результате развития конечно-амплитудных возмущений, т.е. имеет место подкритическая бифуркация. Разработана методика и с ее помощью численно получены неустойчивые ветви решений. Численное исследование конечно-амплитудной конвекции степенной жидкости проводилось также в работе [241], однако конечно-амплитудный характер возбуждения конвекции и наличие неустойчивых ветвей решения в этой работе не было замечено из-за способа определения критического числа Релея.

Выше уже обсуждались основания для использования реологической модели Уильямсона (1.5) при описании вязкопластичных сред. Впервые модель (1.5) была применена для изучения течений вязкопластичной жидкости в работе [77], где проведено исследование плоскопараллельной конвекции жидкости в вертикальном слое при подогреве снизу. Данная конвективная задача хорошо

изучена для ньютоновской жидкости [79], а также для среды Шведова-Бингама [70, 223, 232]. В работах [70, 223] рассматривалось одномерное, а [232] почти одномерное течение. При исследовании существенно неоднородного конвективного движения вязкопластичной среды, например в замкнутой полости, модель Шведова-Бингама не позволяет единым образом описать конвекцию жидкости во всей полости. Проведенное в [77] исследование позволило сделать вывод о возможности применения реологической модели Уильямсона для описания движения вязкопластичных сред.

Дальнейшее развитие исследований конвективных течений вязкопластичной жидкости, описанной моделью Уильямсона, было сделано в работах Любимовой Т.П. [78, 242]. В [78] численно исследовалась конвекция вязкопластичной жидкости в длинном горизонтальном цилиндре квадратного сечения при нагреве сбоку. Работа [242] посвящена рассмотрению плоского конвективного движения в прямоугольной области. На вертикальных участках границы поддерживаются постоянные (разные) температуры; на горизонтальных участках температура меняется по линейному закону.

В работе [243] сформулированы два вариационных принципа и с их помощью определены пороговые значения числа Релея и форма зон квазитвердого течения при возникновении конвекции жидкости Шведова-Бингама в вертикальных прямоугольных полостях с разными отношениями сторон, при нагреве сбоку. Найдено, что пороговое число Релея пропорционально безразмерному предельному напряжению сдвига с коэффициентом пропорциональности, уменьшающимся с увеличением отношения высоты полости к ее ширине. Конвективное движение возникает при $Ra = Ra_*$ одновременно в узких вертикальных слоях вблизи стенок и в центральной части полости, а также в узких горизонтальных слоях вблизи горизонтальных границ и в узких прослойках, соединяющих горизонтальные и вертикальные слои. При увеличении отношения сторон коэффициент пропорциональности и форма зон квазитвердого движения приближаются к тем, что имеют место в случае плоского вертикального слоя.

В работе [69] исследована устойчивость равновесия и конвективных течений неньютоновской жидкости, описываемой кусочно-линейной реологической моделью. Рассматривался плоский вертикальный слой, на границах которого поддерживался постоянный вертикальный градиент температуры, соответствующий подогреву снизу. В случае ньютоновской жидкости задача о стационарном плоскопараллельном течении линейна и ее нетривиальные решения существуют лишь при некоторых определенных значениях числа Релея, которые образуют дискретный спектр и являются критическими значениями, определяющими потерю устойчивости равновесия [80]. В случае неньютоновской жидкости имеется нелинейная задача, и стационарные решения существуют во всех точках некоторого интервала значений числа Релея. Амплитуда скорости движения определяется из решения нелинейной краевой задачи. Получены аналитические выражения, определяющие зависимости от числа Релея амплитуды скорости движения и координат точек, в которых меняется вязкость. Найдено, что стационарное плоскопараллельное движение псевдопластической жидкости ($\mu > 1$) существует в интервале значений числа Релея $\pi^4 < Ra < \mu\pi^4$, где μ - отношение вязкостей, соответствующих различным участкам кусочно-линейной реологической модели. Для $\mu > 1$ равновесие устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям при $\pi^4 < Ra < \mu\pi^4$ и неустойчиво при $Ra > \mu\pi^4$. В области $\pi^4 < Ra < \mu\pi^4$ равновесие неустойчиво относительно конечно-амплитудных возмущений. При $Ra < \pi^4$ равновесие устойчиво по отношению к любым возмущениям. Устойчивых стационарных движений конечной амплитуды при $\mu > 1$ нет, что связано со специфической геометрией задачи. С увеличением μ число Релея, определяющее верхнюю критическую точку, возрастает и стремится к бесконечности, когда $\mu \rightarrow \infty$. Предельный случай $\mu \rightarrow \infty$, соответствующий жидкости Бингама, был рассмотрен в [70], где было показано, что механическое равновесие устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям при всех числах Релея.

Численное исследование возникновения и нелинейных режимов конвекции в вязкопластической жидкости при подогреве снизу было впервые осуществлено в работе [150]. Расчеты были проведены в рамках модели Уильямсона, с учетом температурной зависимости вязкости и предельного напряжения сдвига. Подтверждено, что конвекция возникает в результате подкритической бифуркации; равновесие устойчиво по отношению к малым возмущениям при всех числах Релея.

В работе [244] исследовано влияние предела текучести на неустойчивость Релея-Бенара в плоском горизонтальном слое, подогреваемом снизу. Как и в [150] сделан вывод о том, что, равновесие жидкости линейно устойчиво при всех числах Релея. Показано, что ниже критического числа Релея Ra_E по данным энергетического анализа для ньютоновской жидкости равновесие бингамовской жидкости также глобально асимптотически устойчиво. Для чисел Релея, больших Ra_E , определены зависимости порога устойчивости от числа Бингама, числа Прандтля и величины начальных возмущений. Показано, что характер неустойчивости существенно иной, чем в случае ньютоновской жидкости.

В [245] возникновение конвекции Релея-Бенара в горизонтальном слое вязкопластической жидкости, подогреваемом снизу, исследовано экспериментально. Сделан вывод о том, что безразмерным параметром, определяющим условия возникновения конвекции, является отношение предельного напряжения сдвига к напряжениям, создаваемым плавучестью. Определены критические значения этого параметра для случаев прилипания и проскальзывания на границах.

Экспериментальному исследованию конвекции вязкопластической жидкости в подогреваемых снизу вытянутых по горизонтали прямоугольных плоскостях посвящена работа [246]. Найдено, что во всех случаях конвекция возникает в результате несовершенной бифуркации, описываемой теорией фазовых переходов Ландау. Сделан вывод о том, что возникновение конвекции лучше описывается в терминах критического напряжения сдвига, чем в терминах критического числа Релея.

Характер возбуждения конвекции вязкопластической жидкости в плоском горизонтальном слое, подогреваемом снизу, исследован в работе [247]. Аналогично результатам, полученным ранее в [69, 70, 150, 240], найдено, что в случае бесконечной вязкости при нулевой скорости сдвига или при наличии предела текучести критическое число Релея, определяющее линейную устойчивость, бесконечно. Конвекция возбуждается конечно-амплитудным образом. Для случая конечной вязкости при нулевой скорости сдвига, показано, что критическое число Релея, определяющее линейную устойчивость равновесия, совпадает с соответствующим значением для ньютоновской жидкости той же вязкости. Слабо-нелинейное поведение зависит от того, как быстро уменьшается вязкость с ростом скорости сдвига: при умеренном темпе роста интенсивность конвекции при заданной разности температур больше, чем в ньютоновской жидкости, а при резком росте бифуркация является подкритической. Лабораторные эксперименты с карбополом подтвердили, что при наличии предела текучести конвекция при подогреве снизу возможна, но для ее возбуждения требуются конечно-амплитудные возмущения.

В работе [248] исследовано возникновение конвекции Релея-Бенара-Пуазейля в плоском канале для вязкопластической жидкости с произвольным пределом текучести. В рамках линейной теории устойчивости и с помощью энергетического подхода исследовано влияние предела текучести на критическое число Релея. Показано, что критическое число Релея повышается с ростом предельного напряжения сдвига. При малых числах Рейнольдса критические значения числа Релея, полученные в рамках двух подходов, близки, с увеличением числа Рейнольдса разница между ними возрастает. При числах Рейнольдса, меньших единицы, и больших числах Бингама B критическое значение числа Релея растет с увеличением B по квадратичному закону, а критическое волновое число как $B^{1/4}$.

Задача об одномерном стационарном конвективном течении вязкопластической жидкости между двумя вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур, была впервые рассмотрена в

работе [223]. Показано, что при числах Грасгофа, меньших некоторого значения Gr_* течение отсутствует, а при больших числах Грасгофа реализуется стационарное плоскопараллельное течение с восходящим потоком у горячей пластины и нисходящим у холодной пластины. При этом, профиль скорости характеризуется наличием в центральной части каждой из половин слоя плато, в котором напряжение сдвига меньше предела текучести, а скорость сдвига равна нулю. Получена линейная связь между Gr_* и безразмерным пределом текучести среды. В работе [224] та же задача решена для случая, когда предельное напряжение сдвига зависит от температуры. Показано, что в этом случае возможно несколько стационарных режимов конвекции, различающихся формой профиля скорости и структурой зон квазитвердого и вязкопластического течения. Получена карта существования различных режимов на плоскости параметров задачи. Отметим здесь также работу Черкасова С.Г. [249], где исследована комбинированная конвекция жидкости Бингама с предельным напряжением сдвига, зависящим от температуры, между двумя вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур.

В упомянутой выше работе [225] стационарное плоскопараллельное течение жидкости Бингама между двумя вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур, исследовано для случая, когда, кроме горизонтального, имеется стабилизирующий вертикальный градиент температуры. Решение определяется числом Бингама B , и параметром стратификации Γ . При $B > B_{cr}$ ($B_{cr} = 1/16$) напряжение сдвига ниже предела текучести во всем слое и теплоперенос является чисто теплопроводным. При $B \leq B_{cr}$ появляются зоны с напряжением сдвига, превышающим предел текучести, вблизи границ и в центре канала. При увеличении Γ и уменьшении B в канале может возникнуть произвольно большое число зон, в которых напряжение сдвига меньше предела текучести. Построена карта режимов на плоскости Γ - B и исследованы режимы с 1, 2 и 3 зонами, занимающие большую площадь на плоскости Γ - B .

Выше неоднократно указывалось на тот факт, что исследование не одномерных течений вязкопластических жидкостей на основании модели Шведова-Бингама является весьма сложной задачей, т.к. надо выполнять решение отдельно в области квазитвердого течения, где напряжения меньше предела текучести, и в области вязкопластического течения, где они превышают предел текучести. Граница раздела между областями является криволинейной, а её положение, неизвестное заранее, должно определяться в ходе решения. Кроме того, модель Шведова-Бингама предполагает наличие жесткой зоны, где любое сдвиговое течение отсутствует, что не совсем корректно отражает поведение реальных вязкопластических сред. В работе [78] для численного моделирования не одномерных течений вязкопластических жидкостей было предложено использовать модель Уильямсона. При использовании этой модели численное моделирование проводится единым образом во всей полости, а граница между зонами квазитвердого и вязкопластического течения определяется по найденным полям скорости. В этой работе впервые были исследованы возникновение и нелинейные режимы конвекции вязкопластической жидкости в замкнутой полости при нагреве сбоку. Рассмотрен случай квадратной полости. Аналитически, из условия баланса моментов сил, получено выражение, определяющее зависимость порогового значения числа Релея, при котором возникает конвекция жидкости Бингама от предельного напряжения сдвига: $Ra_* = 32\tau_0$, где $\tau_0 = \tau_0 h^2 / (\mu_p \chi)$ - безразмерное предельное напряжение сдвига, за единицу длины принята сторона квадрата h . Предполагалось, что конвективное движение возникает при $Ra = Ra_*$ в узком кольцевом зазоре, примыкающем к границам полости. Жидкий зазор разделяет центральную зону квазитвердого течения, где вязкие напряжения меньше предела текучести, и застойные зоны в углах полости. Численные расчеты, проведенные в рамках модели Уильямсона, подтвердили это предположение и дали пороговые значения числа Релея близкие к полученным аналитически. В [78] прослежена эволюция формы квазитвердой зоны с увеличением числа Релея. Найдено, что с ростом Ra_* происходит

трансформация от кольцевого зазора к зоне, имеющей вид креста, а при дальнейшем увеличении числа Релея, крест разбивается на несколько отдельных небольших зон. В работе [242] аналогичное исследование проведено для случая прямоугольной полости.

В работе [250] исследовано возникновение тепловой конвекции жидкости Бингама в прямоугольных полостях при нагреве сбоку. С помощью двухстороннего асимптотического разложения и численного моделирования получено выражение для критического значения предельного напряжения сдвига, пригодное в широком диапазоне отношений сторон полости и определена форма зон с напряжением сдвига, меньшим предела текучести. Результаты близки к найденным ранее в работах [78, 243].

В работах [71, 72] исследованы двумерные стационарные режимы тепловой конвекции в прямоугольных полостях с разными отношениями сторон, полностью заполненных жидкостью Бингама, при нагреве сбоку. Расчеты проводились с помощью коммерческого пакета ANSYS FLUENT, использующего двух-вязкостную модель. Получены зависимости числа Нуссельта от числа Бингама для разных отношений сторон.

Работы о термовибрационной конвекции нелинейно-вязких сред, которые можно отнести к классу обобщенных ньютоновских жидкостей, автору диссертации не известны.

Не достаточно, на взгляд автора диссертации, исследована также устойчивость конвективного течения псевдопластической и вязкопластической жидкостей. Поэтому в пятой главе диссертации предпринят линейный анализ устойчивости плоскопараллельного стационарного течения жидкости Уильямсона, находящейся между двумя параллельными вертикальными плоскостями, на которых поддерживаются постоянные разные температуры. Такая задача для ньютоновской жидкости рассматривалась в ряде работ [251-253], а результаты этих исследований обобщены в монографии [80]. Характер неустойчивости плоскопараллельного течения ньютоновской жидкости зависит от числа Прандтля. При $Pr < 12,45$ наиболее опасными являются возмущения

гидродинамической природы в виде вихрей на границе встречных потоков. При числах Прандтля, больших 12,45, неустойчивость возникает в результате развития тепловых волн.

1.5.2 Проводящая жидкость в магнитном поле

В шестой главе диссертации изучается тепло- и массоперенос в жидких металлах или расплавах, реология которых определяется ньютоновским законом. Отличительной особенностью таких жидкостей является их электропроводность. Данный параграф можно разделить на две части. Такое разделение связано с геометрией и физическими особенностями рассматриваемых в главе 6 задач.

В первой части этой главы рассматривается задача об адвективном течении слабо-проводящей жидкости в бесконечном горизонтальном канале прямоугольного сечения, находящемся в постоянном магнитном поле. Исследуется устойчивость такого течения при различных интенсивностях и ориентациях магнитного поля. Одно из практических применений результатов этих исследований связано с известным методом Бриджмена по выращиванию кристаллов.

Численному исследованию сопряженного конвективного теплообмена в вертикальном варианте метода Бриджмена посвящены работы Бердникова В.С. и Антонова П.В. [254-256]. Изучены эволюция пространственной формы течения расплава и распределение температурного поля в кристалле в режимах нестационарной теплопроводности и термогравитационной конвекции. При выращивании кристаллов из расплава неоднородность температурного поля и нестационарность течения приводит к неизбежным колебаниям поверхности раздела кристалл-расплав, которые существенно влияют на сегрегацию примесей в кристалле. Для устранения флуктуаций температуры и стабилизации течения, а, следовательно, улучшения качества кристалла необходимо уметь управлять движением расплава.

При обработке материалов для бесконтактного контроля за потоком проводящей жидкости часто применяют статические или вращающиеся

магнитные поля. В работах [257-261] было показано, что такие магнитные поля могут привести к подавлению тепловых мод возмущений. Однако поля различных конфигураций действуют на жидкость различными способами. В статическом поле влияние силы Лоренца зависит от интенсивности конвективного течения. Вращающееся магнитное поле может вызвать движение даже в расплаве, который первоначально находился в состоянии покоя.

В последние десятилетия, при обработке материалов в основном используют статические магнитные поля из-за их эффективного стабилизирующего влияния на движение расплава и, соответственно, подавления флуктуаций температурного поля. Величина приложенных в этом случае стационарных полей, как правило, не превышает нескольких сотен миллитесла [262, 263].

Пионерские экспериментальные работы по этой проблеме были проведены Утечем и Флемингом (Utech H.P., Flemings M.C.) [264], а также Хюрле с соавторами (Hurlle D.T.J.) [257]. Показано, что магнитное поле, приложенное перпендикулярно основному конвективному потоку, может быть использовано для подавления тепловых мод неустойчивости и стабилизации течения.

Изучение влияния магнитного поля на проводящую жидкость началось с решения классических задач устойчивости равновесия. Первая работа, посвященная задаче о равновесии подогреваемого снизу бесконечного горизонтального слоя со свободными границами, находящегося в статическом магнитном поле, была выполнена Томпсоном [265]. Независимо от Томпсона задача в аналогичной постановке для слоя как со свободными, так и с твердыми границами решена Чандрасекаром [266, 267]. Были найдены монотонные и колебательные моды неустойчивости. Впервые указано на тот факт, что вертикальное поле оказывает больший стабилизирующий эффект в сравнении с горизонтальным. Обобщение информации о влиянии статического магнитного поля на устойчивость равновесия проводящей жидкости можно найти в монографиях [79, 268].

В работах [269 - 271] изучено влияние однородного вращающегося магнитного поля для случаев высоких и конечных частот вращения. Влияние

неоднородного вращающегося магнитного поля на конвективную устойчивость горизонтального слоя в случае высоких частот вращения рассмотрено в диссертации Садилова Е.С. [272], а для конечных частот в диссертации Бурнышевой А.В. [273].

В работах [273, 274] рассматривалось стационарное плоскопараллельное течение в бесконечном горизонтальном слое, возбуждаемое горизонтальным градиентом температуры в присутствии статического вертикального магнитного поля. Исследована устойчивость такого адвективного течения. Показано, что все моды неустойчивости сильно стабилизируются полем. Анализ устойчивости аналогичного адвективного течения, но в горизонтальном магнитном поле, представлен в статьях [275, 276], где рассмотрены продольное и поперечное направления поля относительно приложенного градиента температуры. Сравнение с результатами, полученными для вертикального магнитного поля, говорит о том, что стабилизация горизонтальным полем менее эффективна. Энергетический анализ, выполненный в [275] показал, что стабилизация адвективных течений магнитным полем происходит из-за модификации основного течения, которая приводит к уменьшению дестабилизирующей энергии сдвига.

В работе [261] исследовалось влияние горизонтального поперечного к основному течению магнитного поля на колебания температуры в горизонтальной прямоугольной полости соотношением сторон 1:4. Численные и экспериментальные исследования, проведенные в этой работе, показывают, что двумерное конвективное течение в замкнутой полости существенно отличается от течений, наблюдаемых в бесконечных каналах. При достаточно больших числах Гартмана ($Ha > 100$) изменение вертикального градиента температуры и максимальной скорости основного течения пропорционально Ha^{-1} . На основании хорошо согласующихся между собой экспериментальных данных и численных расчетов делается вывод о том, что горизонтальное поперечное магнитное поле эффективно стабилизирует основное состояние жидкости; например, для

подавления тепловых мод неустойчивости в жидком галлии достаточно поля с $Ha = 64$.

Похожее уменьшение интенсивности течения и выравнивание температурного поля было обнаружено в экспериментальной работе [260], где изучалась конвекция ртути в горизонтальной цилиндрической замкнутой полости кругового сечения. Отношение диаметра полости к длине цилиндра 1:10. Полость находилась в стационарном однородном вертикальном магнитном поле. Структура установившегося течения исследовалась для больших значений числа Гартмана до 235, при этом получилось хорошее качественное согласие с асимптотическими предсказаниями, сделанными в работе [276].

В экспериментальных работах Хофа, Жюэль и Малина (Hof, Juel & Mullin) [277, 278] изучалось влияние направления и величины магнитного поля на конвективное течение жидкого галлия в прямоугольном сосуде с относительными размерами $5 \times 1,3 \times 1$ (длина \times ширина \times высота). Исследовалось затухание стационарного конвективного потока [277], а также стабилизация и затухание нестационарного колебательного течения [278]. Для нестационарных конвективных течений, так же, как и для стационарных, было обнаружено стабилизирующее влияние магнитного поля. Затухание колебаний конвективного потока наблюдалось уже при малых значениях числа Гартмана (между 1 и 10 в зависимости от ориентации магнитного поля). Для всех изученных направлений магнитного поля (вертикального, поперечного и продольного) интенсивность колебательного течения экспоненциально спадала с увеличением числа Гартмана. Из работ [277, 278] можно сделать вывод, что как для стационарных, так и для колебательных потоков, наиболее эффективным для стабилизации конвективного течения является вертикальное магнитное поле.

Представляется перспективным управление течением электропроводной жидкости с помощью внешнего магнитного поля. В последнее время исследования, проводимые в области МГД-конвекции, существенно активизировались, о чем свидетельствует большое количество новых результатов, полученных в конце прошлого и начале нынешнего века. Отметим здесь работы

Гранде, Альбусьера и Моро (Garandet, J. P., Alboussière, T. & Moreau, R.) [276, 279, 280]. Полученные этими авторами аналитические результаты основаны на асимптотических моделях, справедливых для больших значений чисел Гартмана.

В [276] получено аналитическое решение уравнений магнитной гидродинамики, которое может использоваться при моделировании влияния поперечного магнитного поля на конвекцию в двумерной замкнутой полости. Показано, что аналитическое решение для ядра справедливо во всей полости за исключением пограничного слоя у ненагретой стенки. Интенсивность течения в ядре спадает пропорционально Ha^{-2} . Влияние формы полости на скорость затухания течения аналитически исследовалось в [279]. Рассматривались вытянутые горизонтальные полости, находящиеся в однородном магнитном поле. В случае непроводящих границ было обнаружено, что симметрия полости существенно влияет на скорость затухания и структуру течения. Когда поперечное сечение полости имеет горизонтальную плоскость симметрии, интенсивность конвекции спадает пропорционально Ha^{-2} . Для несимметричных форм скорость уменьшения интенсивности конвективного течения определяется законом Ha^{-1} . В случае идеально проводящих границ полости характерная скорость конвективного течения всегда пропорциональна Ha^{-2} . В работе [280] получены интересные результаты, говорящие о затухании конвективных течений в магнитных полях любой ориентации. В этой работе также показана зависимость скорости затухания течения от симметрии формы полости.

В работе [281] приводятся результаты трехмерного численного моделирования конвективного течения расплавленного кремния, находящегося во внешнем стационарном магнитном поле. В полости создается внешний горизонтальный градиент температуры за счет разницы температур двух противоположных вертикальных стенок. Обнаружено, что в такой геометрии поперечное магнитное поле (направленное вдоль градиента температуры) наиболее эффективным для подавления конвекции в сравнении с вертикальной ориентацией поля (поле направлено перпендикулярно градиенту температуры). Те же авторы в экспериментальной работе [282], где рассматривалось влияние

магнитных полей на конвективное течение галлия в кубической полости при малых числах Нуссельта, получили результаты, качественно согласующиеся с данными численных расчетов [283].

В статьях Бен Ади и Анри (Н. Ben Hadid, D. Henry) представлены расчеты двумерных и трехмерных течений ртути с числом Прандтля $Pr = 0,026$ в горизонтальных цилиндрических [283] и прямоугольных [284 - 286] полостях с соотношением характерных линейных размеров 4, при различных ориентациях магнитного поля. Результаты численных расчетов обнаружили хорошее согласие с аналитическими оценками для затухания скорости, приведенными в [276, 279, 280]. Для прямоугольной полости в [284 - 286] исследовано влияние свободной поверхности на конвективное течение. Показано, что структура потока тесно связана с распределением индуцированных электрических токов и их взаимодействием с приложенным магнитным полем.

Математическая модель конвекции расплава, находящегося в постоянном магнитном поле, представлена в работе Баумгартла и Мюллера (J. Baumgartl, G. Müller) [287]. Модель создана для цилиндрической геометрии и включает в себя уравнение для электрического потенциала. Результаты трехмерных численных расчетов, полученных в рамках этой модели, хорошо согласуются с экспериментальными данными. На основании модели Баумгартла и Мюллера в работе [288] показано, что при колебательных режимах конвекции магнитное поле с $Ha \sim 20$ ($|B| \sim 7$ мТ) подавляет малоамплитудные колебания. В результате действия постоянного магнитного поля имеет место по существу стационарное течение проводящей жидкости. Эффект стабилизации статическим магнитным полем малой интенсивности колебательного потока жидкости и температурного поля был продемонстрирован в работе [289].

Влияние магнитного поля на значения управляющих параметров, которые определяют порог устойчивости конвективных течений в замкнутой полости, имеющей форму параллелепипеда, изучалось в [290, 291]. Для полости с относительными размерами $4 \times 2 \times 1$ получен экспоненциальный рост пороговых значений параметров с увеличением интенсивности магнитного поля. Кроме того,

показано, что вертикальное магнитное поле наиболее сильно повышает порог устойчивости основного течения, что подтверждается экспериментальными результатами Хофа и соавторов [278]. В этой работе также на основании кинетического энергетического анализа делается вывод о том, что порог устойчивости течения сильно зависит от энергии сдвига, величина которой является основным дестабилизирующим фактором.

Из упомянутых выше исследований можно сделать общий вывод, что приложенное к конвективному течению проводящей жидкости внешнее магнитное поле приводит к фундаментальным изменениям в свойствах тепловой конвекции. Конвективное течение постепенно теряет свою интенсивность с увеличением числа Гартмана. При достижении числом Гартмана определенного критического значения снижение интенсивности потока с ростом Ha принимает асимптотический характер, например, характерная скорость течения становится обратно пропорциональной числу Гартмана. Характер асимптотики (зависимость интенсивности течения от Ha) и структура конвективного течения при больших Ha существенно зависят от направления магнитного поля относительно полости, поля тяжести и градиента температуры.

При $Ha \gg 1$ течение, как правило, разбивается на три отдельные области: ядро потока, пограничные слои Гартмана толщиной $\sim Ha^{-1}$, которые формируются вдоль стенок, перпендикулярных к направлению магнитного поля, и параллельных магнитному полю пограничных слоев толщиной $\sim Ha^{-2}$. Следует отметить, что вязкие эффекты проявляют себя только в пограничных слоях, в то время как основной поток может считаться невязким. Такое расслоение течения, главным образом, определяется возникающими в проводящей жидкости вихревыми электрическими токами и воздействием на них обобщенной силы Лоренца. Например, в случае непроводящих границ токи образуют замкнутые петли внутри полости. Значительное тормозящее воздействие на конвективное течение имеет место в тех областях, где направление электрического тока перпендикулярно приложенному магнитному полю. Напротив, слабый

тормозящий эффект достигается там, где электрический ток параллелен магнитному полю.

Отметим здесь идейно близкие задачи, представленные в работах [273, 292, 293], где аналитически и численно изучено влияние поперечного вращающегося магнитного поля на адвективное течение проводящей жидкости в бесконечном горизонтальном цилиндре кругового сечения. Аналитический анализ проводился для двух предельных случаев: $0 \leq Pr \ll 1$; большие магнитные числа Тейлора Ta_m и конечные числа Прандтля. Численно исследовано влияние вращающегося магнитного поля на адвективное течение при произвольных значениях Pr и Ta_m . Показано, что вращающееся поле приводит к повороту границы раздела встречных потоков в сторону вращения поля. Исследована устойчивость стационарного адвективного течения.

Аналогично работе Любимовой Т.П. и соавторов [294], в первой части шестой главы рассмотрен бесконечно длинный горизонтальный канал прямоугольного сечения с продольным градиентом температуры. Конвективное течение проводящей жидкости происходит в постоянном магнитном поле перпендикулярном оси канала, при этом рассматривается вертикальная или горизонтальная ориентация поля.

Во второй части шестой главы представлена математическая модель тепло-массопереноса в металлическом расплаве, находящемся в переменном высокочастотном неоднородном электромагнитном поле промышленной индукционной печи. Температура расплава полагается выше точки Кюри. Расчетная область представляет собой вертикальный цилиндр. Модель позволяет рассчитать: пространственно-временное распределение электромагнитного поля в области расплава; плотность индукционных токов; мощность источников теплоты; тепло- и массоперенос в расплаве.

Одним из видов переменного магнитного поля является вращающееся поле. Известно достаточно большое количество работ посвященных изучению влияния вращающегося магнитного поля на равновесие и течения проводящей жидкости в вертикальных цилиндрических полостях.

В работе [295] приведены результаты, полученные при экспериментальном и численном исследовании термогравитационной и термокапиллярной конвекции в вертикальном цилиндре под воздействием вращающегося магнитного поля. Показано, что магнитное поле оказывает существенное влияние на нестационарный конвективный поток и колебания температуры. Воздействие вращающегося магнитного поля на колебания температурного поля в расплаве подробно исследовано также в [296, 297]. Во всех упомянутых выше работах было показано, что амплитуда температурных флуктуаций уменьшается с усилением магнитного поля. Кроме того, в [297] делается вывод о том, что вращающиеся магнитные поля более эффективны для подавления колебаний температуры, чем статические поля.

Влияние вращающегося магнитного поля на устойчивость равновесия проводящей жидкости в бесконечном вертикальном цилиндре, подогреваемом снизу, изучалось в [298]. Исследования проводились для широкого диапазона магнитных чисел Тейлора и чисел Прандтля. Показано, что увеличение числа Прандтля приводит к уменьшению порогового значения числа Тейлора, т.е. стабилизация равновесия магнитным полем наиболее эффективна для жидкостей с большим числом Прандтля. Линейный анализ устойчивости конвекции Релея-Бенара в цилиндрической полости конечной высоты во вращающемся магнитном поле представлен в работе [299]. Показано стабилизирующее действие поля на стационарное течение жидкости при различных числах Тейлора и Прандтля. Критическое число Релея растет с увеличением Pr и Ta_m .

В работе [300] рассматривалось конвективное течение проводящей жидкости в замкнутой цилиндрической полости, подверженной влиянию вращающегося магнитного поля. Температура верхнего и нижнего торцов полагается одинаковой, а на боковой поверхности цилиндра она меняется по параболическому закону. Показано, что торцы цилиндра оказывают значительное стабилизирующее воздействие на стационарные состояния жидкости. Кроме того, обнаружено стабилизирующее действие стационарного вертикального магнитного поля на течение, индуцированное вращающимся полем. Подробное

численное исследование индуцированных вращающимся полем течений жидкого металла в цилиндре конечной высоты проводилось в [301]. В этой работе использовалось низкочастотное приближение для поля и предположение об осевой симметрии течения. Для изотермической жидкости показано, что при некотором значении магнитного числа Тейлора возникает течение в виде вихрей Тейлора, эволюция которых также изучена. Влияние вращающегося поля на тепловую конвекцию рассмотрено на примере задачи о конвективном течении в замкнутом цилиндре, верхний и нижний торцы которого, в отличие от [300], имеют разные температуры. Температура нижней поверхности зависит от радиуса. Показано, что вращающееся магнитное поле позволяет стабилизировать течение даже при числах Грасгофа, превышающих критическое значение в отсутствие поля.

Влияние внешних неоднородных и нестационарных магнитных полей на проводящие жидкости или расплавы жидких металлов приводит, в общем случае, к неоднородному и нестационарному нагреву материала. Такое влияние часто применяется в различных технологических процессах, например, индукционное плавление, зонная плавка, упрочнение поверхности металлических изделий, выращивание кристаллов, производство оптических волокон. Индукционный нагрев материала происходит за счет джоулевой теплоты, выделяющейся при протекании в проводящем материале токов, которые индуцируются изменяющимся внешним магнитным полем. Неоднородное температурное поле приводит к возникновению сложных конвективных течений в жидкости. При изучении влияния переменных неоднородных магнитных полей на проводящие материалы важно знать распределение поля в проводнике и глубину его проникновения.

Исследования, проведенные в работе [302], показывают, что при высоких частотах пульсаций внешнего магнитного поля результирующее поле, складывающееся из поля индуктора и полей индукционных токов, экспоненциально затухает вглубь проводника. Глубину проникновения поля, согласно [302], можно оценить по формуле $\delta = \sqrt{2/\mu\sigma\omega}$. Видно, что $\delta \rightarrow 0$, когда

$\omega \gg 1$. Похожую оценку для глубины проникновения магнитного поля в проводник можно найти в [303]. В упоминавшейся выше работе [298] отмечается, что при увеличении частоты вращения уменьшается глубина проникновения поля и его стабилизирующее действие ослабевает.

В высокочастотном пределе для описания влияния магнитного поля на проводник возможен погранслоный подход, когда индукционные токи, источники теплоты и объемные силы, действующие на движущийся расплав, локализованы в тонком пограничном слое. Такой подход особенно удобен, если магнитное поле однородно, а напряженность у поверхности проводника известна.

В общем случае, когда поле нельзя считать однородным или частоты его пульсаций являются конечными, задача о распределении магнитного поля сводится к решению уравнения диффузии. Такое уравнение сформулировано, например, в работе [304], где магнитное поле описывается через векторный потенциал \vec{A} , ротор которого равен напряженности магнитного поля $\vec{H} = \mu^{-1} \nabla \times \vec{A}$. Удобство такого подхода заключается в том, что уравнения Максвелла могут быть сведены к соотношению

$$\frac{1}{\mu} \Delta \vec{A} + \vec{J}^{(out)} = \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.20)$$

где плотность токов проводимости $\vec{J}^{(out)}$, текущих по внешнему индуктору. Плотность индукционных токов рассчитывается, как $\vec{J} = \text{rot } \vec{H}$.

Аналитические и численные решения уравнений Максвелла в случае осевой симметрии для изменяющегося по гармоническому закону магнитного поля были предложены в работе [305]. Магнитное поле порождается катушками с током, находящимися внутри длинной цилиндрической полости. Изучалось распределение магнитного и вихревого электрического полей как внутри цилиндра, так и вне его. Аналитические решения, полученные для специальных случаев, сравнивались с результатами численных расчетов. Это сравнение

позволило для физически реальных случаев определить оптимальные размеры вычислительных областей, на границах которых возможна постановка нулевых граничных условий для напряженности магнитного поля.

В работе [306] на основе метода конечных элементов разработаны численные алгоритмы решения двумерных и трехмерных задач, связанных с индукционным нагревом. Целью работы является оптимизация вычислительного процесса и достижение контроля за температурным полем и его эволюцией. Решение задачи о распределении магнитного поля сводится к решению уравнения вида (1.20). Поле температуры определяется путем решения обычного уравнения теплопроводности, где присутствует слагаемое, описывающее объемное распределение источников тепла, пропорциональное квадрату плотности индукционных токов. Для удовлетворения равенства нулю напряженности магнитного поля на границе, как и в [305], поле вычисляется в области, значительно превосходящей размеры рабочей зоны индукционного нагревателя.

В работе [307] рассматривается полная система уравнений, описывающих стационарное конвективное течение в стационарном же магнитном поле. Для определенных геометрии и граничных условий приводятся аналитические решения этой системы и исследуются свойства таких решений. При построении решений учитывается джоулева теплота, выделяющаяся при протекании токов через среду. Учитываются токи, обусловленные как внешней разностью потенциалов, так и конвективным движением проводящей жидкости.

В работе [308] изучается зонная плавка применяемая для очистки полупроводниковых кристаллов. Моделируются ламинарное и турбулентное конвективные течения в переменном магнитном поле. Авторы без вывода и пояснений вводят осредненное значение электродинамической силы, действующей на расплав, и работают со средними значениями полей температуры и скорости. Однако, такой подход может не дать удовлетворительных результатов в случае, когда индукционно разогревается непосредственно металл, и появляются периодические знакопеременные объемные силы, которые могут привести к различным гидродинамическим эффектам.

В диссертации на основании методов многих масштабов [5] и осреднения [6] разработана математическая модель тепломассопереноса в расплавленном металле, помещенном в неоднородное переменное магнитное поле, изменяющееся с высокой частотой. При выводе уравнений использовалась оценка для глубины проникновения поля, приведенная в [303]. Модель учитывает как медленные свободноконвективные течения, так и быстрые пульсационные процессы, которые могут оказывать влияние, например, на распределение примесей. Граничные условия для температурного поля близки к реальным тепловым условиям на поверхности рабочей камеры промышленной индукционной печи [309].

1.5.3 Конвекция в бинарных смесях

В седьмой главе диссертации исследуется устойчивость адвективного течения двухкомпонентной смеси в плоском горизонтальном слое. Рассматриваются случаи с идеально-теплопроводными твердыми границами при наличии однородного продольного градиента температуры. Задача решается с учетом эффекта термодиффузии.

В литературе имеется большое количество работ, посвященных изучению конвективных течений в бинарных жидкостях. Обзор фундаментальных задач об устойчивости равновесия, возникающих течениях и устойчивости этих течений в классических постановках можно найти в монографиях [79, 80].

В седьмой главе монографии [79] представлены уравнения конвекции бинарной смеси, состоящей из нереагирующих компонент, сформулированы условия равновесия и выписана спектрально-амплитудная задача устойчивости равновесия. Как уже отмечалось в параграфе 1.4, в бинарных жидкостях имеются две причины появления конвективной силы это неоднородности температуры и концентрации. Кроме присущего однокомпонентным жидкостям диссипативного механизма теплопроводности, появляется еще один механизм, связанный с диффузией. Неоднородности концентрации и конкуренция диссипативных механизмов приводят к появлению в бинарных смесях эффектов, не

наблюдающихся в однокомпонентных жидкостях.

Уравнения свободной конвекции впервые получены Шапошниковым И.Г. в [81]. К пионерским в области исследования устойчивости механического равновесия бинарной жидкости можно отнести теоретические работы Вертгейма Б.А. [310] и Накоряковой С.Б. [311], а также эксперименты Славновой Э.И. [312]. В [310] получено решение задачи устойчивости равновесия относительно монотонных возмущений с учетом перекрестных эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности для замкнутой вертикальной цилиндрической полости кругового сечения. В работе [311] эти результаты были обобщены на случай полости произвольной формы с теплоизолированными непроницаемыми границами. В [312] представлены экспериментальные исследования, где изучалось влияние перекрестных эффектов на возникновение конвекции в вертикальном канале. Монотонная и колебательная неустойчивости равновесия вертикального бесконечного слоя, ограниченного твердыми непроницаемыми идеально теплопроводными границами, были изучены в [313]. В этой работе рассмотрены случаи отсутствия и наличия перекрестных эффектов. На плоскости параметров число Релея Ra – диффузионное число Релея Ra_d определены границы областей неустойчивости слоя бинарной смеси относительно различных видов возмущений. Сделанные в [313] общие выводы справедливы и для плоского горизонтального слоя [314-319] и для шаровой полости [320] подогреваемых снизу. В работах [314-316, 320] эффектами термодиффузии и диффузионной теплопроводности пренебрегалось. Задача об устойчивости горизонтального слоя с учетом термодиффузии решалась в [318, 319]. Экспериментальные исследования возникновения конвекции в плоском горизонтальном слое раствора сахара в воде проведены в [321]. Результаты экспериментов качественно согласуются с выводами теоретических работ.

Одними из первых работ, где исследуется устойчивость конвективного течения бинарной смеси, являются статьи Гершуни Г.З., Жуховицкого Е.М. и Сорокина Л.Е. [322, 323]. В этих работах обсуждается устойчивость конвективного течения бинарной смеси в бесконечном вертикальном слое,

границы которого непроницаемы для вещества и поддерживаются при постоянных разных температурах. В [322] перекрестными эффектами полностью пренебрегалось. В смеси задавался постоянный градиент концентрации, направленный вверх. В работе [323] учитывался эффект термодиффузии, а эффектом диффузионной теплопроводности пренебрегалось. В обеих работах были получены аналитические формулы для основного плоскопараллельного течения, состоящего из двух встречных потоков. На плоскости определяющих параметров построены карты устойчивости основного течения относительно малых возмущений, и определены механизмы дестабилизации. С учетом эффекта термодиффузии найдены моды неустойчивости, как для нормальной, так и для аномальной термодиффузии. Задача в описанной выше постановке без учета перекрестных эффектов решалась ранее Хартом [324], однако, количественные данные, представленные в этой работе, являются ошибочными. Критические замечания по поводу результатов Харта содержатся в работах [325, 326]. Аналитическим и численным исследованиям устойчивости конвективных течений и расчету конечно-амплитудных вторичных режимов конвекции в вертикальном слое бинарной жидкости посвящены также работы Сорокина Л.Е. [327-331]. В [327] при отсутствии перекрестных эффектов изучалась волновая мода неустойчивости, которая является наиболее опасной в сравнительно узком диапазоне значений диффузионного числа Релея $13 < Ra_d \leq 30$. Кроме того, в этой работе показано, что при больших числах Прандтля появляется тепловая колебательная мода. Отметим, что в описываемой выше постановке при больших значениях диффузионного числа Релея создаются условия для подавления плоскопараллельного конвективного течения. В этом случае задача сводится к исследованию равновесия бинарной смеси в вертикальном слое. Решение такой задачи можно найти в работе [332], где показано, что неустойчивость имеет форму коротковолновой конвекции в виде слоистого течения. Отметим экспериментальные работы по исследованию устойчивости конвективных течений бинарных смесей, где в качестве рабочих жидкостей использовались водные растворы поваренной соли [333, 334], сахара [335, 336] и HCl , CuSO_4

[334]. В этих работах качественно и количественно подтверждены теоретические выводы.

В литературе имеется ряд работ, связанных с устойчивостью термоконцентрационных конвективных течений бинарных смесей в вертикальных полостях конечной высоты с различными граничными условиями для температуры и концентрации. Данная задача представляет интерес в связи с анализом работы термодиффузионной колонны для разделения изотопов, выращиванием кристаллов и множеством процессов в химической промышленности. Задача устойчивости течения в вертикальной полости при наличии постоянных горизонтальных градиентов температуры и концентрации была рассмотрена в работе [337]. Результаты, представленные в этой статье, были подвергнуты ревизии в работах [338, 339]. В [338] показано, что найденное в [337] решение пригодно лишь для частного случая, когда число Льюиса $Le = 1$. Авторами работы [339] было предложено аналитическое решение в пределе вытянутой области, хорошо согласующееся с численным решением полной системы определяющих уравнений. Результаты аналитического и численного исследования естественной конвекции бинарной газовой смеси в квадратной полости представлены в работе [340]. Существование ячеистых конвективных структур в вертикальном слое для заданных значений числа Льюиса и параметра $Sore$ было обнаружено в экспериментальных и численных работах [341-344]. Отметим здесь работу [345], где рассматривалась конвекция в бесконечном вертикальном слое, а также статьи [346-348], в которых изучалось конвективное течение в вертикальной замкнутой полости, вызванное эффектом $Sore$. В экспериментах Колоднера (Kolodner) [349] впервые наблюдалось существование бегущих волн на фоне устойчивой ячеистой структуры в виде конвективных валов. Им изучалась смесь этанол-вода с коэффициентом $Sore = -0,02$, находящаяся в узком кольцевом контейнере. Дальнейшие теоретические исследования нелинейных режимов конвекции бинарной смеси при отрицательных значениях параметра $Sore$ в горизонтальном слое и замкнутой прямоугольной ячейке, где

наблюдались, обнаруженные Колоднером бегущие волны, было выполнено в работах [350].

Упомянем далее ряд интересных, по мнению автора, работ, где изучается влияние термодиффузии на конвекцию бинарных жидкостей. В работе [351] возбуждение конвекции в горизонтальном слое коллоидной суспензии исследуется в терминах модели, принятой для молекулярных бинарных смесей. Вязкость полагается зависящей от локальной концентрации коллоидных частиц. Показано, что с ростом разницы между значениями вязкости на теплой и холодной границах порог возбуждения стационарной конвекции снижается. В области отрицательных чисел $Sore$ снижение порога возбуждения колебательной конвекции. Конвективные валы смещаются ниже центрального сечения горизонтального слоя при нормальной термодиффузии и выше него, если термодиффузия аномальная. Возникновение неустойчивости из-за эффекта $Sore$, в горизонтальном слое нагреваемом сверху, анализируется в [352] при помощи линейной теории устойчивости. Жидкости находится в устойчивом механическом равновесии, но отрицательная термодиффузия может вызвать конвективное движение. Определены границы устойчивости в пространстве чисел Релея, Льюиса и $Sore$. В недавней работе [353] исследуется устойчивость термодиффузионных течений бинарных смесей относительно бегущих термо-концентрационных возмущений. Обнаружена зависимость от числа $Sore$ порогового значения числа Прандтля, при котором тепловой механизм потери устойчивости стационарного течения становится наиболее опасным. Для положительных чисел $Sore$ найден интервал значений числа Прандтля, в котором тепловые волны полностью подавляются.

Использование связанных каналов для разделения многокомпонентных жидкостей было предложено и обосновано в работах [354-357]. Впервые такая возможность разделения жидких бинарных смесей на компоненты была выявлена в работе [358], где изучались стационарные и колебательные режимы конвекции бинарной смеси в узких связанных каналах при действии положительной и отрицательной термодиффузии. Для случая положительной термодиффузии

обнаружены колебательные режимы течения, характерные для бинарных жидкостей. Влияние вертикальных высокочастотных вибраций на стационарные конвективные течения бинарной смеси и распределение концентрации компонент в связанных каналах рассмотрено в [355]. В работе [356] обсуждаются результаты сравнительных экспериментов по конвекции магнитных жидкостей и молекулярных жидких бинарных смесей в связанных вертикальных каналах при подогреве снизу. В обеих средах наблюдаются специфические для бинарных жидкостей колебательные режимы течения. На основании экспериментов дается обоснование модели конвекции магнитной жидкости, учитывающей термодиффузионное разделение компонентов дисперсионной среды и слабую седиментацию магнитных частиц. Численное моделирование сепарации жидких бинарных смесей в неоднородно-нагретом наклонном слое с твердыми идеально теплопроводными границами при положительной термодиффузии выполнено в [357]. Определены углы наклона слоя и соответствующие числа Рэлея, при которых эффект расслоения на отдельные составляющие максимален.

Перейдем к обсуждению работ, связанных с адвективным течением бинарных жидкостей. Адвективным течением называется конвективное течение в плоском горизонтальном слое или вытянутой по горизонтали прямоугольной области при наличии горизонтального же градиента температуры. Для случая бесконечного слоя скорость адвективного течения перпендикулярна силе тяжести. В литературе имеется много работ, посвященных исследованию адвективных течений однокомпонентных жидкостей для различных типов тепловых условий на границах. Решение классических задач устойчивости адвективного течения однокомпонентной жидкости в плоском горизонтальном слое для случая твердых идеально теплопроводных и теплоизолированных границ представлено в работах [358 - 361], где получены серии нейтральных кривых для различных мод неустойчивости. Результаты этих работ приведены в монографии [79]. Численное исследование стационарных адвективных течений однокомпонентной жидкости в вытянутой по горизонтали прямоугольной полости, для случаев идеально теплопроводных и адиабатических границ представлено в [362].

Задача устойчивости адвективного течения бинарной смеси в плоском горизонтальном слое с твердыми границами решалась в работах [363, 364]. В этих статьях сформулирована спектрально-амплитудная задача для нормальных возмущений для трех вариантов граничных условий:

- заданные продольные градиенты температуры и концентрации;
- постоянный продольный градиент температуры и отсутствие потока вещества;
- отсутствие потоков тепла и вещества.

Была определена возможность механического равновесия в отсутствие градиента плотности, и для второго и третьего типов граничных условий проведено аналитическое исследование длинноволновой неустойчивости равновесия. Результаты численных расчетов в рамках полной спектрально-амплитудной задачи приведены для чисел Прандтля $Pr = 0.01$ и Шмидта $Sc \geq Pr$. Для всех перечисленных выше типов граничных условий определены пороги неустойчивости течения, а также характеристики критических возмущений. Показано, что неустойчивость вызвана гидродинамическим и термоконцентрационным механизмами.

Исследование адвективного течения бинарной жидкости в вытянутой по горизонтали замкнутой полости с теплоизолированными границами было проведено в работе [365]. В этой работе учитывалось влияние перекрестных эффектов на движение смеси. Для предельного случая плоского бесконечного слоя аналитически описано плоскопараллельное течение смеси. Исследовано механическое равновесие бинарной жидкости, которое возможно при равенстве и противоположности тепловых и концентрационных потоков ($\varepsilon = -1$). Доказано существование нескольких решений для заданного набора управляющих параметров при значениях параметра разделения в окрестности -1 . Аналитически и численно исследованы свойства этих решений. Возникновение конвекции в прямоугольных замкнутых полостях для параметра разделения, равного -1 , рассматривалось в работах [366, 367].

Как видно из представленного в параграфе 1.5.3 обзора, устойчивость

адвективных течений бинарных смесей с учетом эффекта Соре к моменту выполнения диссертационной работы практически не исследовалась. Седьмая глава настоящей диссертации посвящена проблеме устойчивости стационарных адвективных течений бинарных жидкостей в горизонтальном слое, решение которой может оказаться важно, например, для понимания процессов, происходящих при выращивании кристаллов в горизонтальном варианте метода Бриджмена.

ГЛАВА 2. ПУЛЬСАЦИОННОЕ И СРЕДНЕЕ ТЕЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ ОКОЛО ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В настоящей главе исследуются осредненные и пульсационные течения дилатантной и псевдопластичной жидкостей, относящихся к классу обобщенных ньютоновских жидкостей, вблизи твердого тела. Все рассматриваемые задачи считаются изотермическими.

Известно, что высокочастотные вибрации твердого тела, погруженного в ньютоновскую жидкость, приводят к генерации осредненного течения в вязком пограничном слое вблизи поверхности тела [96]. Такое течение имеет вихревой характер и распространяется за пределы вязкого пограничного слоя. Скорость среднего течения принимает конечное значение на внешней границе пограничного слоя, что позволяет использовать ее в качестве эффективного граничного условия для поля скорости течения в основном объеме. В работах [101-103] задача о генерации средних течений ньютоновской жидкости обобщена на случай трехмерных пульсационных течений с неоднородной фазой колебаний. Задача об обтекании твердого тела пульсационным потоком неньютоновской жидкости ранее не рассматривалась.

В настоящей главе изучается обтекание пульсационным потоком обобщенной ньютоновской жидкости твердого бесконечно длинного цилиндра. В рамках степенной модели Освальда-деВилия рассматривается движение дилатантной жидкости в пределах вязкого пограничного слоя вблизи твердой поверхности. С использованием метода многих масштабов [5] и осреднения [6] формулируются уравнения, описывающие пульсационное и осредненное течения жидкости в пограничном слое. Численно изучается структура течений и влияние на них реологических параметров модели. Путем прямого численного моделирования на основе полных уравнений движения изучается стационарное и пульсационное обтекание жидкостью Уильямсона бесконечного твердого цилиндра.

2.1 Основные приближения и реологические законы

Обобщенными ньютоновскими жидкостями называют класс нелинейно-вязких систем, для которых тензор напряжений сдвига τ_{ij} в каждой точке в данный момент времени представляет функцию тензора скорости сдвига e_{ij} в этой точке [37]:

$$\tau_{ij} = f(I_2)e_{ij}, \quad e_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad I_2 = \frac{1}{2}e_{ij}e_{ji}, \quad (2.1)$$

где I_2 – второй инвариант тензора скоростей сдвига.

Жидкости, описываемые реологическим соотношением вида (2.1), условно подразделяются на три группы [35]: вязкопластичные жидкости, псевдопластичные жидкости и дилатантные жидкости.

Для дилатантных жидкостей может быть применена схема осреднения пульсационных течений [6, 96] в вязком пограничном слое. В этом случае амплитуда вибраций b полагается малой по сравнению с характерным размером задачи – L : $b \ll L$, а частота вибраций большой так, что период вибраций мал по сравнению с характерным вязким временем. В тоже время вибрации считаются неакустическими $b\omega \ll c$, где c – скорость звука в среде, а жидкость несжимаемой. Это позволяет предположить, что для пульсационного течения неньютоновской жидкости вязкость, заданная реологией, значительна только в пренебрежимо малом по толщине (в сравнении с L) пограничном слое, а пульсационное течение в ядре описывать уравнениями идеальной жидкости.

Для выяснения характера осредненного течения необходимо либо применить операцию осреднения к уравнениям для пульсационного потока внутри вязкого пограничного слоя и получить уравнения для этого течения, либо усреднить пульсационное поле скоростей по достаточно большому интервалу времени.

Распространение идеи пограничного слоя на пульсационное течение вязкопластичной жидкости оказывается неплодотворным. Вязкопластичные жидкости это среды, обладающие жесткой пространственной структурой, способной сопротивляться внешнему напряжению сдвига, меньшему, чем некоторое предельное напряжение τ_0 . Превышение τ_0 приводит к быстрому и полному разрушению структуры, после чего среда ведет себя как вязкая ньютоновская жидкость. Если напряжения уменьшить так, что они станут меньше τ_0 , то структура снова восстановится. Сдвиговое течение вязкопластичных тел характеризуется образованием квазитвердых областей в тех местах течения, где выполняется указанное условие. Скорости сдвига в этих областях отсутствуют.

С увеличением расстояния от твердой поверхности скорости сдвига уменьшаются, что может привести к тому, что напряжения сдвига станут меньше порогового значения для данной жидкости. Возможна ситуация, когда вблизи твердого тела существует слой вязкого течения, на внешней границе которого жидкость движется как квазитвердое тело. В зоне вязкого течения также могут появиться вкрапления квазитвердых (жестких) зон. Для исследования взаимного расположения различных зон течения и их влияния друг на друга произведено прямое численное моделирование пульсационного движения вязкопластичной жидкости, описываемой моделью Уильямсона.

Внутри вязких зон пульсационное течение периодически по времени, но может иметь место генерация средней завихренности, аналогичная исследованной Шлихтингом для ньютоновской жидкости [96]. Для определения структуры среднего течения проводилось численное осреднение поля скоростей по периоду вибраций.

Тензор вязких напряжений дилатантной жидкости зададим степенным реологическим законом

$$\tau_{ij} = k(I_2)^{\frac{n-1}{2}} e_{ij}, \quad (2.2)$$

где k – консистентность дилатантной жидкости; n – показатель неньютоновости.

Для описания псевдопластичной жидкости применим реологическое уравнение Уильямсона:

$$\tau_{ij} = \left(\frac{A}{B + \sqrt{I_2}} + \mu_\infty \right) e_{ij}, \quad (2.3)$$

где A и B – реологические параметры жидкости Уильямсона; μ_∞ – вязкость при больших скоростях сдвига.

При $A = 0$ и $n = 1$, модели (2.2) и (2.3) применимы для ньютоновской жидкости. При малых значениях параметра B ($B \rightarrow 0$) жидкость Уильямсона становится близкой по своим свойствам бингамовскому пластику, в этом случае A приобретает смысл предельного напряжения сдвига. Движение изотермической жидкости определяется системой уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = \frac{1}{\rho} (-\nabla p + \text{Div} \bar{\tau}), \quad \text{div} \vec{u} = 0, \quad (2.4)$$

где \vec{u} – вектор скорости жидкости; p – давление в жидкости; ρ – плотность жидкости; $\bar{\tau}$ – тензор вязких напряжений; ∇ , Div , div – дифференциальные операторы градиента и дивергенции. В уравнении (2.4) отсутствует слагаемое, описывающее влияние поля тяжести на движение жидкости, т.к. нас интересуют только эффекты, связанные с вибрационным воздействием на среду.

2.2 Движение дилатантной жидкости в пределах вязкого пограничного слоя

2.2.1 Уравнения движения

Рассматриваются высокочастотные (но неакустические) мало-амплитудные вибрации жидкости около твердой поверхности $b/L \ll 1$, $b\omega \ll c$. Реология жидкости задается уравнением (2.2). В пределах вязкого пограничного слоя инерционное и вязкое слагаемые в уравнении Навье-Стокса (2.4) имеют одинаковые порядки, что позволяет оценить толщину пограничного слоя $\tilde{\delta}$:

$$\tilde{\delta} = \left[\frac{k}{\rho} (b\omega)^{n-1} \omega^{-1} \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad \left(\frac{\tilde{\delta}}{L} \right)^{n+1} = \frac{k}{L^2 \rho} \left(\frac{b\omega}{L} \right)^{n-1} \omega^{-1} \ll 1.$$

Например, для пульсационного потока 50% раствора поливинилхлорида (ПВХ) в диоктилфтолате (ДОФ) вблизи твердой поверхности при $b = 10^{-3}$ м и $\omega = 100$ рад/с получается значение $\tilde{\delta} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ м. Параметры дилатантной жидкости имеют значения: $k = 0.148$ Па·сⁿ, $n = 1.55$, $\rho = 980$ кг/м³ [368].

Рассмотрим плоскую двумерную задачу. Ось x направим вдоль твердой поверхности, а ось z – по нормали к ней. На твердой границе ставится условие прилипания $\vec{u} = 0$. Для внешней границы вязкого пограничного слоя можно написать $u \rightarrow U$, $v \rightarrow 0$, здесь u и v – компоненты скорости вдоль направлений x и z по отношению к твердой поверхности, а U – касательная к плоскости компонента скорости внешнего пульсационного потока.

Применим метод многих масштабов [5], используя различия между характерным вязким временем и периодом вибраций, и введем характерные для пограничного слоя масштабы времени и поперечной координаты:

$$t_- = \omega t, \quad \xi = \frac{z}{\delta},$$

(2.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \omega \frac{\partial}{\partial t_-} + \frac{\partial}{\partial t_0}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Примем в качестве характерного вязкого времени величину $(\rho L^2/k)(L/b\omega)^{n-1}$, в качестве координаты – характерный размер задачи L , в качестве скорости – величину $b\omega$ и в качестве давления – $b\rho L\omega^2$. Тогда с учетом (2.5) безразмерные уравнения движения в проекциях на оси координат записываются в виде:

$$\delta \frac{\partial u}{\partial t_-} + \delta^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma v \frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma \delta (\bar{u} \nabla) u = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} + \delta \text{Div}_x [He_{ij}],$$

$$\delta \frac{\partial v}{\partial t_-} + \delta^2 \frac{\partial v}{\partial t} + \gamma u \frac{\partial v}{\partial \xi} + \gamma \delta (\bar{u} \nabla) v = -\frac{\partial p}{\partial \xi} - \delta \frac{\partial p}{\partial z} + \delta \text{Div}_z [He_{ij}], \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} + \delta \text{div} \bar{u} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Div}_x [He_{ij}] &= 2\delta^2 u_x H_x + (u_\xi + \delta(u_z + v_x))(H_\xi + \delta H_z) + \\ &+ H u_{\xi\xi} + \delta H u_{\xi z} + \delta^2 H \Delta u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Div}_z [He_{ij}] &= 2(v_\xi + \delta v_z)(H_\xi + \delta H_z) + \delta(u_\xi + \delta(u_z + v_x))H_x + \\ &+ H v_{\xi\xi} + \delta H v_{\xi z} + \delta^2 H \Delta v, \end{aligned}$$

$$H = \left| (\delta v_x + u_\xi + \delta u_z)^2 + \delta^2 (u_x)^2 \right|^{\frac{n-1}{2}},$$

где $\delta = \tilde{\delta}/L$ и $\gamma = b/L$ – безразмерные толщина пограничного слоя и амплитуда вибраций, являющиеся малыми параметрами задачи. Подстрочные индексы в (2.6) и ниже обозначают дифференцирование по соответствующей координате; ∇ , Δ , div – дифференциальные операторы по координатам x и z .

Выражение для H в (2.6) удобно представить в виде

$$H = \left| u_{\xi}^2 + 2\delta u_{\xi}(v_x + u_z) + \delta^2(v_x + u_z)^2 + \delta^2(u_x)^2 \right|^{\frac{n-1}{2}} = \left| u_{\xi}^2 + X \right|^{\frac{n-1}{2}}.$$

Раскладывая это выражение в ряд Тейлора около $X = 0$, получаем

$$H = \left| u_{\xi} \right|^{n-1} + (n-1)\delta \left| u_{\xi} \right|^{n-3} u_{\xi}(v_x + u_z) + O(\delta^2). \quad (2.7)$$

Пульсационное течение за пределами пограничного слоя будем считать невязким (идеальным), в этом случае для него можно записать уравнения

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t_-} + \gamma(\vec{U}\nabla)\vec{U} = -\nabla p, \quad \text{div}\vec{U} = 0. \quad (2.8)$$

Представим решение задачи (1.6), а также скорость жидкости в основном потоке $\vec{U}(U, V)$ в виде рядов по степеням формального малого параметра ε :

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \varepsilon \vec{u}_1 + \varepsilon^2 \vec{u}_2 + \cdots + \varepsilon^S \vec{u}_S,$$

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + \varepsilon \vec{U}_1 + \varepsilon^2 \vec{U}_2 + \cdots + \varepsilon^S \vec{U}_S,$$

(2.9)

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \cdots + \varepsilon^S p_S,$$

$$(\gamma, \delta) = \varepsilon(\gamma_1, \delta_1) + \varepsilon^2(\gamma_2, \delta_2) + \cdots + \varepsilon^S(\gamma_S, \delta_S),$$

а \vec{u}_0 , \vec{U}_0 , p_0 – в виде рядов по степеням медленной координаты z :

$$\vec{u}_0 = \vec{u}_{00} + z\vec{u}_{01} + \cdots + z^S \vec{u}_{0S},$$

$$\vec{U}_0 = \vec{U}_{00} + z\vec{U}_{01} + \cdots + z^S \vec{U}_{0S}, \quad (2.10)$$

$$p_0 = p_{00} + zp_{01} + \cdots + z^S p_{0S},$$

где $S \rightarrow \infty$. Предполагается равенство соответствующих компонент внешнего и внутреннего разложений. По этой же причине для давления в уравнениях (2.6) и (2.8) выбраны одинаковые обозначения.

Подставляя разложения (2.9) и (2.10) в (2.6) и (2.8), в главном порядке по ε и z получаем систему уравнений, описывающую пульсационное поле скоростей в пределах вязкого пограничного слоя

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial t_-} = -\frac{\partial p_{00}}{\partial x} + \left(|u_{00\xi}|^{n-1} u_{00\xi} \right)_\xi, \quad \frac{\partial p_{00}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_{00}}{\partial \xi} = 0, \quad -\frac{\partial p_{00}}{\partial x} = \frac{\partial U_{00}}{\partial t_-}. \quad (2.11)$$

К этим уравнениям необходимо добавить граничные условия

$$z = 0, \xi = 0: u_{00} = 0, v_{00} = 0,$$

$$z = 0, \xi \rightarrow \infty: u_{00} \rightarrow U_{00}, \frac{\partial u_{00}}{\partial \xi} = 0,$$

где U_{00} - продольная компонента скорости внешнего пульсационного течения. Из уравнений (2.11) видно, что давление не изменяется поперек пограничного слоя, следовательно, $\frac{\partial p_{00}}{\partial x}$ определяется только внешним пульсационным полем скорости.

Пусть за пределами пограничного слоя жидкость совершает линейно-поляризованные пульсации, заданные гармоническим законом. Продольную компоненту скорости представим в виде

$$U = q(x, z) \cos t_-,$$

тогда

$$-\frac{\partial p_{00}}{\partial x} = \frac{\partial U_{00}}{\partial t_-} = -q_{00}(x) \sin t_-,$$

где $q(x, z)$ - амплитуда внешних пульсаций, для которой справедливы разложения

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots + \varepsilon^s q_s,$$

$$q_0 = q_{00} + z q_{01} + \dots + z^s q_{0s}.$$

Видно, что в нулевом порядке разложения по ε и z поперечная компонента скорости в пределах пограничного слоя $v_{00} = 0$. Окончательно, для скорости пульсаций в вязком пограничном слое получаем следующую краевую задачу

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial t_-} = -q_{00}(x) \sin t_- + \left(|u_{00\xi}|^{n-1} u_{00\xi} \right)_\xi, \quad (2.12)$$

$$\xi = 0: u_{00} = 0, \quad \xi \rightarrow \infty: u_{00\xi} = 0.$$

Задача (2.12) решалась численно методом конечных разностей. Для повышения устойчивости расчетной схемы при рассмотрении осредненного поля скорости в степенной реологический закон (2.2) вносилась эффективная начальная вязкость μ_0 $\tau_{ij} = (\mu_0 + kH)e_{ij}$ в предположении, что $\mu_0 \ll kH$.

Для определения осредненного поля скоростей рассмотрим систему (2.6) в первом порядке разложения по ε и нулевом порядке разложения по z с учетом слагаемых с эффективной вязкостью. В задаче появляется малый параметр $\bar{\delta} = L^{-1} \sqrt{(\mu_0/\rho\omega)}$, который раскладывается по степеням ε :

$$\bar{\delta} = \varepsilon \bar{\delta}_1 + \varepsilon^2 \bar{\delta}_2 + \dots + \varepsilon^s \bar{\delta}_s,$$

и реологический параметр $A_n = (\alpha^2 \tilde{\omega}^{n-1})^{\frac{-1}{n+1}} < 1$.

Допишем к первому и второму уравнениям системы (2.6) соответствующие линейно-вязкие слагаемые:

$$A_n \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + A_n^{1/2} \delta \bar{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial z} + \delta \bar{\delta}^2 \Delta u, \quad A_n \delta \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + A_n^{1/2} \delta \bar{\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial z} + \delta \bar{\delta}^2 \Delta v.$$

Положим $\delta_1 = 1$, в этом случае $\delta \approx \varepsilon$, $\gamma_1 \approx \gamma/\delta = 1$, $\bar{\delta}_1 \approx \bar{\delta}/\delta = A_n^{1/2}$. Параметр A_n определяет отношение линейно- и нелинейно-вязких слагаемых, где $\alpha = (k/\rho L^2)(\mu_0/\rho L^2)^{n-2} (b\tilde{\omega}/L)^{n-1}$, а $\tilde{\omega}$ – безразмерная частота вибраций

определяется как $\tilde{\omega} = \omega R L^2 / \mu_0$. В первое уравнение (2.12), выписанное для главных порядков разложения, добавится линейно-вязкое слагаемое вида $A_n \partial^2 u_{00} / \partial \xi^2$.

В первом порядке разложения по ε и нулевом по z для системы (2.6) и граничных условий имеем

$$\begin{aligned} A_n \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + A_n \frac{\partial u_{01}}{\partial \xi} + \left(|u_{00\xi}|^{n-1} u_{10\xi} \right)_\xi + n \left(|u_{00\xi}|^{n-1} u_{01} \right)_\xi = \\ = v_{10} \frac{\partial u_{00}}{\partial \xi} + u_{00} \frac{\partial u_{00}}{\partial x} + \frac{\partial p_{10}}{\partial x} + \frac{\partial u_{10}}{\partial t_-}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial p_{10}}{\partial \xi} = 0, \quad v_{10} = -\delta_1 \int_0^\xi (u_{00x} + v_{01}) d\xi,$$

$$\xi = 0: u_{10} = 0, \quad \xi \rightarrow \infty: \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0.$$

В этом порядке давление, как и ранее, не зависит от координаты ξ и определяется внешним полем скорости. Записав проекцию на ось x первого уравнения из (2.8) в соответствующем порядке разложения, для давления получим

$$\frac{\partial p_{10}}{\partial x} = -U_{00} \frac{\partial U_{00}}{\partial x} + q_{10}(x) \sin t_-. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в (2.13) и переопределяя u_{10} : $u_{10} = u_{10} - q_{10} \cos t_-$, получим

$$\begin{aligned}
A_n \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + A_n \frac{\partial u_{01}}{\partial \xi} + \left(|u_{00\xi}|^{n-1} u_{10\xi} \right)_\xi + n \left(|u_{00\xi}|^{n-1} u_{01} \right)_\xi = \\
= v_{10} \frac{\partial u_{00}}{\partial \xi} + u_{00} \frac{\partial u_{00}}{\partial x} - U_{00} \frac{\partial U_{00}}{\partial x} + \frac{\partial u_{10}}{\partial t_-}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Для определения u_{01} и v_{01} запишем (2.6) в главном порядке разложения по ε и первом порядке разложения по z :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{01}}{\partial t_-} + v_{01} \frac{\partial u_{00}}{\partial \xi} = -\frac{\partial p_{01}}{\partial x} + \left(|u_{00\xi}|^{n-1} u_{01\xi} \right)_\xi + A_n \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial \xi^2}, \\
\frac{\partial p_{01}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial v_{01}}{\partial \xi} = 0,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\xi = 0: u_{01} = 0, \quad \xi \rightarrow \infty: \frac{\partial u_{01}}{\partial \xi} = 0.$$

Видно, что p_{01} и v_{01} не зависят от координаты ξ и определяются полем скорости внешнего потока жидкости

$$-\frac{\partial p_{01}}{\partial x} = \frac{\partial U_{01}}{\partial t_-}, \quad v_{01} = -\frac{\partial U_{00}}{\partial x} = -\frac{\partial q_{00}}{\partial x} \cos \tau, \tag{2.17}$$

где U_{01} - предел при $z \rightarrow 0$ производной по координате z от продольной компоненты скорости внешнего пульсационного течения. При записи уравнений (2.16) и (2.17) учитывалось, что u_{01} , v_{01} и p_{01} фактически определяют внешние по отношению к пограничному слою поля скорости и давления.

Уравнение (2.15) содержит слагаемые с начальной вязкостью, аналогичные ньютоновским, и степенные неньютоновские слагаемые. По этой причине

применение операции осреднения, подобной той, которая была использована в [6, 101-103], оказывается затруднительным. Среднее течение, генерируемое в вязком пограничном слое, можно найти путем численного осреднения решения задачи (2.12) – (2.17), решая её с учетом условия

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow \infty}} \langle u_{10} \rangle \rightarrow \langle U \rangle, \quad (2.18)$$

где скобки обозначают операцию осреднения по периоду пульсаций. В этом случае можно определить среднее значение продольной компоненты скорости на внешней границе пограничного слоя, что дает эффективное граничное условие, аналогичное шлихтинговскому, для вычисления осредненного течения в ядре потока.

2.2.2 Пульсационное поле скорости

Исследуем общие закономерности влияния неньютоновских свойств на пульсационное течение в пограничном слое около твердой поверхности. Для этого рассмотрим простую задачу о пульсационном течении дилатантной жидкости между двумя твердыми пластинами, находящимися на расстоянии h друг от друга (h безразмерная величина). В дальнейшем в приближении пограничного слоя будет рассматриваться задача об обтекании пульсационным потоком дилатантной жидкости твердого цилиндра кругового сечения. В этом случае можно ввести для каждой точки поверхности цилиндра локальную прямоугольную систему координат и применить для расчета пульсационного течения около цилиндра методику, разработанную в данном параграфе.

Задача (2.12), описывающая пульсационное течение, решалась методом конечных разностей с использованием явной схемы в предположении, что $q_{00} = 1$.

Функция $F = |u_{00\xi}|^{n-1} u_{00\xi}$ вычислялась с использованием односторонних направленных разностей вперед, а при определении поля скорости u_{00}

производная F_{ξ} аппроксимировалась односторонней направленной разностью назад. На твердых стенках ставились условия прилипания. Поле скорости определялось как в вязких пограничных слоях, так и в ядре потока. В предельном случае ньютоновской жидкости ($n = 1$) задача (2.12) имеет известное аналитическое решение, которое использовалось для верификации численного алгоритма. Проверялась также сходимость результатов вычислений с уменьшением шага сетки; оптимальным для расчетов оказался пространственный шаг сетки равный 0.2.

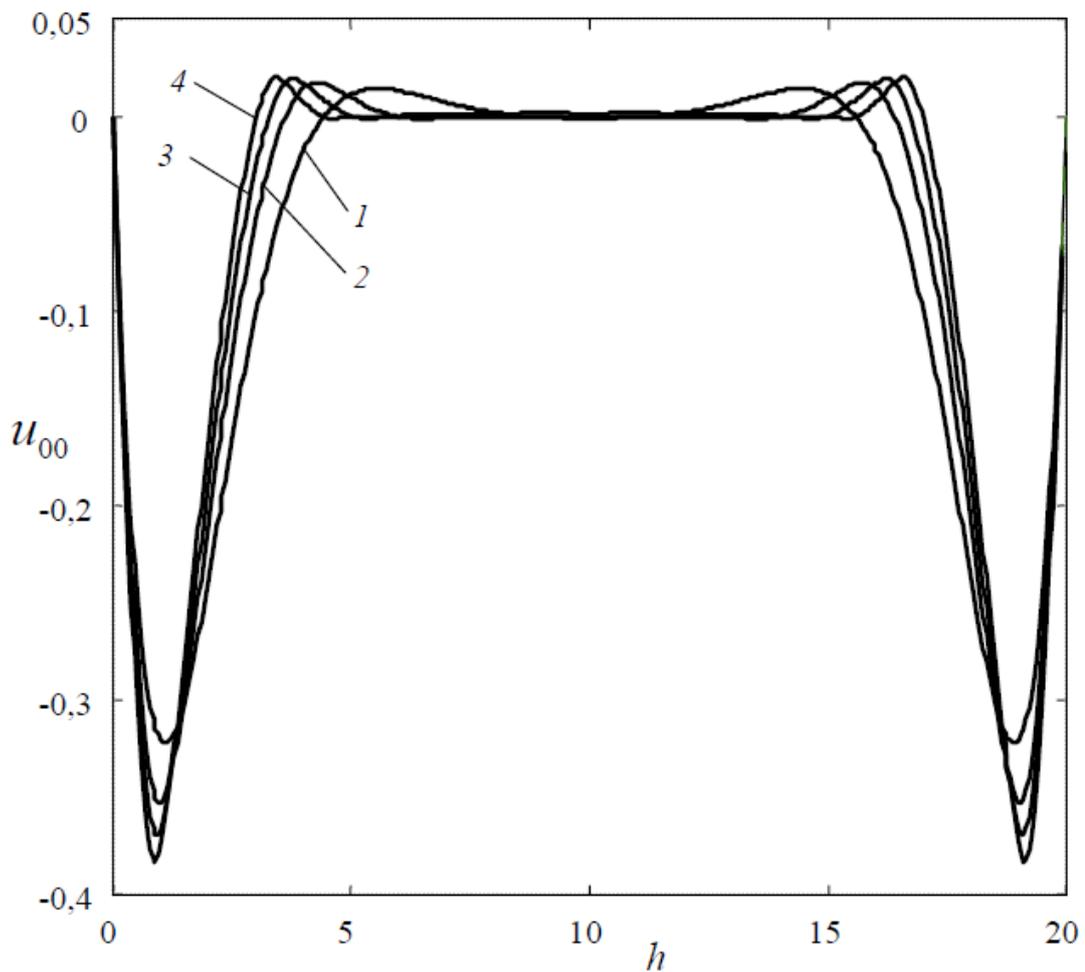


Рис. 2.1 Профили пульсационного поля скорости для различных показателей неньютоновости: 1 – $n = 1.0$; 2 – 1.3; 3 – 1.5; 4 – 1.7

Профили скорости пульсационного течения для момента времени, равного $1/8$ периода колебаний дилатантной жидкости, представлены на рисунке 2.1. Видно, что при увеличении показателя неньютоновости толщина вязкого

пограничного слоя уменьшается, при этом происходит рост амплитуды скорости пульсационного течения. В центральной части слоя скорость жидкости не меняется при изменении поперечной координаты. Это позволяет утверждать, что в основном потоке дилатантная жидкость подобна идеальной.

2.2.3 Осредненное поле скорости

Рассмотрим бесконечно длинный цилиндр радиуса L , обтекаемый пульсационным потоком дилатантной жидкости. Частота пульсаций ω велика, амплитуда b мала, пульсации являются линейно-поляризованными, их направление перпендикулярно оси цилиндра.

Безразмерная амплитуда пульсаций касательной компоненты скорости основного потока жидкости определяется выражением $q = -(1 + r^{-2})\sin\varphi$. При $r \rightarrow 1$, т.е. вблизи поверхности цилиндра или фактически на внешней границе пограничного слоя, это выражение может быть разложено в ряд Тейлора $q = -2\sin\varphi + 2(r-1)\sin\varphi$. Введем для каждого конкретного угла φ локальную прямоугольную систему координат x, ξ , начало которой находится на поверхности цилиндра. В пределах пограничного слоя быстрая координата $\xi = (r-1)/\delta$ направлена по нормали к поверхности цилиндра. Координата x направлена вдоль поверхности цилиндра. В окрестности конкретной точки, определяемой углом φ , поверхность цилиндра можно считать локально плоской. Пульсационное поле скорости в этой окрестности определяется уравнениями (2.12), дополненными линейно-вязким слагаемым. Для амплитуды продольной компоненты скорости внешнего пульсационного потока в главном порядке разложения по ε и z имеем выражение $q_{00} = -2\sin\varphi$. Координата z заменяется на $r-1$, а граничные условия на твердой поверхности ставятся при $r=1$. Производные по x в главном приближении равны производным по φ , а $U_{01} = q_{01} = 2\sin\varphi$.

В силу симметрии задачи (2.12) – (2.17) расчет производился для углов, лежащих в первом квадранте, при этом угол отсчитывался от оси вибраций.

Аппроксимация дифференциальных уравнений производилась конечными разностями с использованием явной схемы. Слагаемые

$$\left(|u_{00\xi}|^{n-1} u_{00\xi} \right)_\xi, \quad \left(|u_{00\xi}|^{n-1} u_{10\xi} \right)_\xi, \quad \left(|u_{00\xi}|^{n-1} u_{01} \right)_\xi$$

аппроксимировались аналогично функции F . Все остальные слагаемые представлялись в виде центральных разностей. Размер расчетной области в безразмерных единицах варьировался в пределах от 8 до 12 вдоль радиуса цилиндра. При проверке сходимости результатов вычислений с уменьшением пространственного шага сетки была определена оптимальная расчетная сетка, включающая 150 узлов в радиальном направлении при заданном значении полярного угла φ . Производная по продольной координате u_{00x} в уравнении (2.15) вычислялась в результате дополнительных расчетов пульсационного поля скорости при углах $\varphi + \Delta\varphi$ и $\varphi - \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi = 10^{-3}$. Предполагалось, что $A_n = 0.1$. Картина среднего течения определялась путем усреднения решения по десяти безразмерным периодам вибраций.

Результаты расчетов представлены на рисунках 2.2 и 2.3. Расчеты, проведенные для $n = 1$, качественно согласуются с результатами, приведенными в [95, 100]. С увеличением показателя неньютоновости n центры вихрей смещаются от оси вибрации, а интенсивность течения уменьшается (см. рис. 2.2). для наглядности размер вязкого пограничного слоя вдоль радиуса цилиндра на рисунке 2.2 увеличен в 10 раз. Ось пульсаций направлена горизонтально. Жидкость подтекает к цилиндру вдоль оси пульсаций.

Для рассмотренного случая эффективное граничное условие в достаточно широком диапазоне чисел n может быть представлено в следующем виде:

$$\langle U \rangle = -K(n) \sin 2\varphi,$$

где угловые скобки обозначают операцию осреднения по периоду пульсаций. Вид функции $K(n)$ показан на рисунке 2.3.

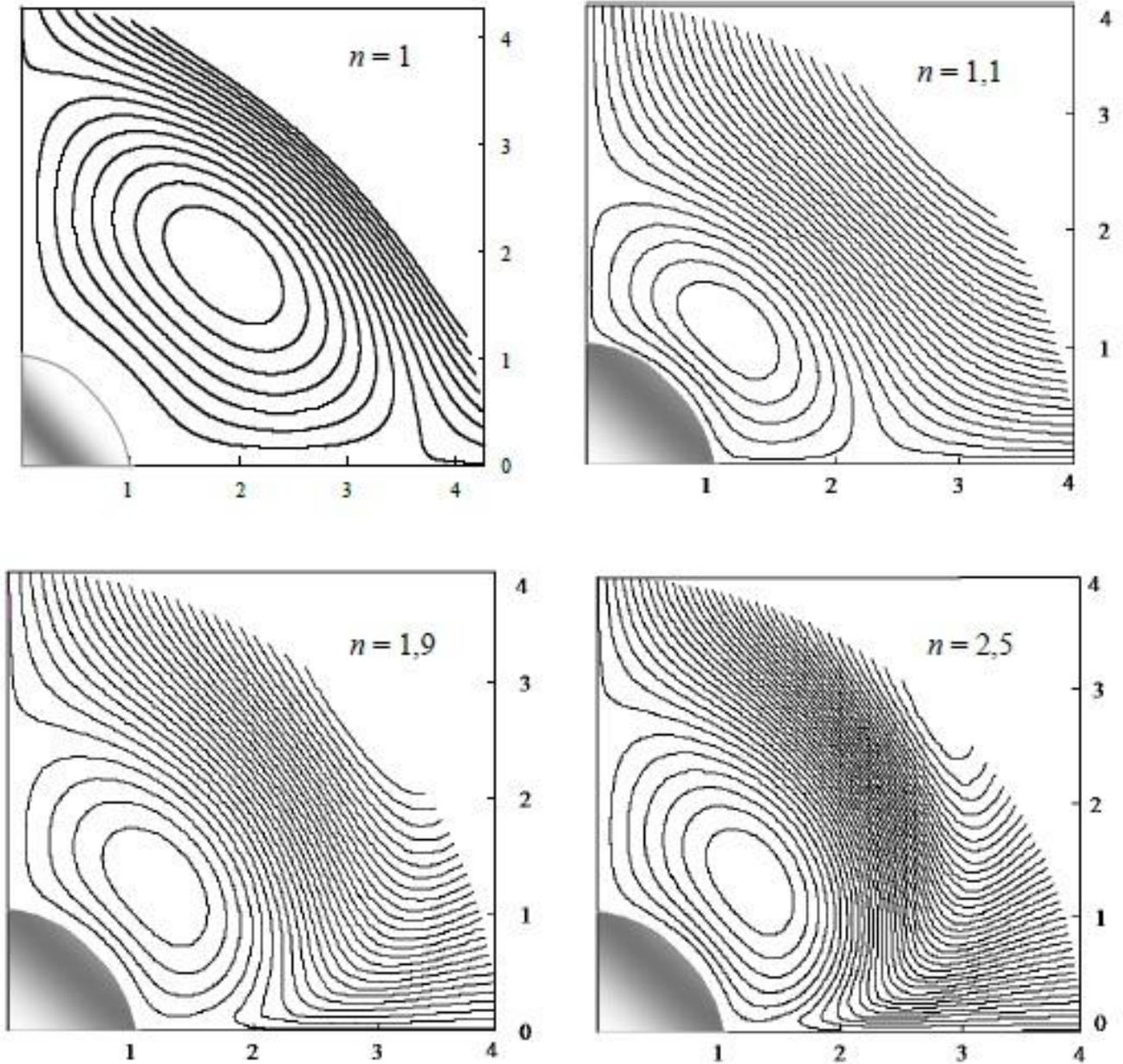
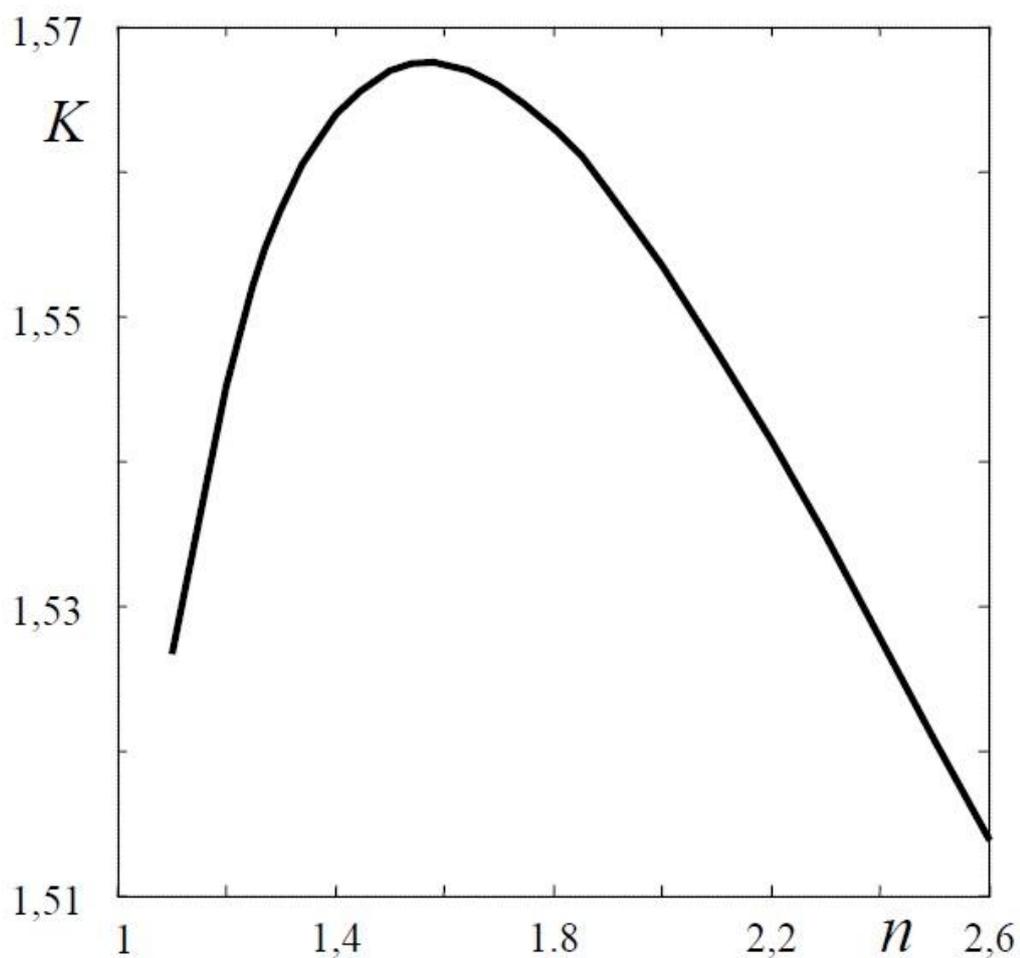


Рис. 2.2 Линии тока среднего течения в вязком пограничном слое для различных показателей неньютоновости

Рис. 2.3 График функции $K(n)$

2.3 Обтекание бесконечно длинного твердого цилиндра жидкостью Уильямсона

2.3.1 Постановка задачи

Для описания движения вязкопластичной жидкости около твердого бесконечно длинного твердого цилиндра радиуса L решается плоская двумерная задача. Удобно использовать полярные координаты r, φ , где φ – угол поворота радиус-вектора точки \vec{r} относительно некоторой полярной оси, совпадающей в нашем случае с осью вибраций. Введем завихренность течения Ω и функцию тока Ψ соотношениями:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad \Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}. \quad (2.19)$$

Будем использовать для описания реологического поведения жидкости модель Уильямсона (2.3). Применяя к уравнению движения (2.4) операцию rot в проекции на ось z , учитывая (2.19) и вводя в качестве единиц измерения координат, времени, скорости, вихря и функции тока соответственно величины L , L^2/ν_∞ , U_0 , U_0/L и LU_0 , получим в безразмерной форме уравнения и граничные условия, описывающие движение жидкости

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{Re}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi \partial r} + \frac{3}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi},$$

$$T_1 = \left(\frac{a}{b + \sqrt{I_2}} + 1 \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right),$$

(2.20)

$$T_2 = 2 \left(\frac{a}{b + \sqrt{I_2}} + 1 \right) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi \partial r} \right),$$

$$I_2 = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + 4 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi \partial r} \right)^2,$$

$$z = 1: \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \psi = 0,$$

$$z = h: \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \sin \varphi \cos(\tilde{\omega} t), \quad \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos \varphi \cos(\tilde{\omega} t).$$

На поверхности цилиндра ставятся условия прилипания. Вдали от цилиндра задается поток жидкости, скорость которого определяется выражением $U = U_0 \cos \omega t$.

Задача (2.19) – (2.20) содержит четыре безразмерных параметра:

$$a = \frac{AL}{U_0 \mu_\infty}, \quad b_w = \frac{BL}{U_0}, \quad Re = \frac{U_0 L}{\nu_\infty}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega L^2}{\nu_\infty},$$

где ν_∞ – кинематическая вязкость при больших скоростях сдвига, а $U_0 = b\omega$. Отметим, что число Рейнольдса и безразмерная частота вибраций являются независимыми параметрами, причем $Re/\tilde{\omega} = b/L \ll 1$.

Рассматривалась жидкость Уильямсона, близкая по своим реологическим свойствам к вязкопластичной жидкости. При $b_w \rightarrow 0$ параметр a играет роль предельного напряжения сдвига. Для малых, но отличных от нуля значений b_w , положение границы раздела квазитвердой и жидкой зон может быть найдено из условия $\sqrt{T_1^2 + T_2^2} = a$. В областях, в которых $\sqrt{T_1^2 + T_2^2} < a$, скорости сдвига очень малы, что дает основание полагать их квазитвердыми или жесткими – жидкость движется в этих областях практически как твердое тело. Основные расчеты проводились для $a = 10$ и $b_w = 0.01$.

2.3.2 Форма квазитвердых зон и структура течения

Задача (2.19) – (2.20) решалась с помощью последовательного алгоритма, в котором реализован хорошо зарекомендовавший себя в подобных задачах двухполевой метод [1]. Для аппроксимации уравнения (2.20) применялась явная схема. Уравнение для завихренности решалось методом последовательной верхней релаксации, параметр релаксации брался равным 1.5. Завихренность Ω на поверхности цилиндра аппроксимировалась с помощью формулы Тома. Размер расчетной области вдоль радиальной координаты выбирался равным пяти безразмерным радиусам цилиндра, а по азимутальной координате – от 0 до π .

Расчеты проводились на сетке 100×100 узлов, выбор которой обусловлен исследованиями сходимости численных результатов при уменьшении размера расчетной ячейки.

Рассмотрим стационарный набегающий на цилиндр поток вязкопластичной жидкости ($\tilde{\omega} = 0$) при числе Рейнольдса $Re = 1$. В начальный момент времени вся вязкопластичная жидкости, находящаяся в квазитвердом состоянии, начинает движение около цилиндра с некоторой постоянной скоростью.

На рисунке 2.4 приведен процесс установления границы раздела зон. Видно, что с течением времени около цилиндра образуется жидкая зона сложной формы. Она окружена квазитвердой областью и вытянута по потоку жидкости. Жидкие зоны на рисунках 2.4 и 2.5 заштрихованы. К моменту времени $t = 0.1440$ форма жидкой зоны устанавливается и в дальнейшем не изменяется. Линии тока на рисунке 2.4 приведены для того же момента времени. Жидкость, движущаяся как твердое тело, подходя к границе раздела зон, «оттаивает» и переходит в жидкую фазу. С другой стороны, жидкая фаза при пересечении границы раздела зон «застывает» и движется как квазитвердое тело.

Отметим, что похожая структура взаимного расположения зон вязкого течения и жестких зон при обтекании стационарным потоком жидкости Шведова-Бингама бесконечного твердого цилиндра, находящегося в зазоре между двумя твердыми плоскостями, описана в работе [5].

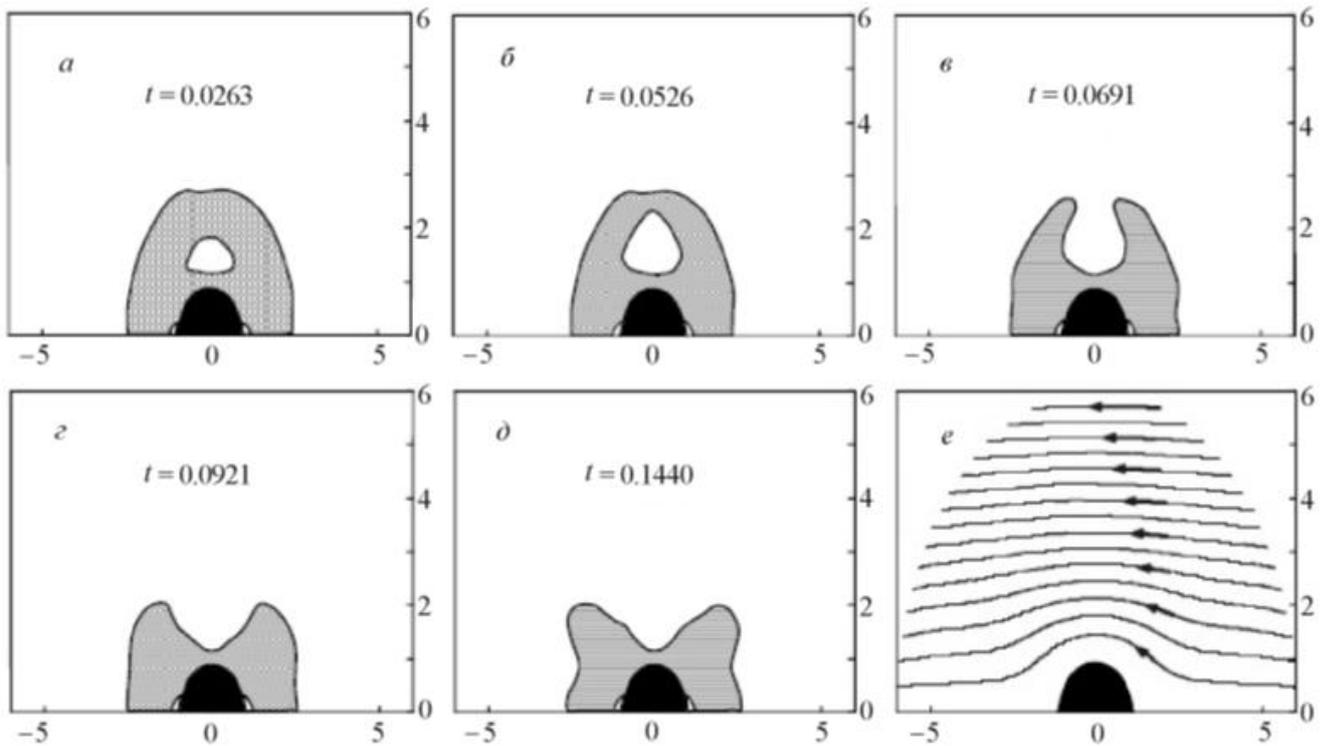


Рис. 2.4. Динамика взаимного расположения квазитвердых и жидких (заштрихованные участки) зон в стационарном течении вязкопластичной жидкости (*a – d*) и линии тока этого течения (*e*)

Высокочастотные вибрации приводят к генерации осредненных течений, которые имеют вихревую структуру. При этом форма и размеры квазитвердых и жидких зон в пульсационном потоке жидкости изменяются в течение периода колебаний. Результаты расчетов для $Re = 10$, $\tilde{\omega} = 100$ и $\tilde{\omega} = 1000$ показаны на рисунках 2.5 и 2.6 соответственно. Из рисунка 2.6 видно, что в осредненном течении существуют области, в которых течение жидкости практически отсутствует. Эти области можно интерпретировать, как квазитвердые для осредненного потока вязкопластичной жидкости.

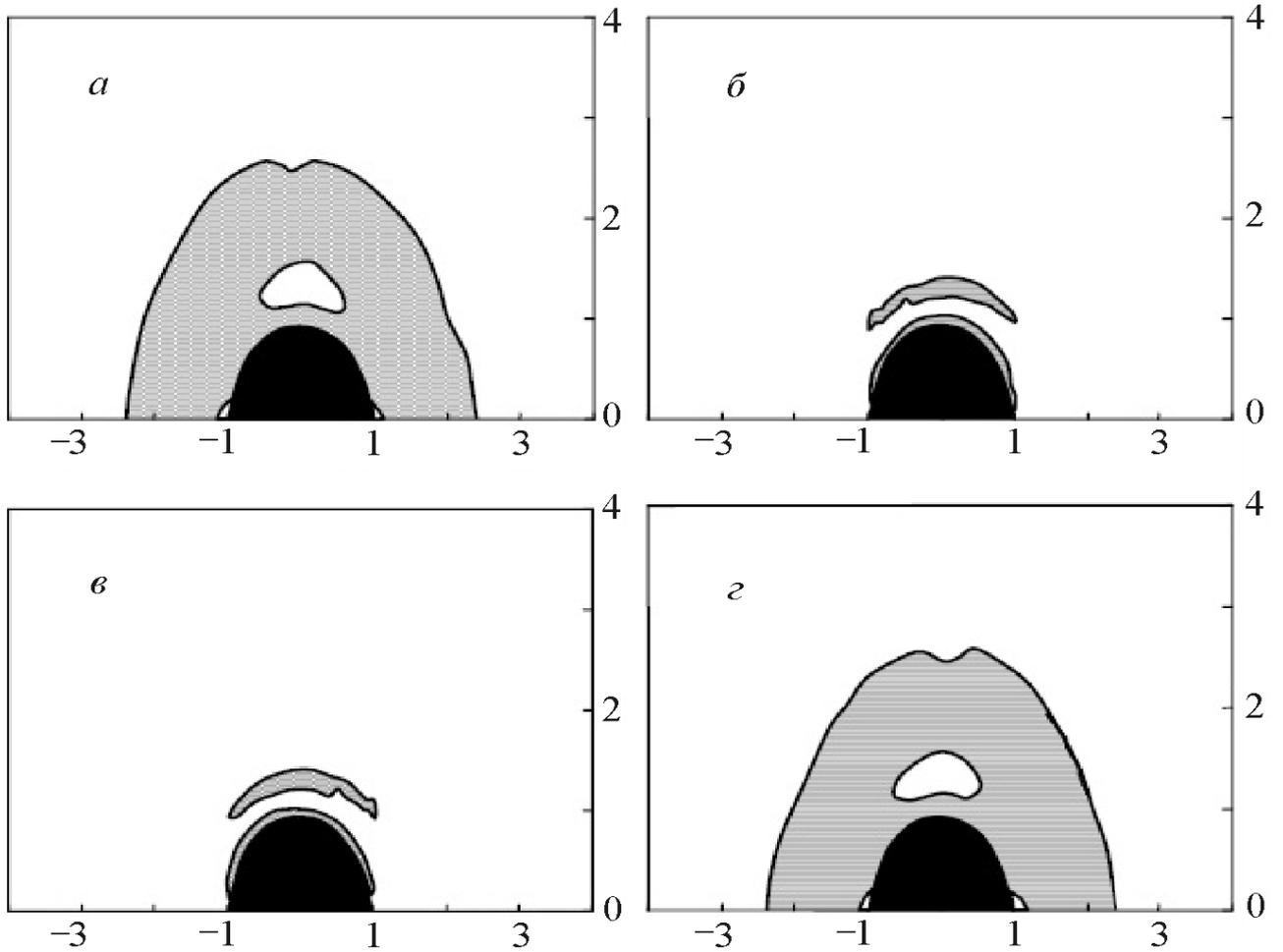


Рис. 2.5 Взаимное расположение квазитвердых и жидких зон в пульсационном потоке вязкопластичной жидкости в течение периода вибраций $T = 2\pi/\tilde{\omega}$ для $\tilde{\omega} = 100$ и моментов времени $t = 0$ (*a*), $\pi/200$ (*б*), $\pi/100$ (*в*) и $3\pi/200$ (*г*). Начало периода соответствует фрагменту *a*.

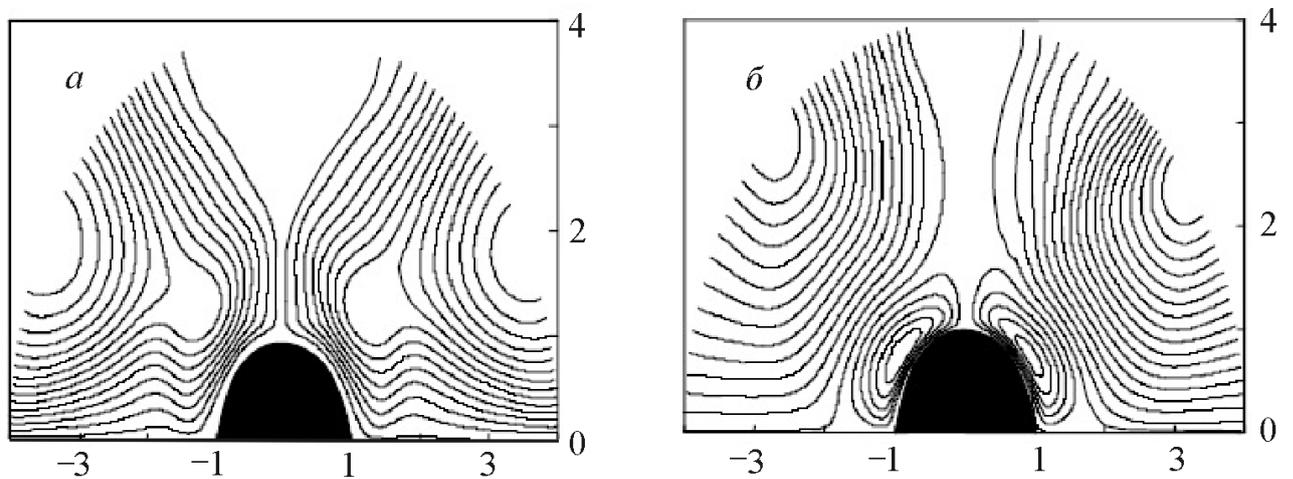


Рис. 2.6 Области течения жидкости в осредненном потоке вязкопластичной жидкости: *a* - $\tilde{\omega} = 100$; *б* - $\tilde{\omega} = 1000$.

2.4 Основные результаты и выводы

В настоящей главе получены уравнения пульсационного и среднего течений дилатантной жидкости в пограничном слое вблизи твердой поверхности и эффективное граничное условие на внешней границе пограничного слоя. Расчеты показали, что при увеличении показателя неньютоновости толщина вязкого пограничного слоя уменьшается и происходит заметный рост скорости пульсационного течения. Рассчитано осредненное течение около бесконечного твердого цилиндра. Найдено, что с увеличением показателя неньютоновости центры вихрей смещаются от направления пульсаций, а интенсивность течения уменьшается. Эффективное граничное условие для дилатантной жидкости в достаточно широком диапазоне чисел n отличается от аналогичного условия для ньютоновской жидкости лишь коэффициентом $K(n)$.

Течение вязкопластичной жидкости характеризуется наличием в нем квазитвердых и жидких зон. Показано, что при обтекании стационарным потоком вблизи цилиндра образуется жидкая зона, окруженная со всех сторон квазитвердой областью. Эта жидкая зона симметрична относительно оси, соответствующей полярному углу $\varphi = \pi/2$ и вытянута вдоль потока. При наличии пульсаций структура и взаимное расположение различных зон течения изменяются в течение периода. Осредненное течение хотя и является вихревым, но качественно отличается от течения ньютоновской жидкости. Внутри него имеются квазитвердыми зоны, среднее течение в которых практически отсутствует.

ГЛАВА 3. ДВИЖЕНИЕ СЛОЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Движение слоев неньютоновских жидкостей часто встречается в различных процессах химической, обрабатывающей, атомной и пищевой отраслей промышленности. Кроме того, к движущимся слоям нелинейно-вязких жидкостей можно отнести такие природные явления, как селевые потоки и снежные лавины. В этой главе диссертации рассматривается стекание нелинейно-вязких жидкостей по наклонной твердой поверхности, которая может совершать вибрации в своей плоскости. Реология жидкостей описывается уравнениями состояния Шведова-Бингама и Уильямсона. Оба реологических уравнения относятся к классу обобщенных ньютоновских.

Реологический закон Шведова-Бингама, как известно, применим для описания вязкопластичных сред. Существенным недостатком этого закона является его разрывность. По сути, он состоит из двух уравнений, одно из которых, аналогичное реологическому закону Ньютона, описывает состояние системы в жидкой фазе, где наблюдается сдвиговое течение. Второе уравнение описывает жесткую зону, движущуюся как твердое тело. При использовании реологического закона Шведова-Бингама, особенно в нестационарных задачах, возникает проблема определения положения границы раздела зон (фаз) и постановка дополнительных граничных условий на ней.

Реологическое уравнение Уильямсона описывает состояние псевдопластичных сред. В предельном случае из него получается реологический закон Ньютона для обычных ньютоновских жидкостей. С другой стороны, при определенном соотношении реологических параметров закон Уильямсона применим для описания вязкопластичных жидкостей [77, 78]. При этом реологическое уравнение Уильямсона является непрерывным, т.е. все проблемы, связанные с границей раздела фаз, отпадают, а само положение границы раздела легко определяется.

Законы Шведова-Бингама и Уильямсона для плоскопараллельного стационарного течения можно записать в форме

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign}(\dot{\gamma}) + \mu_p \dot{\gamma}, \quad |\tau| > \tau_0, \quad (3.1)$$

$$\dot{\gamma} = 0, \quad |\tau| \leq \tau_0,$$

$$\tau = \left(\frac{A}{B + \sqrt{\dot{\gamma}}} + \mu_\infty \right) \dot{\gamma}, \quad (3.2)$$

где τ – напряжения сдвига; $\dot{\gamma} = \partial u / \partial z$ – скорость сдвига (z – поперечная координата).

В модели Шведова-Бингама: μ_p – пластическая вязкость или коэффициент жесткости при сдвиге; τ_0 – предел текучести, при $|\tau| > \tau_0$ имеем зону вязкого течения (жидкая фаза), когда $|\tau| \leq \tau_0$ жидкость движется, как твердое тело (твердая или жесткая фаза).

В модели Уильямсона: A и B реологические параметры, μ_∞ – вязкость при бесконечно большой скорости сдвига. В случае, когда $A/B \rightarrow \infty$, модель Уильямсона описывает поведение вязкопластичных сред. Параметр A приобретает смысл τ_0 и носит название динамического предела текучести. Если параметры $A = \tau_0 = 0$, то обе модели превращаются в ньютоновскую.

Реологические уравнения (3.1) и (3.2) могут быть обобщены на случай трехмерных нестационарных течений. Для этого примем гипотезу о коллинеарности тензоров вязких напряжений τ_{ij} и скоростей сдвига e_{ij} , тогда

$$\tau_{ij} = \left(\frac{\tau_0}{\sqrt{I_2}} + \mu_p \right) e_{ij}, \quad \tau_2 > \tau_0, \quad (3.3)$$

$$I_2 = 0, \quad \tau_2 \leq \tau_0,$$

$$\tau_{ij} = \left(\frac{A}{B + \sqrt{I_2}} + \mu_\infty \right) e_{ij}, \quad (3.4)$$

$$e_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad I_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}, \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ji}}.$$

Если в какой-либо части объема бингамовской жидкости второй инвариант тензора вязких напряжений τ_2 не превышает значения τ_0 , то в этой области второй инвариант тензора скоростей сдвига $I_2 = 0$. Жидкость в этой области не течет, т.е. находится в твердой фазе.

В случае применения модели Уильямсона к вязкопластичным средам, если в потоке существует область, для которой $\tau_2 \leq A$, то жидкость в этой области практически не течет, т.е. $I_2 \rightarrow 0$. Такие области называются жесткими или квазитвердыми.

Рассмотрим слой вязкопластичной жидкости толщиной h , ограниченный сверху свободной поверхностью, а снизу – твердой плоскостью. Угол наклона слоя относительно вертикали равен α . Оси x и y лежат на твердой поверхности, а ось z направлена перпендикулярно к ней, см. рисунок 3.1.

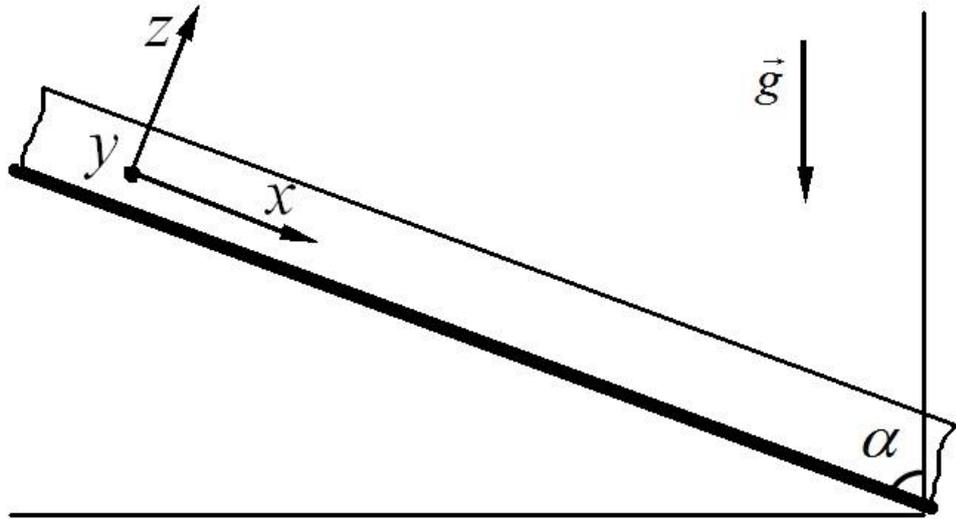


Рис. 3.1 Наклонный слой вязкопластичной жидкости

Движение несжимаемой жидкости, находящейся в поле тяжести, описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \text{Div} \tau + g \vec{k}, \quad \text{div} \vec{u} = 0, \quad (3.5)$$

где ρ – плотность, \vec{k} – единичный вектор, направленный вертикально вниз; g – ускорение свободного падения, τ – тензор вязких напряжений.

В тех случаях, когда для описания реологии вязкопластичной жидкости будет использоваться модель Шведова-Бингама, будем называть жидкость, как это принято, бингамовским пластиком. В случае использования реологической модели Уильямсона вязкопластичная среда будет называться жидкостью Уильямсона. Однако необходимо понимать, что в том и другом случае речь идет об одной и той же вязкопластичной среде.

3.1 Стационарное течение в поле тяжести

3.1.1 Бингамовский пластик

Исследуем стационарное течение, возникающее в наклонном слое бингамовской жидкости под действием статического поля тяжести. Поскольку на свободной поверхности касательные напряжения отсутствуют, к этой поверхности должна примыкать жесткая зона (фаза). Жидкая зона будет существовать вблизи твердой поверхности, т.к. напряжения сдвига там наиболее велики. На некотором расстоянии от этой поверхности жидкая зона сменяется жесткой, причем между различными зонами имеется четкая граница раздела.

Для жидкой фазы на твердой поверхности должно выполняться условие прилипания. На межфазной границе будут выполняться условия равенства касательных напряжений и равенства скоростей движения жидкой и жесткой фаз. Касательные напряжения τ в жесткой фазе изменяются от τ_0 на границе раздела фаз до нуля на свободной поверхности.

Будем считать стационарное течение жидкости плоскопараллельным, а его скорость зависящей только от поперечной координаты z . Продольную составляющую скорости в жидкой зоне обозначим u . Скорость движения жесткой зоны здесь и далее будем обозначать u_c . Толщину жидкой зоны обозначим d .

Система уравнений (3.5) с граничным условием на твердой стенке для стационарного движения слоя бингамовского пластика в статическом поле тяжести в жидкой зоне запишется в форме:

$$u_{zz} = -\frac{\rho}{\mu_p} g \cos \alpha, \quad z = 0: u = 0, \quad (3.6)$$

здесь и далее подстрочный индекс z обозначает частную производную по поперечной координате. Для жесткой зоны имеем

$$\tau_z = -\rho g \cos \alpha, \quad z = h: \quad \tau = 0. \quad (3.7)$$

На границе раздела зон ставим условия

$$z = d: \quad \tau = \tau_0, \quad u_z = 0, \quad u = u_c. \quad (3.8)$$

Решение задачи (3.6) – (3.8) дает выражения для скоростей движения фаз и положения границы раздела:

$$u = -\frac{\rho g \cos \alpha}{\mu_p} \left(\frac{z^2}{2} - dz \right), \quad u_c = \frac{\rho g \cos \alpha d^2}{2\mu_p}, \quad d = h - \frac{\tau_0}{g \cos \alpha \rho} \quad (3.9)$$

Из последнего равенства (3.9) можно найти толщину жесткой зоны:

$$d_c = \frac{\tau_0}{\rho g \cos \alpha}. \quad (3.10)$$

Естественно, что выражения (3.9) – (3.10) имеют смысл, пока толщина жесткой зоны меньше h , т.е. при $\tau_0 < \rho g h \cos \alpha$. В противном случае течение отсутствует.

Для дальнейшего обсуждения результатов удобно перейти к безразмерным переменным. Выберем в качестве единиц для координаты и скорости соответственно величины h и $\rho g \cos \alpha h^2 / \mu_p$. Тогда соотношения (3.9) – (3.10) примут вид

$$u = -\left(\frac{z^2}{2} - z\Delta_f\right), \quad u_c = \frac{1}{2}\Delta_f^2, \quad \Delta_f = 1 - \Delta_c. \quad (3.11)$$

В (3.11) $\Delta_f = d/h$ – относительная толщина жидкой зоны, $\Delta_c = d_c/h$ – относительная толщина жесткой зоны (в случае ньютоновской жидкости $\Delta_c = 0$). Аналогичные выражения для профиля скорости стационарного гравитационного течения тонкой пленки бингамовского пластика по твердой плоской стенке приведены в монографии [158].

Отметим, что параметр $\Delta_c = d_c/h$ имеет смысл не только безразмерной толщины твердой фазы, но и предельного напряжения сдвига. Для существования жидкой фазы и, следовательно, возможности свободного стекания слоя вязкопластика по наклонной твердой поверхности необходимо, чтобы $\Delta_c < 1$.

3.1.2 Жидкость Уильямсона

Теперь рассмотрим плоскопараллельное стационарное течение слоя жидкости Уильямсона по наклонной плоскости. Обозначим через u , p , τ – соответственно скорость, давление и касательное напряжение сдвига основного стационарного течения. При использовании тех же единиц измерения, что и в предыдущем параграфе уравнения движения жидкости (3.5) и граничные условия записываются в безразмерной форме в виде

$$\tau_z = -1, \quad p_z = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \tau = \left(\frac{a_g}{b + u_z} + 1\right)u_z, \quad (3.12)$$

$$z = 0: \quad u = 0; \quad z = 1: \quad \tau = 0, \quad p = 0.$$

Здесь $a_g = A/\rho gh \cos \alpha$, $b = B\mu_\infty/\rho gh \cos \alpha$ – безразмерные реологические параметры.

После интегрирования системы (3.12) для производной скорости по координате z , которая имеет смысл скорости сдвига, и самой скорости движения жидкости получим выражения:

$$u_z = -\frac{1}{2}(a_g + b - (1 - z)) + \frac{1}{2}P(z), \quad (3.13)$$

$$u = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}z^2 + (a_g + b - 1)z\right) + \frac{1}{4}zP(z) + \quad (3.14)$$

$$+ \frac{1}{4}(a_g - b - 1)(P(z) - P_0(z)) + a_g b \ln\left(\frac{|z + a_g - b - 1 + P(z)|}{|a_g - b - 1 + P_0(z)|}\right),$$

$$P(z) = \sqrt{(a_g + b - (1 - z))^2 + 4b(1 - z)}, \quad P_0(z) = \sqrt{(a_g + b - 1)^2 + 4b}.$$

В предельном случае $a_g = 0$ из выражения (3.14) получаем профиль скорости, возникающий в пленке ньютоновской жидкости: $u = -0.5z^2 + z$, что совпадает с выражением, приведенным, например, в [32].

В вязкопластичном пределе $a_g \gg b$ и $b \rightarrow 0$ слой жидкости Уильямсона можно условно разбить на жидкую и жесткую (кваситвердую) зоны. Выражение (3.13) для скорости сдвига при $b = 0$ примет вид

$$u_z = -\frac{1}{2}(a_g - 1 + z) + \frac{1}{2}\sqrt{(a_g - 1 + z)^2} = \begin{cases} 0, & z \geq 1 - a_g \\ 1 - (z + a_g), & z < 1 - a_g \end{cases}. \quad (3.15)$$

В пределах жесткой зоны ($z \geq 1 - a_g$) скорости сдвига при малых b практически равны нулю. Положение границы раздела зон определяется величиной параметра a_g .

3.1.3 Обсуждение и сравнение результатов расчета стационарного течения

Профили скорости течения, возникающего в слое под действием силы тяжести, для различных типов жидкостей приведены на рисунке 3.2. Кривая 1 на рисунке 3.2 построена для ньютоновской жидкости, т.е. $a_g = \Delta_c = 0$. Стационарное стекание слоев жидкостей Бингама и Уильямсона происходит заметно медленнее, чем слоя ньютоновской жидкости. Линия 2 на рисунке 3.2 иллюстрирует движение жидкости Уильямсона с параметрами $a_g = b = 1$. Видно, что течение жидкости Уильямсона с близкими между собой по величине реологическими параметрами a_g и b качественно не отличается от течения ньютоновской жидкости.

Кривые 3 и 4 на рисунке 3.2 отвечают профилям скорости для жидкости Уильямсона при $a_g = 0.5$, $b = 10^{-4}$ и бингамовского пластика при $\Delta_c = 0.5$ соответственно. В масштабе графика эти кривые совпадают. Из формы кривых 3 и 4 видно, что для жидкости Уильямсона при $a_g \gg b$, $b \rightarrow 0$ и жидкости Бингама слой можно разбить на жидкую и квазитвердую (жесткую) зоны. Скорости сдвига в пределах квазитвердой зоны практически равны нулю.

Анализ выражений (3.11) и (3.13) – (3.15) показывает, что в вязкопластичном пределе ($b \rightarrow 0$) течения слоев жидкостей, описываемых моделями Уильямсона и Шведова-Бингама одинаковы. Профили скорости Бингамовского пластика и жидкости Уильямсона в поле тяжести при соответствующих реологических параметрах совпадают. Параметр a_g при $b \rightarrow 0$ в модели Уильямсона эквивалентен параметру Δ_c в модели Шведова - Бингама и определяет не только предельное напряжение сдвига, но и толщину квазитвердого слоя.

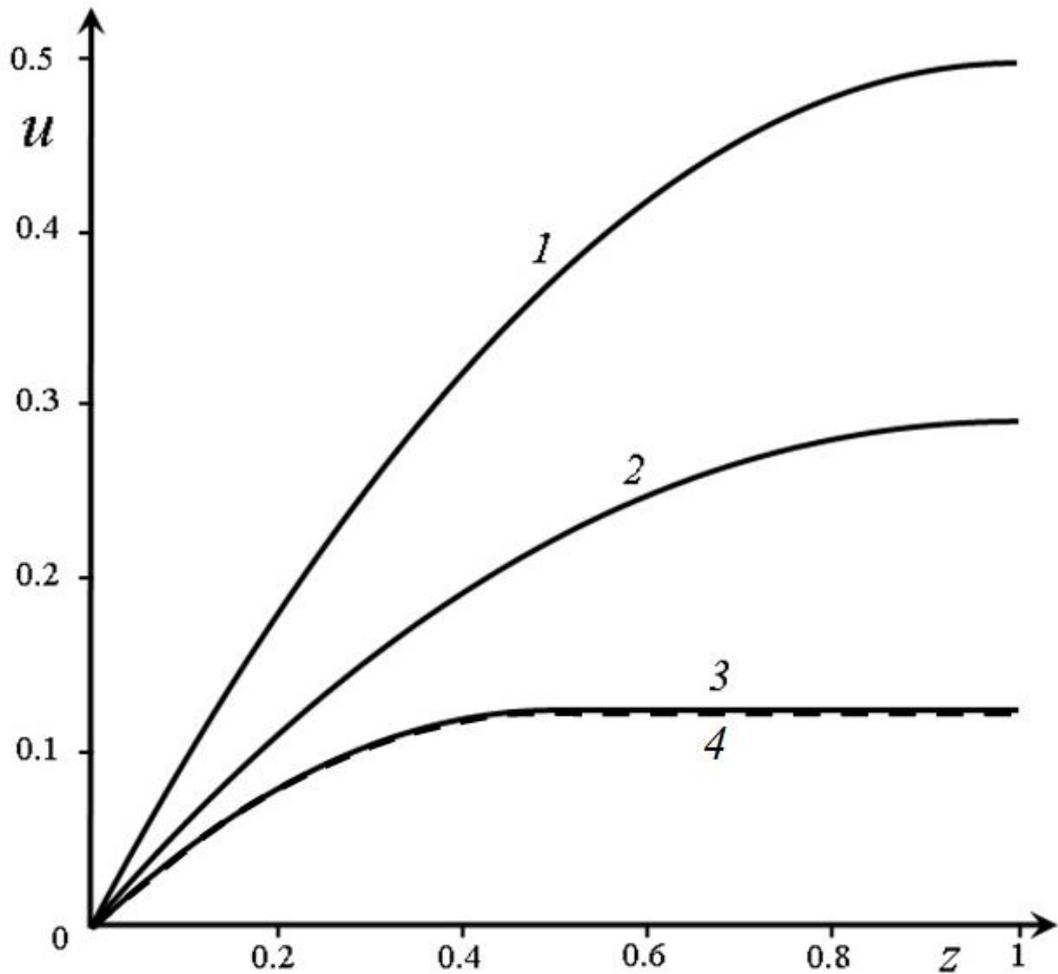


Рис. 3.2 Профили основного течения для случаев: 1 - ньютоновская жидкость $\Delta_c = a_g = 0$; 2 - псевдопластичная жидкость Уильямсона $a_g = 1$, $b = 1$; 3 - вязкопластичная жидкость Уильямсона $a_g = 0.5$, $b = 10^{-4}$; 4 - жидкость Бингама $\Delta_c = 0.5$

3.2 Влияние вибраций на течение слоя вязкопластичной жидкости по наклонной плоскости в поле тяжести

3.2.1 Случай симметричных вибраций

Изучим влияние симметричных вибраций на течение слоя вязкопластичной жидкости по наклонной плоскости в поле тяжести (см. рис. 3.1). Твердая поверхность, по которой движется жидкость, совершает гармонические колебания вдоль оси x с частотой ω

$$u = U_0 e^{i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (3.16)$$

где к.с. означает комплексно сопряженную величину.

В параграфе 3.1 и в работах [9, 10] при изучении течения слоя вязкопластичной жидкости по наклонной твердой поверхности в отсутствие и при наличии вибраций показано, что описание реологических свойств жидкости уравнениями Шведова-Бингама и Уильямсона приводит к близким количественным и качественным результатам. Однако при решении нестационарных задач более предпочтительно применять модель Уильямсона, которая и будет использована ниже для описания реологии жидкости.

Запишем уравнения движения жидкости Уильямсона (3.4), (3.5) в безразмерной форме, выбрав в качестве единиц измерения для пространственных координат, скорости движения жидкости, напряжений и времени соответственно величины h , Ah/μ_∞ , A , $\rho h^2/\mu_\infty$:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + D(\vec{u}\nabla)\vec{u} = -\nabla p + \text{Div}\tau + \vec{i}G + \vec{j}G\text{tg}\alpha, \quad \text{div}\vec{u} = 0, \quad (3.17)$$

$$\tau_{ij} = \left(\frac{1}{\nu^{-1} + \sqrt{I_2}} + 1 \right) e_{ij},$$

$$D = \frac{A\rho h^2}{\mu_\infty^2}, \quad G = \frac{\rho g h \cos\alpha}{A}, \quad \nu = \frac{a_g}{b} = \frac{A}{B\mu_\infty},$$

где G – параметр, характеризующий влияние поля тяжести (угла наклона слоя), $G = 0$ соответствует горизонтальному слою либо отсутствию поля тяжести; D – аналог числа Бингама для вязкопластичного предела жидкости Уильямсона (динамический предел текучести); \vec{i} и \vec{j} – единичные векторы вдоль осей x и y соответственно.

Выражение (3.14), описывающее плоскопараллельное стационарное течение, в новых единицах измерения переписывается в виде

$$u_0 = \frac{f_0}{4G}(f_1 - f) - \frac{1}{4}z(2f_0 + 4v^{-1} + Gz - f_1) - \frac{1}{vG} \ln \left(\frac{f_0 + f}{f_0 + f_1 + Gz} \right), \quad (3.18)$$

$$f_0 = (1 - v^{-1} - G), \quad f = \sqrt{1 + 2v^{-1} - 2G + (G + v^{-1})^2}, \quad f_1 = \sqrt{f^2 + Gz(2f_0 + Gz)}.$$

В случае плоскопараллельного пульсационного течения уравнение движения жидкости (3.17) и граничные условия на твердой стенке и свободной поверхности в безразмерной форме имеют вид

$$u_t = \tau_z + G, \quad \tau = \left(\frac{1}{v^{-1} + |u_z|} + 1 \right) u_z, \quad (3.19)$$

$$z = 0 \quad u = a \exp(i\Omega t) + \text{к.с.}, \quad z = 1 \quad u_z = 0.$$

Здесь и далее подстрочные индексы t и z обозначают частные производные по времени и поперечной координате. В качестве определяющих параметров задачи используются: отношение безразмерных реологических параметров $v = A(B\mu_\infty)^{-1}$, безразмерная амплитуда вибраций $a = U_0\mu_\infty(Ah)^{-1}$, гравитационный параметр $G = a_g^{-1} = \rho ghA^{-1} \cos \alpha$, безразмерная частота вибраций $\Omega = \omega rh^2\mu_\infty^{-1}$. Первые два параметра не зависят от силы тяжести. На амплитуду и частоту вибраций ограничений не накладывается.

Задача (3.19) решалась методом конечных разностей. Полагалось, что $v = 10^3$, $a = 1$. Распределение скорости в начальный момент времени задавалось выражением (3.18). Средняя скорость определялась после установления

пульсационного режима путем осреднения по 10 периодам вибраций.

Зависимость средней скорости движения жидкости \bar{U} на свободной поверхности слоя от параметра G при различных значениях частоты вибраций Ω представлена на рисунке 3.3. Кривая 1 соответствует случаю отсутствия вибраций ($\Omega = 0$). Из ее формы видно, что для $G < 1$ движение пленки вязкопластичной жидкости практически отсутствует. При включении вибраций (кривые 2 – $\Omega = 900$ и 3 – $\Omega = 9$) при $G < 1$ наблюдается заметное осредненное движение слоя, т.е. вибрации порождают осредненное течение жидкости даже при малых углах наклона слоя к горизонтали, для которых в отсутствие вибраций слой покоится на наклонной твердой поверхности. С увеличением G вибрации оказывают все меньшее влияние на движение жидкости, внося лишь малые поправки к значению скорости. Расчеты для параметров $G \geq 4$ и $\Omega = 9$ показали, что влияние вибраций на среднее течение жидкости заметно лишь в жесткой зоне.

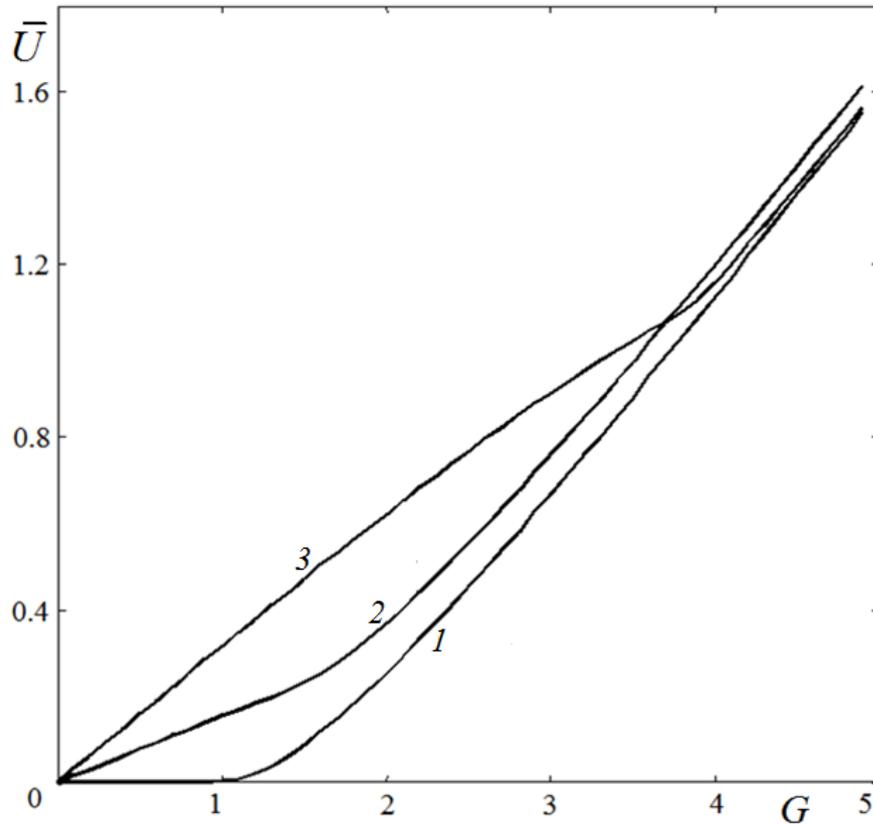


Рис. 3.3 Зависимость средней скорости движения свободной поверхности слоя от параметра G : 1 - $\Omega = 0$, 2 - $\Omega = 900$, 3 - $\Omega = 9$

Из рисунка 3.4 видно, что средняя скорость движения слоя вязкопластичной жидкости по наклонной твердой поверхности немонотонно изменяется с увеличением частоты вибраций; для заданных реологических параметров существует частота вибраций, при которой средняя скорость течения максимальна.

При $G = 0.6$ с увеличением частоты вибраций от $\Omega = 0$ до $\Omega \approx 15$ происходит рост скорости движения жидкости из-за увеличения ускорения, появляющегося у слоя при включении вибраций. При дальнейшем росте частоты вибраций происходит уменьшение скорости свободной поверхности пленки вследствие того, что течение приобретает погранслойный характер. Вблизи твердой поверхности образуется вязкий пограничный слой, в котором влияние вибраций наиболее заметно. С увеличением Ω толщина пограничного слоя уменьшается, следовательно, влияние вибраций на движение всей жидкости становится менее значительным.

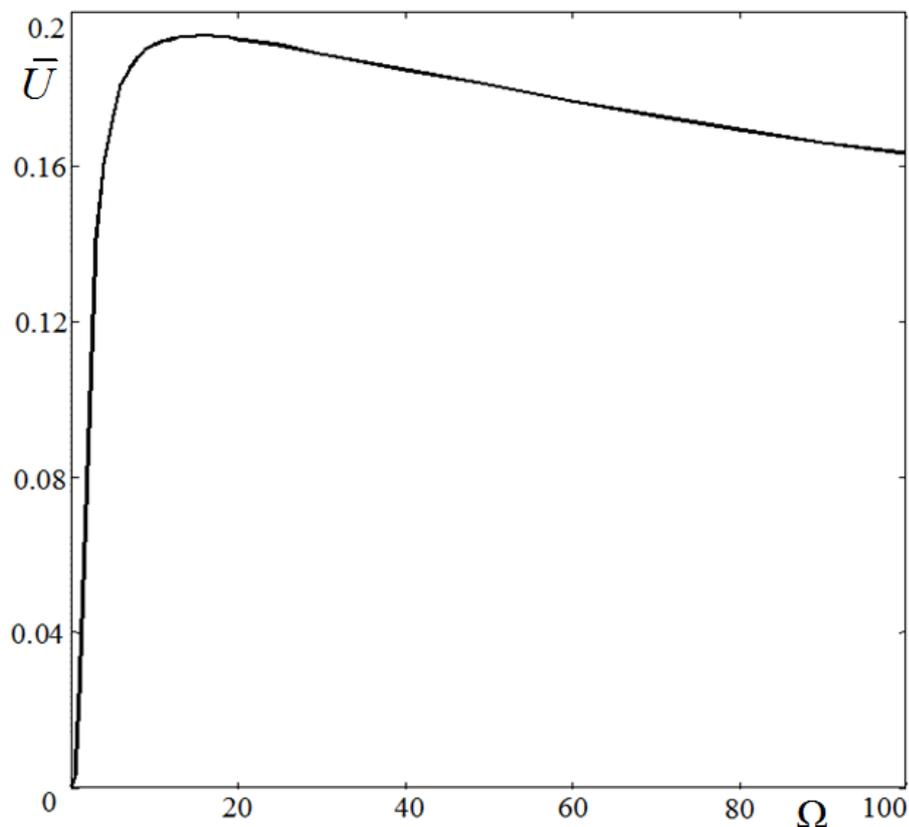


Рис. 3.4 Зависимость средней скорости движения свободной поверхности слоя от безразмерной частоты вибраций для $G = 0.6$

3.2.2 Случай несимметричных вибраций

В предыдущем параграфе рассматривалось движение слоя жидкости Уильямсона по наклонной твердой поверхности в поле тяжести. Проведен анализ влияния тангенциальных симметричных гармонических вибраций твердой поверхности на течение в слое.

В технологических процессах достаточно часто встречаются ситуации, связанные, например, с износом оборудования, в которых вибрации приобретают несимметричный характер. В работе [210] изучались особенности колебаний тела при наличии нелинейно-вязкого трения в поле несимметричных вибраций. Несимметрия колебаний обусловлена различными временами движения несущей поверхности (площадки) в противоположных направлениях. Показано, что существует осредненное смещение колеблющейся поверхности, зависящее от степени асимметричности вибраций и величины нелинейного трения.

Данный раздел посвящен изучению движения слоя жидкости Уильямсона по наклонной бесконечной твердой поверхности, совершающей поступательные несимметричные вибрации в своей плоскости, и служит продолжением исследований, описанных выше.

Пусть твердая поверхность совершает колебательное движение в своей плоскости с периодом T_0 , при этом часть периода поверхность движется быстро, а часть – медленно. Закон изменения скорости положим запишем в виде

$$U(t) = \begin{cases} a \sin(\Omega_0 t), & 0 \leq t \leq \frac{T}{(1+N^{-1})} \\ Na \sin(N\Omega_0 t + (1-N)\pi), & \frac{T}{(1+N^{-1})} < t \leq T \end{cases} \quad (3.20)$$

$$a = \frac{U_0 \mu_\infty}{Ah}, \quad T = \frac{\mu_\infty T_0}{\rho h^2}, \quad N = \frac{\Omega}{\Omega_0}, \quad \Omega_0 = \frac{[1 + N^{-1}] \pi}{T},$$

где a – безразмерная амплитуда скорости медленного движения (U_0 – размерная амплитуда скорости), T – безразмерный период колебаний, N – отношение безразмерных частот быстрого Ω и медленного Ω_0 движения.

Далее будут рассматриваться три типа колебательных движений твердой поверхности. Случай $N = 1$ и $a > 0$ соответствует симметричным вибрациям. Если $N > 1$, $a > 0$, то в направлении поля тяжести твердая поверхность движется медленнее, чем против его направления. Такие вибрации назовем несимметричными «положительными». Наконец, значения параметров $N > 1$, $a < 0$ соответствуют несимметричным «отрицательным» вибрациям. В этом случае медленное движение совершается против направления поля тяжести.

Плоскопараллельное течение в слое жидкости описывается системой (3.19), где в граничное условие на твердой поверхности подставляется выражение (3.20).

Задача (3.19), (3.20) решалась методом конечных разностей. Основные расчеты проводились на одномерной пространственной сетке с шагом 0.01, выбор которого определялся исследованием сходимости результатов численных расчетов с уменьшением шага сетки. Отношение безразмерных частот принималось равным $N = 10$. Рассматривалась вязкопластичная жидкость с $\nu = 10^3$. Распределения скорости в начальный момент задавалось выражением (3.18). Для характеристики интенсивности среднего течения вводился объемный расход жидкости через единичную площадку, нормальную к твердой поверхности

$$Q = \int_0^1 \bar{u} dz,$$

где \bar{u} – средняя за период вибраций скорость течения жидкости.

В силу нелинейности реологической модели Уильямсона вибрации генерируют в слое среднее течение. Слой жидкости разделяется на жидкую и квазитвердую зоны. Напряжения сдвига, возникающие в жидкости, наиболее значительны около колеблющейся твердой поверхности, поэтому квазитвердая зона образуется вблизи свободной границы слоя и движется практически как твердое тело. Для определения средней скорости движения слоя проводилось численное осреднение поля скорости по периоду вибраций твердой поверхности после выхода на режим установившихся колебаний.

Возможна ситуация, когда весь слой представляет собой квазитвердую зону и как единое целое совершает колебания по закону (3.20). Подставляя выражение (3.20) в уравнение движения (3.19), можно определить закон изменения напряжений сдвига вблизи твердой поверхности

$$\tau(t) = \begin{cases} G - a\Omega_0 \cos(\Omega_0 t), & 0 \leq t \leq \frac{T}{(1 + N^{-1})} \\ G - N^2 a\Omega_0 \cos(N\Omega_0 t + (1 - N)\pi), & \frac{T}{(1 + N^{-1})} < t \leq T \end{cases} \quad (3.21)$$

Появление жидкой фазы в какой-либо момент времени возможно, если $|\tau(t)| > 1$. Подставляя выражение (3.21) в данное неравенство, находим границы областей существования различных состояний вязкопластичной жидкости, которые показаны на рисунке 3.5.

Для симметричных вибраций при $\Omega_0 < 1$, т.е. при $T > 2\pi$ имеем область параметров, ограниченную кривой l и осью абсцисс. Кривая l задается уравнением $G = 1 - 2\pi T^{-1}$. В указанной области весь слой на протяжении периода вибраций находится в квазитвердом состоянии, т.е. совершает движение по закону (3.20) вместе с вибрирующей подложкой.

Подобная по конфигурации область параметров, соответствующая квазитвердому состоянию жидкости, в случае несимметричных «положительных» вибраций имеет место, когда $T \geq 110\pi$, и ограничена кривой 4 и осью абсцисс. Уравнение кривой 4 имеет вид $G = 1 - 110\pi T^{-1}$. При несимметричных «отрицательных» вибрациях область параметров, соответствующих квазитвердому состоянию слоя вязкопластичной жидкости, находится правее значения $T = 174.5$ и ограничена кривыми 7, 8 и осью абсцисс. Уравнения кривых 7 и 8 задаются формулами $G = 1 - 1.1\pi T^{-1}$ и $G = -1 + 110\pi T^{-1}$.

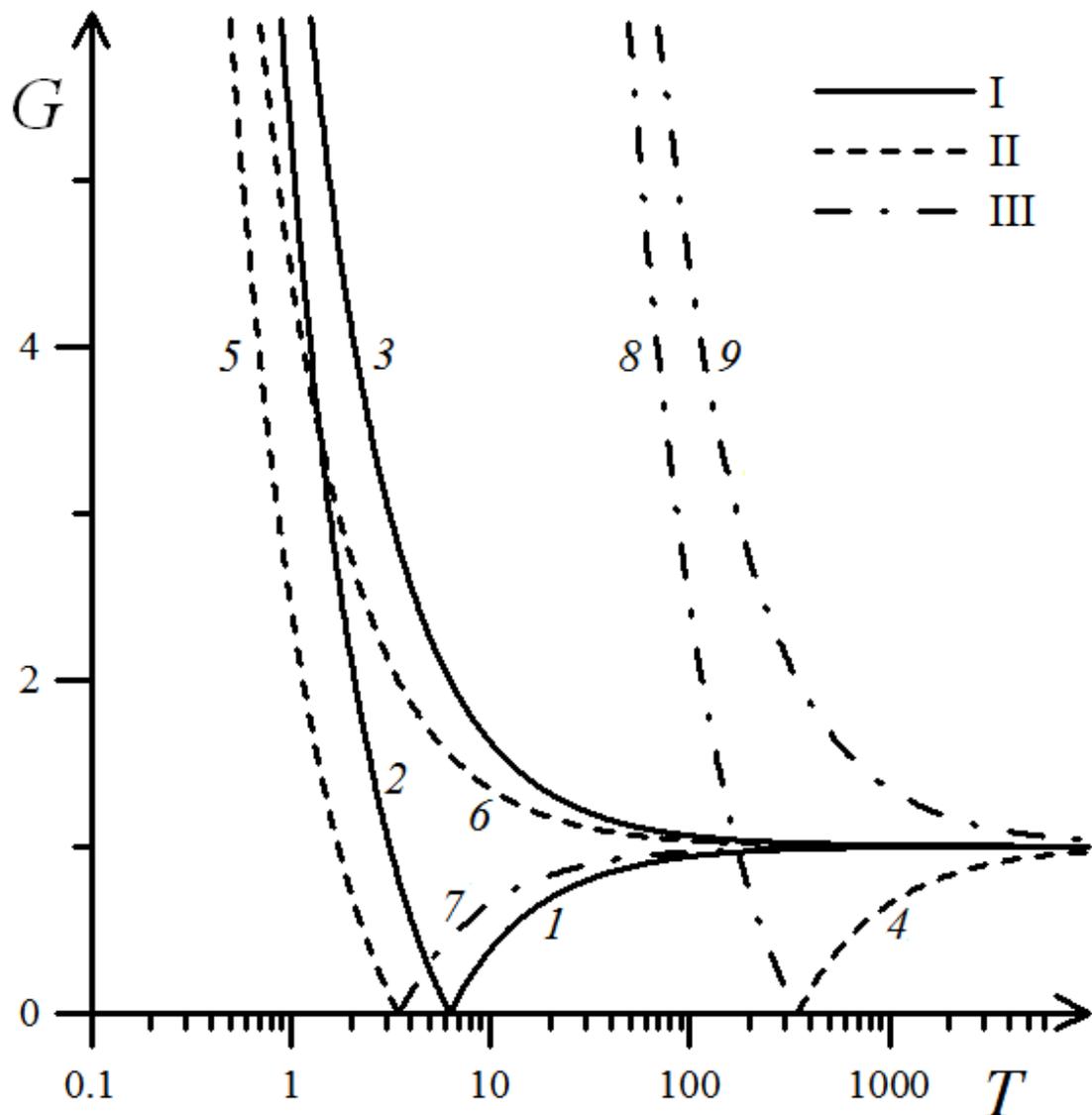


Рис. 3.5 Границы областей существования различных состояний вязкопластичной жидкости для $N = 10$ и $|a| = 1$. Линии I – симметричные, II – несимметричные «положительные», III – несимметричные «отрицательные» вибрации

Таким образом, слой жидкости может существовать в квазитвердом состоянии на протяжении всего периода вибраций только при слабоинтенсивных вибрациях и слабых же ($G \leq 1$) гравитационных воздействиях, когда напряжения сдвига в жидкости меньше предельных. Несимметричные вибрации смещают область параметров, соответствующую квазитвердому состоянию жидкости, в сторону больших значений периодов вибраций. Это происходит в силу того, что более интенсивное движение твердой подложки порождает большие напряжения сдвига, которые на некоторой части периода колебаний превышают предельные значения. Уменьшить интенсивность движения подложки при несимметричных вибрациях можно за счет увеличения периода вибраций.

Области параметров между кривыми 1 – 3 для симметричных вибраций и кривыми 4 – 6 для несимметричных «положительных» вибраций соответствуют случаю, когда жидкость в слое при движении наклонной твердой поверхности вниз по всей толщине находится в квазитвердом состоянии, а при обратном движении вблизи твердой поверхности появляется жидкая зона. Уравнения кривых 2 и 3 имеют вид $G = -1 + 2\pi T^{-1}$ и $G = 1 + 2\pi T^{-1}$, а кривые 5 и 6 задаются формулами $G = -1 + 1.1\pi T^{-1}$ и $G = 1 + 1.1\pi T^{-1}$.

При несимметричных «отрицательных» вибрациях в интервале $1.1\pi \leq T \leq 110\pi$ ниже кривых 7 и 8 расположена область, которая соответствует квазитвердому состоянию слоя при медленном движении подложки вверх, когда же твердая подложка начинает быстрое движение вниз, в слое вблизи нее появляется жидкая зона. В области параметров, находящейся выше точки пересечения кривых 7 и 8 ($T = 174.5$, $G = 0.98$) и ограниченной этими кривыми и кривой 9, уравнение которой имеет вид $G = 1 + 110\pi T^{-1}$, жидкость в слое находится в квазитвердом состоянии при быстром движении вниз, а жидкая зона появляется, когда твердая подложка начинает медленное движение против поля тяжести, т.е. вверх.

В остальных областях параметров в слое на протяжении всего периода вибраций около твердой поверхности существует зона вязкого течения.

В случае отсутствия вибраций для значений $G \leq 1$ движение слоя вязкопластичной жидкости практически отсутствует, приложенных к слою напряжений недостаточно для возникновения в нем течения (рис. 3.6а, кривая 1). Слой ведет себя как твердое тело.

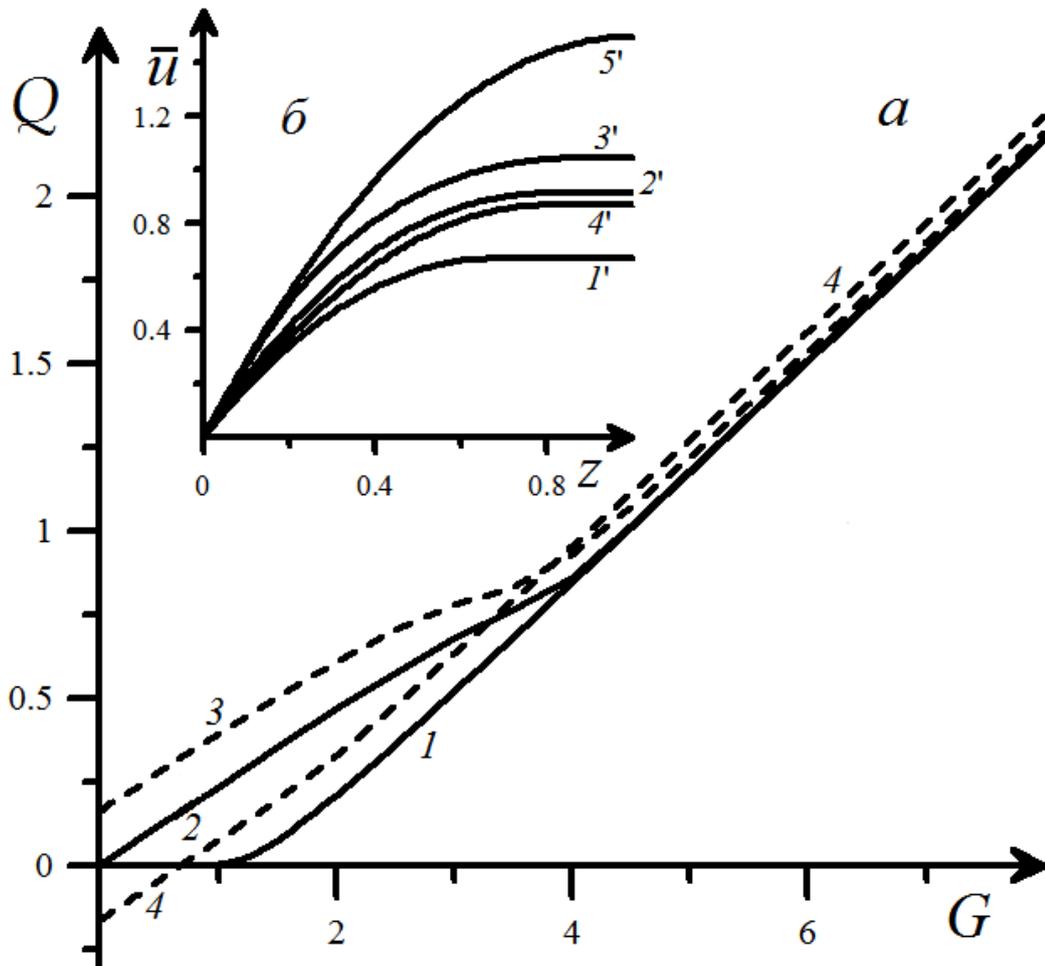


Рис. 3.6 Зависимость объемного расхода жидкости от параметра G (а) и профили средней скорости при $G = 3$ (б): вязкопластичная жидкость в отсутствие вибраций (1, 1'); в поле симметричных вибраций при $N=1$, $T=0.35$ (2, 2'); в поле несимметричных «положительных» (3, 3') и «отрицательных» (4, 4') вибраций при $N=10$, $T=0.35$; ньютоновская жидкость (5')

При $G > 1$ жидкость стекает по наклонной поверхности. Вблизи свободной поверхности слоя образуется квазитвердая зона, толщина которой уменьшается при включении вибраций (рис. 3.6б). Для сравнения на рисунке 3.6б приведен профиль скорости для ньютоновской жидкости (кривая 5').

Достаточно интенсивные симметричные вибрации поверхности порождают заметное осредненное течение жидкости даже в слабых гравитационных полях, при которых слой в отсутствие вибраций покоится (рис. 3.6а, кривая 2). С увеличением G вибрации оказывают все меньшее влияние на движение жидкости, внося лишь малые поправки к значению средней скорости при $\Omega = 0$. В случае несимметричных «положительных» вибраций жидкость всегда движется в направлении поля тяжести (рис. 3.6а, кривая 3). Когда $G \leq 3.5$, для заданного периода вибраций наблюдается значительное ускорение движения слоя в сравнении с остальными изученными случаями. При $G > 3.5$ кривая 3 асимптотически приближается к кривой 1, что говорит о слабом влиянии несимметричных «положительных» вибраций на осредненное движение вязкопластичного слоя.

Несимметричные «отрицательные» вибрации в слабом гравитационном поле генерируют осредненное движение жидкости, направленное против поля тяжести (рис. 3.6а, кривая 4). Профили средней скорости, соответствующие такому течению, представлены на рисунке 3.7 (кривые 1 и 2). С увеличением гравитационного воздействия данный эффект исчезает. При $G \approx 0.74$ средняя скорость квазитвердой зоны практически равна нулю. Жидкий слой в этом случае движется в сторону поля тяжести (рис. 3.7, кривая 3). В области, где $0.74 \leq G < 3$ максимум средней скорости течения жидкости приходится на жидкую зону, что является еще одной отличительной чертой несимметричных «отрицательных» вибраций. С увеличением гравитационного воздействия максимум средней скорости смещается в квазитвердую зону, а профиль средней скорости становится качественно похожим на профили, получающиеся при других типах вибраций (рис. 3.7, кривые 3 – 5 и рис. 3.6б, кривая 3').

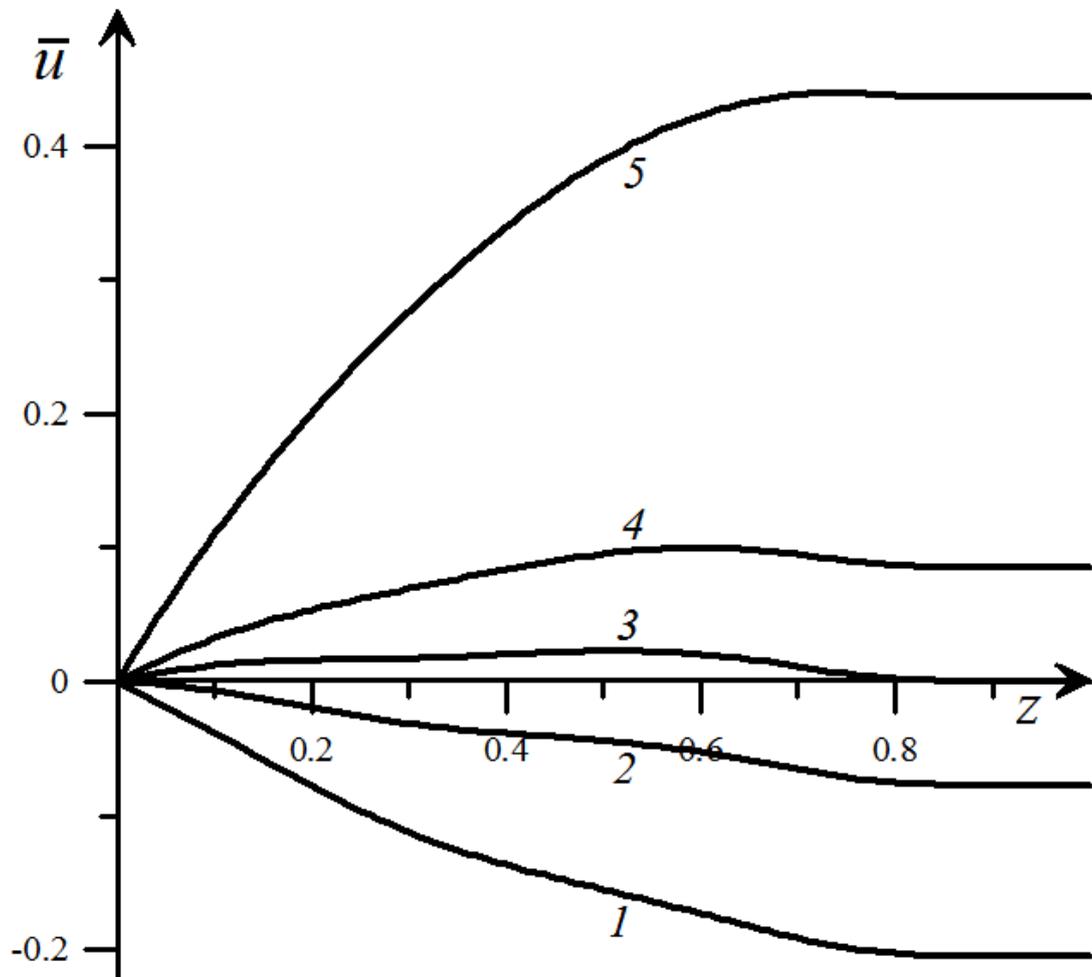


Рис. 3.7 Профили средней скорости течения вязкопластичной жидкости для «отрицательных» вибраций с $N = 10$, $T = 0.35$, $G = 0.1; 0.5; 0.75; 1.0; 2.0$ (1 - 5)

жидкость	A Па	μ_{∞} мПа·с	ρ кг/м ³	h мм	U_0 м/с	\bar{U} см/с	Ω_0 рад/с	α
нефть	10	10	800	1	1	8	224	51.3°
				10	0.1	0.8	2.24	86.4°
буровой раствор	9.5	8	1220	1	1.2	9.5	125.6	67°
ВУТ	28.7	290	1000	10	1	8	52.3	82°

Табл. 3.1

В таблице 3.1 приведены оценки для размерных значений амплитуды скорости U_0 и циклической частоты Ω_0 вибраций твердой подложки, угла наклона

α и скорости осредненного движения свободной поверхности \bar{U} слоёв нефти, бурового глинистого раствора [45, 46] и водной суспензии угольного топлива (ВУТ) [43], которые соответствуют профилю 2 на рисунке 3.7.

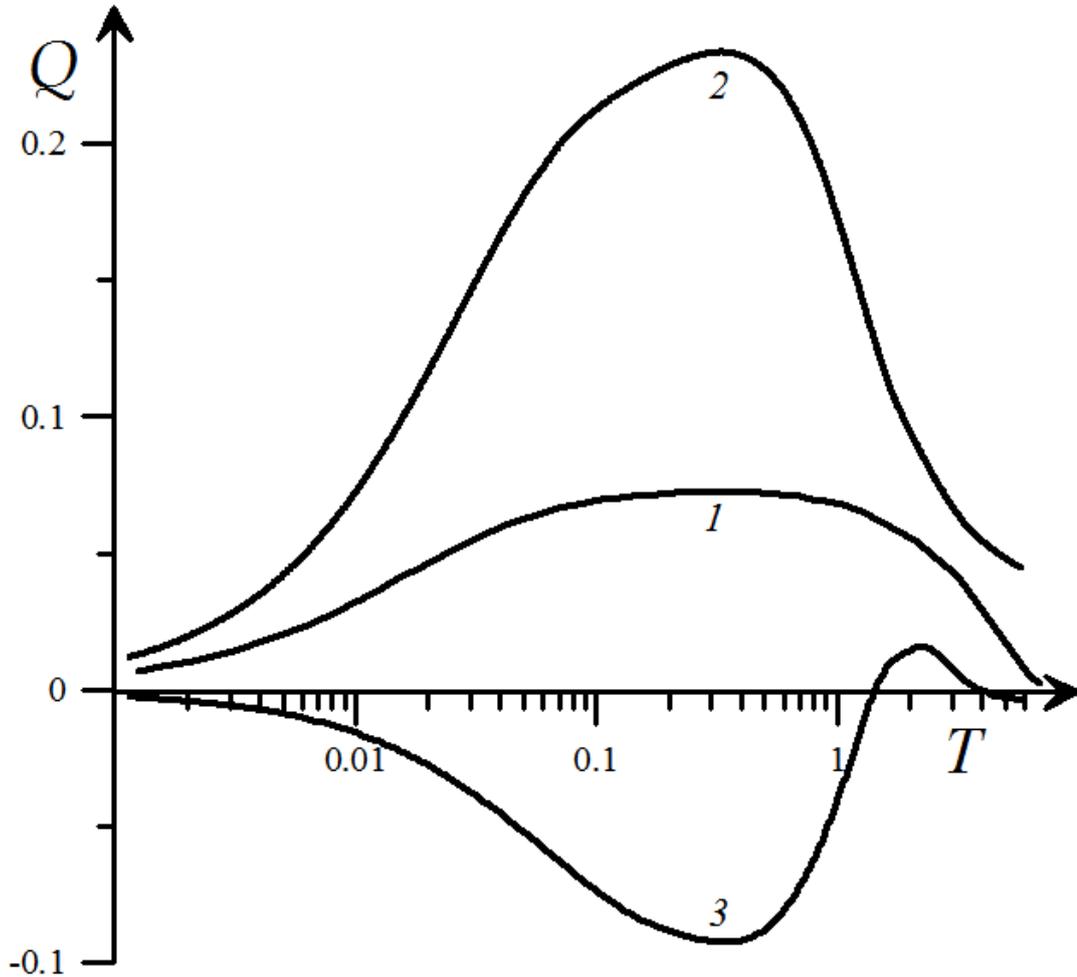


Рис. 3.8 Зависимость объемного расхода жидкости Q при осредненном движении от безразмерного периода вибраций T для $G = 0.3$ и $a = 1, N = 1, 10$ (1, 2), $a = -1, N = 10$ (3)

Интенсивность осредненного течения в слое является немонотонной функцией периода вибраций. В слабом гравитационном поле $G \leq 1$ зависимости объемного расхода от периода вибраций для случаев симметричных и несимметричных «положительных» вибраций имеют качественно сходную форму (рис. 3.8, кривые 1 и 2). Симметричные и несимметричных «положительные» вибрации приводят к тому, что жидкость в слое в целом стекает по направлению

поля тяжести. Для симметричных вибраций аналитическое и численное значения порогового периода вибраций T_c , меньше которого в вязкопластичной жидкости возникает зона вязкого течения вблизи твердой поверхности, совпадают и равны 8.98.

С уменьшением периода для указанных выше типов вибраций наблюдается рост средней скорости движения жидкости, обусловленный увеличением ускорения, появляющегося у жидкости при включении вибраций. При дальнейшем уменьшении периода происходит уменьшение средней скорости движения жидкости вследствие того, что течение в ней приобретает погранслойный характер. Вблизи твердой поверхности образуется вязкий пограничный слой, в котором влияние вибраций наиболее заметно. При уменьшении T толщина пограничного слоя уменьшается, следовательно, влияние вибраций на движение во всем объеме жидкости становится менее значительным. Несимметричные «положительные» вибрации заметно ускоряют стекание жидкости при малых и конечных частотах вибраций по сравнению с симметричными вибрациями. Это происходит из-за того, что влияние вязких сил на движение слоя в течение периода колебаний различно.

При медленном движении твердой поверхности вниз в течение большей части периода колебаний вязкие силы и сила тяжести, действуя в одном направлении, разгоняют слой. В течение меньшей части периода колебаний движущаяся быстро вверх твердая поверхность из-за уменьшения влияния вязкости проскальзывает вдоль вязкопластичной жидкости, не успевая увлечь ее за собой.

При несимметричных «отрицательных» вибрациях в слабом гравитационном поле изменение периода приводит к изменению направления движения в жидкой зоне слоя (рис. 3.8, кривая 3). Знак расхода при этом также меняется. Если $T \geq 4.94$, то медленно движущаяся против поля тяжести твердая подложка увлекает за собой слой, который по всей толщине находится в квазитвердом состоянии. Более быстрое движение твердой подложки вниз приводит к увеличению напряжений сдвига вблизи подложки и появлению очень тонкой

жидкой прослойки, способствующей проскальзыванию подложки вдоль квазитвердой зоны вязкопластичного слоя. Слой в целом очень медленно движется против поля тяжести. Если $T < 4.94$, то зона вязкого течения существует на протяжении всего периода вибраций. Твердая поверхность в этом случае слабее увлекает жидкость против поля тяжести. В случае быстрого движения твердой поверхности вдоль поля тяжести толщина жидкой зоны в слое становится сравнимой с толщиной квазитвердой зоны. Влияние вязкости в данной ситуации существенно по всей толщине жидкости. Соответственно в зоне вязкого течения жидкость получает большее ускорение при быстром движении твердой поверхности вниз, т.е. по полю тяжести. Это приводит к тому, что в области $1.2 < T < 3.8$ квазитвердая зона в среднем движется против поля тяжести, тогда как в жидкой зоне наблюдается обратное осредненное движение. Средний расход в этом случае положителен, т.е. большая часть жидкости в слое стекает вниз. Максимальная интенсивность среднего движения достигается, когда $T \approx 2.3$.

Если $T < 1.2$, то весь слой в целом вновь начинает двигаться против направления поля тяжести. Относительно медленное движение твердой подложки вверх по-прежнему увлекает за собой вязкопластичный слой, генерируя осредненное движение жидкости в нём против поля тяжести. Вязкие силы на этой части периода существенны на всей толщине слоя. При быстром движении твердой подложки вниз влияние вязкости ограничено стоксовым пограничным слоем, возникающим вблизи твердой поверхности. Вязкие силы на этой части периода оказывают существенно меньшее влияние на движение жидкости. С уменьшением периода вибраций интенсивность осредненного течения сначала растёт, достигая минимума, а затем уменьшается (рис. 3.8, кривая 3). Такое уменьшение интенсивности движения объясняется тем, что при малых периодах (высоких частотах) влияние вибраций заметно только в пограничном слое.

В умеренных гравитационных полях ($1 < G < 3.8$) характер зависимости объемного расхода жидкости от периода при симметричных и несимметричных «положительных» вибрациях твердой подложки не отличается от аналогичных зависимостей для $G < 1$ (см. для сравнения кривые 1 и 2 на рис. 3.8 и 3.9).

Усиление влияния гравитационного поля, естественно, приводит к увеличению интенсивности осредненного течения.

Наложение гравитационного поля на несимметричные «отрицательные» вибрации при $G > 1$ приводит к генерации осредненного течения, направленного вниз по наклонной твердой поверхности при всех периодах вибраций. Наличие двух максимумов в зависимости $Q(T)$ при несимметричных «отрицательных» вибрациях (рис. 3.9, кривая 3) можно объяснить различным влиянием вязких сил на движение жидкости в разные моменты периода вибраций. При $T > 1.15$ влияние вязких сил существенно на всей толщине жидкости. Быстрое движение твердой подложки вниз приводит к увеличению сдвиговых напряжений, что, в свою очередь, увеличивает толщину жидкой зоны. Слой жидкости свободнее стекает под действием поля тяжести. Интенсивность осредненного течения жидкости растет с увеличением периода вибрации, достигая своего первого максимума. В диапазоне периодов вибраций от 1.15 до 0.58 влияние вязких сил на движение слоя более существенно при относительно медленном движении твердой подложки вверх. Вибрации начинают тормозить движение жидкости. При прохождении кривой 3 локального минимума ситуация опять меняется. Вибрации вновь разгоняют жидкость в слое, увеличивая интенсивность её движения. Это происходит до тех пор, пока пульсационное течение жидкости не приобретет погранслоный характер. Влияние вибраций в течение всего периода ограничивается тонким вязким пограничным слоем, примыкающим к твердой подложке. Переходу к погранслоному характеру пульсационного движения соответствует второй максимум кривой 3, отражающей зависимость $Q(T)$ на рисунке 3.9.

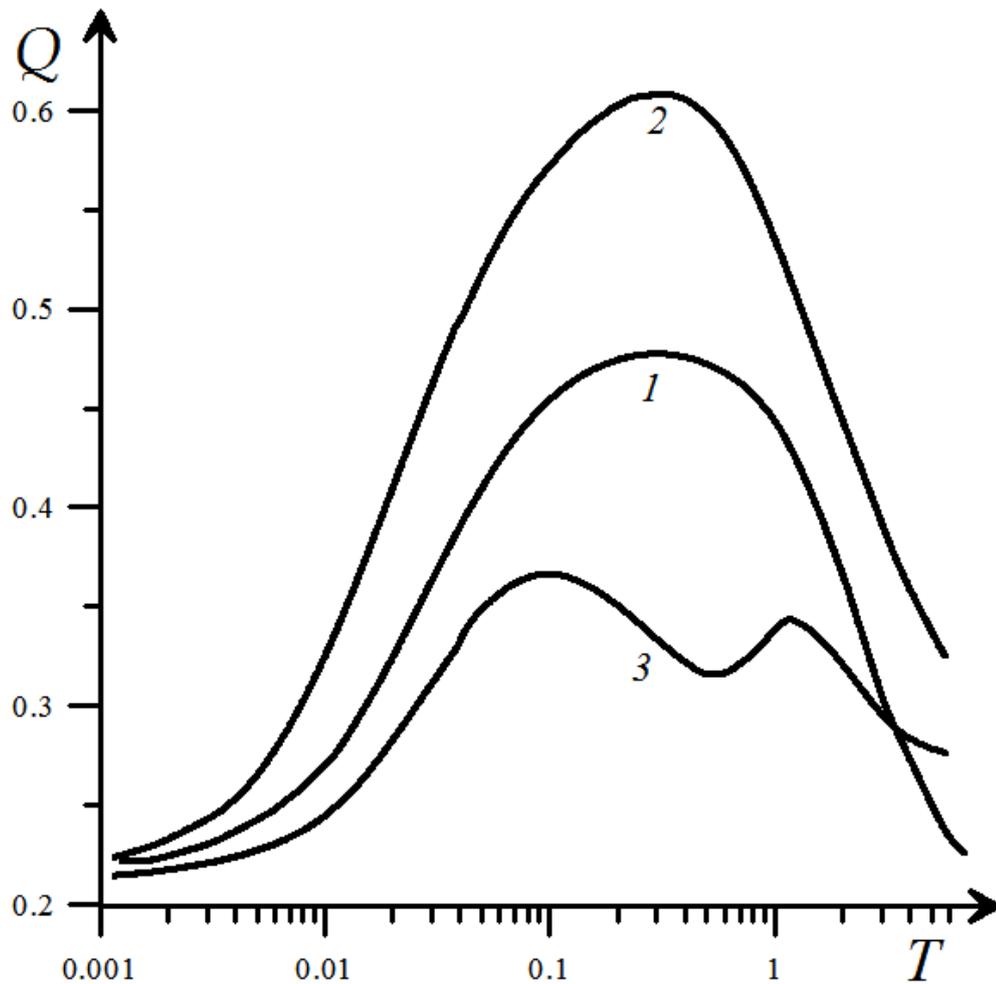


Рис. 3.9 Зависимость объемного расхода жидкости Q при осредненном движении от безразмерного периода вибраций T для $G = 2.0$ и $a = 1, N = 1, 10$ (1, 2), $a = -1, N = 10$ (3)

В сильных гравитационных полях ($G > 3.8$) вибрации слабо влияют на скорость стекания вязкопластичной жидкости (см. рис. 3.6). Сила тяжести порождает напряжения сдвига, которые превышают предельное значение практически во всем слое вязкопластичной жидкости. Более 80% толщины слоя занимает зона вязкого течения.

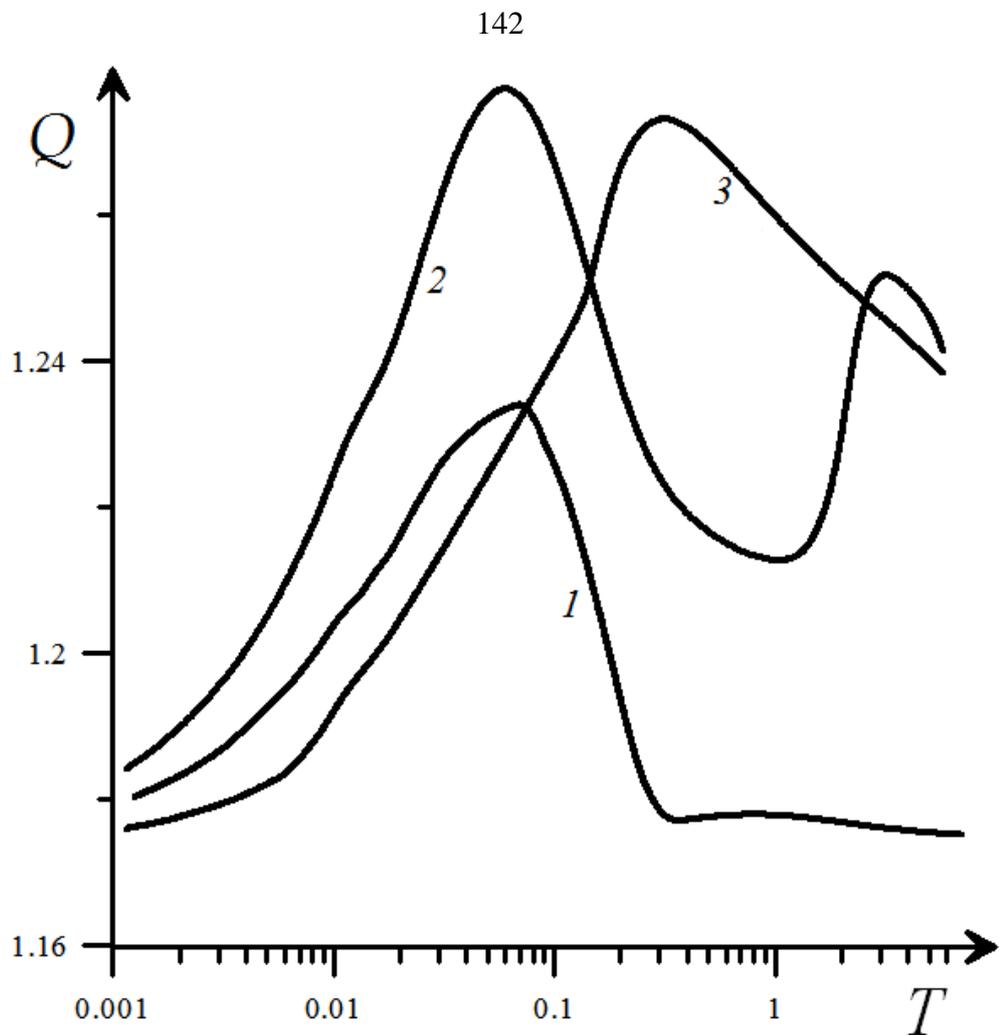


Рис. 3.10 Зависимость объемного расхода жидкости Q при осредненном движении от безразмерного периода вибраций T для $G = 5.0$ и $a = 1, N = 1, 10$ (1, 2), $a = -1, N = 10$ (3)

Изменение периода вибраций при сильном гравитационном воздействии не приводит к значительным изменениям интенсивности осредненного движения жидкости ни при каком из рассмотренных типов вибраций (рис. 3.10). Однако сами зависимости имеют достаточно сложный вид. На кривых 1 и 2 рисунка 3.10, соответствующих симметричным и несимметричным «положительным» вибрациям, в области больших периодов вибраций появляются дополнительные максимумы. Их наличие можно объяснить тем, что вибрации в этих случаях увеличивают толщину вязкой зоны, и жидкость более свободно стекает по наклонной твердой поверхности. В области малых периодов вторые максимумы

зависимостей $Q(T)$ (кривые 1 и 2) и максимум в случае несимметричных «отрицательных» вибраций (кривая 3), имеют погранслоиную природу.

Рассмотрим медленные вибрации с $T=1$, происходящие в слабом гравитационном поле с $G=0.3$. Выражение (3.21) и неравенство $|\tau|>1$ определяют пороговые значения амплитуды пульсаций скорости a_c , при которых в вязкопластичном слое появляется жидкая зона, следовательно, может генерироваться осредненное движение. Для симметричных вибраций $a_c = 0.7/2\pi \approx 0.111$, для несимметричных «положительных» вибраций $a_c = 0.7/110\pi \approx 0.002$, для несимметричных «отрицательных» вибраций $a_c = 1.3/110\pi \approx 0.004$.

Для симметричных вибраций наблюдается монотонный рост объемного расхода жидкости при увеличении амплитуды скорости вибраций (рис. 3.11а, кривая 1). При $a > 10$ значение Q асимптотически стремится к 0.1. Согласно расчетам, для жидкости Уильямсона пороговое значение амплитуды скорости вибраций $a_c \approx 0.1$, т.е. имеет место хорошее совпадение теоретического и численного значений a_c .

При несимметричных «положительных» вибрациях так же, как в случае симметричных вибраций, увеличение a приводит к монотонному росту объемного расхода жидкости (рис. 3.11а, кривая 2). Наблюдаемое в этом случае осредненное движение жидкости является наиболее интенсивным. Согласно численным расчетам пороговая амплитуда скорости вибраций приблизительно равна 0.002. При $a > 10$ значение объемного расхода стремится к 0.37.

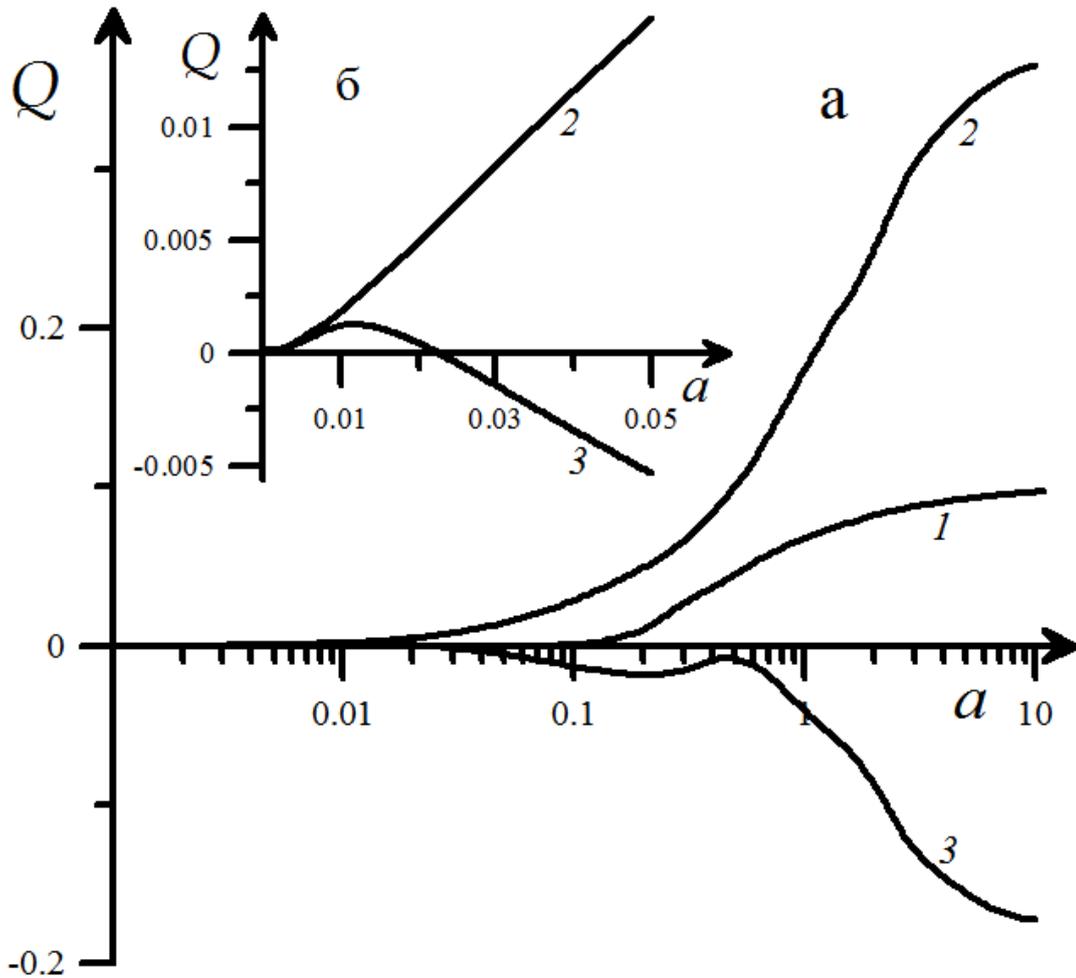


Рис. 3.11 Зависимость объемного расхода жидкости Q при осредненном движении от модуля безразмерной амплитуды скорости вибраций a для $G = 0.3$ и $T = 1$: симметричные вибрации при $N = 1$ (1); несимметричные «положительные» (2) и несимметричные «отрицательные» (3) вибрации при $N = 10$

Немонотонная зависимость $Q(a)$ в случае несимметричных «отрицательных» вибраций является отличительной чертой данного типа движения твердой подложки (рис. 3.11а, кривая 3). Расчеты показывают, что, начиная с пороговой амплитуды скорости вибраций $a_c \approx 0.002$, до $a \approx 0.02$, объемный расход жидкости положителен (рис. 3.11б). Это означает, что в данном диапазоне значений параметра a практически по всей толщине слоя жидкости генерируется осредненное движение, направленное вниз. Лишь в узкой зоне вблизи твердой подложки может наблюдаться слабоинтенсивное возвратное течение. В указанном выше диапазоне значений параметра a движение достигает

максимальной интенсивности при $a = 0.01$. При $a > 0.02$ слой в среднем движется против направления поля тяжести. Такому движению соответствуют отрицательные значения объемного расхода. В случае, когда $0.02 < a \leq 0.45$, в слое наблюдается слабоинтенсивное движение. Модуль объемного расхода жидкости достигает локального максимума при $a = 0.2$. Дальнейшее увеличение амплитуды скорости вибраций приводит к монотонному росту абсолютного значения объемного расхода жидкости, который при $a > 10$ стремится к значению 0.17.

3.3 Устойчивость плоскопараллельного течения слоя жидкости Уильямсона

В этом параграфе рассматривается устойчивость стационарного плоскопараллельного течения слоя жидкости Уильямсона по наклонной твердой поверхности в поле тяжести в отсутствие вибраций. Верхняя граница слоя – свободная. Ориентация слоя относительно поля тяжести и положение осей координат показаны на рисунке 3.1. Уравнения движения жидкости в слое под действием поля тяжести в безразмерной форме имеют вид (3.17). Основное стационарное течение описывается выражениями (3.18). Динамический предел текучести D определяет влияние вязкопластичных свойств жидкости на устойчивость стекания слоя. Произведение D и гравитационного параметра G дает число Рейнольдса $Re = D \cdot G = U\rho h/\mu_\infty$, где $U = \rho gh^2 \cos \alpha / \mu_\infty$ – характерная скорость течения в слое.

3.3.1 Постановка задачи устойчивости

Представим поля скорости и давления в виде сумм основного течения и малых возмущений $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{V}$, $p = p_0 + p$. После подстановки \vec{u} , p в таком виде в (3.17) и линеаризации уравнения для возмущений в проекциях на оси координат принимают вид

$$u_t + D(u_0 u_x + w u_{0z}) = -p_x + \tau_0 \Delta u - \tau_1 (w_{xz} + u_{zz}) - \tau_3 (w_x + u_z),$$

$$v_t + D u_0 v_x = -p_y + \tau_0 \Delta v - \frac{1}{2} \tau_4 (w_y + v_z), \quad (3.22)$$

$$w_t + D u_0 w_x = -p_z + \tau_0 \Delta w - \tau_1 (w_{xx} + u_{zx}) - \tau_4 w_z, \quad \text{div} \vec{V} = 0,$$

$$\tau_0 = \left(\frac{1}{v^{-1} + u_{0z}} + 1 \right), \quad \tau_1 = \frac{u_{0z}}{(v^{-1} + u_{0z})^2}, \quad \tau_3 = \frac{2u_{0zz}}{v(v^{-1} + u_{0z})^3}, \quad \tau_4 = \frac{2u_{0zz}}{(v^{-1} + u_{0z})^2},$$

где u, v, w – x, y, z – компоненты возмущений поля скорости, соответственно.

На твердой границе слоя выполняются условия прилипания $u = v = w = 0$. На свободной поверхности при $z = 1 + \zeta(x, y)$ выполняются кинематическое условие и условия баланса напряжений. В силу малости возмущений свободной поверхности ζ эти условия можно перенести на невозмущенную поверхность $z = 1$

$$\zeta_t + D u_0 \zeta_x = D w, \quad u_z + w_x + u_{0zz} \zeta = 0, \quad v_z + w_y = 0, \quad (3.23)$$

$$p + p_{0z} \zeta = 2(1 + v)w - \sigma \Delta \zeta,$$

где безразмерный параметр $\sigma = \sigma' / Ah$ характеризует поверхностное натяжение жидкости, σ' – размерное поверхностное натяжение.

Ограничимся рассмотрением нормальных возмущений вида

$$u = \psi(z) \exp(ikx + \lambda t), \quad v = \phi(z) \exp(ikx + \lambda t), \quad w = \xi(z) \exp(ikx + \lambda t),$$

$$p = q(z) \exp(ikx + \lambda t), \quad \zeta = \varsigma(z) \exp(ikx + \lambda t).$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.22) – (3.23) и исключая из последних амплитуду возмущений свободной поверхности, получим

$$(\tau_0 - \tau_1)\psi_{zz} - \tau_3\psi_z - ((\tau_0 + \tau_1)k^2 + \lambda + ikDu_0)\psi - (ik\tau_3 + u_{0z}D)\xi - ikq = 0,$$

$$q_z = -ik(\tau_0 + \tau_1)\psi_z + ik\tau_4\psi - ((\tau_0 - \tau_1)k^2 + \lambda + ikDu_0)\xi, \quad (3.24)$$

$$\xi_z = -ik\psi.$$

$$z = 0: \quad \psi = \xi = 0,$$

$$z = 1: \quad (\lambda + ikDu_0)\psi_z = -(u_{0zz}D + ik\lambda - k^2Du_0)\xi, \quad (3.25)$$

$$-[p_{0z} - \sigma k^2]\psi_z - [ikp_{0z} - i\sigma k^3]\xi + 2ik(1 + \nu)u_{0zz}\psi + u_{0zz}q = 0.$$

Задача устойчивости (3.24) – (3.25), к которой необходимо добавить выражение (3.18) для основного течения жидкости, содержит четыре безразмерных параметра D , G , σ , ν . При толщине слоя 1 см характерные значения безразмерных критериев для нефти и нефтепродуктов, реология которых хорошо описывается уравнением Уильямсона, будут следующими: $D \approx (0 \div 10^4)$, $G \approx (0 \div 10^2)$, $\sigma = (10^{-2} \div 10^2)$. Для получения этих оценок использовались физические параметры нефти и нефтепродуктов [45, 46]. Расчеты производились для двух значений реологического параметра $\nu = 1$ и 10^4 , соответствующих псевдопластичной и вязкопластичной средам.

Краевая задача (3.24), (3.25) решалась численно методом дифференциальной прогонки. Для решения этой же задачи в длинноволновом приближении применялся метод построения фундаментальной системы решений. При

интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений использовался метод Рунге-Кутты [2, 3].

3.3.2 Возмущения с конечными волновыми числами

Результаты исследования устойчивости стационарного плоскопараллельного течения в наклонном слое нелинейно-вязкой жидкости при $\sigma = 0.03$ приведены на рисунках 3.12 и 3.13. Устойчивости стационарного течения на рисунках 3.12 и 3.13 соответствуют области параметров, расположенные ниже соответствующих кривых. С ростом волнового числа критические значения D и G монотонно растут. Наиболее опасными возмущениями являются длинноволновые моды с $k \rightarrow 0$.

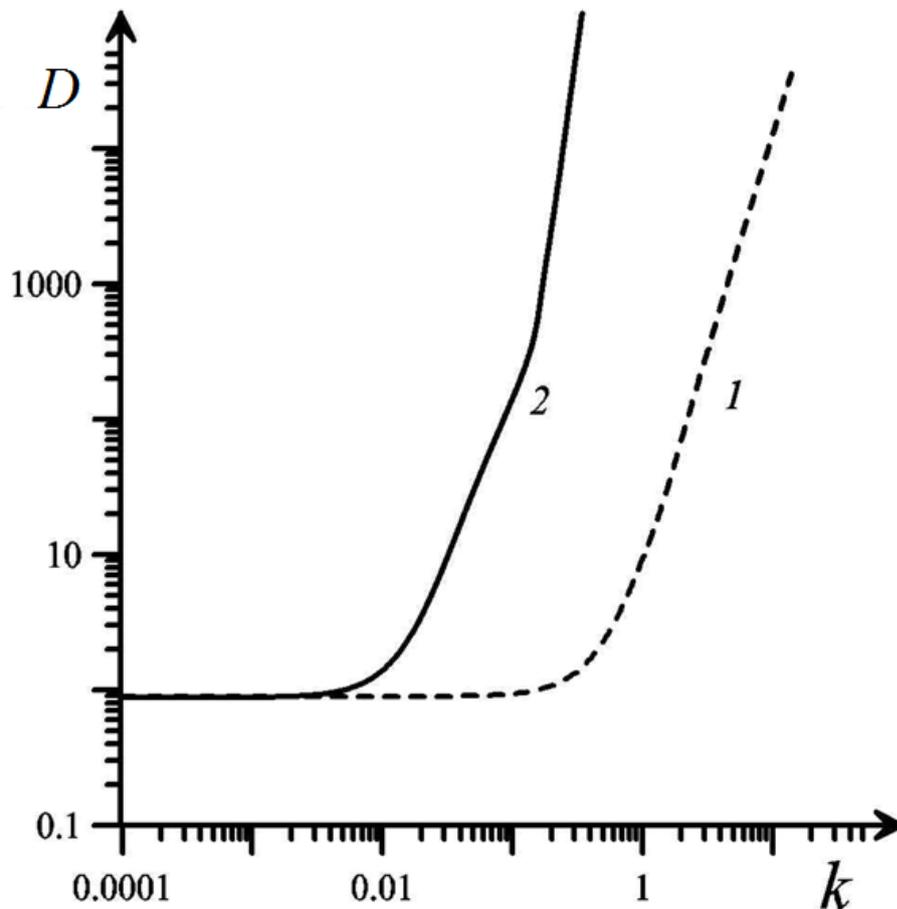


Рис. 3.12 Зависимость критического значения динамического предела текучести D от волнового числа при $G = 10$ для псевдопластичной жидкости с $\nu = 1$ (1) и вязкопластичной жидкости с $\nu = 10^4$ (2)

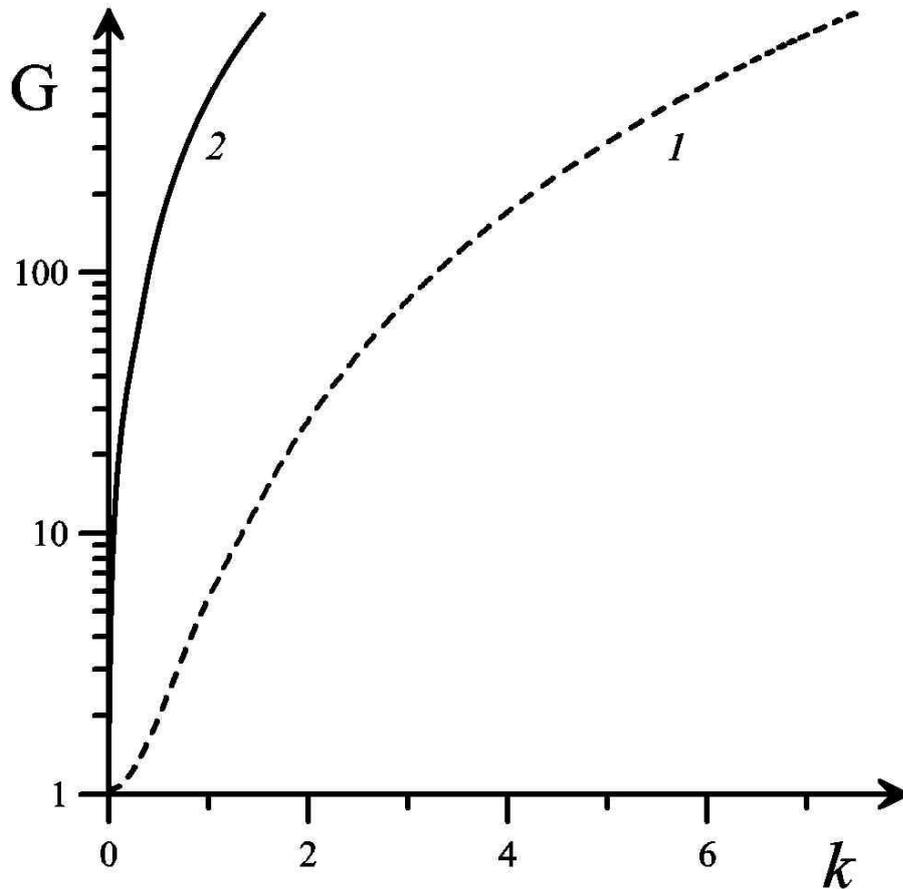


Рис. 3.13 Зависимость гравитационного параметра от волнового числа при $D = 10$. Обозначения кривых те же, что и на рисунке 3.12

Как видно, течение жидкости Уильямсона с $\nu = 1$ оказывается менее устойчивым, чем течение вязкопластичной жидкости с $\nu = 10^4$. Это можно объяснить тем, что в случае вязкопластичной жидкости ($\nu = 10^4$) вблизи свободной поверхности имеется тонкая квазитвердая зона, препятствующая развитию возмущений.

Волновое число критических возмущений практически не зависит от поверхностного натяжения, что продемонстрировано на рисунке 3.14. Аналогичная зависимость k от σ наблюдается при любых значениях параметров D и G .

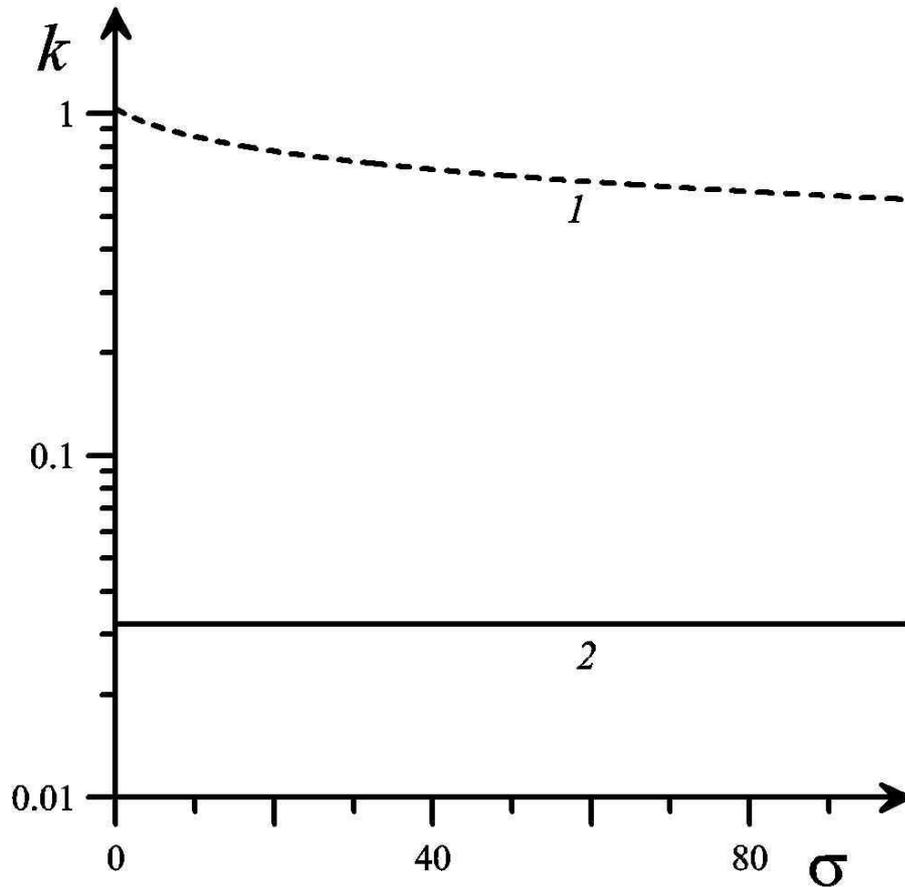


Рис. 3.14 Зависимость волнового числа нейтральных возмущений от поверхностного натяжения жидкости для $G = 10$, $D = 6$. Обозначение кривых те же, что и на рисунке 3.12

3.3.3 Длинноволновая неустойчивость стационарного течения

Как показано выше, в жидкости Уильямсона, как и в ньютоновской жидкости, наибольшую опасность представляют длинноволновые возмущения ($k \rightarrow 0$). Остановимся подробнее на анализе таких возмущений.

В длинноволновом приближении амплитуды возмущений и инкремент можно представить в виде рядов по степеням ik

$$\psi = \psi_0 + ik\psi_1 - k^2\psi_2 + \dots; \quad \xi = \xi_0 + ik\xi_1 - k^2\xi_2 + \dots;$$

$$q = q_0 + ikq_1 - k^2q_2 + \dots; \quad \lambda = \lambda_0 + ik\lambda_1 - k^2\lambda_2 + \dots.$$

Подставляя эти разложения в систему (3.24) – (3.25), запишем ее в нулевом порядке

$$\begin{aligned} (\tau_0 - \tau_1)\psi_{0zz} - \tau_3\psi_{0z} - \lambda_0\psi_0 - u_{0z}D\xi_0 &= 0, \\ q_{0z} = -\lambda_0\xi_0, \quad \xi_{0z} &= 0, \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$z = 0: \quad \psi_0 = \xi_0 = 0,$$

$$z = 1: \quad \lambda_0\psi_{0z} = -u_{0zz}D\xi_0, \quad -p_{0z}\psi_{0z} + u_{0zz}q_0 = 0.$$

Видно, что $\xi_0 = 0$, тогда первое граничное условие на свободной поверхности дает два варианта для рассмотрения: $\lambda_0 \neq 0$, $\psi_{0z}(1) = 0$ и $\lambda_0 = 0$, $\psi_{0z}(1) \neq 0$. В первом случае неустойчивость движения слоя жидкости связана с возмущениями, которые не деформируют свободную поверхность жидкости. Анализ данной ситуации приводит к выводу, что стационарное течение в слое абсолютно устойчиво к такому типу возмущений. Во втором случае неустойчивость стационарного течения связана с возмущениями, распространяющимися по свободной поверхности жидкости.

Учитывая выражение для τ_0 и то, что $\lambda_0 = 0$, $\psi_{0z}(1) \neq 0$, $p_{0z} = -G\text{tg}\alpha$, перепишем систему (3.26) в виде

$$(\tau_0 - \tau_1)\psi_{0zz} - \tau_3\psi_{0zz} = 0, \quad q_{0zz} = 0, \tag{3.27}$$

$$z = 0: \quad \psi_0 = 0, \quad z = 1: \quad G\psi_{0z}\text{tg}\alpha + u_{0zz}q_0 = 0.$$

Уравнения и граничные условия в первом порядке разложения по ik имеют следующий вид

$$(\tau_0 - \tau_1)\psi_{1zz} - \tau_3\psi_{1z} - \lambda_1\psi_0 - Du_0\psi_0 - u_{0z}D\xi_1 - q_0 = 0, \quad (3.28)$$

$$q_{1z} = -(\tau_0 + \tau_1)\psi_{0z} + \tau_4\psi_0, \quad \xi_{1z} = -\psi_0,$$

$$z = 0: \quad \psi_1 = \xi_1 = 0,$$

$$z = 1: \quad (\lambda_1 + Du_0)\psi_{0z} = -u_{0zz}D\xi_1, \quad \psi_{1z}G\operatorname{tg}\alpha + 2(1 + \nu)u_{0zz}\psi_0 + u_{0zz}q_1 = 0$$

Инкремент, определенный с точностью до первого порядка в разложении по ik , является чисто мнимым и задает частоту нейтральных возмущений. Чтобы найти действительную часть инкремента и определить эволюцию малых возмущений, достаточно записать второй порядок разложения для третьего уравнения (3.24), а также первого и второго условий из (3.25)

$$\xi_{2z} = -\psi_1, \quad (3.29)$$

$$z = 0: \quad \psi_2 = \xi_2 = 0; \quad z = 1: \quad -\lambda_1\psi_{1z} - \lambda_2\psi_{0z} - Du_0\psi_{1z} = u_{0zz}D\xi_2.$$

Решение задачи (3.28) – (3.29) определяет λ_2 , зависящее от D , $\operatorname{tg}\alpha$ и G .

На рисунке 3.15 представлены зависимости критических значений динамического предела текучести от гравитационного параметра при движении вязкопластичного слоя ($\nu = 10^4$) для различных углов наклона. Отметим, что наиболее опасными возмущениями являются колебательные моды, т.е. для всех кривых $\lambda_1 \neq 0$. Область параметров, лежащая ниже соответствующей кривой, отвечает устойчивому стеканию слоя.

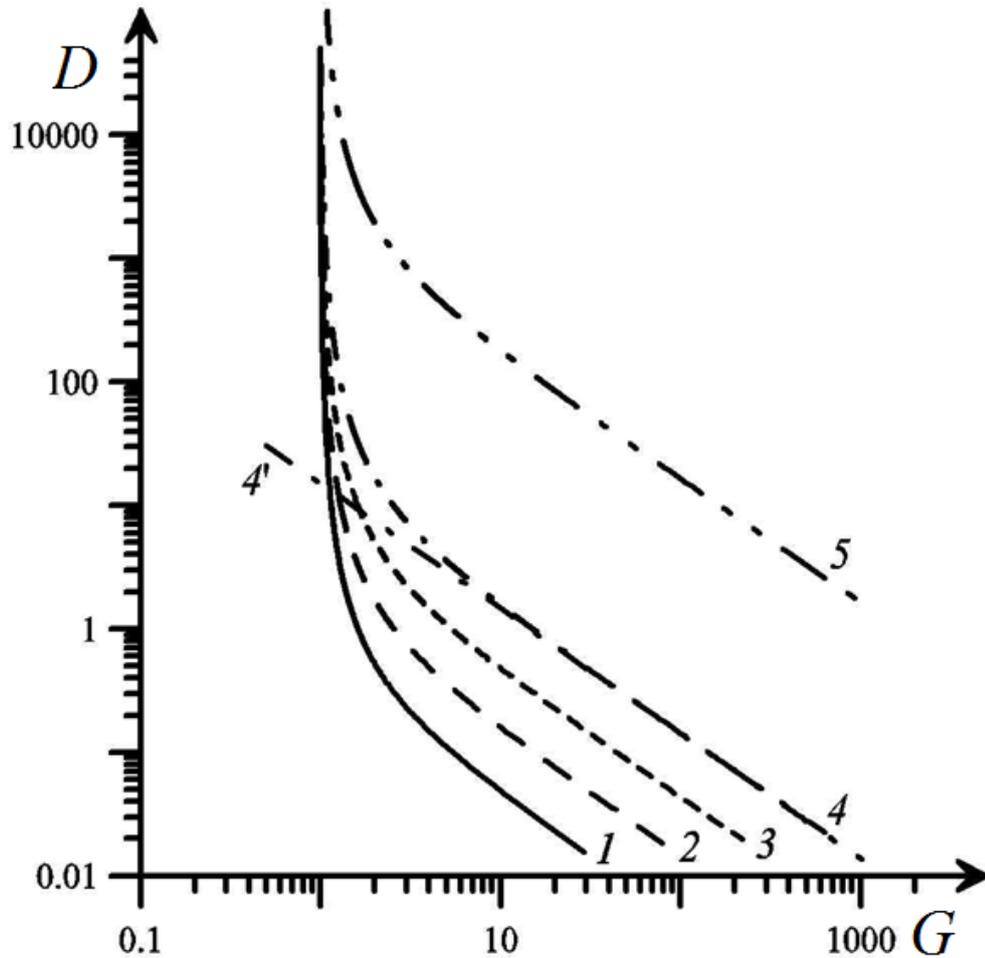


Рис. 3.15 Нейтральные кривые длинноволновых возмущений для вязкопластичной жидкости ($\nu = 10^4$): 1 – $\alpha = \pi/18$, 2 – $\alpha = \pi/6$, 3 – $\alpha = \pi/3$, 4 – $\alpha = 4\pi/9$, 4' – (3.30), 5 – почти горизонтальный слой $\alpha = \pi/2.01$

Выше показано, что с увеличением гравитационного параметра G скорость основного течения возрастает, а толщина квазитвердой зоны уменьшается. Данный факт свидетельствует об ослаблении вязкопластичных свойств жидкости, поэтому возмущения даже при малых значениях D приводят к неустойчивости основного стационарного течения в слое.

Расчеты показали, что при $G \geq 10$, когда вязкопластичные свойства неньютоновской жидкости ослабевают, критическое число Re_c , как и для ньютоновской жидкости, практически линейно зависит от тангенса угла наклона слоя

$$Re_c = D \cdot G = \delta \operatorname{tg} \alpha G^{1-\beta}, \quad (3.30)$$

где $\delta \approx 2.9$, $\beta \approx 1.030$. Кривая 4' на рисунке 3.15, построена по формуле (3.30) для $\alpha = 4\pi/9$. Из (3.30) видно, что при $G \rightarrow \infty$ движение в слое становится абсолютно неустойчивым.

С уменьшением числа G замедляется основное течение слоя, а толщина квазитвердой зоны растет. Малые возмущения свободной поверхности гасятся квазитвердой зоной, устойчивость движения слоя повышается. Наконец, при $G \leq 1$ весь слой жидкости находится в квазитвердом состоянии. Жидкость медленно стекает по наклонной поверхности, поэтому состояние слоя устойчиво.

Уменьшение угла наклона приводит к понижению порога устойчивости стационарного течения в слое. На вертикальной стенке состояние слоя устойчиво только при $G \leq 1$, т.е. при отсутствии движения. Горизонтальный слой жидкости абсолютно устойчив к малым возмущениям. Однако даже малый наклон твердой подложки при $G > 1$ приводит к появлению сдвигового течения в слое, которое, в свою очередь, может оказаться неустойчивым (рис. 3.15, кривая 5).

Для псевдопластичной жидкости ($\nu = 1$) наиболее опасными являются колебательные возмущения, нейтральные кривые которых приведены на рисунке 3.16. При движении псевдопластичной жидкости квазитвердая зона не образуется. Течение слоя является устойчивым для областей параметров, лежащих ниже кривых 1 – 5, которые построены для различных углов наклона слоя. Движение вертикального слоя абсолютно неустойчиво. Увеличение угла наклона твердой подложки стабилизирует течение.

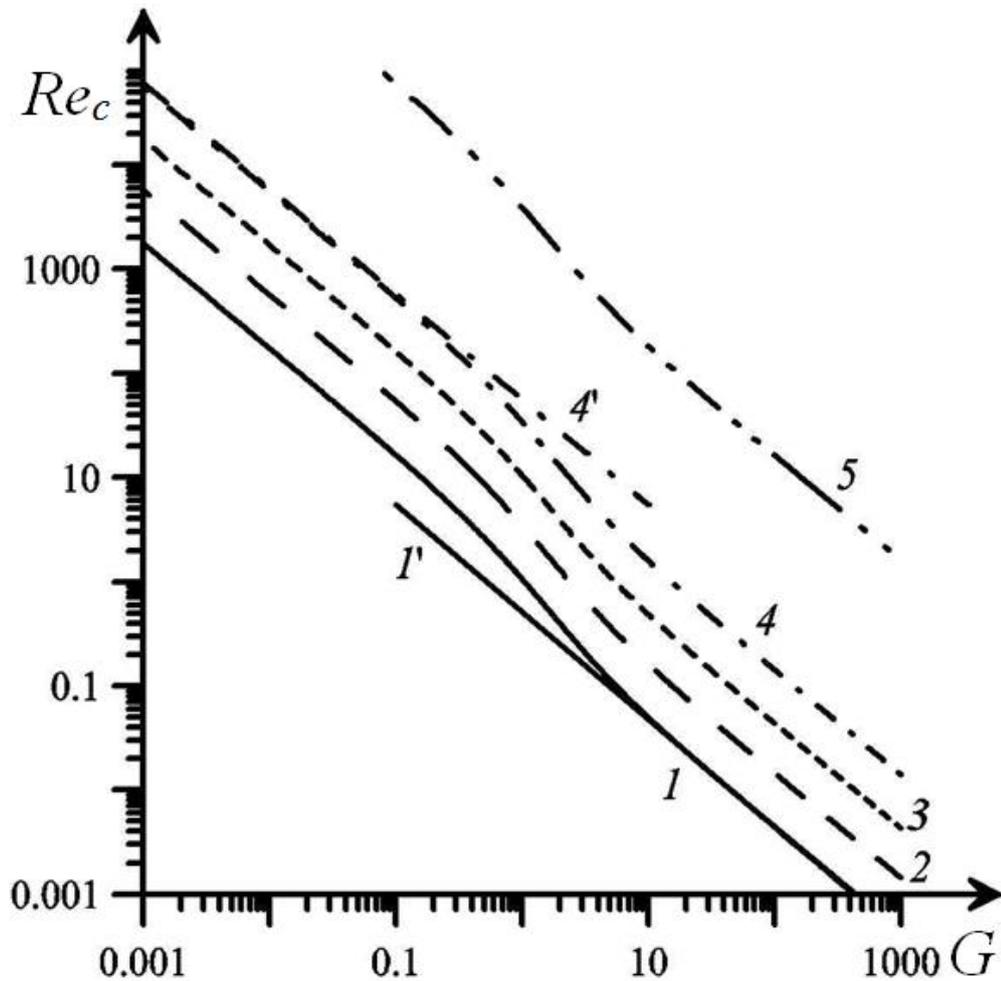


Рис. 3.16 Нейтральные кривые длинноволновых возмущений для псевдопластичной жидкости ($\nu = 1$). $1'$ – (3.30), обозначения остальных кривых те же, что и на рисунке 3.15

В области малых ($G \leq 0.4$) и больших ($G \geq 10$) значений гравитационного параметра поведение кривых рисунке 3.16 описывается (3.30). При $G \rightarrow 0$ параметры $\delta \approx 10$, $\beta \approx 1.012$, а при $G \rightarrow \infty$ $\delta \approx 2.9$, $\beta \approx 1.030$. Кривые $1'$ и $4'$ на рисунке 3.16 построены по (3.30) для $\alpha = \pi/18$ и $\alpha = 4\pi/9$ соответственно.

При всех углах наклона слоя с уменьшением гравитационного параметра наблюдается увеличение частоты критических возмущений. При $G \rightarrow \infty$ возмущения становятся монотонными. К значительному росту частоты колебаний возмущений приводит увеличение угла отклонения слоя от вертикального положения.

3.4 Основные результаты и выводы

Исследовано влияние поля тяжести (угла наклона слоя) и интенсивности вибраций на движение слоя вязкопластичной жидкости по колеблющейся в своей плоскости наклонной твердой поверхности. Рассмотрены три типа вибраций: симметричные, несимметричные «положительные», при которых в направлении поля тяжести твердая поверхность движется медленнее, чем против его направления и несимметричные «отрицательные», при которых медленное движение совершается против направления поля тяжести.

В отсутствие вибраций при слабом гравитационном воздействии, когда напряжения сдвига малы, весь слой находится в квазитвердом состоянии и покоится на твердой поверхности. Включение вибраций порождает заметное среднее течение жидкости, причем несимметричные вибрации генерируют среднее течение даже для $G = 0$. При несимметричных «отрицательных» вибрациях наблюдаются режимы, когда либо весь слой жидкости, либо его квазитвердая часть в среднем движутся против поля тяжести, что объясняется различным влиянием сил вязкого трения в течение периода вибраций.

В случаях симметричных и несимметричных «положительных» вибраций для слабых и умеренных гравитационных воздействий зависимость расхода жидкости от периода вибраций T немонотонна. При малых T расход растет с увеличением периода, что связано с увеличением толщины вязкого пограничного слоя, образующегося вблизи твердой поверхности, с ростом периода (уменьшением частоты вибраций). После достижения максимального значения расход начинает уменьшаться с ростом T , что связано с уменьшением вибрационного ускорения. Усиление гравитационного воздействия приводит к появлению на графиках зависимостей расхода от периода дополнительных максимумов в области больших периодов.

Для несимметричных «отрицательных» вибраций при слабых и умеренных гравитационных воздействиях зависимость расхода жидкости от периода имеет два локальных экстремума. Первый из них находится в области малых периодов и связан с образованием вязкого стоксового пограничного слоя вблизи твердой

поверхности. Второй экстремум соответствует относительно большим периодам вибраций, при которых толщина жидкой зоны, и соответственно влияние сил вязкого трения на движение жидкости, существенно зависят от интенсивности вибраций. С усилением гравитационного воздействия экстремумы сближаются и объединяются в один.

Для ускорения процесса стекания вязкопластичной жидкости по наклонной твердой поверхности при слабых и умеренных гравитационных воздействиях наиболее эффективными являются несимметричные «положительные» вибрации. При сильном гравитационном воздействии имеется область значений периода, когда наибольший эффект ускорения движения слоя достигается с помощью несимметричных «отрицательных» вибраций.

Получены значения пороговой амплитуды скорости вибраций твердой поверхности a_c , при достижении которой в слое возможна генерация осредненного движения. Вибрации с амплитудой, меньшей a_c , не приводят к напряжениям сдвига, достаточным для возникновения жидкой зоны, поэтому весь слой, находясь в квазитвердом состоянии, совершает колебания вместе с твердой поверхностью. Несимметричность вибраций существенно понижает пороговое значение a_c , т.к. на части периода вибраций твердая поверхность ускоряется, порождая сдвиговые напряжения, достаточные для возникновения в слое жидкой зоны.

В случаях симметричных и несимметричных «положительных» вибраций среднее движение жидкости в слое всегда направлено по полю тяжести. При несимметричных «отрицательных» вибрациях объемный расход жидкости в слое немонотонно зависит от амплитуды скорости вибраций. При малых a в слое может наблюдаться очень слабое осредненное движение, направленное вниз, которое с увеличением a меняет направление.

Рассмотрена задача устойчивости стационарного плоскопараллельного течения, возникающего в наклонном слое жидкости Уильямсона. Показано, что с ростом волнового числа критические значения динамического предела текучести и гравитационного параметра монотонно возрастают, а волновое число,

соответствующее критическим возмущениям, практически не зависит от поверхностного натяжения жидкости. Наиболее опасными являются колебательные длинноволновые возмущения ($k \rightarrow 0$) свободной поверхности, устойчивость по отношению к которым изучена отдельно.

Расчеты показали, что с ростом параметра G , характеризующего влияние поля тяжести, наблюдается снижение устойчивости течения жидкости по отношению к длинноволновым возмущениям. Для значений $G < 10$ движение вязкопластичного слоя оказывается более устойчивым, чем псевдопластичного слоя, в силу существования на свободной поверхности вязкопластика квазитвердой зоны, которая сдерживает развитие возмущений. При $G \geq 10$ нейтральные кривые вязкопластичной и псевдопластичной жидкостей сближаются, т.к. с ростом гравитационного параметра толщина квазитвердой зоны уменьшается, и её влияние на развитие длинноволновых возмущений ослабевает.

При $G \leq 1$ скорость движения вязкопластичной жидкости стремится к нулю, поэтому слой находится в устойчивом состоянии при всех углах наклона. Для любых углов наклона слоя уменьшение гравитационного параметра приводит к увеличению частоты критических возмущений. При $G \rightarrow \infty$ наиболее опасными становятся монотонные моды. Приближение ориентации слоя к горизонтальной приводит к повышению устойчивости течения жидкости и росту частоты колебательных возмущений.

Из анализа результатов численных расчетов получена формула $Re = \delta \operatorname{tg} \alpha G^{1-\beta}$, которая описывает поведение нейтральных кривых устойчивости для вязкопластичных жидкостей при $G \geq 10$ и для псевдопластичных жидкостей при $G \leq 0.4$ и $G \geq 10$. В указанных областях значений параметра G число Рейнольдса, так же, как и в ньютоновской жидкости, прямо пропорционально тангенсу угла наклона слоя.

ГЛАВА 4. ТЕРМОВИБРАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В НЕЛИНЕЙНО–ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЯХ

В научной литературе большое количество работ посвящено изучению конвективных движений ньютоновских жидкостей под воздействием разного рода вибраций. При описании термовибрационной конвекции в несжимаемой жидкости, как правило, используются уравнения Зеньковской–Симоненко (см. например [80]). Систематическое описание основных положений термовибрационной конвекции можно найти в монографии [219].

В данной главе в высокочастотном приближении сформулированы уравнения термовибрационной конвекции для обобщенной ньютоновской жидкости, описывающие медленное осредненное конвективное движение, возникающее на фоне быстрых пульсаций полей скорости, давления и температуры.

Напомним, что обобщенными ньютоновскими жидкостями называется класс неньютоновских сред, для которых тензор напряжений сдвига τ_{ij} в каждой точке представляет некоторую функцию только от тензора скорости сдвига (скорости деформаций) e_{ij} в той же точке [37].

$$\tau_{ij} = f(I_2)e_{ij}, \quad e_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad I_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ji}, \quad (4.1)$$

где u_i компонента скорости жидкости вдоль координаты x_i .

Для бесконечного наклонного слоя вязкопластичной жидкости, находящейся в поле высокочастотных вибраций, сформулировано условие существования жесткого состояния и исследована его устойчивость. Кроме того, изучено вибрационно-конвективное течение жидкости Уильямсона в вертикальном бесконечном слое.

4.1 Уравнения термовибрационной конвекции для обобщенной ньютоновской жидкости

Пусть имеется однородная жидкость, целиком заполняющая замкнутую полость, совершающую линейно–поляризованные (возвратно–поступательные) вибрации с амплитудой смещения a и частотой ω в направлении единичного вектора \vec{n} , тогда $a\omega$ – амплитуда скорости пульсаций. Вибрации считаются высокочастотными и мало–амплитудными $\omega \gg \{v_e/h^2, \chi/h^2\}$, $a\beta\theta \ll h$, где h – характерный размер гидродинамических структур, v_e – характерная кинематическая вязкость, определяемая, соответственно для жидкостей Бингама, Уильямсона и Освальда де Вилия в виде $v_e = \mu_p/\rho$, μ_∞/ρ , μ_0/ρ (μ_p – пластическая вязкость или коэффициент жесткости при сдвиге, μ_∞ – вязкость при бесконечно большой скорости сдвига, μ_0 – эффективная динамическая вязкость), χ – коэффициент температуропроводности жидкости, β – коэффициент теплового расширения, θ – характерная разность температур.

Вибрации считаются не акустическими, т.е. выполняются условия $\lambda \gg h$, $h \gg v_e/c$, где λ – длина звуковой волны, соответствующая частоте вибраций, c – скорость звука. Это условие позволяет считать жидкость несжимаемой.

В этом случае все физические поля удобно разделить на быстро меняющиеся пульсационные и медленные осредненные части. Сделанные выше предположения позволяют пренебречь нелинейными и диссипативными слагаемыми в уравнениях для пульсационных компонент.

Жидкость находится в неоднородном температурном поле. Движение жидкости рассматривается в неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом, что приводит к перенормировке ускорения свободного падения. В этом случае уравнения свободной конвекции примут вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \text{Div } \tau + g\beta T \vec{\gamma} + a\omega^2 \beta \vec{n} T \cos \omega t, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \nabla T = \chi \Delta T, \quad \text{div } \vec{V} = 0.$$

где \vec{V} – скорость жидкости; P – давление; ρ – плотность; g – ускорение свободного падения; β – коэффициент теплового расширения; χ – коэффициент температуропроводности; $\vec{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх; \vec{n} – единичный вектор, показывающий направление вибраций; $\nabla, \Delta, \text{Div}, \text{div}$ – обозначения дифференциальных операторов градиента, Лапласа и дивергенции.

Следуя методу, изложенному в работе [6], вводим иерархию времен $t_- = \omega t, t_0 = t, t_1 = \omega^{-1}t, t_2 = \omega^{-2}t \dots$. Будем считать, что все поля скорости, давления и температуры зависят как от «быстрого» (пульсационного) времени t_- , так и от «медленных» (конвективных) времен t_0, t_1, t_2, \dots . Характерное время изменения пульсационных частей, т.е. «быстрое» время, t_- одного порядка с ω^{-1} . Производная по времени представится в виде ряда по степеням ω

$$\frac{\partial}{\partial t} = \omega \frac{\partial}{\partial t_-} + \frac{\partial}{\partial t_0} + \omega^{-1} \frac{\partial}{\partial t_1} + \omega^{-2} \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots \quad (4.3)$$

Все переменные физические поля записываются в виде степенных рядов

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \omega^{-1} \vec{V}_1 + \omega^{-2} \vec{V}_2 + \dots, \quad T = T_0 + \omega^{-1} T_1 + \omega^{-2} T_2 + \dots, \quad (4.4)$$

$$P = \omega P_- + P_0 + \omega^{-1} P_1 + \dots$$

Характерная скорость вибраций $a\omega$ является конечной величиной при $\omega \rightarrow \infty$, следовательно, вибрационное ускорение $a\omega^2$, а вместе с ним и главная часть давления пропорциональны первой степени ω .

Подставим разложения (4.3) и (4.4) в уравнения (4.2) и соберем слагаемые одного порядка малости, тогда в главном порядке разложения получаем систему

$$\frac{\partial \vec{V}_0}{\partial t_-} = -\frac{1}{\rho} \nabla P_- + a\omega\beta\bar{n}T_0 \cos t_-, \quad \frac{\partial T_0}{\partial t_-} = 0. \quad (4.5)$$

Корректность такой записи уравнений для пульсаций в нелинейно-вязких жидкостях будет обсуждаться ниже.

В нулевом порядке по ω решение ищем в виде

$$\vec{V}_0 = a\omega\beta\bar{w}_0 \sin t_- + \vec{u}, \quad P_- = a\omega p_0 \cos t_- + \bar{p}, \quad (4.6)$$

где \vec{u} и \bar{p} медленно меняющиеся части полей скорости и давления, не зависящие от t_- . Из второго уравнения (4.5) следует, что T_0 не зависит от быстрого времени. Подставляя выражения (4.6) в первое уравнение (4.5), для амплитуд пульсационных частей полей скорости и давления можем записать

$$\rho\beta(\bar{w}_0 - T_0\bar{n}) = -\nabla p_0. \quad (4.7)$$

Для медленно меняющейся части давления в этом порядке имеем $\nabla\bar{p} = 0$.

Выпишем систему уравнений (4.2) в следующем порядке разложения по ω

$$\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t_-} + \frac{\partial \vec{V}_0}{\partial t_0} + (\vec{V}_0 \nabla) \vec{V}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P_0 + \frac{1}{\rho} \text{Div} \tau_0 + g\beta T_0 \vec{\gamma} + \beta \vec{n} b T_1 \text{cost}_-, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t_-} + \frac{\partial T_0}{\partial t_0} + (\vec{V}_0 \nabla) T_0 = \chi \Delta T_0, \quad \text{div} \vec{V}_0 = 0.$$

Ищем поля \vec{V}_1 , P_0 и T_1 в виде сумм «быстрых» и «медленных» частей, при этом учтем, что последние не зависят от «быстрого» времени t_- .

$$T_1 = a\omega\beta(\vec{w}_0 \nabla) T_0 \text{cost}_- + \bar{T}_1, \quad \vec{V}_1 = a\omega\vec{v}_1 \sin t_- + \vec{u}_1, \quad (4.9)$$

$$P_0 = a\omega p_0 \text{cost}_- + \bar{p}_0.$$

Подставляем равенства (4.6) и (4.9) в систему (4.8) и усредняем полученные уравнения по периоду быстрых пульсаций. Получим систему уравнений, которая определит медленное осредненное конвективное движение жидкости

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \text{Div} \tau + g\beta T \vec{\gamma} + \frac{1}{2} (a\omega\beta)^2 \vec{w} \nabla (T \vec{n} - \vec{w}), \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \nabla T = \chi \Delta T, \quad \text{div} \vec{u} = 0, \quad \text{div} \vec{w} = 0, \quad \text{rot} \vec{w} = \nabla T \times \vec{n}.$$

где \vec{u} , T , p – функции медленного времени t , описывающие осредненное конвективное течение. Индексы «0» у всех переменных и черта над давлением опущены. При выводе системы (4.10) безразмерная амплитуда пульсационного поля скорости представлялась в виде $\vec{v} = \beta \vec{w}$ [79, 218]. Третье и четвертое уравнение в (4.10) вытекают из условия несжимаемости жидкости. Последнее уравнение в (4.10) получено путем применения операции rot к равенству (4.7).

Система (4.10) фактически совпадает с системой уравнений термовибрационной конвекции для ньютоновской жидкости за исключением вязкого слагаемого $\text{Div} \tau$, вид которого определяется реологической моделью.

Выпишем разложение для тензора скоростей сдвига (скоростей деформации) и второго инварианта этого тензора по степеням малого параметра ω^{-1}

$$e_{ij} = e_{0ij} + \omega^{-1} e_{1ij} + \omega^{-2} e_{2ij} \dots, \quad (4.11)$$

$$I_2 = \frac{e_{ij} e_{ji}}{2} = \frac{1}{2} (e_{0ij} e_{0ji} + \omega^{-1} e_{0ij} e_{1ji} + \omega^{-1} e_{1ij} e_{0ji} + \omega^{-2} e_{1ij} e_{1ji} + \dots).$$

Подставляя разложения (4.11) в реологический закон (4.1), получим разложение тензора вязких напряжений по степеням ω^{-1}

$$\tau_{ij} = f_0(I_{00}) e_{0ij} + \omega^{-1} (f_1(I_{00}, I_{01}) e_{0ij} + f_0(I_{00}) e_{1ij}) + \dots, \quad (4.12)$$

$$I_{00} = \frac{1}{2} e_{0ij} e_{0ji}, \quad I_{01} = e_{0ij} e_{1ji}.$$

В (4.12) учтена симметричность тензора скоростей сдвига e_{ij} . Вид функций f_0 , f_1 определяется выбором конкретного реологического уравнения.

Определим явный вид разложения тензора вязких напряжений по степеням ω^{-1} и явный вид функций f_0 , f_1 для реологической модели Уильямсона. Учитывая разложение поля скорости (4.4) и разложение для тензора скорости сдвига (4.11) для нелинейной части тензора вязких напряжений, получим

$$f = \frac{A}{B + \sqrt{I_{00} + \omega^{-1} I_{01} + \dots}}.$$

Раскладываем получившееся выражение в степенной ряд Тейлора. В качестве переменной в разложении выбирается сумма слагаемых, порядок малости которых выше нулевого.

$$f = \frac{A}{B + \sqrt{I_{00}}} - \frac{\omega^{-1} A I_{01}}{2(B + \sqrt{I_{00}})^2 \sqrt{I_{00}}} + \dots$$

Тогда разложение тензора вязких напряжений по степеням обратной частоты с точностью до слагаемых порядка ω^{-1} имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & \left(\frac{A}{B + \sqrt{I_{00}}} + \mu_{\infty} \right) e_{0ij} - \frac{\omega^{-1} A I_{01} e_{0ij}}{2(B + \sqrt{I_{00}})^2 \sqrt{I_{00}}} + \\ & + \omega^{-1} \left(\frac{A}{B + \sqrt{I_{00}}} + \mu_{\infty} \right) e_{1ij} + \dots \end{aligned}$$

Функции f_0 , f_1 , входящие в разложение (4.12), соответственно примут вид

$$f_0 = \frac{A}{B + \sqrt{I_{00}}} + \mu_{\infty}, \quad f_1 = \frac{A I_{01}}{2(B + \sqrt{I_{00}})^2 \sqrt{I_{00}}}.$$

В разложении (3.12) необходимо ограничиться только первым слагаемым, т.к. остальные слагаемые имеют более высокий порядок малости. После его осреднения по быстрому времени t_+ получаем

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(I_{00}) e_{0ij}] dt_-, \quad e_{0ij} = a\omega\beta e_{wij} \sin t_- + e_{uij}. \quad (4.13)$$

Тензор скоростей сдвига в (4.13) разделяется на две части, одна из них $e_{wij} = (\partial w_i / \partial x_j + \partial w_j / \partial x_i)$ определяется амплитудой скорости пульсаций, а вторая $e_{uij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ скоростью осредненного конвективного движения.

Функция $f(I_{00})$ для реологических моделей Уильямсона, Шведова-Бингама, и Освальда де Виля соответственно принимает вид

$$f = \frac{A}{B + \sqrt{I_{00}}} + \mu_\infty, \quad f = \frac{\tau_0}{\sqrt{I_{00}}} + \mu_p, \quad f = k \left(\sqrt{I_{00}} \right)^{n-1}. \quad (4.14)$$

Процедура получения второго и третьего выражений из (4.14) аналогична той, что была приведена для модели Уильямсона.

На твердых границах для медленно меняющейся скорости \vec{u} выполняется условие прилипания, а для амплитуды пульсационной скорости условие непротекания.

Введем единицы измерения: для поля $\vec{w} - \theta$, координат $- h$, времени $- h^2/\nu_e$, скорости $- \nu_e/h$ и давления $- \rho\nu_e^2/h^2$. Уравнения (4.10), (4.13) и (4.14) в безразмерной форме примут вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = -\nabla p + \text{Div}\tau + GrT\vec{\gamma} + \frac{1}{2}Gv \cdot \vec{w}\nabla(T\vec{n} - \vec{w}), \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}\nabla T = \frac{1}{Pr}\Delta T, \quad \text{div}\vec{u} = 0, \quad \text{div}\vec{w} = 0, \quad \text{rot}\vec{w} = \nabla T \times \vec{n},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{Bh}{\sqrt{I_{00}}} + 1 \right) e_{0ij} \right] dt_-, \quad \tau_2 > Bh \\ I_{00} = 0, \quad \tau_2 \leq Bh \end{array} \right. ,$$

(4.16)

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{D}{b + \sqrt{I_{00}}} + 1 \right) e_{0ij} \right] dt_-, \quad \tau_{ij} = \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\sqrt{I_{00}} \right)^{n-1} e_{0ij} \right] dt_-,$$

$$e_{0ij} = \sqrt{Gv} e_{wij} \sin t_- + e_{uij},$$

где $Gv = (a\omega\beta\theta h/v_e)^2$ – вибрационное число Грасгофа, $Gr = g\beta\theta h^3/v_e^2$, – гравитационное число Грасгофа, $Pr = v_e/\chi$ – число Прандтля; $Bh = \rho h^2 \tau_0/\mu_p^2$ – число Бингама; $D = \rho h^2 A/\mu_\infty^2$ – динамический предел текучести; $b = \rho h^2 B/\mu_\infty$, $K = \frac{k}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{\rho h^2} \right)^{n-1}$ – реологические параметры моделей.

В случае нелинейно-вязкой жидкости порядок величины вязкого слагаемого в уравнениях для пульсаций (4.5) определяется не только амплитудой пульсационной скорости, но и значением эффективной вязкости жидкости при заданной скорости сдвига. Пренебрежение вязким слагаемым в этом уравнении только потому, что его величина определяется нулевым порядком по ω (см. (4.12)) может оказаться не корректным. Оценим порядок величины вязкого слагаемого, которое для модели Уильямсона имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{A}{B + \sqrt{I_{00}}} + \mu_\infty \right) e_{0ij} \right] \quad (4.17)$$

В пределах квазитвердых (жестких) зон вязкопластичной жидкости ($B \rightarrow 0$, $e_{0ij} \rightarrow 0$) порядок величины вязкого слагаемого равен $A/(\rho h)$. Сравнивая его с вибрационной силой в (4.5) можно оценить значение частоты, при которой в сосуде с неизотермической вязкопластичной жидкостью, совершающем линейно-поляризованные вибрации, могут существовать жесткие зоны

$$\omega^* \leq \sqrt{\frac{A}{\rho a \beta \theta h}} \approx 35 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad (4.18)$$

Числовая оценка приведена для нефти $A = 10$ Па, $\rho = 800$ г/м³ (см. табл. 3.1). Значения остальных параметров полагались следующими: $a \approx 10^{-3}$ м, $\beta \approx 10^{-3}$ К⁻¹, $\theta \approx 10^2$ К, $h \approx 10^{-1}$ м. Отметим, что предельные напряжения сдвига для многих вязкопластичных материалов не превышают значений 100 Па [39, 42, 44-46]. Формула (4.18) определяет пороговые значения частот вибраций, для которых в случае вязкопластичной жидкости справедлива построенная выше теория термовибрационной конвекции. В жидком состоянии динамическая вязкость вязкопластичных жидкостей, как правило, невелика $\mu_\infty < 1$ Па·с, что позволяет не учитывать в уравнений (4.5) линейно-вязкое слагаемое.

Рассмотрим случай псевдопластичных жидкостей. Для таких жидкостей вязкое слагаемое (4.17) имеет порядок величины $\mu_{\text{эф}} a \omega / (\rho h^2)$. В пределе малых скоростей сдвига $\mu_{\text{эф}} = (A/B + \mu_\infty)$. Сравнение вибрационного и вязкого слагаемых дает оценку для частоты пульсаций, при которой вязким слагаемым в (4.5) можно пренебречь

$$\omega^* \gg \frac{\mu_{\text{эф}}}{\beta \theta \rho h^2}. \quad (4.19)$$

Анализ неравенства (4.19) показывает, что невязкое приближение для пульсационной скорости псевдопластичной жидкости справедливо, когда $\mu_{\text{эф}} < 1$ Па·с. В псевдопластичных жидкостях, особенно при малых скоростях сдвига, часто наблюдается аномально высокая вязкость [44]. В этом случае требуется уточнение записанных выше уравнений для пульсационного (4.5) и осредненного полей (4.10).

4.2 Равновесные состояния нелинейно-вязких жидкостей в поле высокочастотных вибраций

Под квазиравновесием жидкости, находящейся в замкнутой полости в поле высокочастотных вибраций, понимается такое её состояние, при котором на фоне быстрого пульсационного движения отсутствует медленное осредненное течение жидкости, т. е. $\vec{u} = 0$, $e_{ij} = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

В этом случае система уравнений (4.15) после применения к ней операции взятия ротора примет вид:

$$\text{rot Div } \tau + \frac{1}{2} Gv \nabla(\vec{w}\vec{n}) \times \nabla T + Gr \nabla T \times \vec{\gamma} = 0, \quad (4.20)$$

$$\Delta T = 0, \text{ div } \vec{w} = 0, \text{ rot } \vec{w} = \nabla T \times \vec{n},$$

где τ , \vec{w} , T – соответственно тензор вязких напряжений, амплитуда пульсационной скорости и температура, соответствующие квазиравновесному состоянию.

Уравнения (4.20), описывающие состояния квазиравновесия, являются обобщением условий, представленных в [79, 80], на обобщенные неньютоновские среды (4.1).

Частным случаем квазиравновесного состояния жидкости является квазитвердое (жесткое) состояние. В этом случае в жидкости отсутствуют какие-либо течения $\vec{w} = 0$, $e_{0ij} = 0$, т.е. жидкость в лабораторной системе отсчета совершает гармонические колебания как единое целое вместе с сосудом, а в рассматриваемой нами системе отсчета, связанной с колеблющимся сосудом, не движется. Приравнивая амплитуду пульсационной скорости нулю, получим условия для квазитвердого состояния жидкости

$$\text{rot Div } \tau + Gr \nabla T \times \vec{\gamma} = 0, \quad \Delta T = 0, \quad \nabla T \times \vec{n} = 0. \quad (4.21)$$

Видно, что вибрационное число Грасгофа не влияет на квазитвердое состояние. Для всех типов обобщенной ньютоновской жидкости (4.1), кроме вязкопластичной жидкости, $\text{rot Div } \tau = 0$, т.е. квазитвердое состояние возможно либо в невесомости, либо когда все три вектора ∇T , \vec{n} , $\vec{\gamma}$ направлены вдоль одной прямой: $\nabla T \times \vec{\gamma} = \nabla T \times \vec{n} = 0$.

При отсутствии вибраций для неизотермической обобщенной ньютоновской жидкости (4.1) выполняется условие равновесия $Gr \nabla T \times \vec{\gamma} = 0$, которое для ньютоновской жидкости приведено в [79].

Для вязкопластичных жидкостей характерно наличие предельного напряжения сдвига. Если напряжения, возникающие в жидкости, меньше предельного, то жидкость находится в квазитвердом (жестком) состоянии. Напряжения сдвига в этом случае подлежат определению из уравнения (4.21). Равновесный градиент температуры задается единичным вектором $\nabla T = \vec{m}$. В отсутствие вибраций жесткое состояние возможно при произвольной ориентации \vec{m} . Для реализации жесткого состояния в поле высокочастотных вибраций необходимо выполнение условия $\vec{m} \times \vec{n} = 0$.

4.2.1 Жесткое состояние наклонного слоя вязкопластичной жидкости

На рисунке 4.1 показан наклонный слой вязкопластичной жидкости, находящийся в поле тяжести Земли. Единичный вектор $\vec{\gamma}$ имеет компоненты $(-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$. Равновесный градиент температуры задается единичным вектором \vec{m} , а вектор \vec{n} определяет направление вибраций. Для описания реологии жидкости используется уравнение Шведова-Бингама (4.16).

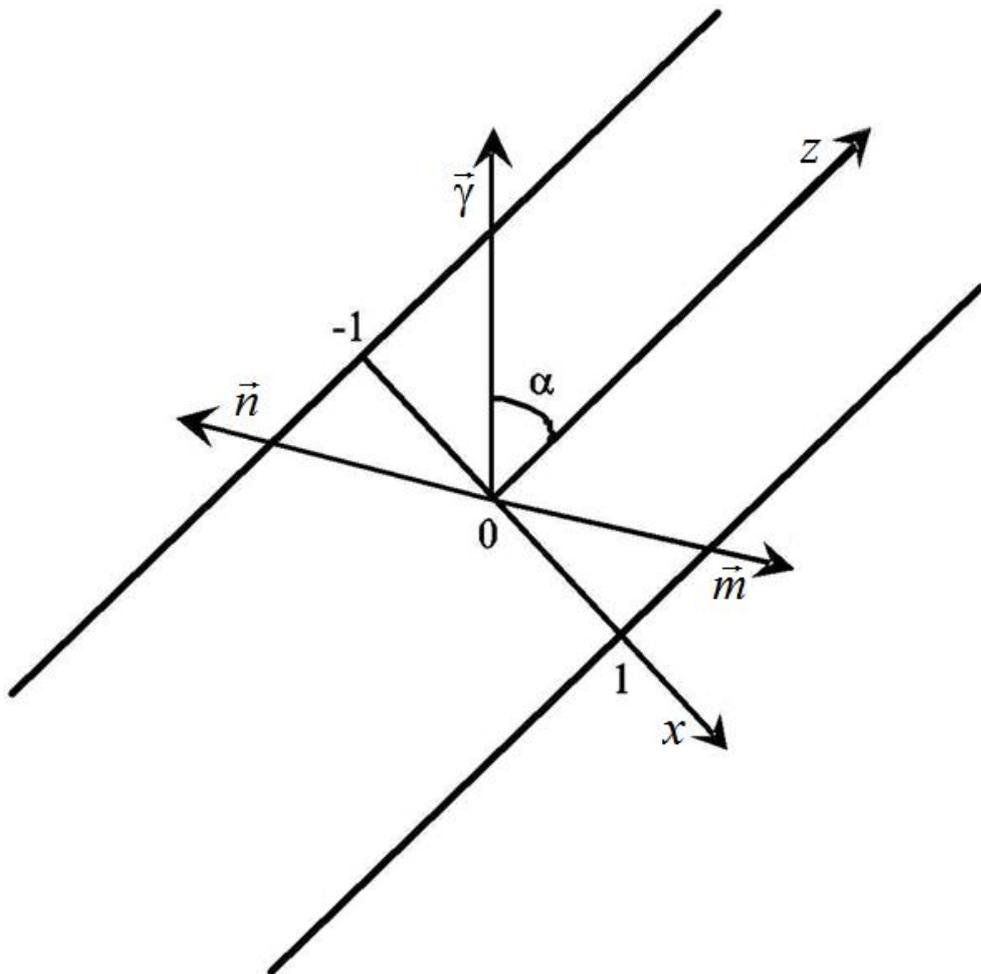


Рис. 4.1 Наклонный слой жидкости Бингама, находящийся в поле тяжести

При указанных на рисунке 4.1 условиях вязкие напряжения, возникающие в слое, зависят только от поперечной координаты, тогда из (4.21) имеем

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + Gr(m_z \sin \alpha + m_x \cos \alpha) = 0, \quad (4.22)$$

где $\tau \equiv \tau_{xz}(x)$. Решение (4.22) записывается в виде

$$\tau = C_0 x^2 + C_1 x + C_2, \quad C_0 = -\frac{Gr}{2}(m_z \sin \alpha + m_x \cos \alpha). \quad (4.23)$$

Жидкость находится в жестком состоянии, если в любой точке слоя выполняется условие $|\tau| \leq Bh$.

Проведем графический анализ уравнения (4.23). Полагаем, что вершина параболы (4.23), имеющая координату $x^* = -C_1/2A$, расположена внутри слоя $-1 < x^* < 1$. В этом случае экстремумы напряжения сдвига находятся на границах слоя и в точке x^* . Для выполнения условия существования жесткого состояния необходимо потребовать выполнения следующих неравенств:

$$C_0 - C_1 + C_2 \geq -Bh, \quad C_0 - C_1 + C_2 \leq Bh \quad (x = -1); \quad (4.24)$$

$$C_0 + C_1 + C_2 \geq -Bh, \quad C_0 + C_1 + C_2 \leq Bh \quad (x = 1); \quad (4.25)$$

$$\frac{C_1^2}{4C_0} + C_2 \geq -Bh, \quad \frac{C_1^2}{4C_0} + C_2 \leq Bh \quad (x = x^*). \quad (4.26)$$

На рисунке 4.2а, который соответствует ситуации $-1 < x^* < 1$, заштрихована область существования жесткого состояния. Жесткое состояние не реализуется, если площадь заштрихованной области равна нулю. Это возможно, когда $|C_0| > 2Bh$.

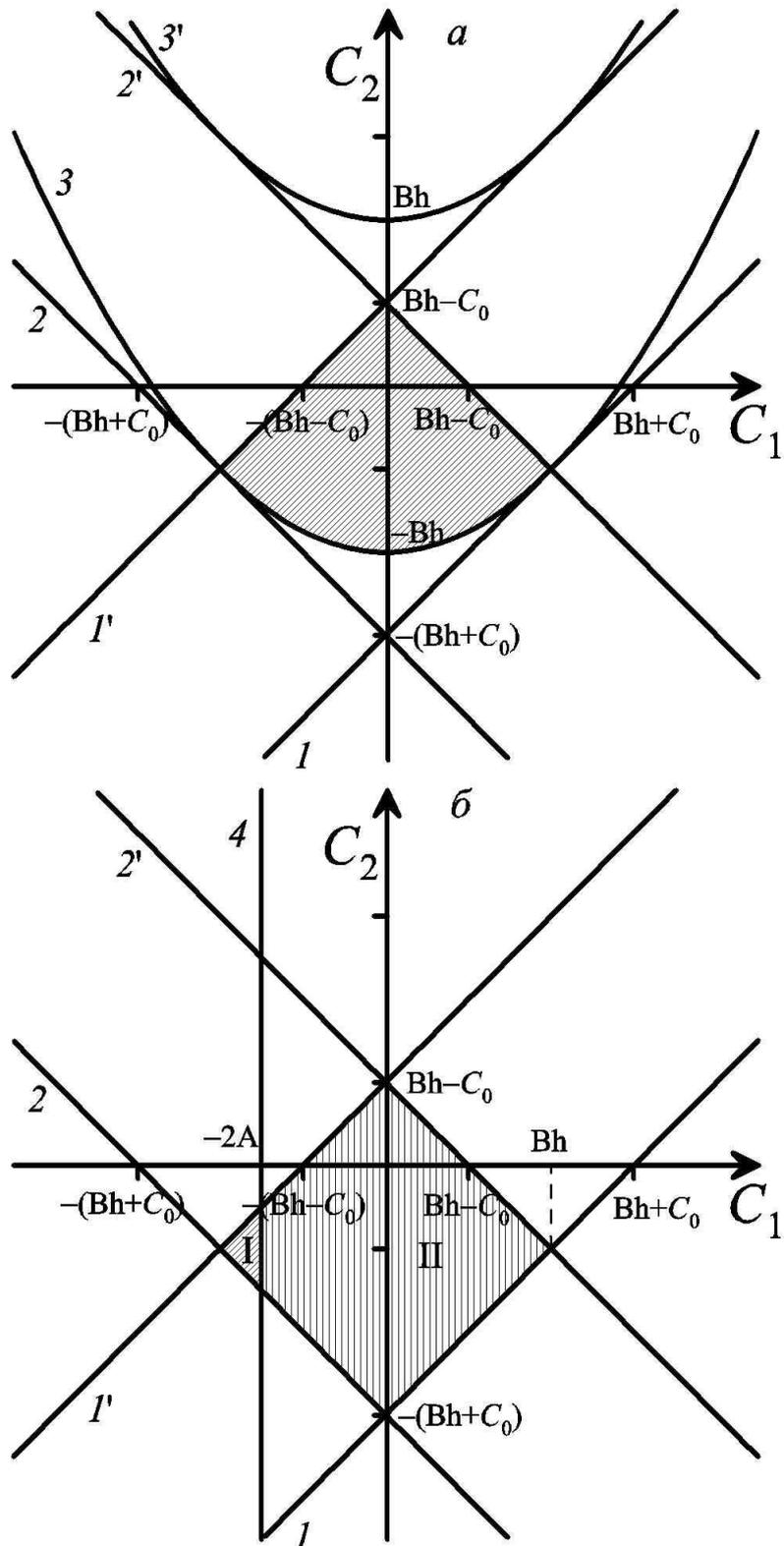


Рис. 4.2 Графический анализ систем неравенств (4.24) – (4.26) (а) и (4.24), (4.25), (4.29) при $x^* > 1$ (б). Области существования решений, соответствующих жесткому состоянию, заштрихованы. Представлены границы выполнения неравенств (4.24) (I, I'); (4.25) ($2, 2'$); (4.26) ($3, 3'$); (4.29) (4). I, II – случаи $C_0 > 0$ и $C_0 < 0$ соответственно

Пусть вершина параболы (4.23) находится на одной из границ слоя, например, при $x^* = +1$, тогда $C_1 = -2C_0$. В этом случае, неравенства (4.24) и (4.26) принимают вид

$$C_2 \geq -(Bh + 3C_0), \quad C_2 \leq Bh - 3C_0 \quad (x = -1); \quad (4.27)$$

$$C_2 \geq C_0 - Bh, \quad C_2 \leq Bh + C_0 \quad (x = 1). \quad (4.28)$$

Система (4.27), (4.28) не имеет решений, т.е. в слое вязкопластичной жидкости не реализуется жесткое состояние, если $|C_0| > Bh/2$. Данное неравенство оказывается справедливым и для $x^* = -1$.

Рассмотрим случай, когда вершина параболы находится за пределами слоя. Для реализации жесткого состояния в этом случае необходимо потребовать выполнения неравенств (4.24), (4.26) и следующих неравенств

$$C_1 < -2C_0, \quad C_1 > 2C_0. \quad (4.29)$$

Графический анализ системы неравенств (4.24), (4.26) и (4.29) представлен на рисунке 4.2б. Прямая 4 соответствует $x^* > 1$. В области I левее линии 4 обсуждаемая система неравенств имеет решение при положительных C_0 . В области II правее 4 эта система справедлива, если $C_0 < 0$. Очевидно, что жесткое состояние жидкости не реализуется, если выполняется неравенство $|C_0| > Bh/2$. Путем аналогичных рассуждений убеждаемся в справедливости этого условия для $x^* < -1$.

Подставляя в $|C_0| > 2Bh$ и $|C_0| > Bh/2$ выражение для C_0 из (4.23), окончательно выпишем условия перехода жидкости Шведова-Бингама из жесткого состояния в жидкое

$$Gr > \frac{4Bh}{|m_z \sin \alpha + m_x \cos \alpha|}, \quad \vec{m} \times \vec{n} = 0. \quad (4.30)$$

Неравенство (4.30) определяет границу области существования жесткого состояния в случае, когда экстремум функции (4.23) находится внутри слоя. Отметим, что условие (4.30) в предельном случае вертикального слоя и отсутствия вибраций совпадает с условием впервые сформулированным в [223].

Если вершина параболы (4.23) попадает на границы слоя или оказывается за его пределами, то область параметров, при которых реализуется жесткое состояние, уменьшается, ее размеры определяются условием

$$Gr > \frac{Bh}{|m_z \sin \alpha + m_x \cos \alpha|}, \quad \vec{m} \times \vec{n} = 0. \quad (4.31)$$

Положение экстремума функции (4.23), т.е. форма профиля вязких напряжений определяется условиями нагрева слоя и типом его границ. Отметим, что условия (4.30), (4.31) справедливы в отсутствие вибраций. При наличии вибраций в неравенствах (4.30), (4.31) вектор \vec{m} можно заменить на \vec{n} .

Известно, что в бесконечном вертикальном слое после потери устойчивости состояния механического равновесия возникает, как правило, плоскопараллельное течение, состоящее из двух встречных потоков [79, 225]. Экстремумы вязких напряжений находятся на границе встречных потоков и границах слоя. Координата экстремума функции (4.23) располагается внутри слоя. Следовательно, область параметров, при которых существует жесткое состояние вязкопластичной жидкости, определяется условием (4.30).

4.3 Устойчивость квазиравновесного состояния наклонного слоя нелинейно-вязкой жидкости

В параграфе 4.2 сформулированы условия, при которых в обобщенной ньютоновской жидкости реализуются квазиравновесные и жесткие состояния. Настоящий параграф посвящен исследованию устойчивости квазиравновесных и жестких состояний наклонного слоя обобщенной ньютоновской жидкости.

4.3.1 Постановка задачи устойчивости квазиравновесия обобщенной ньютоновской жидкости

Основное квазиравновесное состояние обобщенной ньютоновской жидкости определяется уравнениями (4.23). Обозначим все поля, являющиеся решением этих уравнений, подстрочным индексом «0». Введем малые возмущения квазиравновесного состояния жидкости

$$\vec{v}_1, T = T_0 + T_1, p = p_0 + p_1, \vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{w}_1, \tau = \tau_0 + \tau_1. \quad (4.32)$$

Подстрочным индексом «1» отмечены функции, описывающие поля возмущений.

Подставим выражения (4.32) в уравнения (4.15) и запишем их, оставляя только линейные по возмущениям слагаемые. После вычеркивания слагаемых, которые описывают основное квазиравновесное состояние, получаем уравнения для возмущений

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \text{Div} \tau_1 + Gr T_1 \vec{\gamma} + \frac{1}{2} Gv \cdot \vec{w}_0 \nabla (T_1 \vec{n} - \vec{w}_1) + \frac{1}{2} Gv \cdot \vec{w}_1 \nabla (T_0 \vec{n} - \vec{w}_0),$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \nabla T_0 = \frac{1}{Pr} \Delta T_1, \quad (4.33)$$

$$\text{div} \vec{v}_1 = 0, \text{div} \vec{w}_1 = 0, \text{rot} \vec{w}_1 = \nabla T_1 \times \vec{n}.$$

Введем малые возмущения компонент тензора скоростей сдвига (4.16) $e_{wij} = \tilde{e}_{0ij} + e_{ij}$, e_{vij} , где \tilde{e}_{0ij} – тензор скоростей сдвига основного пульсационного течения; e_{ij} и e_{vij} – тензоры, определяемые возмущениями пульсационного и осредненного полей скорости. Тензор скоростей сдвига и второй инвариант этого тензора с точностью до линейных по возмущениям слагаемых примут вид

$$e_{0ij} = \sqrt{Gv} (\tilde{e}_{0ij} + e_{ij}) \sin t_- + e_{vij}, \quad I_{00} = \frac{1}{2} Gv \tilde{e}_{0ij}^2 \sin^2 t_- + I_1, \quad (4.34)$$

$$I_1 = Gv \tilde{e}_{0ij} e_{ij} \sin^2 t_- + \sqrt{Gv} \tilde{e}_{0ij} e_{vij} \sin t_-.$$

Подставим (4.34) в (4.14) и разложим функции

$$f = \frac{D}{\left(b + \sqrt{0.5 Gv \tilde{e}_{0ij}^2 \sin^2 t_- + I_1}\right)} + 1, \quad f = \frac{Bh}{\sqrt{0.5 \cdot Gv \tilde{e}_{0ij}^2 \sin^2 t_- + I_1}} + 1$$

$$f = K \left(\sqrt{0.5 \cdot Gv \tilde{e}_{0ij}^2 \sin^2 t_- + I_1} \right)^{n-1}$$

в ряд по степеням малой величине I_1 , учитывая только линейные по I_1 слагаемые

$$f = \frac{Bh}{\sqrt{E_0}} + 1 - \frac{Bh I_1}{2(\sqrt{E_0})^3} + \dots, \quad f = \frac{D}{b + \sqrt{E_0}} - \frac{D I_1}{2(b + \sqrt{E_0})^2 \sqrt{E_0}} + \dots,$$

$$f = K (\sqrt{E_0})^{n-1} + \frac{K(n-1)}{2} (\sqrt{E_0})^{n-3} I_1 + \dots, \quad E_0 = \frac{1}{2} Gv \tilde{e}_{0ij}^2 \sin^2 t_-.$$

Осредненная по периоду вибраций и линейная по возмущениям часть тензора вязких напряжений для модели Шведова-Бингама имеет вид

$$\tau_{1ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{Bh}{\sqrt{E_0}} + 1 \right) \left(\sqrt{Gv} e_{ij} \sin t_- + e_{vij} \right) \right] dt_-$$

$$\tau_2 > Bh;$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Bh I_1 \sqrt{Gv} \tilde{e}_{0ij} \sin t_-}{2(\sqrt{E_0})^3} dt_-,$$

$$(4.35)$$

$$I_{00} = 0, \quad \tau_{1ij} \neq 0, \quad \tau_2 \leq Bh.$$

В (4.35) второй инвариант тензора скоростей сдвига в жесткой зоне, записанный в виде (4.34), необходимо считать равным нулю, т.к. скорости сдвига основного пульсационного течения в этой зоне нулевые. Однако, вязкие напряжения, обусловленные ненулевыми возмущениями полей скорости, отличны от нуля. Это обстоятельство затрудняет рассмотрение задач устойчивости (не только задач устойчивости равновесия) вязкопластичной жидкости с использованием модели Шведова-Бингама. В рамках этой модели необходимо формулировать отдельные задачи устойчивости для жидкой и твердой зон с последующим их «сшиванием» на границе раздела, возмущения которой также необходимо учитывать. Положение границы раздела зон определяется при решении задачи об основном состоянии жидкости.

Осредненная по периоду вибраций и линейная по возмущениям часть тензора вязких напряжений для модели Уильямсона примет вид

$$\tau_{1ij} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{DI_1 \sqrt{Gv} \tilde{e}_{0ij} \sin t_-}{2(b + \sqrt{E_0})^2 \sqrt{E_0}} dt_- +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{D}{b + \sqrt{E_0}} + 1 \right) (\sqrt{Gv} e_{ij} \sin t_- + e_{vij}) \right] dt_-.$$
(4.36)

Для реологического закона Освальда де Виля имеем

$$\tau_{1ij} = \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sqrt{E_0})^{n-1} (\sqrt{Gv} e_{ij} \sin t_- + e_{vij}) dt_- +$$

$$+ \frac{K(n-1)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[(\sqrt{E_0})^{n-3} I_1 \sqrt{Gv} \tilde{e}_{0ij} \sin t_- \right] dt_-.$$
(4.37)

4.3.2 Устойчивость равновесия обобщенной ньютоновской жидкости

Рассмотрим равновесное (жесткое) состояние жидкостей, описываемых реологическими уравнениями Уильямсона и Освальда де Виля $\vec{w}_0 = 0$, $\tilde{e}_{0ij} = 0$. В части 4.2 было показано, что такое состояние возможно либо в невесомости, либо когда градиент температуры и направление вибраций совпадают с полем тяжести.

В равновесном состоянии выражения (4.36) и (4.37) могут быть записаны в простой форме

$$\tau_{1ij} = \nu e_{vij},$$
(4.38)

где ν — безразмерная кинематическая вязкость жидкости. Выражение для возмущений вязких напряжений принимает вид ньютоновского закона.

Для реологического уравнения (4.36) эффективная вязкость равна $\nu = D/b + 1$, где величина D/b показывает отклонение реологических свойств жидкости Уильямсона от ньютоновских. В случае вязкопластичного предела $b \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow \infty$. Для ньютоновской жидкости $D = 0$, $\nu = 1$. Возможен вариант, когда $b \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow 1$. В этом случае свойства жидкости также близки к ньютоновским.

Корректная запись для случая равновесного состояния уравнения (4.37) для случая равновесия возможна при внесении в степенной реологический закон эффективной начальной вязкости μ_0 (например, так, как это было сделано параграфе 2.2), с учетом которой уравнение (4.37) переписется в виде

$$\begin{aligned} \tau_{1ij} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + K \left(\sqrt{E_0} \right)^{n-1} \right] \left(\sqrt{Gv} e_{ij} \sin t_- + e_{vij} \right) dt_- + \\ & + \frac{K(n-1)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\sqrt{E_0} \right)^{n-3} I_1 \sqrt{Gv} \tilde{e}_{0ij} \sin t_- \right] dt_-. \end{aligned}$$

Тогда в случае равновесия для степенной жидкости имеем $\nu = 1$.

Введем новые единицы измерения $\bar{v}_1^* = \nu \bar{v}_1$, $T_1^* = \nu T_1 / Pr$, $\bar{w}_1^* = \nu \bar{w}_1 / Pr$, $t^* = \nu t$ и запишем уравнения (4.33) для возмущений жесткого состояния в новых переменных (звездочки и индекс 1 в обозначениях полей возмущений опустим)

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \bar{v} + Ra^* T \bar{\gamma} + Rv^* \bar{w} \nabla (T_0 \bar{n}), \quad Pr^* \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \nabla T_0 = \Delta T, \quad (4.39)$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{w} = 0, \quad \operatorname{rot} \bar{w} = \nabla T \times \bar{n},$$

где $Ra^* = Ra/\nu$; $Rv^* = Rv/\nu$, $Pr^* = Pr \cdot \nu$ – модифицированные числа Рэлея и Прандтля, а $Ra = Gr \cdot Pr$, $Rv = Gv \cdot Pr$ – гравитационное и вибрационное числа Рэлея для неньютоновских жидкостей.

Система (4.39) совпадает с соответствующей системой для исследования устойчивости равновесия ньютоновской жидкости, различные варианты которой рассмотрены в [79, 226, 227]. Можно показать, что такое совпадение имеет место для всех реологических законов типа (4.1), кроме реологического уравнения Шведова-Бингама. Возмущения вязких напряжений задаются в общем виде выражением (4.38), а значение кинематической вязкости определяется конкретным реологическим законом.

Из реологического закона Шведова-Бингама не получается простой зависимости вида (4.38). Можно лишь утверждать, что возмущения вязких напряжений в жидкости отличны от нуля и требуют определения. Таким образом, в первом уравнении (4.39) слагаемое $\Delta \vec{v}$ должно быть заменено на $\text{Div } \tau_1$, а для τ_1 необходимо записать дополнительное уравнение.

Критические числа Ra и Rv , определяющие порог устойчивости равновесия обобщенной ньютоновской жидкости (кроме вязкопластичной) в ν раз отличаются от соответствующих значений для ньютоновской жидкости [79, 226, 227].

4.3.3 Устойчивость жесткого состояния бесконечного слоя вязкопластичной жидкости

Жесткое состояние в вязкопластичной жидкости в отличие от других типов обобщенных ньютоновских жидкостей возможно при произвольных направлениях равновесного градиента температуры, выбор которого накладывает ограничения на возможные направления вибраций жидкости. Граница области существования жесткого состояния вязкопластичной жидкости определяется не только интенсивностью нагрева жидкости и направлением вибраций, но и устойчивостью по отношению к малым возмущениям.

Для анализа устойчивости жесткого состояния вязкопластика используется неразрывный реологический закон Уильямсона и уравнения для возмущений равновесного состояния (4.39). Возмущения вязких напряжений задаются выражением (4.38). В вязкопластичном пределе в жидкости Уильямсона ($D \gg b$, т.е. $v \gg 1$) пренебрегается скоростями сдвига, которые возникают в ней за счет нагрева и пульсаций.

Рассмотрим наклонный слой жидкости (рис. 4.1), который имеет твердые идеально теплопроводные границы и подогревается снизу. В параграфе 4.2.1 для наклонного слоя вязкопластичной жидкости Шведова-Бингама получено условие существования жесткого состояния в поле высокочастотных вибраций, которое для вязкопластичного предела реологической модели Уильямсона ($b \rightarrow 0$) примет вид

$$Gr > \frac{4D}{|m_z \sin \alpha + m_x \cos \alpha|}, \quad \vec{m} \times \vec{n} = 0, \quad (4.40)$$

где число Бингама Bh заменено на соответствующий ему параметр D .

В работе [226] рассматривается 16 характерных конфигураций слоя ньютоновской жидкости, которые определяются ориентациями вектора градиента температуры \vec{m} и вектора направления вибраций \vec{n} . Для каждой конфигурации формулируется условие существования механического квазиравновесия. В случае вязкопластичной жидкости из указанных в [226] шестнадцати конфигураций в четырех возможно жесткое состояние с $\vec{w}_0 = \vec{e}_{0ij} = 0$.

В первой конфигурации, которая в [226] имеет обозначение (v, v) , векторы $\vec{m}, \vec{n}, \vec{\gamma}$ направлены вдоль одной прямой. Жесткое состояние реализуется для любой обобщенной ньютоновской жидкости (4.1) при произвольных углах наклона слоя и произвольных же значениях чисел Ra^* (Gr) и Rv^* (Gv). Решение задачи (4.39) совпадает с результатами, приведенными в [226, 227] для данной конфигурации.

Во второй конфигурации, обозначенной в [226] как (l, l) , векторы \vec{m}, \vec{n} направлены вдоль оси слоя, т.е. $m_x = 0, m_z = -1, n_x = 0, n_z = 1, \vec{w}_0 = 0$. Для любой жидкости типа (4.1), кроме вязкопластичной, жесткое состояние реализуется только для вертикальной ориентации слоя ($\alpha = 0$) при произвольных числах Ra^* (Gr) и Rv^* (Gv). Данная ситуация – предельный случай конфигурации (v, v) . Подстрочные индексы x, y, z здесь и далее обозначают проекции векторов на соответствующие оси координат.

Вязкопластичная жидкость в конфигурации (l, l) может находиться в жестком состоянии при любых углах наклона слоя. Переход жидкости из квазитвердой фазы в жидкую определяется условием (4.37), которое преобразуется к виду

$$Ra^* > \frac{4Pr \cdot b}{|\sin \alpha|}, \quad \vec{m} \times \vec{n} = 0, \quad (4.41)$$

где $Ra^* = Gr \cdot Pr / \nu = Ra / \nu$ и $\nu \approx D/b$, а число Pr приобретает смысл предельного напряжения сдвига. Число Прандтля для вязкопластичных жидкостей изменяется в широком диапазоне, например для нефти $Pr = (10 \div 10^4)$. При $\alpha = 0$ слой находится в жестком состоянии при любом Ra^* . Когда $\alpha = \pi/2$, из неравенства (4.41) следует, что пороговое число Грасгофа определяется неравенством $Gr > 4D$, что совпадает с данными работы [223].

Исследуем устойчивость существования жесткой фазы вязкопластичной жидкости для конфигурации (l, l) , решая задачу (4.41) совместно с неравенством (4.41). Полагается, что на границах слоя поля возмущений равны нулю. Рассматриваются нормальные возмущения вида

$$g(\vec{r}, t) = g(x) \exp(ik_z z + ik_y y - \lambda t).$$

Отдельно исследовалась устойчивость относительно плоских $k_y = 0$, $\partial/\partial y = 0$, $v_y = w_y = 0$ и спиральных $k_z = 0$, и $\partial/\partial z = 0$ возмущений. Амплитуды скоростей в случае плоских возмущений определяются через функции тока $v_x = ik\varphi$; $v_z = -\varphi'$; $w_x = ikf$; $w_z = -f'$, для которых формулируется спектрально-амплитудная задача

$$-\lambda(\varphi'' - k_z^2\varphi) = \varphi^{IV} - 2k_z^2\varphi'' + k_z^4\varphi - Ra^*(ik_z\vartheta \sin \alpha + \vartheta' \cos \alpha) - Rv^*f'',$$

$$-Pr \cdot v \cdot \lambda\vartheta + \varphi' = \vartheta'' - k_z^2\vartheta, \quad f'' - k_z^2f = -\vartheta', \quad (4.42)$$

$$x = \pm 1 \quad \varphi' = \varphi = f = \vartheta = 0.$$

Штрихом обозначается производная по координате x , ϑ – амплитуда возмущений поля температуры. Задача (4.42) решалась методом построения фундаментальной системы с применением процедуры дифференциальной прогонки [2, 3].

Для спиральных мод после исключения v_y, v_z, w_z, p получаем спектрально-амплитудную задачу

$$-\lambda(u'' - k_y^2u) = u^{iv} - 2k_y^2u'' + k_y^4u + Ra^* \cdot k_y^2\vartheta \sin \alpha,$$

$$\lambda^2 Prv\vartheta + \lambda(1 + Prv)(\vartheta'' - k_y^2\vartheta) + \vartheta^{iv} - 2k_y^2\vartheta'' + k_y^4\vartheta =$$

$$= (Ra^* \cos \alpha - Rv^*)\vartheta, \quad f'' - k_y^2f = 0, \quad (4.43)$$

$$x = \pm 1: \quad u = u' = \vartheta = \vartheta'' = f = 0,$$

где u – проекция возмущений осредненного поля скорости на ось x , для амплитуды возмущений пульсационной скорости вводится функция тока $w_x = ikf$, $w_y = -f'$.

Решение третьего уравнения (4.43) тривиально. Оставшаяся система совместно с граничными условиями допускает решение в виде либо тепловых $u = 0$, либо гидродинамических $\vartheta = 0$ мод возмущений. Относительно гидродинамических мод жесткое состояние слоя абсолютно устойчиво.

Для нейтральных тепловых возмущений ($\lambda = 0$) решение ищем в виде четных и нечетных относительно середины слоя гармонических функций $\vartheta = \vartheta_1 \cos(sx)$, $\vartheta = \vartheta_2 \sin(sx)$, $s = (l+1)\pi/2$, где l – четное для косинуса и нечетное для синуса. Из характеристического уравнения, одинакового для обоих типов возмущений, следует зависимость

$$Ra^* \cos \alpha = s^4 + 2k_y^2 s^2 + Rv^* + k_y^4,$$

которая определяет вид нейтральных кривых. Минимум нейтральных кривых достигается при $k_y = 0$, т.е. наиболее опасными являются тепловые длинноволновые моды.

Нейтральная кривая нижней моды $s = \pi/2$ тепловых длинноволновых возмущений описывается выражением

$$Ra^* = \frac{\pi^4 + 16Rv^*}{16 \cos \alpha}. \quad (4.44)$$

Учитывая (4.44), получаем пороговые значения вибрационных чисел Рэлея для различных углов наклона слоя $Rv^* = 4Prb/\operatorname{tg} \alpha - \pi^4/16$.

Зависимость критических значений числа Ra^* от угла наклона слоя при различных значениях Rv^* представлена на рисунке 4.3.

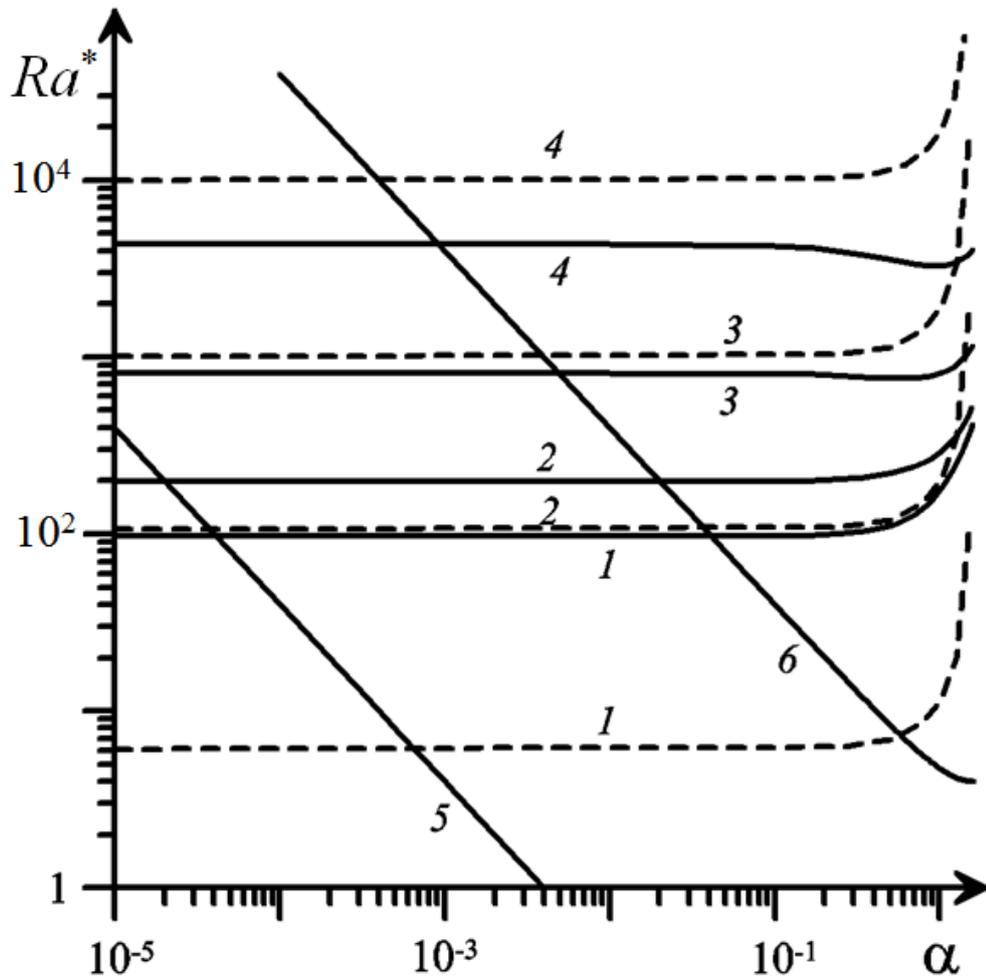


Рис. 4.3 Зависимость критического числа Ra^* от угла наклона слоя (углы отложены в радианах): конфигурация (l, l) ; $Rv^* = 0, 10^2, 10^3, 10^4$ (1 – 4); сплошные линии – плоские возмущения, штриховые – спиральные; линии 5 и 6 определяют границы жестких зон соответственно для $Pr = 10$ и 10^4

Видно, что нарушение устойчивости жесткого состояния возможно только при малых углах отклонения слоя от вертикали. При вибрациях слабой интенсивности наиболее опасными являются тепловые спиральные длинноволновые моды. При $Rv^* \geq 1000$ устойчивость определяется плоскими гидродинамическими модами конечной длины волны.

Из рисунка 4.4 следует, что для плоских возмущений увеличение интенсивности вибраций приводит к увеличению волнового числа критических возмущений.

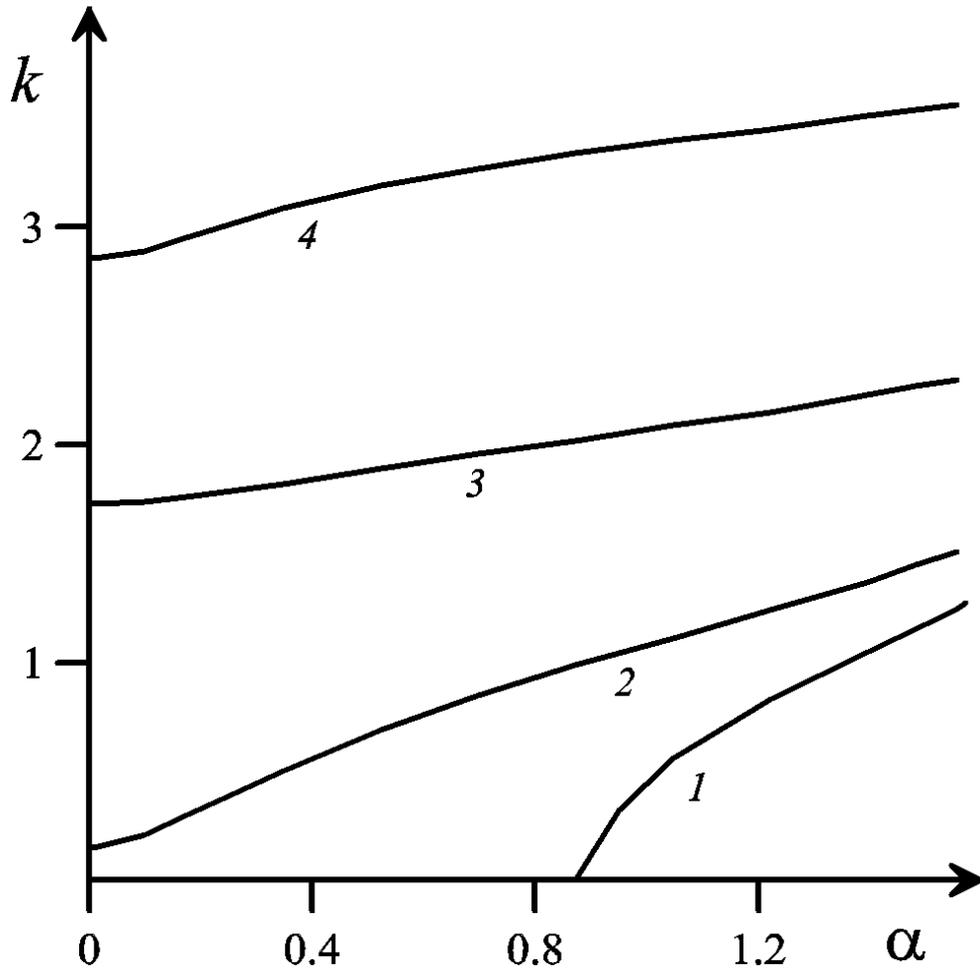


Рис. 4.4 Зависимость критического волнового числа k плоских возмущений от угла наклона слоя (углы отложены в радианах): конфигурация (l, l) ; $Rv^* = 0, 10^2, 10^3, 10^4$ (1 – 4)

В случае, который в [226] обозначен (h, h) , векторы \vec{m}, \vec{n} направлены горизонтально, т.е. нормально к вектору $\vec{\gamma}$. Проекции векторов \vec{m}, \vec{n} в этой конфигурации на оси координат имеют вид $m_x = n_x = \cos \alpha$, $m_z = n_z = \sin \alpha$. Жесткое состояние обобщенной ньютоновской жидкости в (h, h) возможно только в невесомости ($Gr = 0$) при произвольных Gv . В [216] показано, что эта ситуация соответствует абсолютно устойчивому состоянию.

Жесткое состояние вязкопластичной жидкости, определяемое условием (4.40), для конфигурации (h, h) примет вид

$$Ra^* > 4Pr \cdot b, \quad \vec{m} \times \vec{n} = 0.$$

Пороговое значение числа Ra^* не зависит от угла наклона слоя.

Изучалась устойчивость жесткого состояния по отношению к нормальным плоским и спиральным возмущениям. Для характерных значений $Pr = 10^4$ и $b = 10^{-4}$ получаем критическое число Рэлея, определяющее границу области существования жесткой фазы, $Ra^* = 4$. Аналитические и численные расчеты показывают, что вблизи границы существования жесткой фазы нет нарастающих мод возмущений. Это говорит об абсолютной устойчивости жесткой фазы по отношению к указанным выше возмущениям.

В последней конфигурации векторы \vec{m}, \vec{n} направлены поперек слоя, т.е. $m_x = -n_x = 1, m_z = n_z = 0$. В [226] эта конфигурация обозначена (t, t) . Жесткое состояние жидкостей типа (4.1) (кроме вязкопластичных) при произвольных Gr возможно в двух случаях: в невесомости ($Gr = 0$) и при $\alpha = \pi/2$. В невесомости жесткое состояние абсолютно устойчиво [216]. Вариант $\alpha = \pi/2$ является частным случаем конфигурации (v, v) , рассмотренной выше.

При произвольных углах наклона слоя относительно поля тяжести жесткое состояние реализуется только для вязкопластичной жидкости. Неравенство (4.40) преобразуется к виду

$$Ra^* > \frac{4Pr \cdot b}{|\cos \alpha|}, \quad \vec{m} \times \vec{n} = 0. \quad (4.45)$$

При $\alpha = 0$ из (4.45) получаем $Ra^* > 4Pr \cdot b$, т.е. критическое число Грасгофа определяется неравенством $Gr > 4D$. Когда $\alpha = \pi/2$, слой находится в жестком состоянии при любом Ra^* .

Как и прежде, рассматриваются нормальные плоские и спиральные возмущения. Для амплитуд плоских мод после преобразований (4.39) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi^{\text{iv}} = (2k_x^2 - \lambda)\varphi'' + k_x^2(\lambda - k_x^2)\varphi - k_x^2 Rv^* f + Ra^* (ik_x \sin \alpha \vartheta + \vartheta' \cos \alpha),$$

$$\vartheta'' = (k_x^2 - Prv\lambda)\vartheta + ik_x \varphi, \quad f'' = k_x^2 f - ik_x \vartheta, \quad (4.46)$$

$$x = \pm 1: \quad \varphi = \varphi' = \vartheta = f = 0.$$

Для спиральных мод система (4.39) примет вид

$$u^{\text{iv}} = (2k_z^2 - \lambda)u'' + k_z^2(\lambda - k_z^2)u - k_z^2 Ra^* \vartheta \sin \alpha - Rv^* k_z^2 w_x,$$

$$\vartheta'' = (k_z^2 - Prv\lambda)\vartheta + u, \quad w_x'' = k_z^2 \vartheta + k_z^2 w_x, \quad (4.47)$$

$$v_z'' = -(\lambda - k_z^2)v_z - Ra^* \vartheta \cos \alpha,$$

$$x = \pm 1: \quad u = u' = \vartheta = w_x = v_z = 0.$$

Наиболее опасными в этой конфигурации являются возмущения конечной длины волны. Из рисунка 4.5 видно, что неустойчивость жесткого состояния слоя возможна, когда его ориентация близка к горизонтальной.

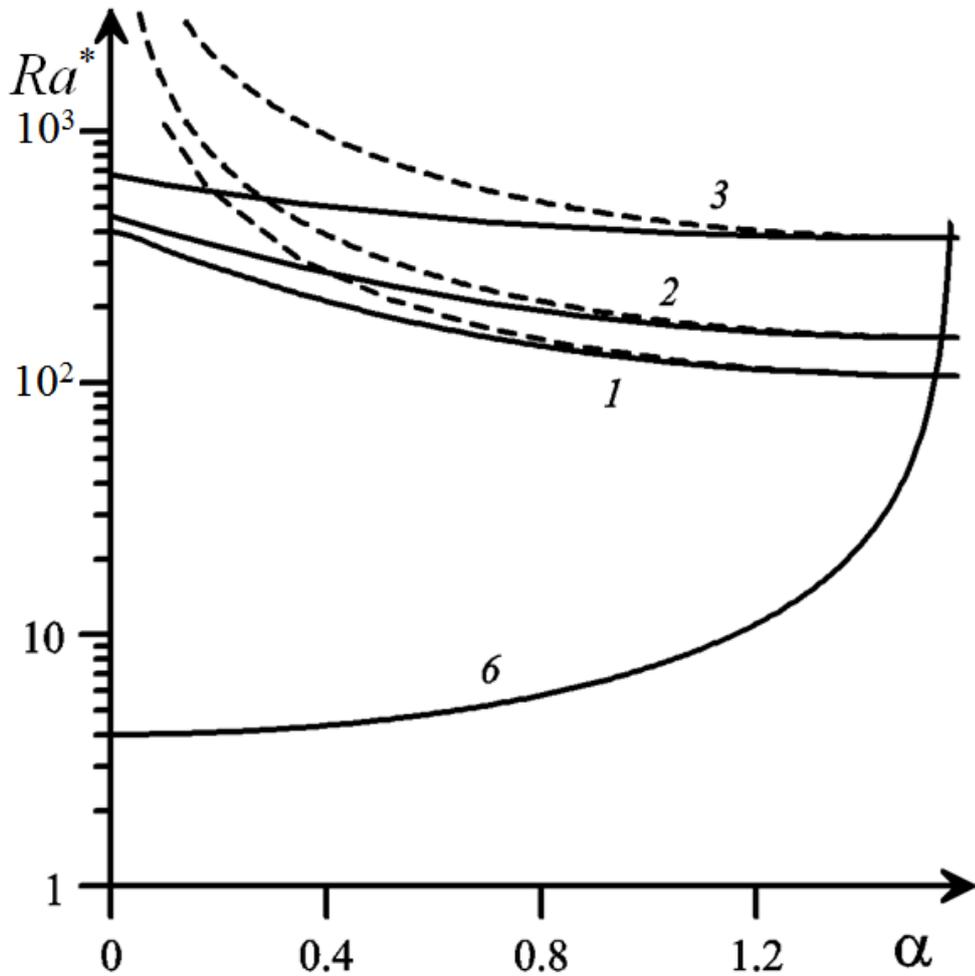


Рис. 4.5 Нейтральные кривые конфигурации (t, t) при умеренных углах наклона слоя (углы отложены в радианах): $Rv^* = 0, 10^2, 10^3$ (1 – 3); сплошные линии – плоские возмущения, штриховые – спиральные; 6 – граница жесткой зоны при $Pr = 10^4$

При $\alpha \rightarrow \pi/2$ (см. рис. 4.6) линии, соответствующие спиральным и плоским возмущениям, сливаются, а волновые числа наиболее опасных возмущений для $Rv^* = 0, 100, 1000$ соответственно равны 1.56, 1.32, 0.73. Включение высокочастотных вибраций и увеличение их интенсивности стабилизирует жесткую фазу и увеличивает длину волны критических возмущений.

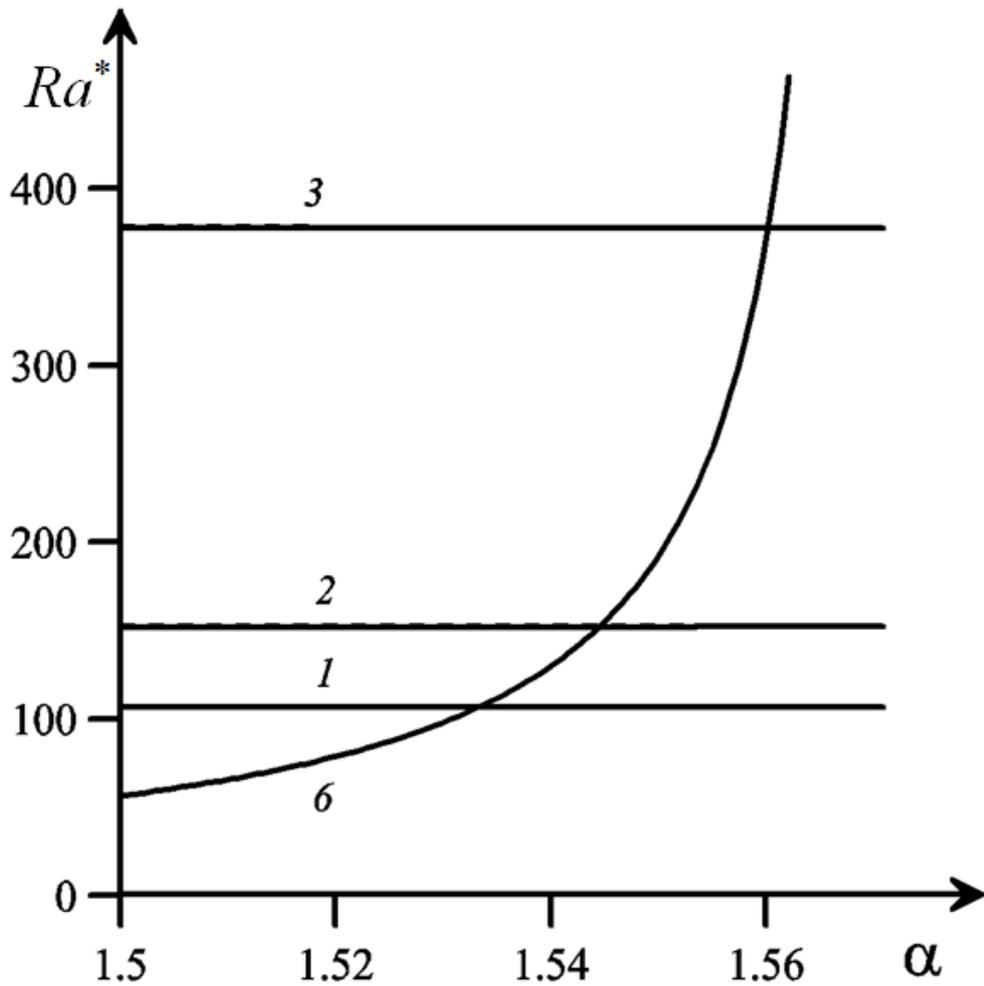


Рис. 4.6 Нейтральные кривые конфигурации (t, t) при близких к $\pi/2$, углах наклона слоя (углы отложены в радианах): $Rv^* = 0, 10^2, 10^3$ (1 – 3); сплошные линии – плоские возмущения, штриховые – спиральные; б – граница жесткой зоны при $Pr = 10^4$

Таким образом, для обобщенных ньютоновских жидкостей жесткое состояние возможно либо в невесомости, либо при одновременном совпадении направления вибраций, поля тяжести и градиента температуры. В невесомости жесткое состояние является абсолютно устойчивым. В вязкопластичной жидкости жесткое состояние реализуется в поле тяжести при любой ориентации градиента температуры. Высокочастотные вибрации разрушают жесткое состояние вязкопластика, если направление вибраций не совпадает с направлением градиента температуры. Для наклонного слоя вязкопластичной жидкости выделены характерные конфигурации, в которых реализуется жесткое состояние.

Показано, что жесткое состояние может потерять устойчивость при ориентациях слоя, близких к вертикали или горизонтали. Во всех случаях высокочастотные вибрации стабилизируют жесткое состояние слоя.

4.4 Вибрационная конвекция в вертикальном бесконечном слое нелинейно-вязкой жидкости

Рассмотрим вертикальный слой жидкости Уильямсона, ограниченный идеально теплопроводными твердыми границам. Ось x направлена перпендикулярно слою, z – вертикально вверх. Начало координат находится в центре слоя (см. рис. 4.1 при $\alpha = 0$). Градиент температуры направлен поперек слоя. В безразмерных единицах на границах слоя с координатами $x = \pm 1$ поддерживаются постоянные температуры $T = \pm 1$ соответственно. Слой совершает высокочастотные вибрации вдоль оси z , порождающие сдвиговые напряжения вдоль этой оси. Уравнения движения, описывающие вибрационно-конвективное течение, имеют вид (4.15). Осредненный вид тензора вязких напряжений для модели Уильямсона задается вторым уравнением из (4.16). Для осредненных компонент скорости на твердых границах слоя выполняются условия прилипания, а для пульсационных компонент скорости – условия непротекания.

Полагаем, что осредненная скорость конвекции, амплитуда пульсационной скорости, сдвиговые напряжения и температура являются функциями только координаты x . Условие квазиравновесия (4.20) в данном случае запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + Gr = 0. \quad (4.48)$$

В псевдопластичной жидкости ($b = 1$), для которой

$$\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{D\sqrt{G\nu} \sin t_-}{b + |\sqrt{G\nu} \sin t_-|} \right) dt_- ,$$

квазиравновесие имеет место лишь в отсутствие градиента температуры или в невесомости.

Для вязкопластичной жидкости ($b \rightarrow 0$) существует напряжение сдвига D , при достижении которого жидкость начинает течь. Если создаваемые в жидкости напряжения меньше предельного, то вязкопластичная жидкость находится в квазитвердом (жестком) состоянии, которое можно трактовать как равновесие. В этом случае в слое возникнут вязкие напряжения, распределение которых задается уравнением (4.48). Разрешая его относительно τ с учетом симметрии задачи с точностью до произвольной константы, получим $\tau = -0,5Gr \cdot x^2 + C$. Для реализации квазитвердого состояния жидкости необходимо, чтобы напряжения в центре и на границах слоя не превышали D . Следовательно, при заданном числе Gr весь слой вязкопластичной жидкости находится в квазитвердом состоянии, если выполняется неравенство $D \geq Gr/4$. Это неравенство является частным случаем условия (4.40). Оно не содержит вибрационного параметра и в рассматриваемой геометрии выполняется только в отсутствие вибраций. Отметим, что аналогичное условие приведено в работах [223, 224] для случая гравитационной конвекции вязкопластичной жидкости в вертикальном слое.

При выбранных режимах подогрева и вибраций в слое возникает плоскопараллельное течение, в котором вблизи горячей стенки жидкость движется вверх, а вблизи холодной вниз. Для осредненного конвективного течения выполняется условие замкнутости потока. Такое течение удобно описывать в терминах функции тока φ и завихренности Ω

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \Omega = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Завихренность в этом случае представляет собой скорость сдвига жидкости. В жестком состоянии $\Omega = 0$. Запишем уравнения движения жидкости в терминах функции тока и завихренности

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{De_0}{b + |e_0|} \right) \right] dt_- + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega(x) + Gr = 0, \quad (4.49)$$

$$\Omega(x) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad e_0 = \sqrt{Gv} \sin t_- + \Omega(x).$$

Задача (4.49) решалась численно методом конечных разностей. Функция тока на границах слоя полагалась равной нулю, а для завихренности использовалось условие Тома $\Omega|_{\Gamma} = 2(\phi|_{\Gamma} - \phi|_{\Gamma-1})/h_x^2$, где h_x – пространственный шаг сетки, который во всех расчетах полагался равным 0.01. Такая величина шага сетки была выбрана после проверки сходимости результатов численных расчетов при его уменьшении. Стационарное решение считалось достигнутым, если относительное изменение завихренности за шаг по времени становилось меньше чем 10^{-8} . Основные расчеты проводились для $Gr = 400$. Для псевдопластичной жидкости параметр b принимался равным 1, для вязкопластичной $b = 10^{-4}$. Параметр D варьировался. При $D = 0$ получается известный кубический профиль для ньютоновской жидкости.

На рисунке 4.7 представлены характерные профили течения для вязкопластичной (кривая 1) и псевдопластичной жидкостей (штриховая линия 2) в отсутствие вибраций. В вязкопластичной жидкости возникает четко выраженная квазитвердая зона, в пределах которой среда движется подобно твердому стержню.

Скорость сдвига в пределах квазитвердой зоны практически равна нулю, что видно из кривой 1 рисунка 4.8. Между движущимися навстречу друг другу стержнями, а также между стержнем и твердой стенкой имеются зоны вязкого течения, ширина которых уменьшаются по мере увеличения предельного напряжения сдвига D . Интенсивность течения при этом падает.

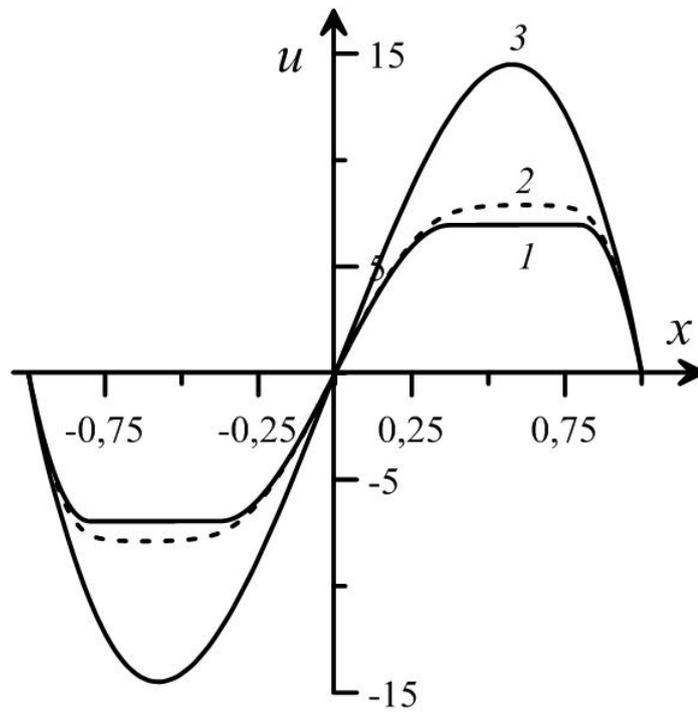


Рис. 4.7 Расчетные профили скоростей течения при $D = 50$, $Gr = 400$ и различных значениях Gv и b : $Gv = 0$ (1, 2) и $Gv = 50$ (3); $b = 10^{-4}$ (1, 3) и 1 (2, 3) (кривые 3 одинаковы для разных b)

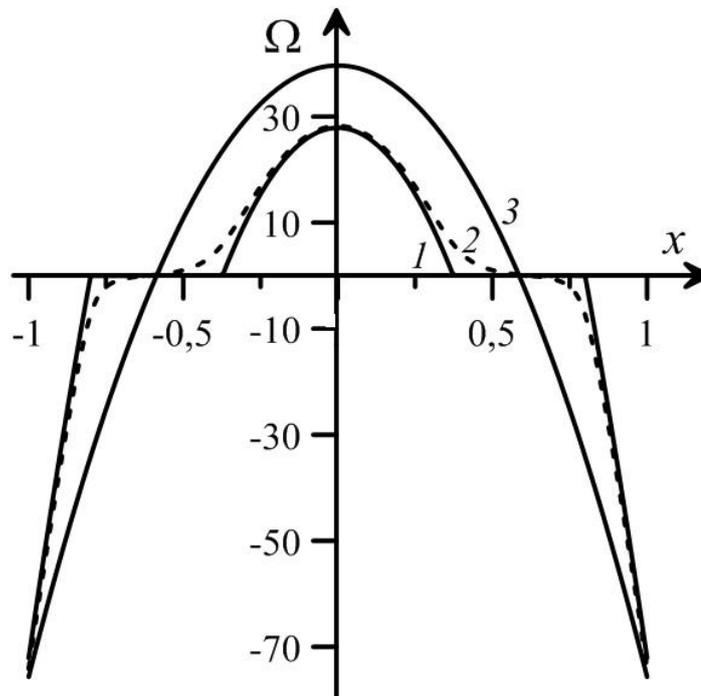


Рис. 4.8 Расчетные профили скоростей сдвига при $D = 50$, $Gr = 400$ и различных значениях Gv и b : $Gv = 0$ (1, 2) и $Gv = 50$ (3); $b = 10^{-4}$ (1, 3) и 1 (2, 3) (кривые 3 одинаковы для разных b)

Пороговое напряжение, соответствующее квазитвердому состоянию жидкости при $Gr = 400$, равно 100. Численные расчеты, представленные кривой 1 на рисунке 4.9, показывают, что скорость вязкопластичной жидкости стремится к нулю при $D \rightarrow 100$.

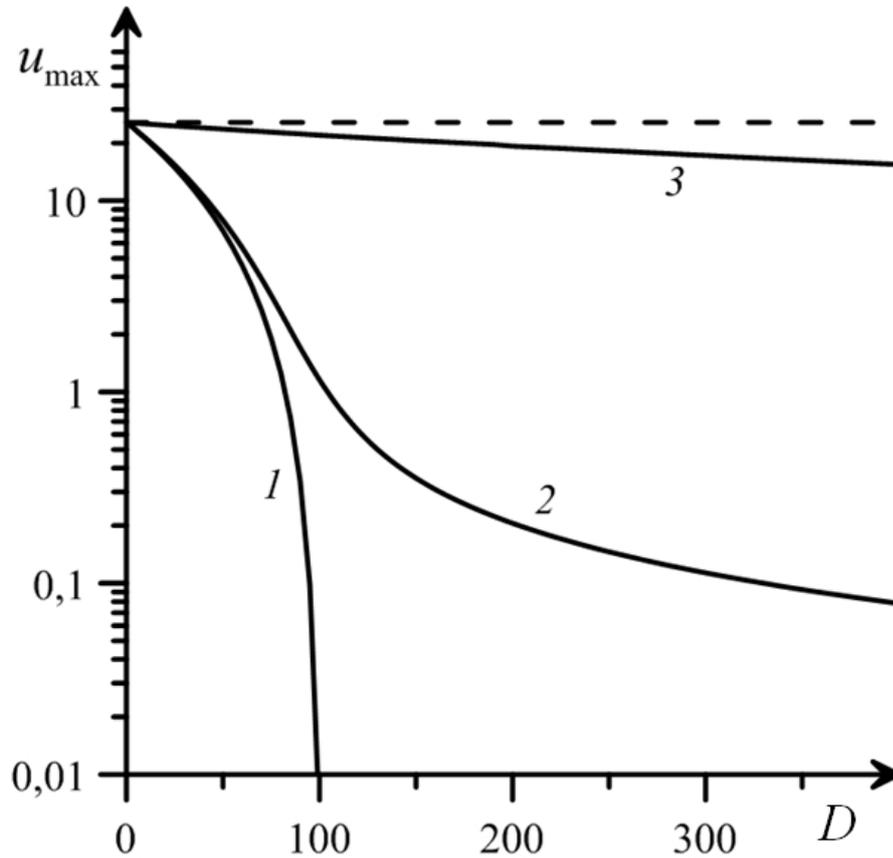


Рис. 4.9 Зависимость максимума скорости течения от предельного напряжения сдвига при значении $Gr = 400$: $Gv = 0, b = 10^{-4}$ (1); $Gv = 0, b = 1$ (2); $Gv = 400, b = 1, 10^{-4}$ (3). Штриховая линия соответствует гравитационному течению ньютоновской жидкости

В псевдопластичной жидкости квазитвердые зоны не образуются, но вблизи экстремумов встречных потоков скорость сдвига существенно меньше, чем около стенок и в центре слоя (см. пунктирную кривую 2 на рисунке 4.8). Это влияет на текучесть жидкости. Из расчетов следует, что увеличение параметра D приводит к монотонному уменьшению интенсивности течения псевдопластика. Как было сказано выше, в псевдопластичной жидкости состояние жесткое состояние в

данных условиях не возможно, поэтому кривая 2 на рисунке 4.9 асимптотически стремится к значению 0.06.

Включение касательных к слою вибраций приводит к ослаблению нелинейных реологических свойств жидкости. В вязкопластичной жидкости происходит уменьшение толщины квазитвердых зон. Увеличивается скорость сдвига вблизи экстремумов профилей скорости течения. Конвективное движение жидкости становится более интенсивным, а профили скорости (рис. 4.7) и скорости сдвига (рис. 4.8) принимают вид характерный для ньютоновской жидкости.

На рисунке 4.10 показана зависимость максимальной скорости течения жидкости в слое от вибрационного числа Грасгофа при различных значениях параметра D .

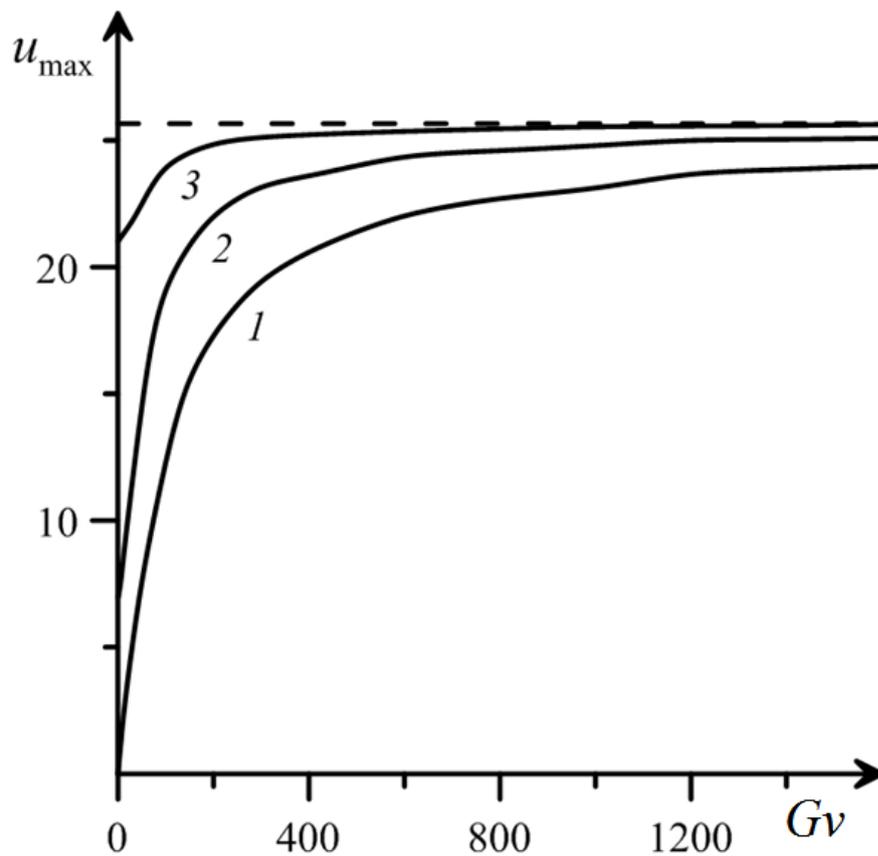


Рис. 4.10 Зависимость максимальной скорости течения от вибрационного числа Грасгофа при $Gr = 400$ и различных значениях предельного напряжения сдвига D : 150 (1), 50 (2), 10 (3)

Расчеты показывают, что кривые для $b=1$ при тех же значениях реологического параметра D , практически совпадают с соответствующими кривыми для $b=10^{-4}$. Незначительные отличия в значениях максимальной скорости течения наблюдаются только при малых значениях вибрационного числа Грасгофа (в масштабах рисунка 4.10 эти отличия не видны). Это свидетельствует о том, что при воздействии касательных вибраций достаточной интенсивности вязкопластичная жидкость теряет свои свойства, т.е. происходит исчезновение квазитвердых зон. Можно предположить, что вибрации способствуют переходу вязкопластика в псевдопластичное состояние, а псевдопластика в ньютоновскую жидкость. Характер течения жидкости при высокочастотных вибрациях не зависит от значения параметра b во всем рассмотренном диапазоне значений D . Подтверждением этому может служить кривая 3 на рисунке 4.9, которая имеет одинаковый вид для $b = 1$ и $b = 10^{-4}$.

Увеличение вибрационного числа Грасгофа ослабляет проявление неньютоновских свойств жидкости. Все кривые на рисунке 4.10 асимптотически стремятся к штриховой линии, которая соответствует значению $u_{\max} \approx 25,66$, являющемуся максимальным значением для скорости конвективного течения ньютоновской жидкости в поле касательных вибраций [80]. Аналогичный вывод получается при анализе нелинейно-вязкой части в уравнении (4.49). Можно показать, что

$$\lim_{Gv \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{D(\sqrt{Gv} \sin t_- + \Omega(x))}{b + \left| \left(\sqrt{Gv} \sin t_- + \Omega(x) \right) \right|} dt_- \rightarrow 0,$$

тогда уравнение (4.49) преобразуется в известное уравнение для ньютоновской жидкости, из которого следует, что касательные к слою вибрации не влияют на интенсивность конвективного течения.

Таким образом, в рассмотренной постановке в плоском вертикальном бесконечном слое псевдопластичной жидкости возможно квазиравновесное состояние, но только в отсутствие поля тяжести. В слое вязкопластичной

жидкости равновесное (жесткое) состояние реализуется, но лишь в отсутствие вибраций.

Увеличение числа Грасгофа приводит к тому, что касательные напряжения, возникающие в жидкости, превосходят некоторое предельное значение. В этом случае в слое вязкопластика возникает плоскопараллельно конвективное течение, состоящее из двух встречных потоков. В каждом потоке существует квазитвердая (жесткая) зона, окруженная зонами вязкого течения. Внутри квазитвердых зон скорость сдвига равна нулю. С увеличением числа Грасгофа интенсивность течения вязкопластика растет, а толщина квазитвердых зон уменьшается.

Высокочастотные вибрации приводят к появлению в неньютоновской жидкости дополнительного механизма генерации осредненного конвективного движения, который связан с нелинейностью реологической модели и не зависит от температурного градиента. Однако, усиление интенсивности вибрационного воздействия приводит к ослаблению проявления нелинейно-вязких свойств жидкости. Так, для вязкопластичной жидкости толщина квазитвердых зон сначала уменьшается, а затем они исчезают. При больших вибрационных числах Грасгофа профиль скорости неньютоновской жидкости в слое совпадает с профилем скорости ньютоновской жидкости, полученным при аналогичных условиях прогрева и вибраций.

4.5 Основные результаты и выводы

Получены осредненные выражения для тензоров вязких напряжений обобщенных ньютоновских жидкостей при малоамплитудных высокочастотных неакустических вибрациях.

Условие существования квазиравновесных состояний в поле высокочастотных вибраций распространено на весь класс обобщенных ньютоновских жидкостей. Показано, что квазитвердое (жесткое) состояние, являющееся частным случаем квазиравновесия, возможно для всех жидкостей из рассматриваемого класса, кроме вязкопластичной, только тогда, когда векторы, определяющие направление вибраций \vec{n} , поля тяжести $\vec{\gamma}$ и равновесного

градиента температуры \vec{m} направлены вдоль одной прямой. В вязкопластичной жидкости квазитвердое (жесткое) состояние возможно при произвольной ориентации вектора \vec{m} , но вибрации должны быть направлены вдоль градиента температуры.

Получено условие существования жесткого состояния вязкопластичной жидкости в наклонном слое при наличие высокочастотных вибраций. Показано, что слой может находиться в жестком состоянии только, если вибрации происходят вдоль градиента температуры. В остальных случаях в вязкопластичной жидкости возможно состояние квазиравновесия, аналогичное тому, что имеет место в остальных типах обобщенной ньютоновской жидкости. Жесткое состояние может стать неустойчивым при ориентациях слоя, близких к вертикали или горизонтали. Высокочастотные вибрации стабилизируют жесткое состояние слоя.

Рассмотрена задача о конвективном движении вязкопластичной жидкости в плоском вертикальном слое при нагреве сбоку в присутствии высокочастотных продольных вибраций. В этом случае жесткое состояние возможно только в отсутствие вибраций. Включение вибраций приводит к уменьшению толщины квазитвердых зон. Увеличение интенсивности вибраций сначала ослабляет проявление вязкопластичных свойств жидкости, а затем они исчезают. При больших вибрационных числах Грасгофа профиль скорости неньютоновской жидкости в слое совпадает с профилем скорости ньютоновской жидкости, полученным при аналогичных условиях нагрева и вибраций.

ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ УИЛЬЯМСОНА В ПЛОСКОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

Сложная реология неньютоновских сред приводит к качественному отличию характера их течений от ньютоновской жидкости. Нелинейность реологических моделей накладывает отпечаток и на устойчивость равновесия и течений этих жидкостей. В данной главе диссертации исследована устойчивость стационарного конвективного течения жидкости Уильямсона между двумя вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разных температур. Рассматривается бесконечный слой нелинейно-вязкой жидкости ориентированный вдоль поля тяжести. Вибрационное воздействие на слой отсутствует.

Выбор реологической модели Уильямсона обусловлен, как и прежде, тем, что она описывает не только псевдопластическое поведение, но и при определенных значениях параметров может быть применена для описания вязкопластичных сред. Данная модель успешно применялась для изучения стационарной конвекции псевдопластичных и вязкопластичных жидкостей [242].

Для ньютоновской жидкости задача в описанной выше постановке рассматривалась в [80, 251-253]. Было показано, что характер неустойчивости зависит от числа Прандтля. При числах Прандтля, меньших 12.45, и некотором критическом значении числа Грасгофа, стационарное плоскопараллельное течение становится неустойчивым по отношению к возмущениям гидродинамической природы, имеющим вид вихрей на границе встречных потоков. При числах Прандтля, больших 12.45, неустойчивость возникает в результате развития тепловых волн.

В связи с технологическими приложениями актуальной задачей является исследование устойчивости конвективных течений жидкостей, вязкость которых не является постоянной величиной. Она может, например, зависеть от скорости деформаций (неньютоновские жидкости) или температуры.

В настоящей главе изучается устойчивость стационарного конвективного течения псевдопластической и вязкопластической жидкостей. Результаты решения задачи для псевдопластической жидкости качественно совпадают с результатами работ [59, 60], однако, существенно дополняют их, описывая более подробно механизмы неустойчивости и влияние на устойчивость течения различных параметров. Отметим, что в работах [59, 60] для описания реологии жидкостей использовалась степенная модель. Для верификации алгоритма и начальных приближений при численных расчетах в рамках реологической модели Уильямсона использовались известные результаты для ньютоновской жидкости.

5.1 Свободная конвекция жидкости Уильямсона в вертикальном слое

5.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим вертикальный слой нелинейно-вязкой жидкости шириной $2h$, ограниченный твердыми идеально-теплопроводными плоскостями. На границах слоя поддерживаются постоянные разные температуры: $-\theta$ слева, $+\theta$ справа, т.е. градиент температуры направлен горизонтально. Координатная ось z направлена вдоль слоя, ось x – поперек слоя, ось y – нормально к плоскости xz . Вдоль осей y и z слой бесконечен.

Как уже отмечалось, для описания реологического поведения жидкости выбрана модель Уильямсона:

$$\tau_{ij} = \left(\mu_{\infty} + \frac{A}{B + \sqrt{I_2}} \right) e_{ij}, \quad I_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ji}, \quad e_{ij} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.1)$$

Уравнения свободной тепловой конвекции в приближении Буссинеска и граничные условия в безразмерной форме имеют вид:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + Gr(\vec{U}\nabla)\vec{U} = -\nabla p + \text{Div}\tau + T\vec{\gamma}, \quad \text{div}\vec{U} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Gr(\vec{U}\nabla)T = \frac{1}{Pr}\Delta T,$$

$$x = \pm 1: \vec{U} = 0, \quad T = \pm 1. \quad (5.3)$$

Здесь \vec{U} – скорость; p , T – соответственно давление и температура; τ – тензор вязких напряжений; $\vec{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх. В качестве единиц измерения выбраны: для длины – полутолщина слоя h , для времени – $h^2\rho/\mu_\infty$ (ρ – плотность жидкости), для скорости – $g\beta h^2\rho/\mu_\infty$ (β – коэффициент теплового расширения, g – ускорение свободного падения), для температуры – θ , для давления – $g\beta\theta h\rho$.

Реологическое уравнение жидкости Уильямсона в безразмерной форме при принятом выборе единиц измерения принимает вид:

$$\tau_{ij} = \left(\frac{D}{b + \sqrt{I_2}} + 1 \right) e_{ij}. \quad (5.4)$$

Задача (5.2) - (5.4) содержит четыре безразмерных параметра: число Грасгофа – $Gr = g\beta\theta\rho^2h^3/\mu_\infty^2$, число Прандтля – $Pr = \mu_\infty/(\chi\rho)$ и два безразмерных реологических параметра $D = A/(g\beta\theta\rho h)$ и $b = B\mu_\infty/(g\beta\theta\rho h)$. Безразмерная эффективная вязкость определяется выражением $\left(1 + D/(b + \sqrt{I_2})\right)$, при скорости деформации, стремящейся к нулю, она стремится $(1 + D/b)$. Безразмерная вязкость ньютоновской жидкости равна единице. В дальнейшем при анализе результатов будут обсуждаться зависимости гидродинамических характеристик

от параметра $\nu = A/(\mu_\infty B) = D/b$, показывающего отклонение эффективной вязкости при нулевой скорости деформаций от соответствующего значения для ньютоновской жидкости (единицы), и параметра D .

Модель (5.4) переходит в ньютоновскую, когда $\nu \rightarrow 0$. Напротив, при больших ν ($b \rightarrow \infty$) эффективная вязкость при малых скоростях сдвига резко возрастает. Модель (5.4) в этом случае описывает вязкопластичную жидкость, где параметр D играет роль предельного напряжения сдвига (предела текучести), а b выступает в качестве регуляризирующего параметра [77, 78, 242].

Число Грасгофа является важным параметром, характеризующим интенсивность течения и влияние возмущений на устойчивость равновесных состояний жидкости. Поэтому его правильное определение для разных типов жидкостей влияет на корректность интерпретации полученных результатов. Число Грасгофа, введенное выше, определено по вязкости при бесконечно большой скорости деформаций μ_∞ . Для обсуждения влияния псевдопластических свойств жидкости на устойчивость основного течения по отношению к малым возмущениям необходимо ввести модифицированное число Грасгофа

$$G = \frac{g\beta\theta\rho^2 h^3}{\left(\mu_\infty + \frac{A}{B}\right)^2} = \frac{Gr}{(1+\nu)^2}, \quad (5.5)$$

определенное по вязкости при нулевой скорости деформаций (скорости сдвига). Это продиктовано тем, что характерные скорости деформаций, возникающие в слое при медленном конвективном течении псевдопластичной жидкости, невелики. Характерной вязкостью псевдопластичной жидкости в этом случае является вязкость при нулевой (малой) скорости деформаций. Данное обстоятельство иллюстрируют кривые 1 и 2 на рисунке 5.1. Отметим, что в работах [59, 60], посвященных решению этой задачи с использованием

регуляризованной степенной модели, также использовалось число Грасгофа определенное по вязкости при малых скоростях деформации.

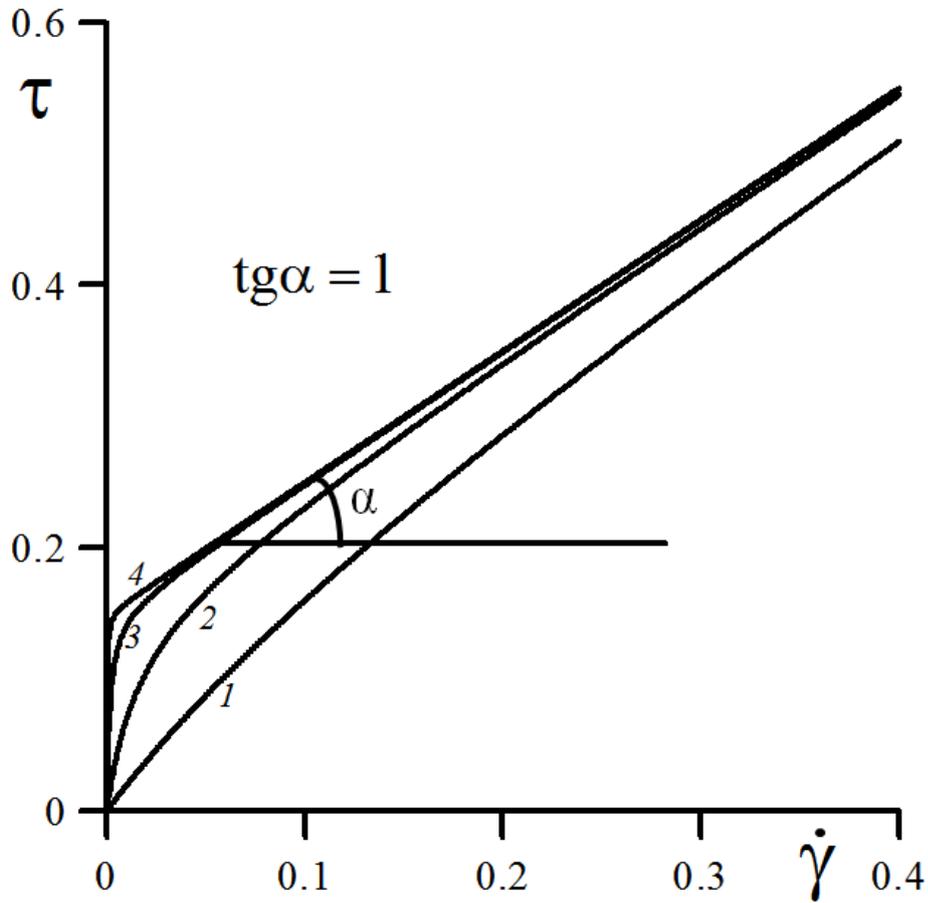


Рис. 5.1 Зависимость вязких напряжений τ от скорости деформаций $\dot{\gamma} = \partial u / \partial x$ при одномерном сдвиговом течении слоя жидкости Уильямсона (5.4). Кривые построены для $D=0.15$ и $\nu = 1$ (1); 10 (2); 100 (3); 1000 (4)

На рисунке 5.1 представлены реологические кривые, определяющие зависимость вязких напряжений от скорости деформаций при одномерном сдвиговом течении слоя жидкости Уильямсона со скоростью $u(x)$, где x – поперечная к слою координата. Тангенс угла наклона кривых на рисунке 5.1 равен вязкости жидкости при заданной скорости деформаций.

Видно, что при небольших ν ($\nu < 100$) в области малых скоростей деформаций значение эффективной вязкости близко к $(1 + \nu)$. Таким образом,

характерной вязкостью псевдопластичной жидкости является вязкость при нулевой скорости деформаций.

В случае больших v (вязкопластичный предел) при возникновении сдвигового течения вязкость жидкости практически сразу достигает своего максимального значения μ_∞ (в безразмерном случае 1) и далее уже не зависит от скорости деформаций (см. кривые 3 и 4 на рис. 5.1). Поэтому, для вязкопластиков число Грасгофа необходимо определять с помощью величины μ_∞ , как это сделано при записи уравнений (5.2).

В рассматриваемых условиях в нелинейно-вязких жидкостях состояние механического равновесия невозможно. В вязкопластичной жидкости при $D \leq 0.25$ реализуется жесткое (кваситвердое) состояние, которое в вертикальном слое является абсолютно устойчивым. Все основные расчеты для вязкопластичной жидкости выполнены для $D \leq 0.25$.

5.1.2 Стационарное плоскопараллельное течение псевдопластичной жидкости

В рассматриваемой задаче градиент температуры горизонтален, поэтому механическое равновесие невозможно, при любой разности температур возникает конвективное течение. Задача (5.2) - (5.4) допускает стационарное решение вида

$$\vec{U}(0,0,u_0(x)), \quad T = T_0(x,z), \quad (5.6)$$

которое соответствует плоскопараллельному течению. Подставляя (5.6) в (5.2) – (5.4), после некоторых преобразований получим уравнения для нахождения основного состояния:

$$-\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{De_0}{b + |e_0|} \right) + \frac{\partial e_0}{\partial x} + T_0 = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0, \quad T_0 = x, \quad (5.7)$$

$$e_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \int_{-1}^1 u_0 dx = 0.$$

Как и в ньютоновской жидкости, в основном состоянии профиль температуры линейный. Последнее уравнение в (5.7) определяет замкнутость конвективного потока.

Исключим давление и введем завихренность течения и функцию тока

$$\Omega_0 = e_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad u_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}.$$

В терминах завихренности и функции тока задача (5.7) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{D\Omega_0}{b + |\Omega_0|} \right) + \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x^2} + 1 = 0, \quad \Omega_0 = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}, \quad (5.8)$$

$$x = \pm 1: \quad \varphi_0 = 0$$

В рассматриваемом случае одномерного течения завихренность имеет смысл скорости деформаций.

Задача (5.8) решалась численно методом конечных разностей. Уравнение для завихренности решалось методом последовательной верхней релаксации. Значения завихренности на границах слоя вычислялись по формуле Тома $\Omega_0|_{\Gamma} = 2(\varphi_0|_{\Gamma} - \varphi_0|_{\Gamma-1})/h_x^2$, где h_x – шаг пространственной сетки. Тестовые расчеты для четырех шагов пространственной сетки h_x : 1/50, 1/100, 1/150 и 1/200 показали

сходимость результатов с уменьшением шага сетки. Относительная разница между результатами, полученными для различных значений ν и D , при $h_x = 1/150$, $1/200$ не превышает 5%. Поэтому все основные расчеты проводились на пространственной сетке с $h_x = 1/150$.

Основное плоскопараллельное течение описывается уравнениями (5.8) и при выбранном способе обезразмеривания не зависит от чисел Прандтля и Грасгофа. На рисунке 5.2 представлены профили скорости, а на рисунке 5.3 – профили скорости деформации (завихренности) для ньютоновской – $\nu = 0$ (1) и псевдопластической – $\nu = 100$, $D = 0.35$ (2) жидкостей.

При построении графиков на рисунках 5.2 и 5.3 значения скорости и завихренности нормировались на максимальные значения, приведенные в таблице 5.1.

ν	0	100
$U_{0\max}$	0.064143	0.001422
$\Omega_{0\max}$	0.166656	0.004078

Табл. 5.1 Максимальные значения скорости $U_{0\max}$ и значения завихренности Ω_0 при $z = 0$ для основного течения ньютоновской и псевдопластической ($\nu = 100$, $D = 0.35$) жидкостей

Течение имеет вид двух встречных потоков. При увеличении параметра ν сдвиговое течение ньютоновской жидкости, представленное кривыми 1 на рисунках 5.2 и 5.3, существенно замедляется и трансформируется в течение псевдопластической жидкости (кривые 2 на рис. 5.2 и 5.3). Экстремумы скорости смещаются к твердым стенкам, около которых возрастает скорость сдвига. Течение псевдопластика приобретает погранслоный характер, а профиль скорости делается более плоским в области экстремумов. Ниже будет исследована устойчивость плоскопараллельного стационарного течения, показанного на рисунках 5.2 и 5.3.

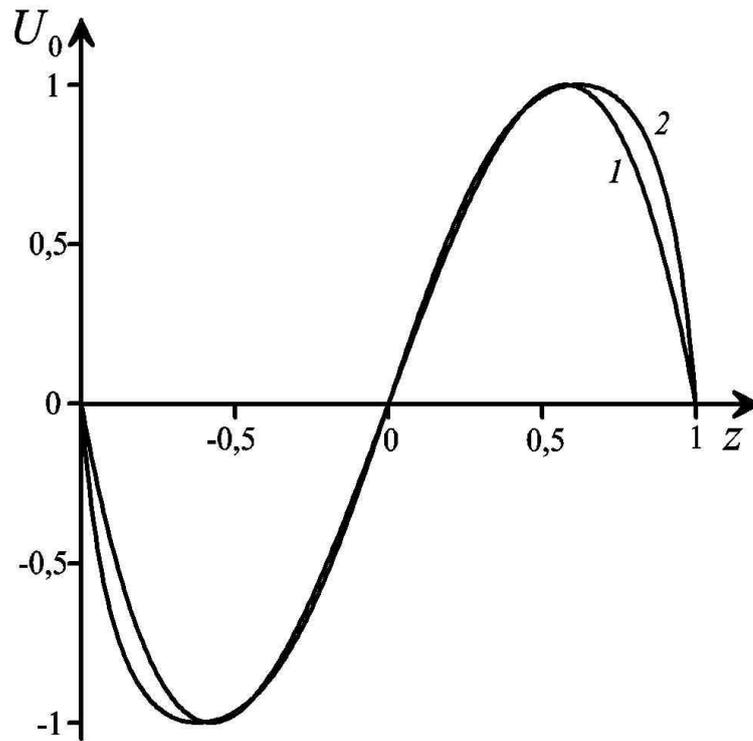


Рис. 5.2 Профили скорости стационарного течения для ньютоновской жидкости ($\nu = 0$) (1) и псевдопластической жидкости с $\nu = 100, D = 0.35$ (2)

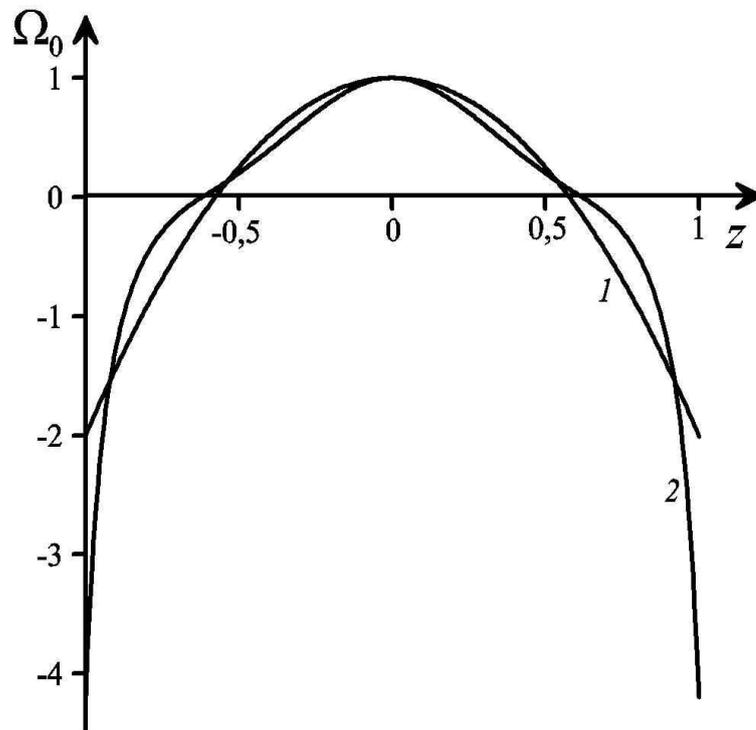


Рис. 5.3 Профили скорости деформаций (завихренности) стационарного течения для ньютоновской жидкости ($\nu = 0$) (1) и псевдопластической жидкости с $\nu = 100, D = 0.35$ (2)

5.1.3 Стационарное плоскопараллельное течение вязкопластичной жидкости

На рисунках 5.4 и 5.5 представлены, соответственно, профили скорости и скорости сдвига (завихренности) с $D = 0.15$ и различными значениями ν , которые соответствуют ньютоновской – $\nu = 0$, псевдопластичной – $\nu = 100$ и вязкопластичной – $\nu = 6000$ жидкостям. Значения скорости и завихренности нормированы на максимальные значения, которые приведены в таблице 5.2.

ν	0	100	6000
$U_{0\max}$	0.064143	0.013292	0.012054
$\Omega_{0\max}$	0.166656	0.053066	0.054283

Табл. 5.2 Максимальные значения скорости $U_{0\max}$ и завихренности $\Omega_{0\max}$ основного течения, полученные в расчетах при различных эффективных вязкостях

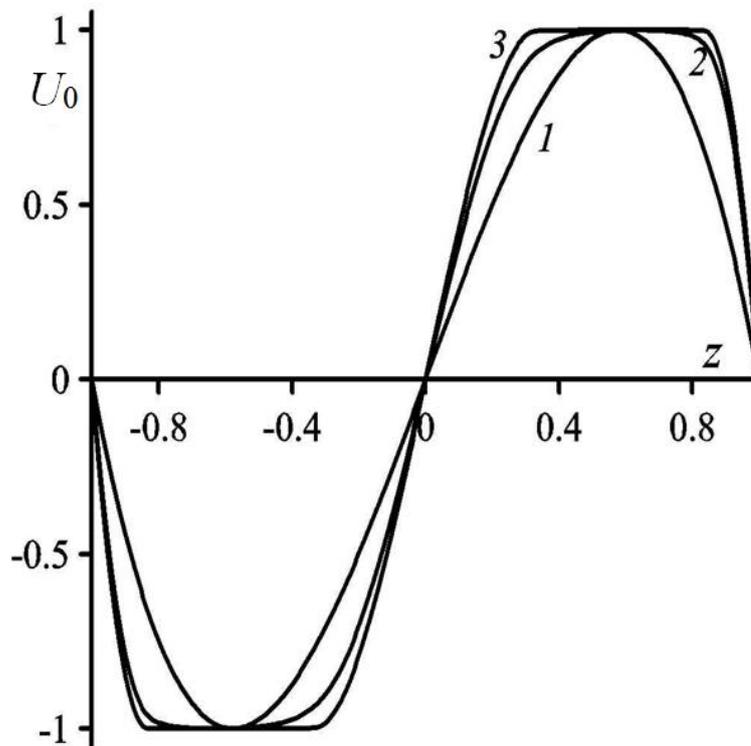


Рис. 5.4 Профили скорости стационарного течения для: ньютоновской жидкости, $\nu = 0$ (1); псевдопластичной жидкости, $\nu = 100$ (2); вязкопластичной жидкости, $\nu = 6000$ (3)

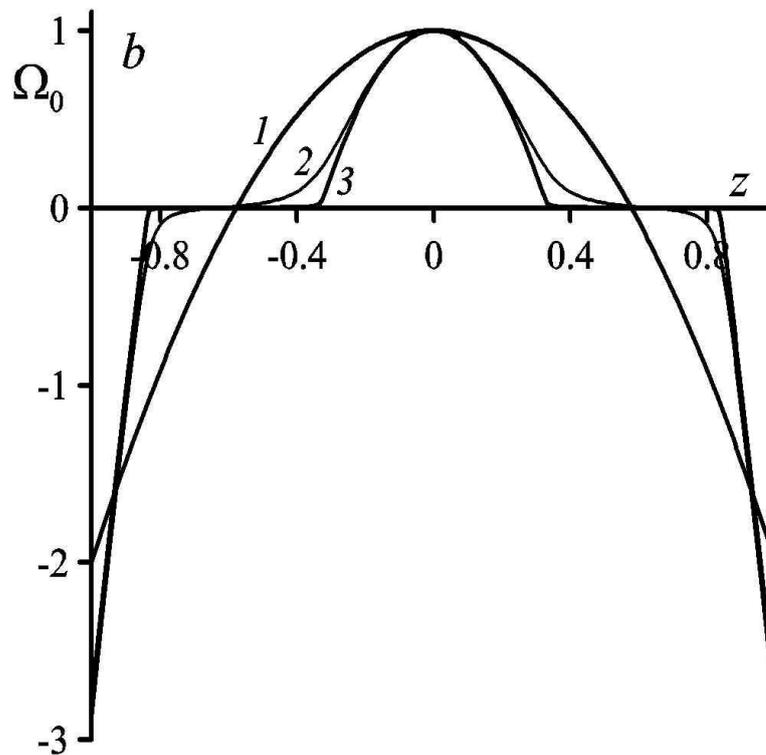


Рис. 5.5 Профили скорости сдвига (вихря) стационарного течения для: ньютоновской жидкости, $\nu = 0$ (1); псевдопластичной жидкости, $\nu = 100$ (2); вязкопластичной жидкости, $\nu = 6000$ (3)

Течение имеет вид двух встречных потоков. При увеличении эффективной вязкости ν сдвиговое течение ньютоновской жидкости, представленное кривыми 1 на рисунках 5.4 и 5.5, замедляется и трансформируется в течение вязкопластичной жидкости (кривые 3 на рис. 5.4 и 5.5). Ниже будет показано, что для $D = 0.15$ значения эффективной вязкости, при которых в потоке жидкости появляются ярко выраженные жесткие зоны, характерные для вязкопластичной жидкости (см. кривую 3 на рис. 5.4), должны превышать $\nu = 4500$. Из рисунка 5.5 видно, что в жестких зонах скорость сдвига близка нулю. В этом случае встречные потоки ведут себя как твердые стержни, движущиеся навстречу друг другу. Жесткие зоны отделены друг от друга и стенок областями сдвигового течения. Далее будет исследована устойчивость плоскопараллельного стационарного течения, показанного на рисунках 5.4 и 5.5. Основное внимание при этом будет уделено вязкопластичному пределу модели Уильямсона.

5.2 Устойчивость стационарного плоскопараллельного течения жидкости

Уильямсона

5.2.1 Уравнения для возмущений

Перейдем к анализу устойчивости основного стационарного течения жидкости Уильямсона (5.6). Запишем все физические поля в виде сумм, где первое слагаемое характеризует основное состояние жидкости, а второе – малые возмущения основного состояния:

$$\vec{U}_0 + \vec{U}_1, T_0 + T_1, \tau_0 + \tau_1, p_0 + p_1. \quad (5.9)$$

Подстрочный индекс 1 в (5.9) обозначает поля возмущений. Подставляем выражения (5.9) в исходную систему уравнений (5.2) – (5.4). Линеаризованная задача для возмущений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} + Gr(\vec{U}_0 \nabla) \vec{U}_1 + Gr(\vec{U}_1 \nabla) \vec{U}_0 = -\nabla p_1 + \left(\frac{Db}{(b + |e_0|)^2} + 1 \right) \Delta \vec{U}_1 + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Db}{(b + |e_0|)^2} \right) \left(\nabla u_{1x} + \frac{\partial \vec{U}_1}{\partial x} \right) + T_1 \vec{\gamma}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + Gr(\vec{U}_0 \nabla) T_1 + Gr(\vec{U}_1 \nabla) T_0 = \frac{1}{Pr} \Delta T_1, \quad \text{div} \vec{U}_1 = 0,$$

$$x = \pm 1: \vec{U}_1 = T_1 = 0.$$

где ∇ и Δ – операторы градиента и Лапласа, подстрочные индексы x , y и z здесь и далее означают проекции векторных величин на оси координат.

Ограничимся рассмотрением плоских возмущений, т.е. предположим, что $u_{1y} = 0$, а u_{1x} , u_{1z} , T_1 , p_1 не зависят от координаты y . В работе [80] было показано, что в задаче о вертикальном слое ньютоновской жидкости такие возмущения наиболее опасны.

Введем функцию тока возмущений и будем рассматривать нормальные возмущения, которые экспоненциально зависят от времени и периодичны по вертикальной координате

$$u_{1z} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad u_{1x} = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (5.11)$$

$$\psi = \varphi(x)\exp(ikz - \lambda t), \quad T_1 = \vartheta(x)\exp(ikz - \lambda t).$$

В (5.11) $\varphi(x)$, $\vartheta(x)$ – амплитуды возмущений функции тока и температуры, λ – декремент возмущений, k – волновое число. Подставляя возмущения в таком виде в уравнения (5.10) и исключая давление, получим после преобразований систему уравнений и граничных условий для амплитуд возмущений в виде:

$$\begin{aligned} -\lambda\Omega &= (B_0 + 1)\Omega'' + 2B_0'\Omega' + (B_0'' - k^2(B_0 + 1))\Omega - ikGru_0\varphi'' \\ &+ (ik^3Gru_0 + 2k^2B_0'' + ikGru_0'')\varphi - \vartheta', \\ -\lambda\vartheta &= \frac{1}{Pr}\vartheta'' - \left(\frac{k^2}{Pr} + ikGru_0\right)\vartheta - ikGr\varphi, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\Omega = \varphi'' - k^2 \varphi, \quad B_0 = \frac{Db}{(b + |e_0|)^2},$$

$$x = \pm 1: \varphi = \varphi' = \vartheta = 0, \quad \Omega|_{\Gamma} = 2(\varphi|_{\Gamma} - \varphi|_{\Gamma-1})/h_x^2.$$

Задача устойчивости решалась численно. Для этого уравнения и граничные условия (5.12) записывались в конечно-разностной форме, при этом все пространственные производные аппроксимировались центральными разностями, имеющими второй порядок точности. Для вычисления возмущений завихренности скорости Ω на границе использовалась формула Тома. Дискретизация (5.12) приводит к алгебраической задаче на собственные значения

$$\lambda \bar{C}X = \bar{A}X, \quad (5.13)$$

где \bar{A} – комплексная матрица, \bar{C} – матрица с единицами на главной диагонали и нулевыми остальными элементами, X – вектор-столбец, состоящий из неизвестных переменных: $X = (\Omega, \varphi, \vartheta)$. Решение алгебраической задачи на собственные значения (5.13) дает значение декремента $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ и полей возмущений. Нейтральные возмущения находятся из условия $Re(\lambda) = 0$. Для решения алгебраической задачи на собственные значения применялся пакет программ, разработанный Любимовым Д.В., Любимовой Т.П. и Морозовым В.А. [2, 4].

5.2.2 Устойчивость течения псевдопластичной жидкости

Расчеты, проведенные на основании системы уравнений (5.12), показали, что тип возмущений в случае псевдопластичной жидкости определяется числом Прандтля (напомним, что мы ограничиваемся рассмотрением плоских возмущений вида (5.11)). При малых числах Прандтля, как и в случае

ньютоновской жидкости, наиболее опасными являются гидродинамические монотонные возмущения, которые представляют собой вихри на границе двух встречных потоков жидкости. С повышением Pr наиболее опасными становятся колебательные возмущения, представляющие собой тепловые волны, распространяющиеся в потоке жидкости.

Основным параметром, определяющим влияние возмущений на конвективное течение псевдопластичной жидкости, является модифицированное число Грасгофа $G = Gr/(1 + v)^2$, определенное по вязкости при нулевой скорости деформаций (скорости сдвига). Обоснование такого выбора для числа Грасгофа обсуждалось в параграфе 5.1.1.

На рисунках 5.6 и 5.7 показаны зависимости минимального критического значения модифицированного числа Грасгофа G_m от параметра v при различных значениях параметра D для монотонных (рис. 5.6) и колебательных (рис. 5.7) возмущений. Области параметров под кривыми соответствуют устойчивому течению жидкости. Монотонным модам соответствует $Pr = 1$, а колебательным – $Pr = 100$.

Из рисунков 5.6 и 5.7 видно, что во всем исследованном диапазоне значений реологических параметров наблюдается монотонное уменьшение G_m с увеличением v при фиксированном D , т.е. понижение порога устойчивости основного течения. Это связано с тем, что увеличение v при фиксированном D приводит к более сильному уменьшению эффективной вязкости с ростом скорости деформации. Этот результат качественно согласуется с результатами, полученными в [59, 60] при рассмотрении аналогичной задачи для регуляризованной модели степенной псевдопластической жидкости. Увеличение параметра D при фиксированном v , как видно, приводит к повышению порога устойчивости стационарного течения, что объясняется увеличением эффективной вязкости жидкости при скорости сдвига, стремящейся к нулю.

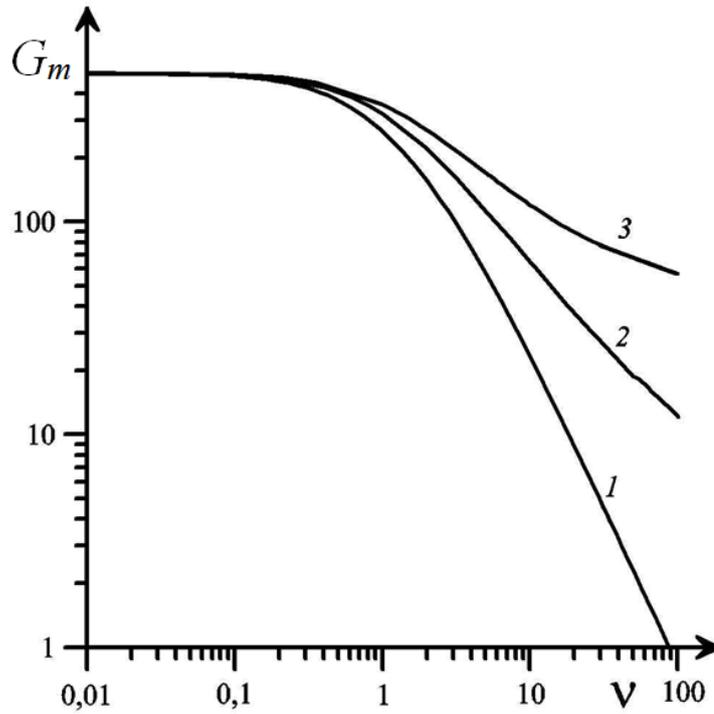


Рис. 5.6 Зависимость минимального критического значения модифицированного числа Грасгофа от параметра ν для монотонной моды неустойчивости при значениях D , равных 0.15 (1), 0.25 (2), 0.35 (3)

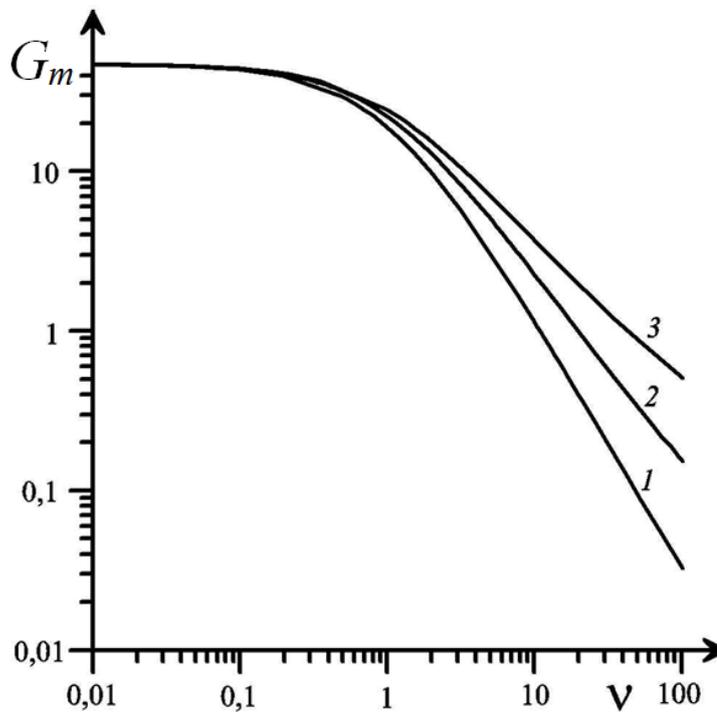


Рис. 5.7 Зависимость минимального критического значения модифицированного числа Грасгофа от параметра ν для колебательной моды неустойчивости при значениях D , равных 0.15 (1), 0.25 (2), 0.35 (3)

При $\nu \rightarrow 0$, когда жидкость Уильямсона близка к ньютоновской жидкости, минимальное критическое значение модифицированного числа Грасгофа G_m и волновое число наиболее опасных возмущений k_m для монотонных и колебательных возмущений стремятся соответственно к 496.3, 1.404 и 46.85, 1.21, что согласуется с данными работы [60].

На рисунках 5.8 – 5.10 приведены зависимости волнового числа наиболее опасных возмущений от ν для различных значений параметра D при $Pr = 1$ (рис. 5.8) и $Pr = 100$ (рис. 5.9), а также зависимости фазовой скорости $\omega = \lambda_{im}/k_m$ наиболее опасных колебательных возмущений от ν (рис. 5.10).

Из рисунка 5.8 видно, что при относительно небольших D (см. кривую 1) зависимость k_m от ν носит немонотонный характер. Увеличение D приводит к сглаживанию немонотонности. При $D = 0.35$ значение k_m монотонно уменьшается с увеличением ν (кривая 3). Немонотонность кривой 1 на рисунке 5.8 связана с изменением свойств жидкости. Как уже отмечалось выше, при увеличении параметра ν в жидкости Уильямсона проявляются вязкопластичные свойства. В следующей части главы 5 будет показано, что для обеих мод возмущений при $D < 0.25$ существует диапазон значений ν , в пределах которого происходит переход от псевдопластичного состояния к вязкопластичному. Ширина и границы этого диапазона определяются параметром D . В указанном диапазоне зависимости k_m от ν носят немонотонный характер. Ранее было показано, что в вертикальном слое при $D \geq 0.25$ фазовый переход жидкости Уильямсона в вязкопластичное состояние сопровождается полным затвердеванием слоя, это состояние является абсолютно устойчивым. Изучение течения в слое вязкопластичной жидкости и анализ устойчивости такого течения на основании модели Уильямсона (большие ν) является предметом исследований, описанных в следующей части.

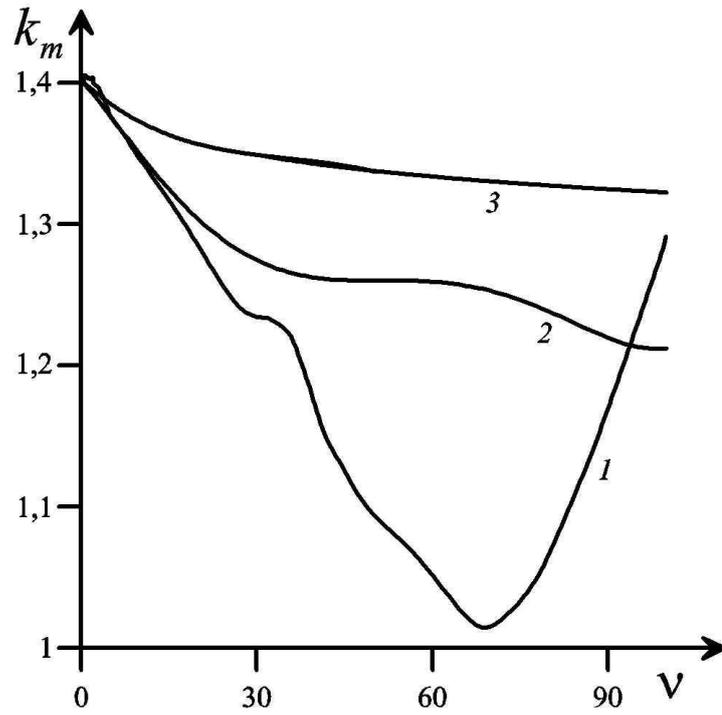


Рис. 5.8 Зависимость волнового числа наиболее опасных возмущений от ν для монотонной моды неустойчивости. Обозначения кривых аналогичны рисункам 5.6 и 5.7

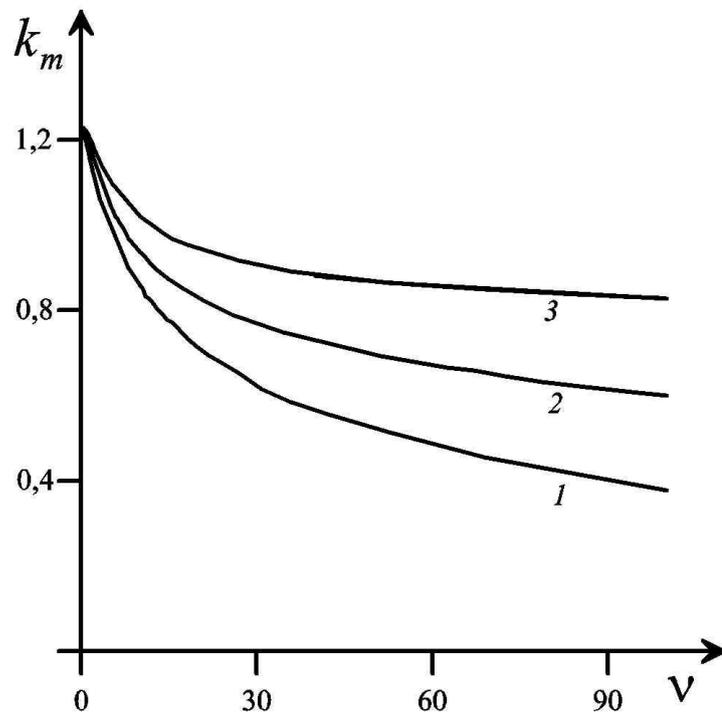


Рис. 5.9 Зависимость волнового числа наиболее опасных возмущений от ν для колебательной моды неустойчивости. Обозначения кривых аналогичны рисункам 5.6 и 5.7

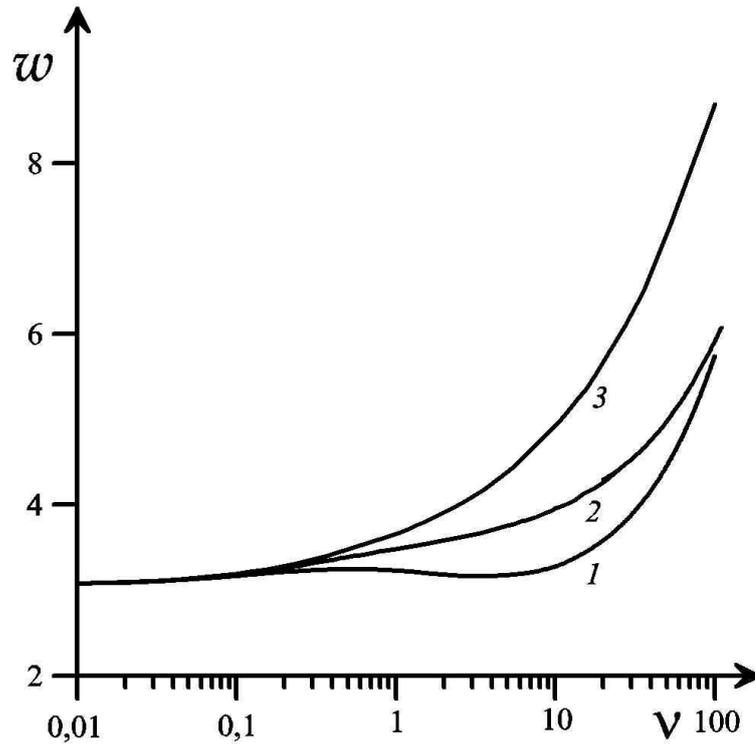


Рис. 5.10 Зависимость фазовой скорости наиболее опасных колебательных возмущений от ν . Обозначения кривых аналогичны рисункам 5.6 и 5.7

Для тепловых колебательных мод, как видно из рисунка 5.9, при всех рассмотренных значениях D величина k_m монотонно уменьшается с ростом ν . Зависимость фазовой скорости от ν при $D < 0.25$ (см. кривую 1 на рисунке 5.10) является немонотонной. При увеличении D немонотонность сглаживается (кривые 2 и 3 на рисунке 5.10), и при $D \geq 0.25$ зависимость фазовой скорости от параметра ν становится монотонной. Причина немонотонности кривой 1 на рисунке 5.10 специально не изучалась.

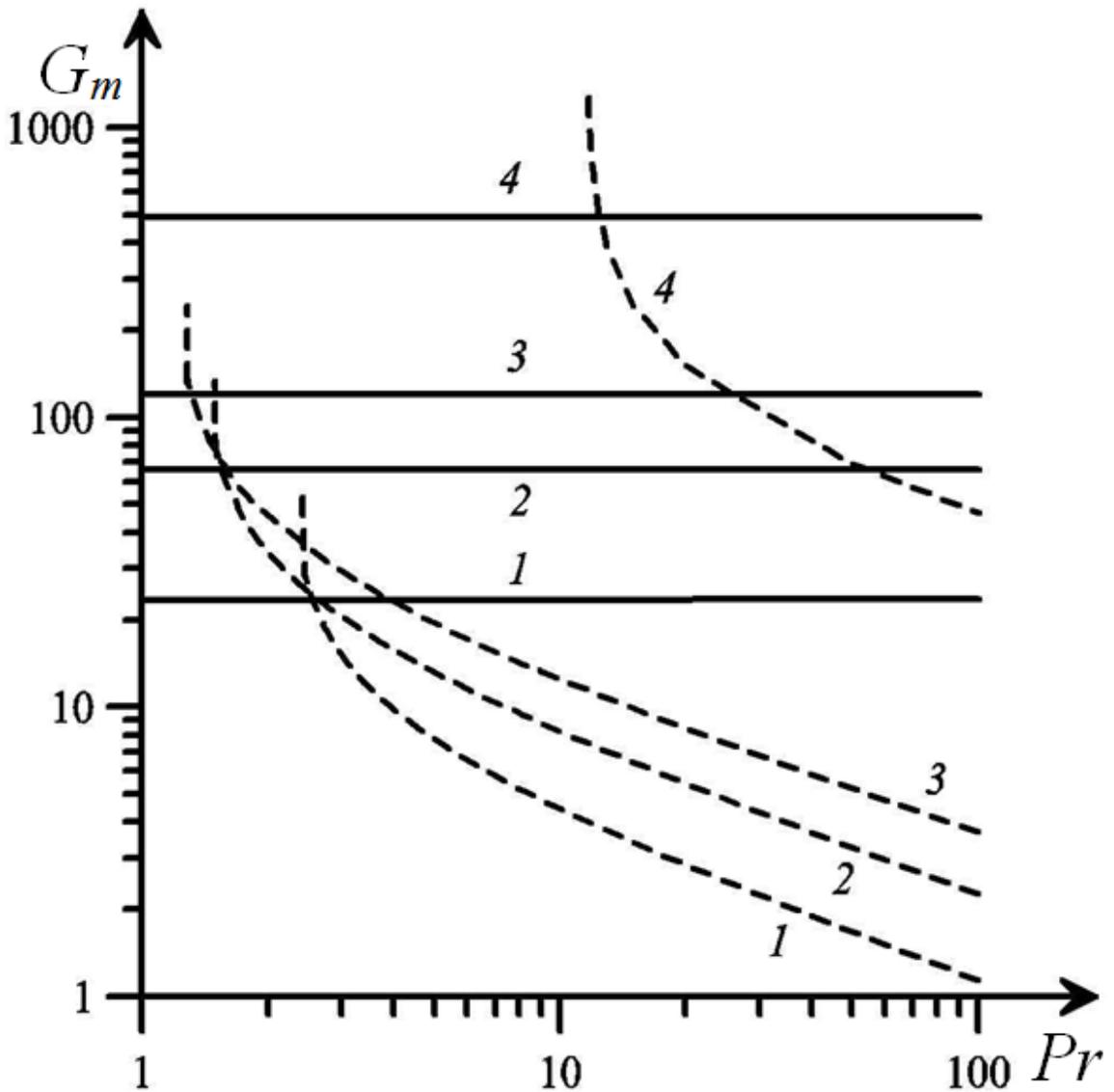


Рис. 5.11 Карты устойчивости стационарного течения жидкости Уильямсона для монотонной (сплошные линии) и колебательной (штриховые линии) мод неустойчивости при D : 0.15 (1), 0.25 (2), 0.35 (3) для $\nu = 10$. Кривые 4 соответствуют ньютоновской жидкости

На рисунке 5.11 представлены карты устойчивости основного течения на плоскости параметров $G_m - Pr$ для $\nu = 10$. Сплошные линии соответствуют монотонным модам, штриховые линии – колебательным. Для сравнения на рисунке 5.11 приведены кривые 4, соответствующие ньютоновской жидкости $D = 0$ [80].

Видно, что при малых значениях числа Прандтля неустойчивость определяется монотонными гидродинамическими возмущениями. С увеличением числа Прандтля наиболее опасными становятся тепловые колебательные моды.

Значения модифицированного числа Грасгофа и числа Прандтля, соответствующих смене характера неустойчивости для рассмотренных значений параметра D , указаны в таблице 5.3. С увеличением D пороговое значение числа Прандтля Pr^* , соответствующее смене режима неустойчивости, уменьшается. Устойчивость течения с ростом D , как отмечалось выше, повышается.

№	D	G_m^*	Pr^*
1	0.15	23.4	2.56
2	0.25	66.1	1.55
3	0.35	120	1.31
4	0	470	12.45

Табл. 5.3 Значения чисел G_m^* и Pr^* , соответствующие смене типа неустойчивости течения

Для монотонной моды неустойчивости минимальное критическое значение модифицированного числа Грасгофа и волновое число наиболее опасных возмущений слабо зависят от числа Pr . Значение k_m монотонных возмущений для всех рассмотренных D и $\nu = 10$ при $Pr < 1$ сначала возрастает, достигая максимума, а затем начинает монотонно убывать, приближаясь к некоторому постоянному значению при $Pr > 10$. С ростом D значение k_m для монотонных возмущений растет, а положение максимума смещается в область меньших Pr . Характерные значения G_m и k_m для различных Pr и D приведены в таблице 5.4.

Расчеты показали, что при значениях числа Прандтля, близких к Pr^* , имеет место резкий рост G_m колебательных возмущений с уменьшением Pr , такой, что при малых числах Прандтля колебательные моды исчезают. С ростом Pr наблюдается монотонное уменьшение минимального критического модифицированного числа Грасгофа колебательных возмущений. Обработка результатов, полученных для разных значений параметра D , (кривые 1–3 на рисунке 5.11) дает, что при $Pr > 10$ минимальное критическое значение модифицированного числа Грасгофа с ростом Pr убывает по следующим законам:

- кривая 1 – $G_m = 16.69 \cdot Pr^{-0.585}$;
- кривая 2 – $G_m = 28.98 \cdot Pr^{-0.555}$;
- кривая 3 – $G_m = 40.66 \cdot Pr^{-0.522}$.

D	Pr	G_m	k_m
0.15	0.37	23.7	1.37
	1	23.4	1.34
	11	23.4	1.33
0.25	0.28	66.8	1.38
	1	66.1	1.36
	21	66.2	1.35
0.35	0.19	122	1.40
	1	120	1.37
	31	120	1.37

Табл. 5.4 Характерные значения минимального критического модифицированного числа Грасгофа и волнового числа наиболее опасных возмущений для монотонной моды неустойчивости

Зависимости волнового числа и фазовой скорости наиболее опасных возмущений от Pr для колебательных возмущений приведены на рисунках 5.12 и 5.13 соответственно.

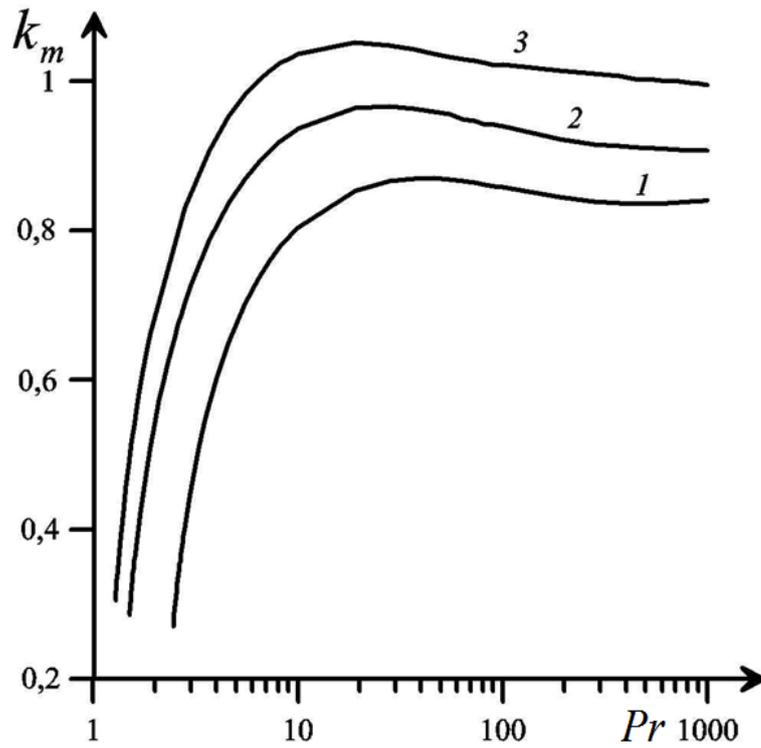


Рис. 5.12 Зависимости волнового числа наиболее опасных колебательных возмущений от числа Прандтля. Обозначения кривых соответствуют рисунку 5.11

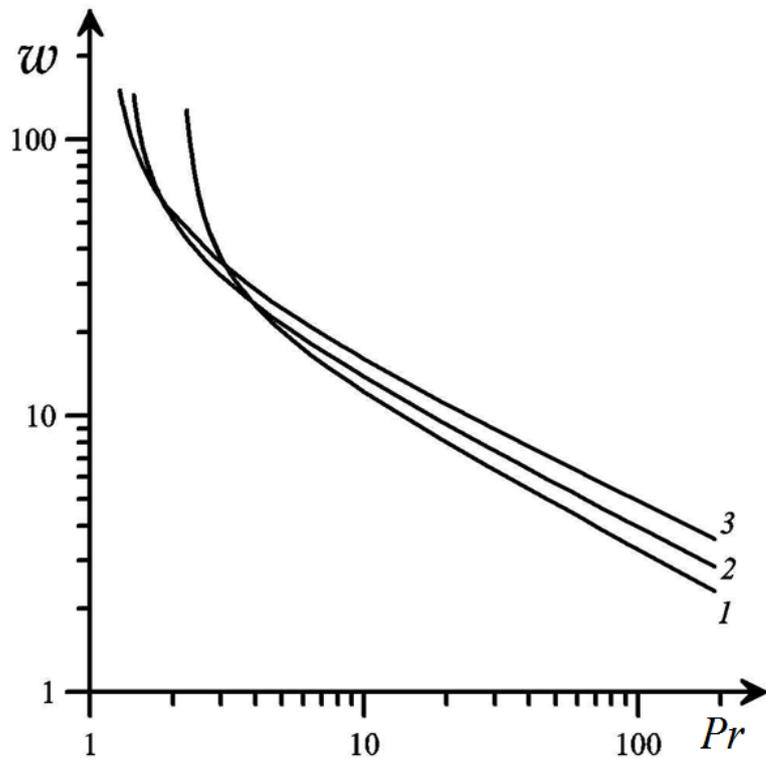


Рис. 5.13 Зависимости фазовой скорости наиболее опасных колебательных возмущений от числа Прандтля. Обозначения кривых соответствуют рисунку 5.11

Видно, что увеличение D приводит к увеличению k_m . В области малых Pr наблюдаются длинноволновые возмущения с большой фазовой скоростью. С увеличением числа Прандтля значение k_m растет, достигая максимума, а в области больших Pr выходит на постоянное значение (см. рис. 5.12). Из рисунка 5.13 видно, что фазовая скорость наиболее опасных колебательных возмущений для всех рассмотренных D монотонно уменьшается с ростом числа Pr .

5.2.3 Устойчивость течения вязкопластичной жидкости

Выше отмечалось, что реологическая модель Уильямсона удобна для рассмотрения нестационарных задач и задач устойчивости вязкопластичной жидкости. В этом параграфе, так же, как и в параграфе 5.2.2, на основании уравнений (5.12) исследуется устойчивость конвективного течения нелинейно-вязкой жидкости Уильямсона в бесконечном вертикальном слое, однако акцент сделан на вязкопластичные свойства жидкости. Все основные расчеты выполнены для $D \leq 0.25$.

При $B \rightarrow 0$ модель (5.1) описывает вязкопластичное поведение жидкости, в которой даже малые скорости деформаций приводят к тому, что вязкость жидкости приобретает некоторое значение μ_∞ , практически не зависящее от скорости деформаций. В число Грасгофа $Gr = g\beta\theta\rho^2h^3/\mu_\infty^2$, характеризующее вязкопластик, входит вязкость при бесконечно большом сдвиге μ_∞ .

Необходимо отметить, что четкой границы перехода к вязкопластичному пределу нет. Поведение жидкости меняется постепенно с увеличением параметра $v = D/b$, т.е. имеется переходная область значений параметра v , где жидкость Уильямсона не проявляет еще ярко выраженных вязкопластичных свойств. Ниже будет показано, что для каждого D существует своё пороговое значение v , при котором завершается переход к вязкопластичному течению.

При малых числах Прандтля в вязкопластичной жидкости, так же, как в ньютоновской и псевдопластичной жидкостях, наиболее опасными являются

гидродинамические монотонные возмущения, которые генерируются на границе двух встречных потоков жидкости. С повышением Pr на первый план выходят тепловые колебательные моды, появление которых связано с нарушением равновесного распределения температуры.

Зависимости минимального критического числа Грасгофа Gr_m от ν при различных значениях предела текучести для монотонных мод возмущений показаны на рисунке 5.14, а для колебательных мод на рисунке 5.15. Области параметров под кривыми соответствуют устойчивому течению жидкости. Монотонные моды рассчитаны при $Pr = 1$, а колебательные – при $Pr = 100$.

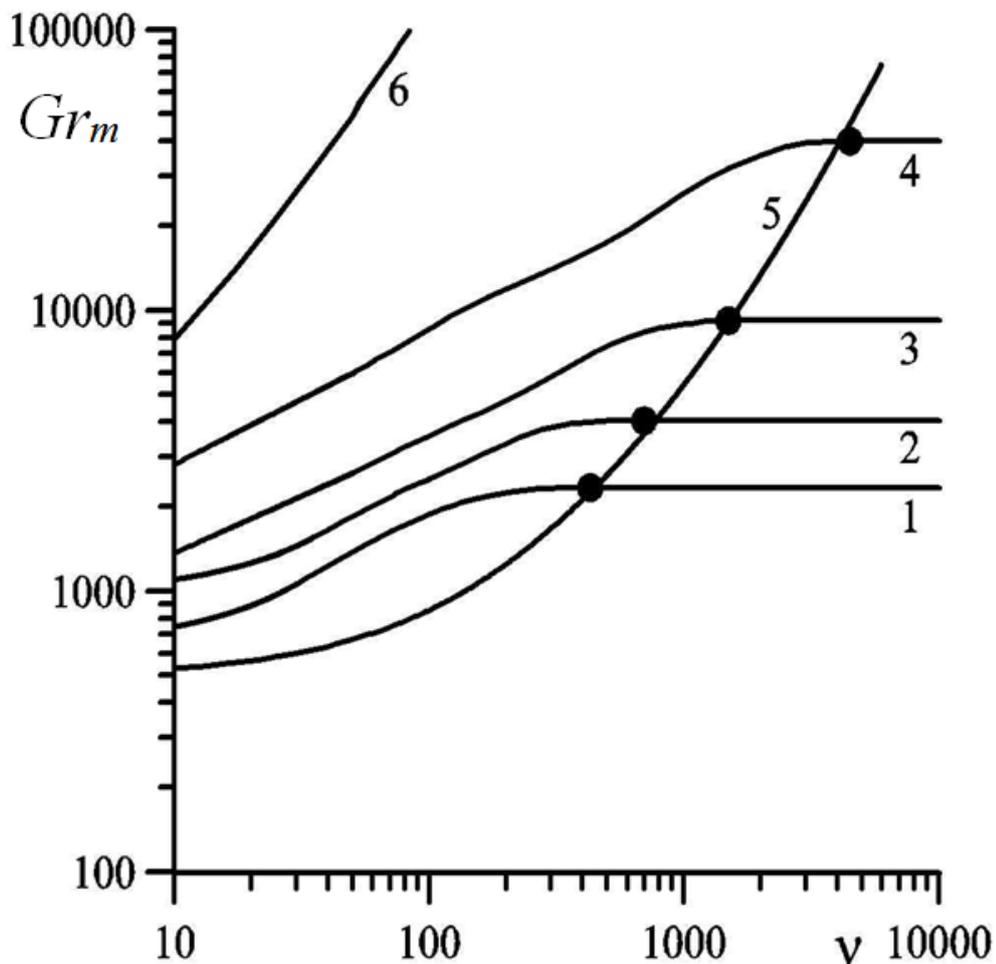


Рис. 5.14 Зависимости минимального критического числа Грасгофа от ν для монотонной моды неустойчивости при значениях D : 0.05 (1), 0.075 (2), 0.1 (3), 0.15 (4), 0.25 (6). Кривая 5 определяет границу перехода от псевдопластичного к вязкопластичному поведению

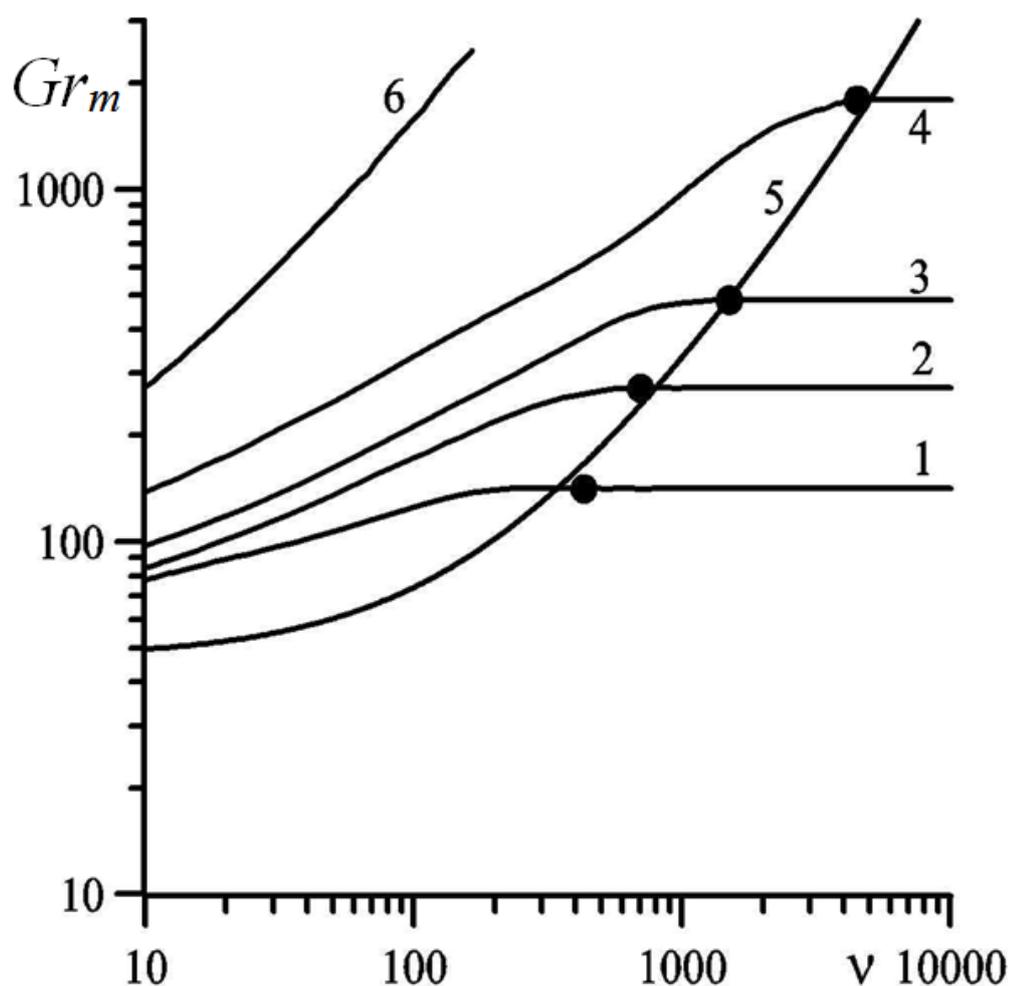


Рис. 5.15 Зависимость минимального критического числа Грасгофа от v для колебательной моды неустойчивости при значениях D : 0.05 (1), 0.075 (2), 0.1 (3), 0.15 (4), 0.25 (6). Кривая 5 определяет границу перехода от псевдопластичного к вязкопластичному поведению

Из рисунков 5.14 и 5.15 видно, что для всех D при умеренных v наблюдается монотонный рост минимального критического числа Gr_m с увеличением эффективной вязкости, т.е. повышение порога устойчивости течения относительно обеих мод неустойчивости. Напомним, что рассматриваются жидкости, в которых даже при небольших скоростях сдвига динамическая вязкость близка к предельному значению μ_∞ . В этом случае полученный эффект объясняется стабилизирующим влиянием вязкости на движение жидкости. Увеличение предела текучести D также приводит к повышению вязкости жидкости и, как следствие, стабилизации течения.

При больших v кривые 1–4 на рисунках 5.14 и 5.15 выходят на стационарные значения, соответствующие переходу к вязкопластичному поведению. Увеличение предела текучести вязкопластичной жидкости оказывает стабилизирующее действие.

D	v_c	Pr	Gr_m	k_m	λ_i
0	0	1	496.3	1.404	0
		100	46.85	1.210	3.705
0.050	430	1	2334	1.366	0
		100	141.3	0.535	3.510
0.075	700	1	4044	1.313	0
		100	272.3	0.313	3.464
0.100	1500	1	9195	1.103	0
		100	484.6	0.232	3.585
0.15	4500	1	40050	0.900	0
		100	1787	0.155	4.413

Табл. 5.5 Значения критических параметров жидкости, соответствующие переходу от псевдопластичного к вязкопластичному поведению

Полученные в расчетах значения эффективных вязкостей v_c , чисел Грасгофа, волновых чисел и мнимых частей декрементов возмущений, соответствующие от псевдопластичного к вязкопластичному поведению для рассмотренных D и $Pr = 1, 100$, приведены в таблице 5.5. Кривые 5 на рисунках 5.14 и 5.15 – результат аппроксимации данных, представленных в таблице 5.5. На рисунке 5.14 для $Pr = 1$ кривая 5 описывается уравнением

$$Gr_m = 496.3 + 3.427 \cdot v_c + 1.5 \cdot 10^{-3} \cdot v_c^2,$$

а на рисунке 5.15 уравнение кривой 5 имеет вид

$$Gr_m = 46.85 + 0.272 \cdot v_c + 1.54 \cdot 10^{-5} \cdot v_c^2.$$

Кривые 5 определяют границу перехода от псевдопластичного к вязкопластичному поведению жидкости.

С ростом предела текучести порог устойчивости течения жидкости Уильямсона повышается и смещается в область параметров, соответствующих псевдопластичному поведению. При $D \geq 0,25$ граница устойчивости плоскопараллельного течения жидкости полностью лежит в области параметров, соответствующих псевдопластичному поведению. Кривые 6 на рисунках 5.14 и 5.15, построенные для $D = 0.25$, определяют границу устойчивости псевдопластичной жидкости, при сдвиговом течении которой жесткие зоны отсутствуют. Правее и ниже кривых 6 течение псевдопластичной жидкости является устойчивым. Увеличение параметра v при $D \geq 0.25$ и переход через кривые 5 приводит к тому, что во всем слое реализуется жесткое (кваситвердое) состояние жидкости. Устойчивость жесткого состояния вертикального слоя вязкопластичной жидкости исследовалась в параграфе 4.3, где показана его абсолютная устойчивость по отношению к рассматриваемому типу возмущений.

На рисунках 5.16 и 5.17 приведены зависимости волновых чисел k_m , наиболее опасных возмущений, от эффективной вязкости жидкости для различных значений параметра D и $Pr = 1$ (рис. 5.16) и $Pr = 100$ (рис. 5.17). При эффективной вязкости, близкой к 10, наблюдается псевдопластичный характер течения жидкости, критические волновые числа для обоих типов возмущений монотонно уменьшаются (см. кривые 1–4). При увеличении эффективной вязкости зависимости k_m от v для всех значений D . Это связано с переходом от псевдопластичного к вязкопластичному поведению. Для вязкопластичной жидкости критические волновые числа монотонных и колебательных возмущений перестают изменяться с изменением v . При $D \geq 0.25$ для обоих типов возмущений

критические волновые числа монотонно уменьшаются с ростом ν , т.е. возмущения приобретают длинноволновый характер.

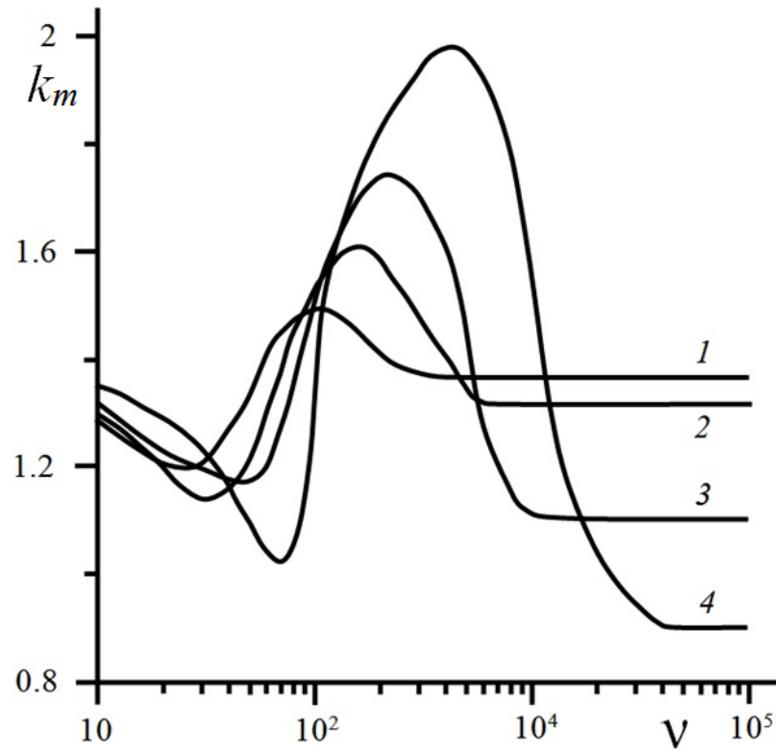


Рис. 5.16 Зависимости волновых чисел наиболее опасных возмущений от эффективной вязкости для монотонной моды неустойчивости. Обозначения кривых аналогичны рисунку 5.14

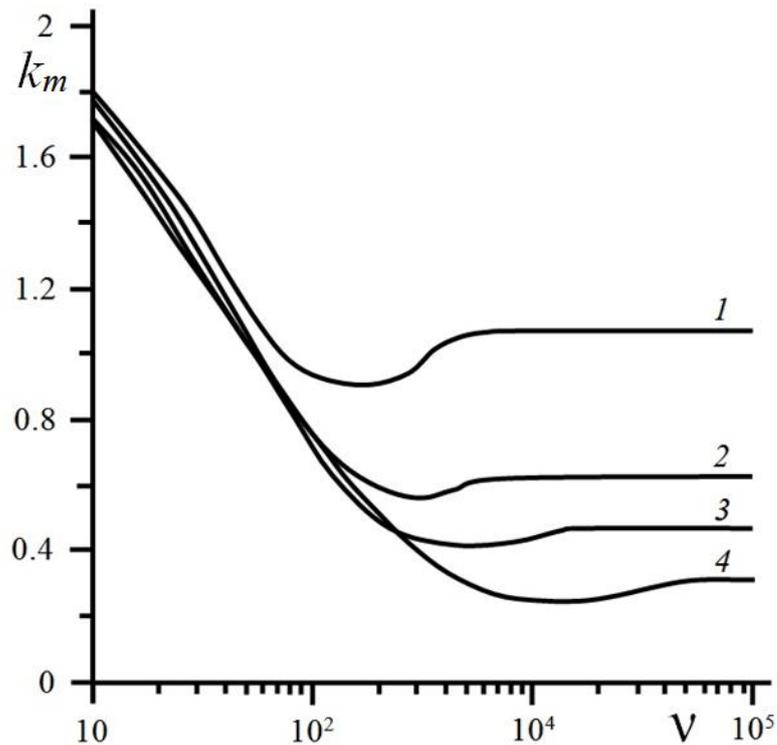


Рис. 5.17 Зависимости волновых чисел наиболее опасных возмущений от эффективной вязкости для колебательной моды неустойчивости. Обозначения кривых аналогичны рисунку 5.15

На рисунке 5.18 представлены зависимости минимального критического числа Gr_m от значения предельного напряжения сдвига D вязкопластичной жидкости. Кривая 1 построена для $Pr = 1$, кривая 2 – для $Pr = 100$. Кривые 1 и 2 являются результатом аппроксимации численных значений Gr_m и D , приведенных в таблице 5.5 и задаются уравнениями:

- кривая 1 - $\ln(Gr_m) = 29.09 \cdot D + 6.207$;
- кривая 2 - $\ln(Gr_m) = 24.11 \cdot D + 3.846$.

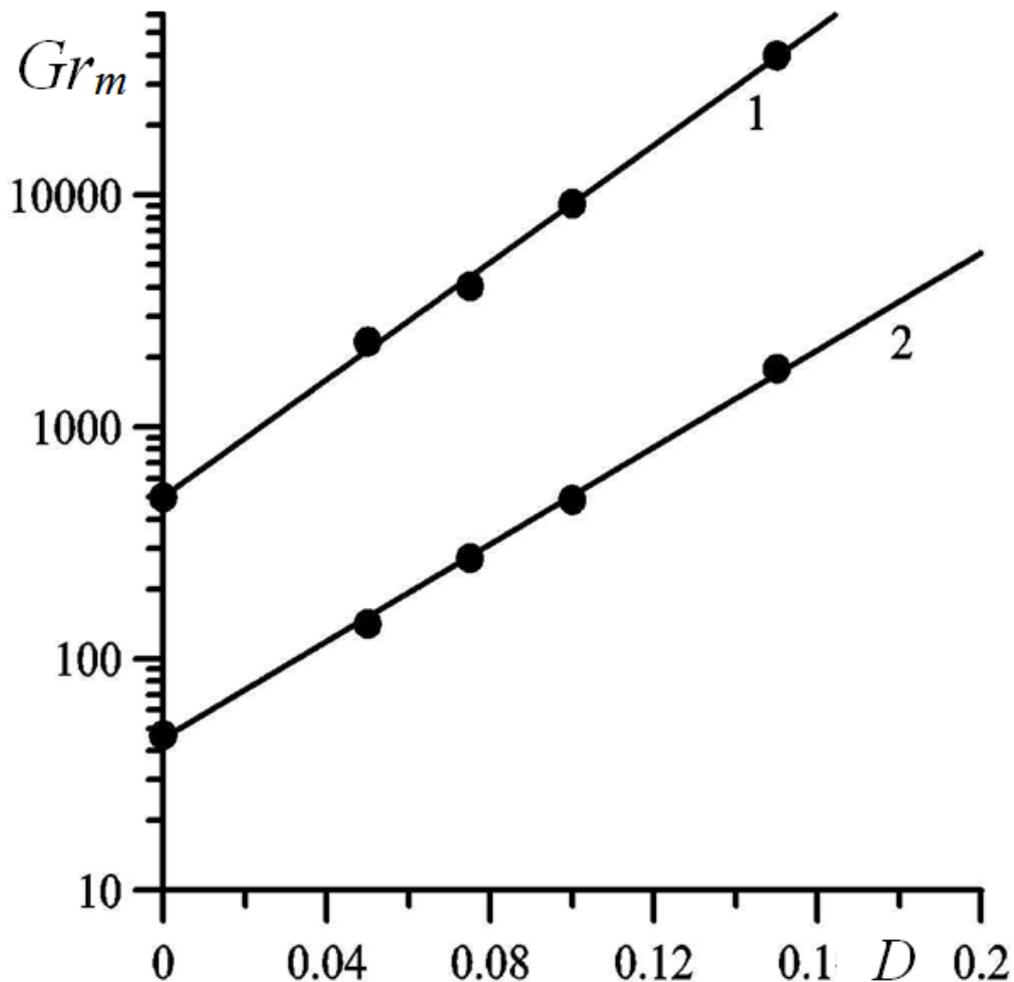


Рис. 5.18 Границы перехода жидкости Уильямсона от псевдопластичного к вязкопластичному поведению для $Pr = 1$ (1) и $Pr = 100$ (2)

Область параметров, лежащая правее кривых, соответствует вязкопластичному состоянию жидкости. При построении кривой 1 использовались данные, полученные для монотонной гидродинамической моды неустойчивости, которая для большинства значений D и Pr , близких к 1, является наиболее опасной. Кривая 2 соответствует колебательной тепловой моде, т.к. при больших Pr именно эта мода определяет характер неустойчивости течения.

Из рисунка 5.18 видно, что повышение динамического предела текучести (предельного напряжения сдвига) приводит к увеличению критического числа Грасгофа (градиента температуры), требуемого для разрушения жестких зон в сдвиговом течении жидкости.

На рисунке 5.19 представлены карты устойчивости вязкопластичной фазы жидкости Уильямсона на плоскости параметров $Gr_m - Pr$ для параметров D и ν , приведенных в таблице 5.6. Нумерация кривых соответствует таблице 5.6. Пунктирные линии на рисунке 5.19 определяют границы устойчивости относительно колебательных возмущений. Для сравнения на рисунок 5.19 нанесены кривые 5, построенные для ньютоновской жидкости.

N	D	ν	Gr_m^*	Pr^*
1	0.05	500	2233	2.60
2	0.075	1000	3783	2.04
3	0.1	1600	9167	1.28
4	0.15	6000	41051	0.575
5	0	0	470	12.45

Табл. 5.6 Реологические параметры исследованных вязкопластичных жидкостей и значения чисел Gr_m^* и Pr^* , соответствующих смене режима неустойчивости течения

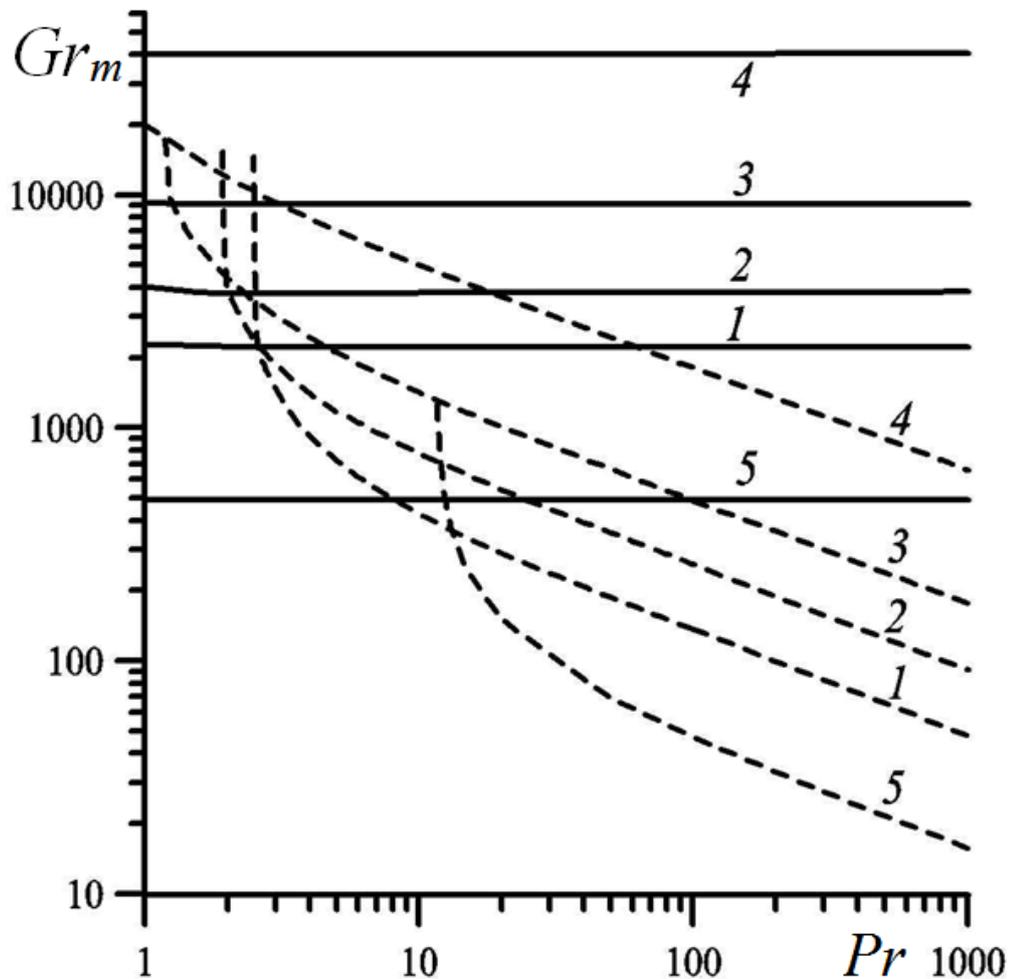


Рис. 5.19 Карты устойчивости вязкопластичного течения жидкости Уильямсона для монотонной (сплошные линии) и колебательной (штриховые линии) мод неустойчивости для D : 0.05 (1), 0.075 (2), 0.1 (3), 0.15 (4). Кривые 5 соответствуют ньютоновской жидкости

Видно, что при значениях чисел Прандтля, близких к единице, неустойчивость определяется монотонными гидродинамическими возмущениями. Однако для вязкопластичных жидкостей характерны числа $Pr > 10$. В этой области значений чисел Прандтля для всех D наиболее опасными являются тепловые колебательные моды. Поэтому на рисунке 5.19 область, соответствующая $Pr < 1$, не показана. Значения чисел Грасгофа и Прандтля, соответствующие смене характера неустойчивости для рассмотренных значений динамического предела текучести, указаны в таблице 5.6.

D	Pr	Gr_m	k_m
0.05	1	2286	1.373
	10	2227	1.307
	100	2231	1.304
0.075	1	4046	1.313
	10	3798	1.244
	100	3817	1.257
	1000	3830	1.263
0.1	1	9196	1.100
	10	9128	1.020
	100	9132	1.020
0.15	1	40050	0.900
	10	40156	0.860
	1000	40350	0.860

Табл. 5.7 Характерные значения минимальных критических чисел Gr_m и соответствующие им волновые числа k_m для монотонной моды неустойчивости

Минимальные критические числа Грасгофа и соответствующие им волновые числа монотонных возмущений для всех рассмотренных типов жидкостей незначительно изменяются во всем изученном диапазоне чисел Pr . Значения Gr_m и k_m для некоторых чисел Прандтля приведены в таблице 5.7.

Для колебательных мод в области чисел Прандтля, близких к единице, имеет место резкий рост минимальных критических чисел Грасгофа такой, что в области малых чисел Прандтля колебательные возмущения исчезают. По мере роста Pr наблюдается монотонное уменьшение минимальных критических чисел Грасгофа колебательных возмущений. Зависимость волновых чисел наиболее опасных колебательных возмущений от числа Pr приведена на рисунке 5.20.

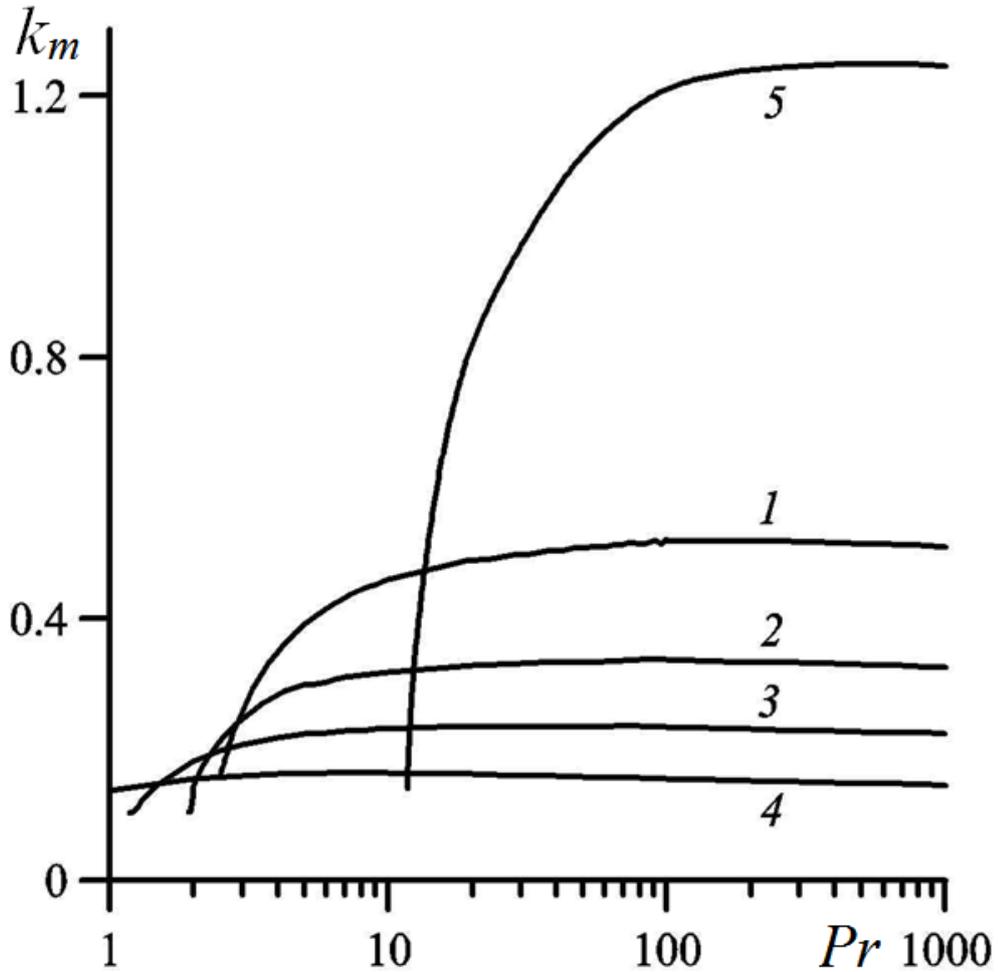


Рис. 5.20 Зависимость критических волновых чисел k_m колебательных возмущений вязкопластичных жидкостей от числа Прандтля. Обозначения кривых соответствуют рисунку 5.19

Из таблицы 5.7 и рисунка 5.20 видно, что усиление вязкопластичных свойств жидкости (увеличение D) приводит к уменьшению волновых чисел обоих типов возмущений. В области малых чисел Pr наблюдаются коротковолновые монотонные возмущения. Колебательные возмущения, напротив, с уменьшением Pr приобретают длинноволновый характер. С увеличением числа Прандтля волновые числа монотонных и колебательных возмущений стремятся к стационарному значению, величина которого определяется предельным вязким напряжением сдвига D данной жидкости.

5.3 Надкритические режимы конвекции жидкости Уильямсона в вертикальном слое

Проведем прямое численное моделирование плоских пространственно-периодических режимов течения, возникающих после потери устойчивости основного течения, на основе полных нелинейных уравнений конвекции (5.2) – (5.4). Безразмерные уравнения движения удобно записать в терминах завихренности ω и функции тока ψ

$$U_z = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad U_x = \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + Gr \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\omega}{\partial z} \right) = H\Delta\omega + \frac{\partial T}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial\omega}{\partial z} \right)$$

$$- 4 \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial z} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Gr \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad \omega = -\Delta\psi, \quad (5.14)$$

$$H = 1 + \frac{D}{b + \sqrt{4 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right)^2}}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Задача решалась в прямоугольной области $-1 \leq x \leq 1$ и $0 \leq z \leq L$, представляющей собой ячейку вертикального слоя длиной $L = 2\pi/k$, где k – волновое число наиболее опасных возмущений по результатам линейного анализа

устойчивости. На вертикальных границах слоя выполняются условия прилипания и постоянства температуры, а для завихренности записывается условие Тома

$$x = \mp 1: \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad T = \mp 1, \quad \omega|_{\Gamma} = 2 \frac{(\psi|_{\Gamma} - \psi|_{\Gamma-1})}{h^2}, \quad (5.15)$$

где h – шаг пространственной сетки. На горизонтальных границах области ставятся условия периодичности

$$(\omega, \psi, T)(x, z, t) = (\omega, \psi, T)(x, z + L, t), \quad (5.16)$$

Для решения задачи (5.14) – (5.16) применялся метод конечных разностей. Для аппроксимации уравнений использовалась явная схема с пространственным шагом сетки $h = 1/60$. При выборе шага пространственной сетки учитывались два фактора: первый – сходимость решения при уменьшении h ; второй – значения критических чисел Грасгофа при заданном k в линейных и нелинейных расчетах не должны отличаться более чем на 10%.

Стационарные решения задачи (в том числе режимы установившихся колебаний) получались методом установления. В качестве начальных условий задавалось возмущение завихренности. Далее прослеживалась эволюция этого возмущения.

Расчеты показали, что при значениях Gr , меньших критического для заданных k , ν , Pr и D , возмущения затухают, и устанавливается плоскопараллельное течение с линейным вдоль оси x распределением температуры (см. рис. 5.21, на котором представлены результаты нелинейных расчетов для $Gr = 760$ и $Pr = 1$, $\nu = 20$, $k = 1.216$, $D = 0.05$; критическое число Грасгофа согласно линейной теории устойчивости в этом случае равно 887).

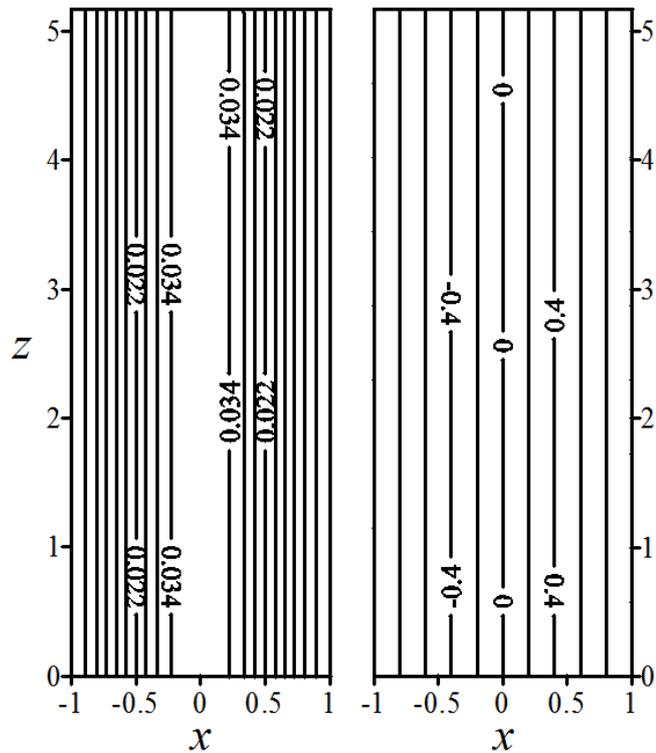


Рис. 5.21 Линии тока (слева) и изотермы (справа) для $Pr = 1$, $\nu = 20$, $k = 1.216$, $D = 0.05$ и $Gr = 760$

Наступление неустойчивости плоскопараллельного течения сопровождается кризисом теплопередачи. Будем характеризовать величину поперечного теплового потока через слой жидкости безразмерным критерием – числом Нуссельта

$$Nu = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\partial T}{\partial x} dz.$$

В расчетах определялся тепловой поток, приходящийся на единицу левой ($x = -1$) границы слоя.

Расчеты для числа Прандтля равного 1, при котором реализуется монотонная неустойчивость, показали, что при значениях числа Грасгофа, меньших критического (в режиме плоскопараллельного течения) $Nu = 1$. При достижении критического числа Грасгофа число Нуссельта становится большим единицы и

монотонно возрастает с ростом числа Грасгофа. На рисунке 5.22 показана зависимость Nu от Gr для $Pr = 1$, $\nu = 20$, $D = 0.05$ и $k = 1.216$. Кризис плоскопараллельного течения согласно нелинейным расчетам наступает при $Gr = 830$. Отличие на 6% от данных линейной теории обусловлено погрешностью нелинейных расчетов.

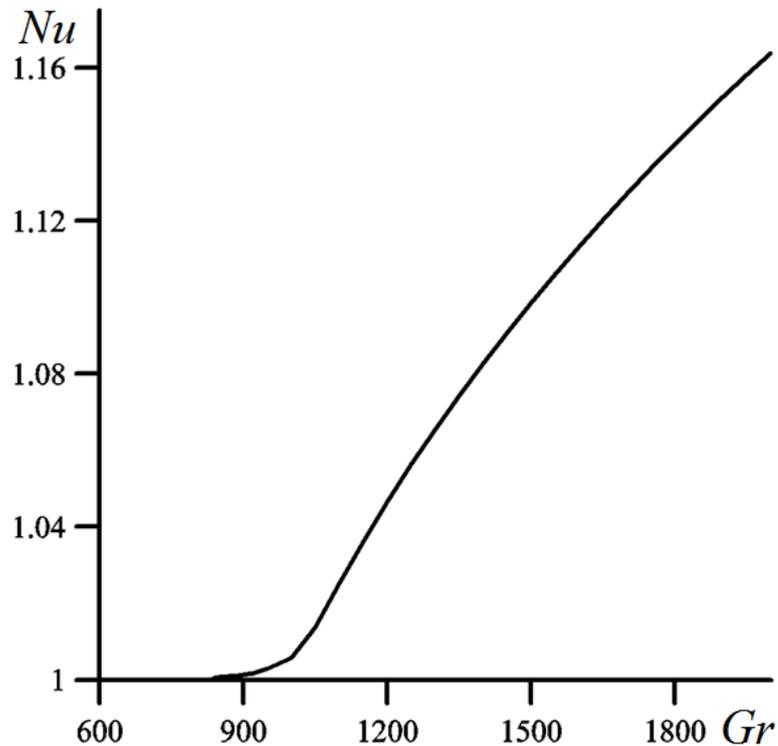


Рис. 5.22 Зависимость безразмерного теплового потока через слой (числа Нуссельта) от числа Грасгофа для $Pr = 1$, $\nu = 20$, $D = 0.05$ и $k = 1.216$

Линии тока и изотермы вторичного конвективного течения при $Gr = 1300$ приведены на рисунке 5.23. Видно, что на границе встречных потоков генерируется вихрь, интенсивность которого растет с увеличением числа Gr .

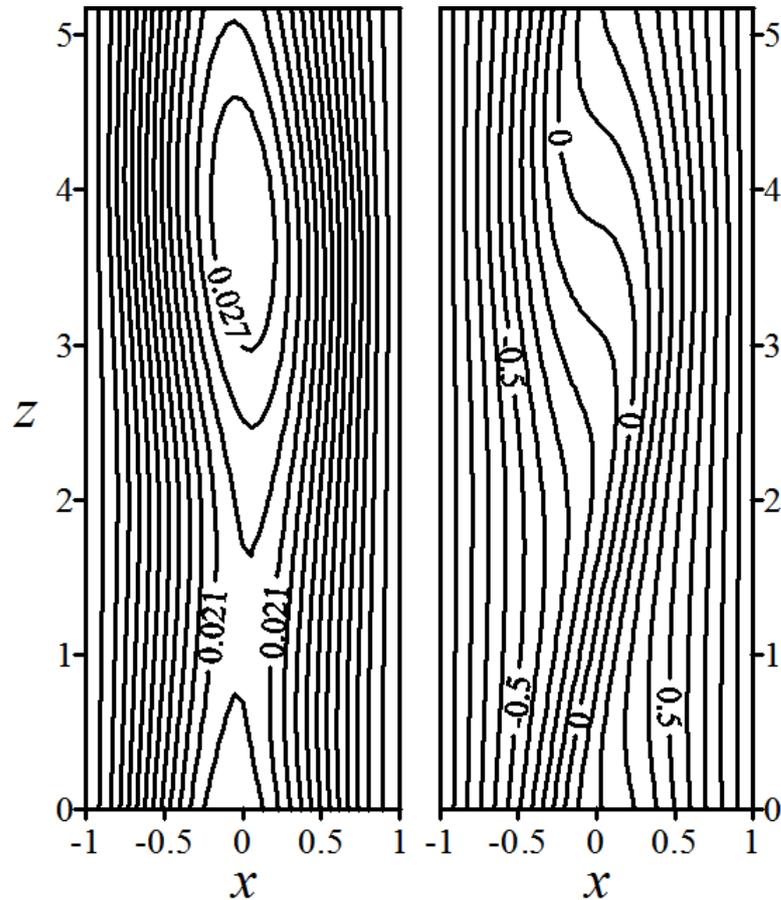


Рис. 5.23 Линии тока (слева) и изотермы (справа) для $Pr = 1$, $\nu = 20$, $k = 1.216$, $D = 0.05$ и $Gr = 1300$

При больших числах Прандтля, когда наиболее опасными являются колебательные возмущения, для чисел Грасхофа, превышающих критическое значение, устанавливается периодический колебательный режим конвекции. В этом случае, число Нуссельта с течением времени колеблется около некоторого среднего значения. Характерная форма установившихся колебаний числа Нуссельта при $Gr = 150$, $Pr = 100$, $\nu = 20$, $D = 0.05$ и $k = 0.78$ приведена на рисунке 5.24.

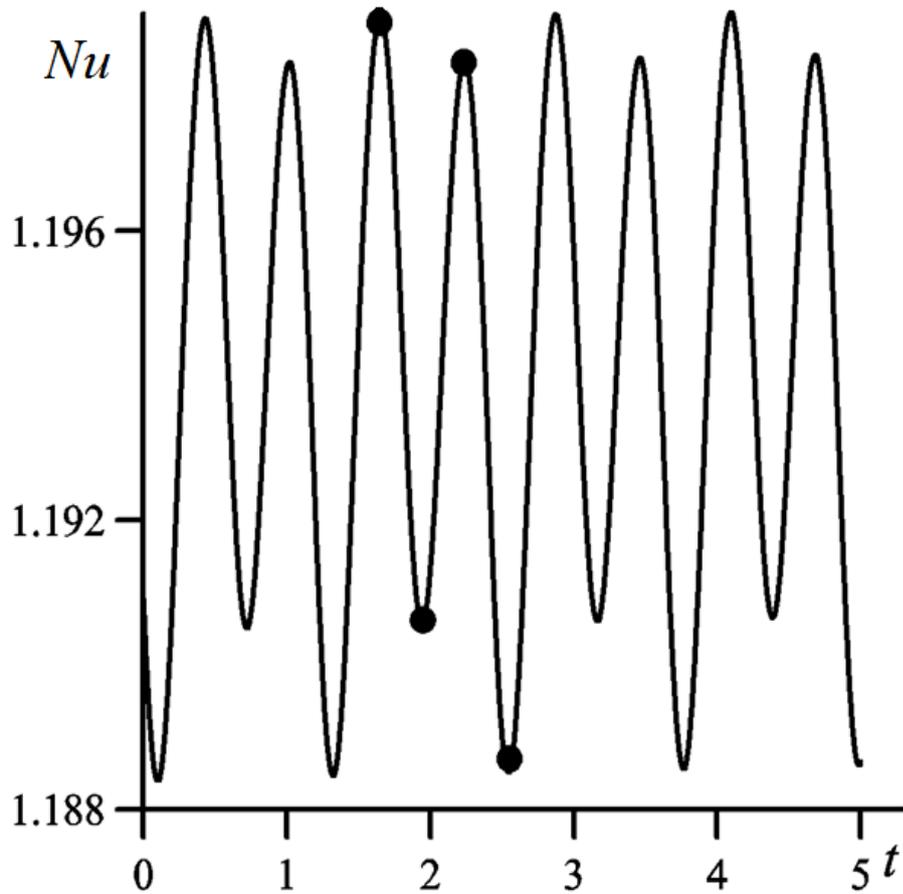


Рис. 5.24 Зависимость числа Нуссельта от времени для установившегося колебательного конвективного режима при $Gr = 150$. Точками отмечены моменты времени, для которых на рисунке 5.26 приведена структура вторичного течения

Зависимость среднего значения Nu от числа Gr для $Pr = 100$ показана на рисунке 5.25. При числах Грасгофа, меньших критического, в слое наблюдается плоскопараллельное течение, аналогичное тому, что приведено на рисунке 5.21; число Нуссельта постоянно и равно 1. При превышении критического значения числа Gr в слое возникают колебания, амплитуда и частота которых возрастают с ростом числа Грасгофа (на рис. 5.25 приведены средние значения числа Нуссельта).

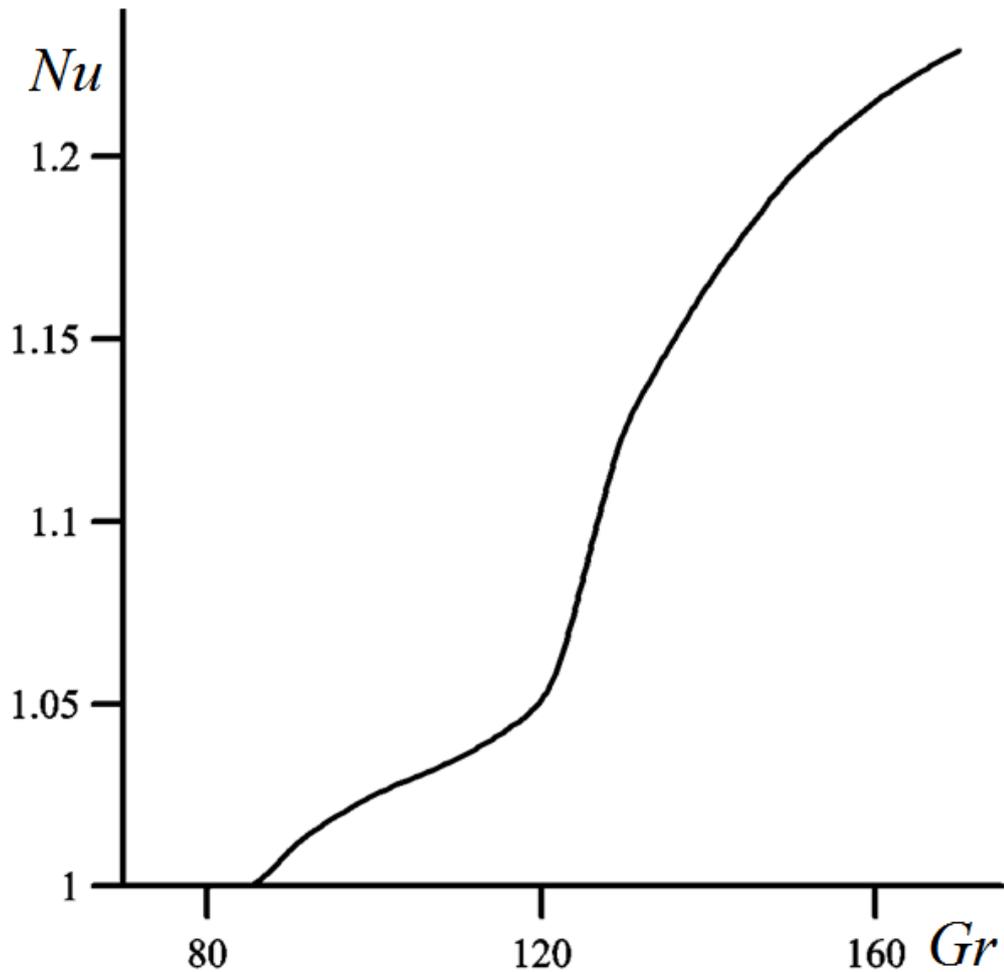


Рис. 5.25 Зависимость среднего значения безразмерного теплового потока через слой (числа Нуссельта) от числа Грасгофа для $Pr = 100$, $\nu = 20$, $D = 0.05$ и $k = 0.78$

Согласно нелинейным расчетам критическое число Грасгофа для случая $Pr = 100$, $\nu = 20$, $D = 0.05$ и $k = 0.78$ равно $Gr = 85$, которое на 4.5% отличается от критического значения Gr , предсказанного линейной теорией (линейные расчеты для указанных параметров дают критическое число Грасгофа равное 89). Частота установившихся колебаний в нелинейных расчетах в этом случае близка к 0.5, что также удовлетворительно согласуется с результатами линейных расчетов (частота колебаний согласно линейным расчетам 0.495).

На рисунке 5.26 приведены линии тока установившегося колебательного режима при $Gr = 150$ для моментов времени и значений чисел Nu , отмеченных точками на рисунке 5.24. Видно, что, как и в случае монотонной неустойчивости, на границе встречных потоков возникают вихри, положение и интенсивность

которых периодически изменяется со временем. Причиной пульсаций конвективного потока является тепловая волна, распространяющаяся вдоль слоя. Характерная форма этой волны приведена на рисунке 5.27.

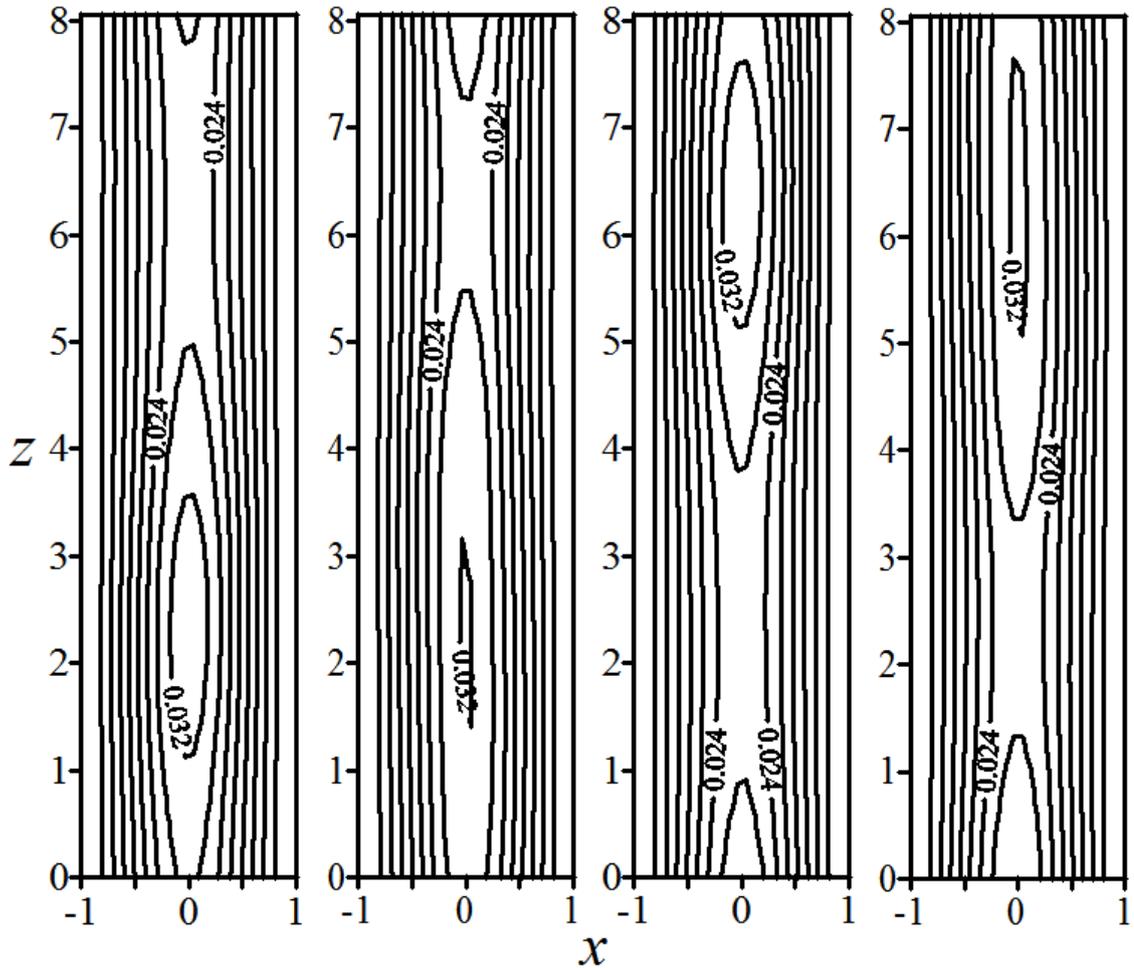


Рис. 5.26 Линии тока установившегося вторичного колебательного режима при $Pr = 100$, $\nu = 20$, $D = 0.05$, $k = 0.78$ и $Gr = 150$. Фрагменты соответствуют точкам на рисунке 5.24

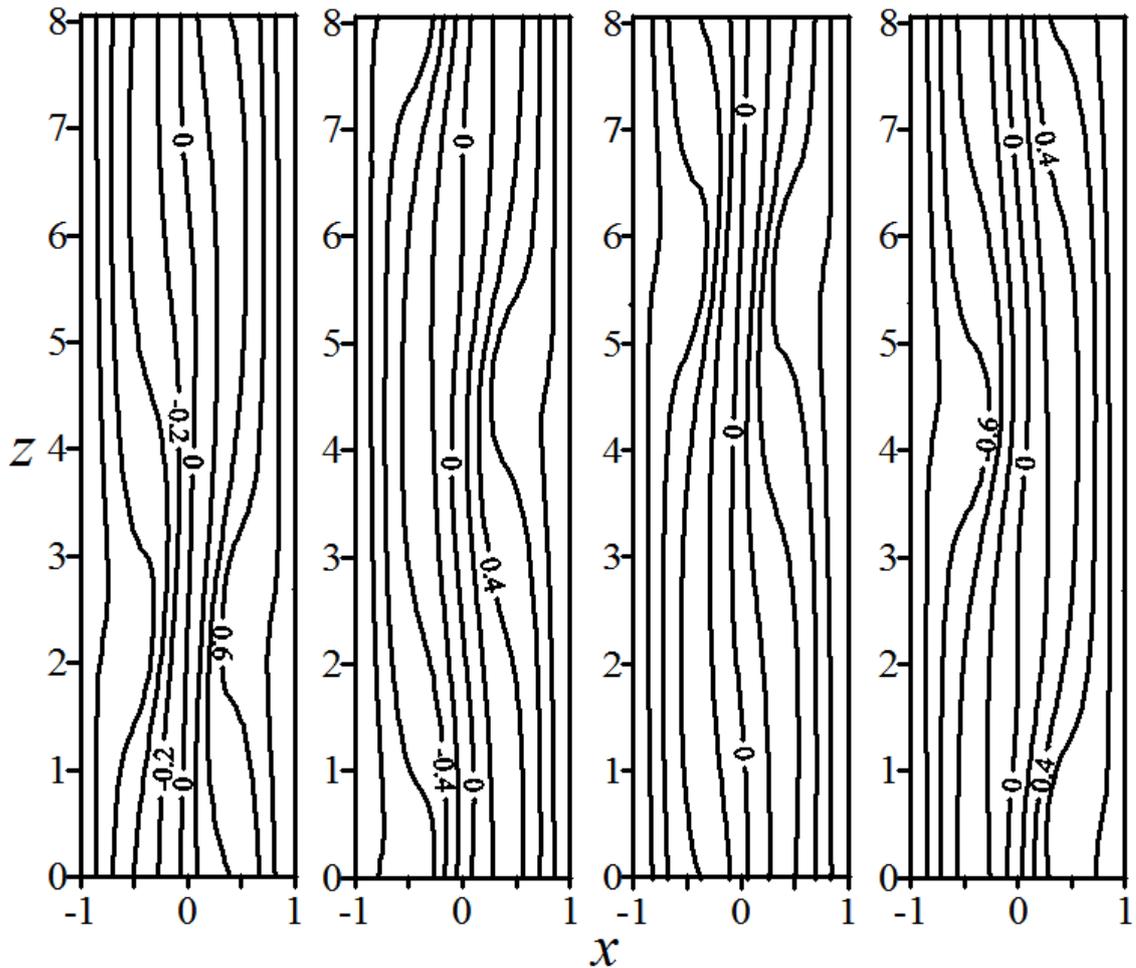


Рис. 5.27 Изолинии температурного поля для установившегося колебательного режима при $Pr = 100$, $\nu = 20$, $D = 0.05$, $k = 0.78$ и $Gr = 150$. Фрагменты соответствуют точкам на рисунке 5.24

5.4 Основные результаты и выводы

Исследована устойчивость плоскопараллельного конвективного течения жидкости Уильямсона между двумя параллельными вертикальными плоскостями, на которых поддерживаются постоянные разные температуры. Рассмотрены плоские возмущения, которые в случае ньютоновской жидкости являются наиболее опасными. Основные расчеты проводились для предела текучести $D \leq 0.25$.

Показано, что для жидкости Уильямсона, как и для ньютоновской жидкости, имеются две моды неустойчивости: гидродинамическая монотонная и тепловая

колебательная. Монотонная мода существует при всех значениях числа Прандтля. Колебательная мода при малых значениях числа Прандтля исчезает.

Для малых и умеренных значений параметра ν , соответствующих псевдопластичному поведению жидкости Уильямсона, найдено, что с усилением псевдопластичных свойств (увеличением параметра ν) минимальное критическое значение модифицированного числа Гразгофа G_m (числа Грасгофа, определенного по вязкости при малых скоростях деформаций) для обеих мод неустойчивости монотонно уменьшается. Получены карты устойчивости на плоскости параметров $G_m - Pr$ для различных значений реологического параметра D . Увеличение D приводит к существенному повышению порога устойчивости течения относительно обоих типов возмущений. Показано, что пороговое значение числа Прандтля, определяющее переход от монотонной неустойчивости течения псевдопластичной жидкости к колебательной, уменьшается с ростом параметра D .

Для больших значений параметра ν , соответствующих вязкопластичному поведению жидкости Уильямсона, увеличение ν приводит к повышению критического числа Грасгофа Gr_m для обеих мод неустойчивости при всех рассмотренных D . При $D < 0.25$, повышение Gr_m с ростом ν происходит до некоторого предельного значения, зависящего от D . При дальнейшем увеличении ν зависимости Gr_m от ν выходят на насыщение, соответствующее вязкопластичному поведению. Получены зависимости числа Gr от ν , определяющие переход от псевдопластичного поведения жидкости к вязкопластичному.

Получены карты устойчивости течения вязкопластичной жидкости на плоскости параметров $Gr_m - Pr$ для различных значений динамического предела текучести. Показано, что пороговое значение числа Прандтля, определяющее переход от монотонной неустойчивости к колебательной, уменьшается с ростом предельного напряжения сдвига D и для $D \leq 0.15$ становится меньше единицы. Пороговое число Грасгофа, напротив, увеличивается с ростом D для обоих типов возмущений.

Проведено прямое численное моделирование пространственно-периодических структур, возникающих в вертикальном слое псевдопластичной жидкости после потери устойчивости стационарного плоскопараллельного течения.

Показано, что после потери устойчивости основного течения на границе встречных потоков генерируется периодическая цепочка вихрей. В случае монотонной моды неустойчивости это неподвижные вихри, а при колебательном характере неустойчивости интенсивность и положение вихрей в установившемся режиме течения периодически изменяется со временем, что обусловлено распространяющейся вдоль слоя тепловой волной. Рост числа Грасгофа приводит к увеличению амплитуды и частоты пульсаций. Полученные в нелинейных расчетах значения критических чисел Грасгофа и частоты критических колебательных возмущений близки к найденным в результате линейного анализа устойчивости.

ГЛАВА 6. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В настоящей главе рассматриваются тепло- и массоперенос в жидких металлах или расплавах, реология которых определяется ньютоновским законом. Особенностью таких жидкостей является высокая электропроводность. Это обстоятельство делает возможным управлять переносом тепла и конвективным течением в этих жидкостях с помощью электромагнитных полей.

В первой части главы рассматривается задача об адвективном течении слабопроводящей жидкости в бесконечном горизонтальном канале прямоугольного сечения, находящемся в постоянном магнитном поле. Исследуется устойчивость такого течения и влияние на его устойчивость магнитных полей различной величины и ориентации. Практическое применение результатов этих исследований связано с выращиванием чистых кристаллов методом Бриджмена.

Во второй части главы сформулирована задача о тепло- массопереносе в металлическом расплаве, получающемся в промышленной индукционной печи. Считается, что температура расплава выше точки Кюри, т.е. металл находится в парамагнитном состоянии. Переменное высокочастотное неоднородное электромагнитное поле порождает конвективное течение в расплаве, которое в свою очередь влияет на перенос тепла и примесей. В осесимметричной постановке сформулирована математическая модель, позволяющая: определить пространственно-временное распределение электромагнитного поля в области расплава, плотность индукционных токов, мощность источников теплоты, тепло- и массоперенос в расплаве.

6.1 Влияние магнитного поля на устойчивость адвективного течения проводящей жидкости в горизонтальном канале прямоугольного сечения

Течение, созданное в жидкости горизонтальным градиентом температуры, активно исследуется на протяжении многих лет. Обобщение результатов этих исследований можно найти в монографии [80]. Там же описано влияние горизонтального магнитного поля на устойчивость стационарного плоскопараллельного течения жидкости между бесконечными параллельными вертикальными плоскостями.

В работах [2, 4, 369] разработаны и описаны алгоритмы для численного исследования устойчивости конвективных течений. Авторами этих работ проведены расчеты устойчивости конвективного течения жидкости в бесконечном горизонтальном канале прямоугольного сечения по отношению к малым трехмерным возмущениям. Полагалось, что градиент температуры направлен вдоль оси канала. Показано, что наличие боковых стенок повышает устойчивость стационарного конвективного течения.

Результаты экспериментальных и численных исследований двумерных и трехмерных течений слабопроводящей жидкости в магнитном поле при наличии горизонтального градиента температуры представлены в работах [261, 284-286]. Рассматривались вытянутые по горизонтали прямоугольные полости (Bridgman configuration). Показано, что с усилением магнитного поля течение жидкости становится менее интенсивным и приобретает погранслоный характер, т.е. основные изменения скорости движения происходят вблизи стенок полости. Кроме того в [284, 285] показано, что в случае вертикального поля при числах Гартмана больших 10 вдали от торцов полости абсолютное значение максимума продольной компоненты скорости спадает по закону Ha^{-1} , а модуль скорости в центре верхнего или нижнего потока жидкости уменьшается по закону Ha^{-2} .

В работе [285] проведен численный анализ устойчивости двумерного конвективного течения в вытянутой по горизонтали прямоугольной полости при наличии горизонтального градиента температуры. Верхняя граница полости

полагалась свободной. Показано, что магнитное поле оказывает в целом стабилизирующее действие: увеличение числа Гартмана Ha приводит к росту критического значения числа Грасгофа Gr . Для малых значений числа Прандтля Pr наиболее опасными являются двумерные колебательные моды неустойчивости. С ростом Pr на первый план выходят трехмерные колебательные возмущения.

Конвективное течение в горизонтальном слое с твердыми границами горизонтальным градиентом температуры и постоянного магнитного поля, изучалось в работе [275]. Показано, что для небольших чисел Прандтля ($Pr \leq 0.3$) течение может быть неустойчиво к двум типам возмущений: двумерным стационарным и трехмерным колебательным. Проведен линейный анализ устойчивости течения, а также энергетический анализ возмущений. Показано, что вертикально направленное магнитное поле обладает наибольшим стабилизирующим эффектом по сравнению с поперечным и продольным по отношению к направлению основного потока полями.

Стабилизация интенсивных течений магнитным полем используется в технологических приложениях, связанных с выращиванием кристаллов. В работе изучено конвективное течение в бесконечном канале прямоугольного сечения с градиентом температуры направленном вдоль оси канала. Это типичная конфигурация для горизонтального метода Бриджмена (Bridgman) по выращиванию кристаллов. Исследуются случаи вертикальной и горизонтальной (поперечной к каналу) ориентации магнитного поля. Изучается структура основного стационарного течения жидкости и исследуется его устойчивость.

6.1.1 Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим вязкую электропроводящую жидкость (жидкий металл или расплав) с постоянной электропроводностью σ_e , находящуюся в горизонтальном канале прямоугольного сечения (см. рис. 6.1) высотой H и шириной L . Для характеристики геометрии канала введем безразмерный параметр $l = L/H$. Градиент температуры ∇T^* направлен вдоль оси z , совпадающей с осью канала.

Система находится в постоянном магнитном поле \vec{B}_0 , направленно под углом α к оси x . Для описания свободной конвекции принимается приближение Буссинеска. Жидкость полагается ньютоновской, коэффициенты кинематической вязкости ν и температуропроводности χ считаются постоянными.

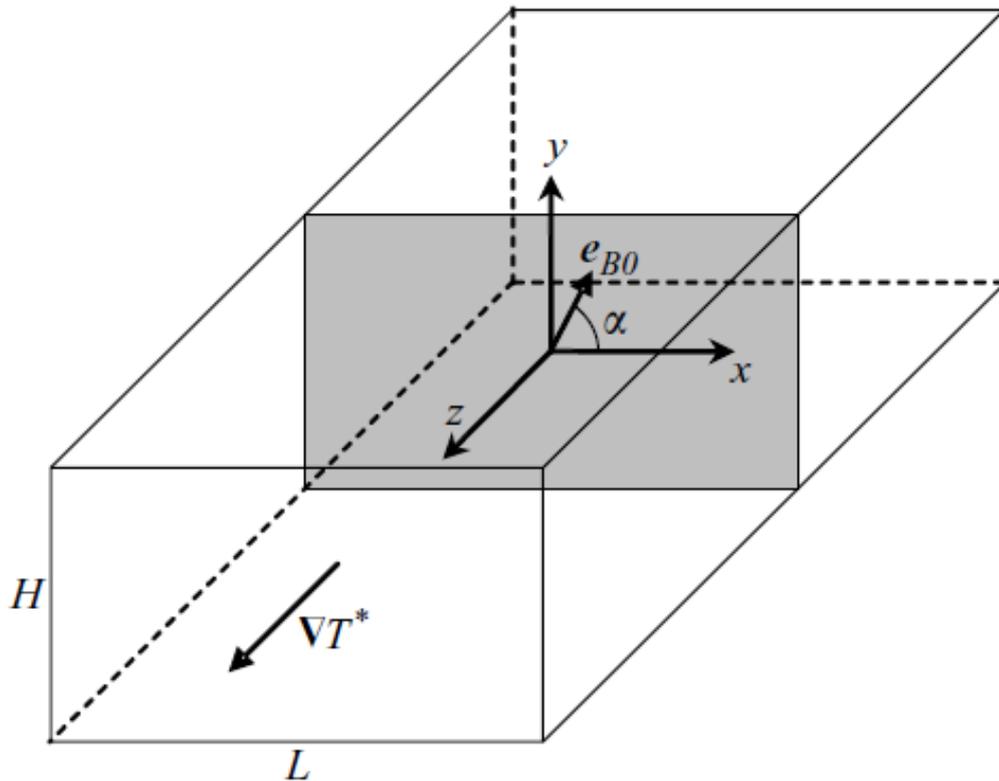


Рис. 6.1 Геометрия полости. Векторы ∇T^* и \vec{e}_{B_0} определяют направление градиента температуры и магнитного поля

Выражение для силы Лоренца в уравнении движения жидкости можно записать в следующем виде

$$\vec{F} = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}, \quad (6.1)$$

где ρ_e – плотность свободных электрических зарядов; $\vec{E} = -\nabla\phi$ – вектор напряженности электрического поля; ϕ – потенциал электрического поля; \vec{J} –

плотность электрического тока; $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ – вектор магнитной индукции; \vec{b} – вектор индукции магнитного поля индуцированного током. Согласно закону Ома для плотности электрического тока имеем

$$\vec{J} = \rho_e \vec{V} + \sigma_e (-\nabla\phi + \vec{V} \times \vec{B}) \quad (6.2)$$

где \vec{V} – вектор скорости; ∇ – оператор градиента.

Будем считать ρ_e настолько малой величиной, что слагаемыми $\rho_e \vec{E}$ и $\rho_e \vec{V}$ в (6.1) и (6.2) можно пренебречь. Для магнитного поля полагается, что $B_0 \gg b$, тогда можно пренебречь индуцированным магнитным полем \vec{b} , т.е. полное магнитное поле считать равным \vec{B}_0 . Это безындукционное приближение для жидких металлов было обосновано в работе [370], а затем использовано в ряде работ [261, 275, 285, 286] по исследованию устойчивости конвективных течений. Принимая описанные выше приближения, для силы Лоренца можно записать следующее выражение:

$$\vec{F} = \sigma_e (-\nabla\phi + \vec{V} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0. \quad (6.3)$$

Выберем в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, давления, температуры, электрического потенциала и тока соответственно величины H , $H^2\nu^{-1}$, νH , $\rho_0\nu^2 H^{-2}$, $\nabla T^* H$, νB_0 , $\sigma_e \nu B_0 H^{-1}$. Тогда безразмерные уравнения движения проводящей жидкости в магнитном поле примут вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \Delta \vec{V} + GrT \vec{e}_y + Ha^2 \vec{J} \times \vec{e}_{B_0}, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \nabla T) = \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad (6.5)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (6.6)$$

$$\vec{J} = -\nabla \Phi + \vec{V} \times \vec{e}_{B_0}, \quad (6.7)$$

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0, \quad (6.8)$$

где содержатся следующие безразмерные переменные: вектор скорости $\vec{V} = (U, V, W)$, давление P , температура T , потенциал Φ и вектор плотности тока \vec{J} , Δ – оператор Лапласа. Единичные вектора \vec{e}_y и \vec{e}_{B_0} направлены соответственно вертикально вверх и по направлению магнитного поля. Комбинируя уравнения (6.7) и (6.8), можно получить уравнение для потенциала

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} (\vec{V} \times \vec{e}_{B_0}). \quad (6.9)$$

Задача (6.4) – (6.9) характеризуется четырьмя безразмерными параметрами: числами Грасгофа – $Gr = g\beta \nabla T^* H^4 / \nu^2$; Прандтля – $Pr = \nu \chi^{-1}$, Гартмана – $Ha = B_0 H \sqrt{\sigma_e / \rho_0 \nu}$ и масштабным параметром – $l = L/H$.

Границы полости $x = \pm 1/2$ и $y = \pm l/2$ считаются твердыми, идеально-теплопроводными и электроизолированными, т.е. на них выполняются условия прилипания $\vec{V} = 0$, поддерживается постоянное распределение температуры и $\partial \Phi / \partial n = 0$, где \vec{n} – нормаль к стенкам канала.

6.1.2 Основное течение

Для выбранной геометрии канала при заданных условиях нагрева и ориентации внешнего магнитного поля уравнения (6.4) – (6.9) допускают стационарное решение, в котором скорость, отклонение температуры от распределения, соответствующего продольному градиенту температуры и потенциал не зависят от координаты z :

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y) = (\vec{u}(x, y), W(x, y)), \quad T = z + \theta(x, y), \quad \Phi = \Phi(x, y). \quad (6.10)$$

Дифференцируя уравнение (6.4) по z с учетом (6.10) и проецируя его на оси координат, получаем:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = Gr, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0.$$

Из полученной системы находим распределение давления

$$P = Gryz + Cz + \Pi(x, y), \quad (6.11)$$

где C – некоторая константа.

Подставляя выражения (6.10) и (6.11) в исходную систему уравнений (6.4) – (6.9), получаем:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = -\nabla \Pi + \Delta \vec{u} + Gr \theta \vec{e}_y + Ha^2 \vec{f}, \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) W = -Gr y - C + \Delta W + Ha^2 F_z, \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \nabla \theta) + W = \frac{1}{Pr} \Delta \theta, \quad (6.14)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \Delta \Phi = \operatorname{div}(\vec{V} \times \vec{e}_{B0}), \quad (6.15)$$

$$\vec{F} = (-\nabla \Phi + \vec{V} \times \vec{e}_{B0}) \times \vec{e}_{B0}, \quad (6.16)$$

где $\vec{F} = (\vec{f}(x, y), F_z(x, y))$, а $\vec{f} = (F_x, F_y)$, $\vec{u} = (U(x, y), V(x, y))$. Все дифференциальные операторы в уравнениях (6.12) – (6.16) определены в плоскости x, y .

Интегрируя уравнение (6.13) по поперечному сечению канала S и учитывая условие замкнутости потока $\int_S W dS = 0$, для константы C находим:

$$C = \frac{1}{S} \int_S \Delta W dS + \frac{Ha^2}{S} \int_S F_z dS. \quad (6.17)$$

Введем функцию тока в плоскости x, y и завихренность течения

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Omega = (\operatorname{rot} \vec{u})_z. \quad (6.18)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда вектор магнитного поля \vec{e}_{B0} лежит в плоскости x, y . Его ориентация в этом случае может быть задана полярным углом α , отсчитываемым от оси x . Тогда система уравнений (6.12) – (6.16), описывающих движение жидкости, с учетом (6.18) примет вид:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \mathfrak{I}(\psi, \Omega) = \Delta \Omega + Gr \frac{\partial \theta}{\partial y} + \quad (6.19)$$

$$+ Ha^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \sin^2 \alpha + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cos^2 \alpha \right),$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathfrak{I}(W, \psi) = -Gr y - C + \Delta W + Ha^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin \alpha - W \right), \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathfrak{I}(\theta, \psi) + W = \frac{1}{Pr} \Delta \theta, \quad (6.21)$$

$$\Omega = -\Delta \psi, \quad \Delta \Phi = \left(\frac{\partial W}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial W}{\partial x} \sin \alpha \right), \quad (6.22)$$

$$C = \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} \frac{\partial W}{\partial n} d\Gamma + \frac{Ha^2}{S} \int_S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin \alpha \right) dS, \quad (6.23)$$

где $\mathfrak{I}(q, g) = \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y}$, Γ – контур, ограничивающий поверхность S .

Граничные условия на стенках канала имеют вид:

$$\psi|_{\Gamma} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \theta|_{\Gamma} = W|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (6.24)$$

Решение задачи (6.19) – (6.24) для основного стационарного течения осуществлялось численно методом конечных разностей. Расчеты производились

на равномерных сетках с квадратными ячейками. Оптимальные размеры ячеек для различных ситуаций определялись в ходе численных экспериментов для полости квадратного сечения ($l=1$). Критериями выбора размеров ячеек и верификации численных результатов служили:

- сходимость численных результатов при уменьшении размера ячейки;
- правильность отражения результатами расчетов асимптотик при больших числах Гартмана [284, 286].

На основании тестовых расчетов, для $Pr=0$ и вертикального магнитного поля была выбрана ячейка со стороной $1/100$, а для горизонтального поля и нулевого числа Прандтля ячейка со стороной $1/90$. При $Pr \neq 0$ основной поток менее интенсивен, чем при $Pr=0$, поэтому для обеих ориентаций поля достаточной оказалась сетка с размером ячейки $1/70$.

Сформулированная выше задача (6.19) – (6.24) не допускает решений, соответствующих плоскопараллельному течению, кроме случая, когда $Pr=0$ [295].

6.1.2.1 Случай нулевого числа Прандтля

При $Pr=0$ задача (6.19) – (6.24) допускает стационарное решение вида

$$\vec{V} = (0, 0, Gr \cdot W(x, y)), \quad \theta(x, y) = 0, \quad \Phi = Gr \cdot \Phi(x, y),$$

описывающее плоскопараллельное течение. В этом случае задача (6.19) – (6.24) значительно упрощается:

$$0 = -y - C + Ha^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin \alpha - W \right) + \Delta W, \quad (6.25)$$

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\partial W}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial W}{\partial x} \sin \alpha \right), \quad (6.26)$$

$$W|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \quad (6.27)$$

где константа C определяется из уравнения (6.23), а дифференциальный оператор Лапласа Δ определен на плоскости xu .

Вектор плотности тока при $Pr = 0$ записывается в виде $\vec{J}(x, y) = (J_x, J_y, 0)$. Распределение электрического тока в поперечном сечении канала можно описать функцией ψ_j , которая вводится следующим образом

$$\vec{J}(x, y) = -\text{rot}(\psi_j \vec{e}_z) = -\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \vec{e}_y,$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – единичные векторы (орты) вдоль осей x, y и z соответственно. Уравнение (6.8) в этом случае тождественно удовлетворяется. Можно утверждать, что электрический ток в поперечном сечении канала течет вдоль изолиний функции ψ_j .

На рисунках 6.2 – 6.5 представлены изолинии скорости и потенциала, а также функции ψ_j для горизонтального ($\alpha = 0$) и вертикального ($\alpha = \pi/2$) магнитных полей. В нижней части области жидкость движется в направлении, совпадающем с направлением приложенного градиента температуры, в верхней части – в противоположном направлении (см. фрагменты a на рис. 6.2 – 6.5).

В горизонтальном поле при больших значениях числа Гартмана ($Ha > 10$) у боковых стенок полости образуются пограничные слои, в которых скорость претерпевает резкие изменения в горизонтальном направлении. Положение

экстремумов поля скорости смещается с ростом величины магнитного поля от центра полости к верхней и нижней стенкам, где при больших Ha наблюдается наибольшая интенсивность течения (см. рис. 6.2а и рис. 6.3а).

Из распределения потенциала (рис. 6.2б и рис. 6.3б) и картины изолиний функции ψ_j (рис. 6.2в и рис. 6.3в) видно, что электрический ток течет от центра полости вдоль оси y к верхней и нижней стенкам, а затем вдоль боковых стенок и оси x , образуя в полости четыре замкнутых вихря. С увеличением числа Гартмана величина тока уменьшается, и он запирается в пограничных слоях, примыкающих к вертикальным границам полости. Наибольшую интенсивность плотность тока при больших Ha имеет вблизи углов расчетной области (см. рис. 6.3в).

Из рисунков 6.4а и 6.5а, построенных для $Ha = 5$ и $Ha = 100$ соответственно, видно, что вертикальное магнитное поле более существенно по сравнению с горизонтальным полем изменяет структуру основного конвективного течения. В сильном вертикальном магнитном поле (рис. 6.5а) движение жидкости происходит в пограничных слоях, примыкающих к вертикальным стенкам канала. В центре канала образуется малоподвижное ядро.

Электрический ток в слабых магнитных полях (см. рис. 6.4в) образует структуру, состоящую из большого центрального вихря и двух малых вихрей, примыкающих к горизонтальным границам полости. С увеличением магнитного поля (см. рис. 6.5в) центральный вихрь увеличивается в размерах, а малые вихри разделяются, образуя структуру из четырех вихрей, расположенных в углах полости. При обеих рассматриваемых ориентациях магнитного поля абсолютные значения потенциала электрического поля и плотности тока уменьшаются с ростом числа Гартмана.

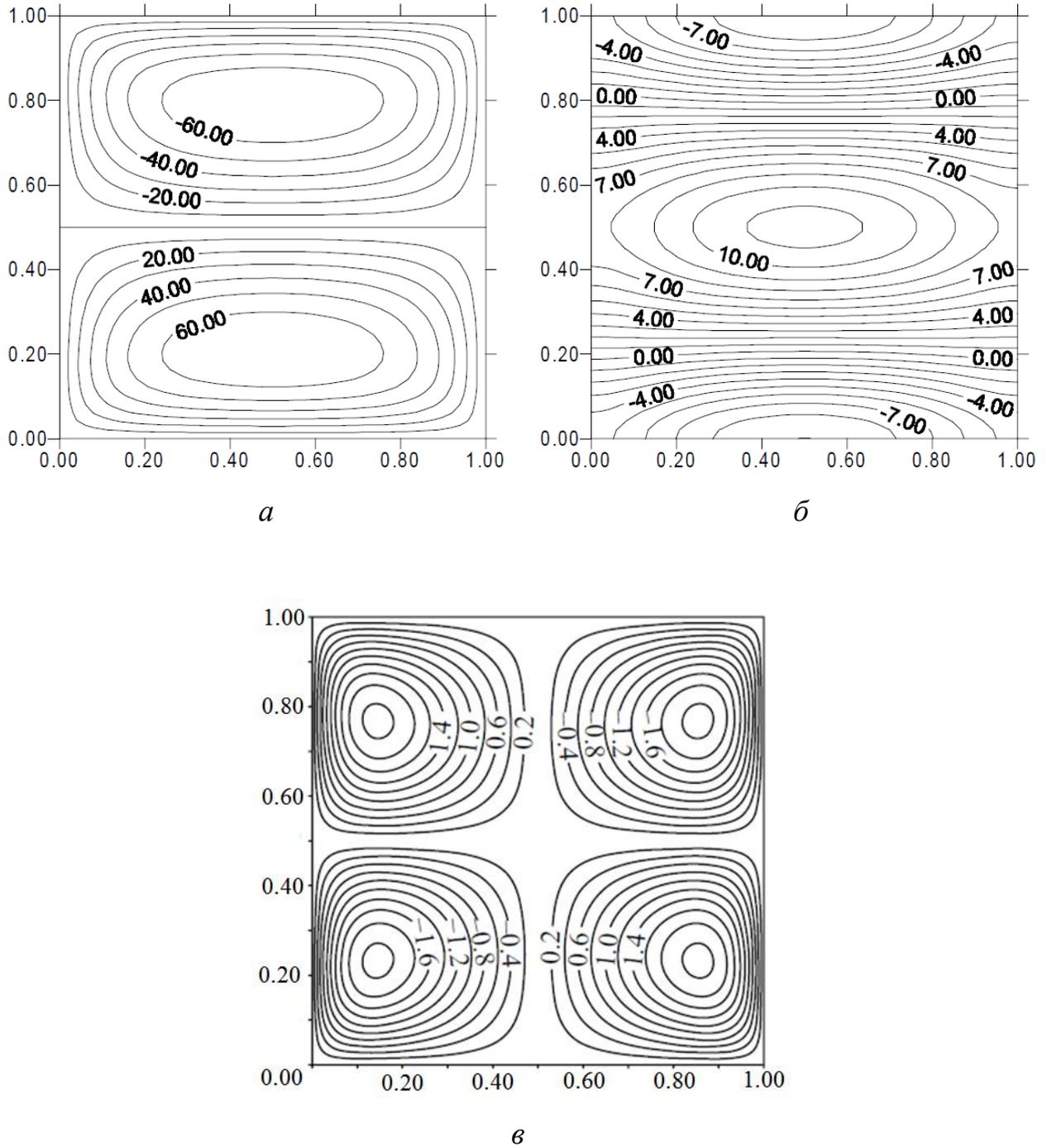


Рис. 6.2 Изолинии: *a* – продольной компоненты скорости; *б* – электрического потенциала; *в* – плотности электрического тока для $Ha = 5$ в случае горизонтального магнитного поля ($Pr = 0$, $Gr = 10^5$, $l = 1$)

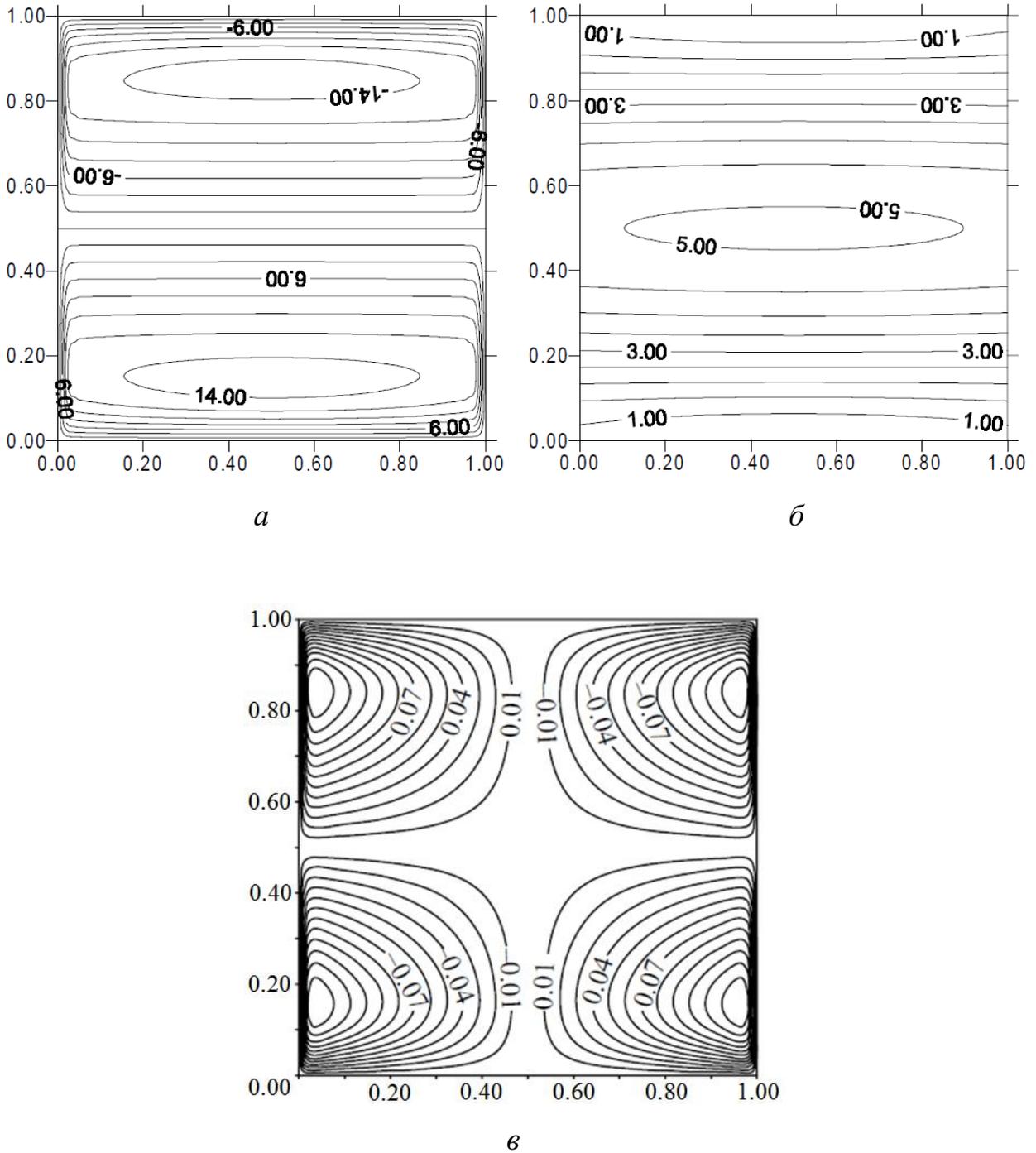


Рис. 6.3 Изолинии: *a* – продольной компоненты скорости; *б* – электрического потенциала; *в* – плотности электрического тока для $Ha = 100$ в случае горизонтального магнитного поля ($Pr = 0$, $Gr = 10^5$, $l = 1$)

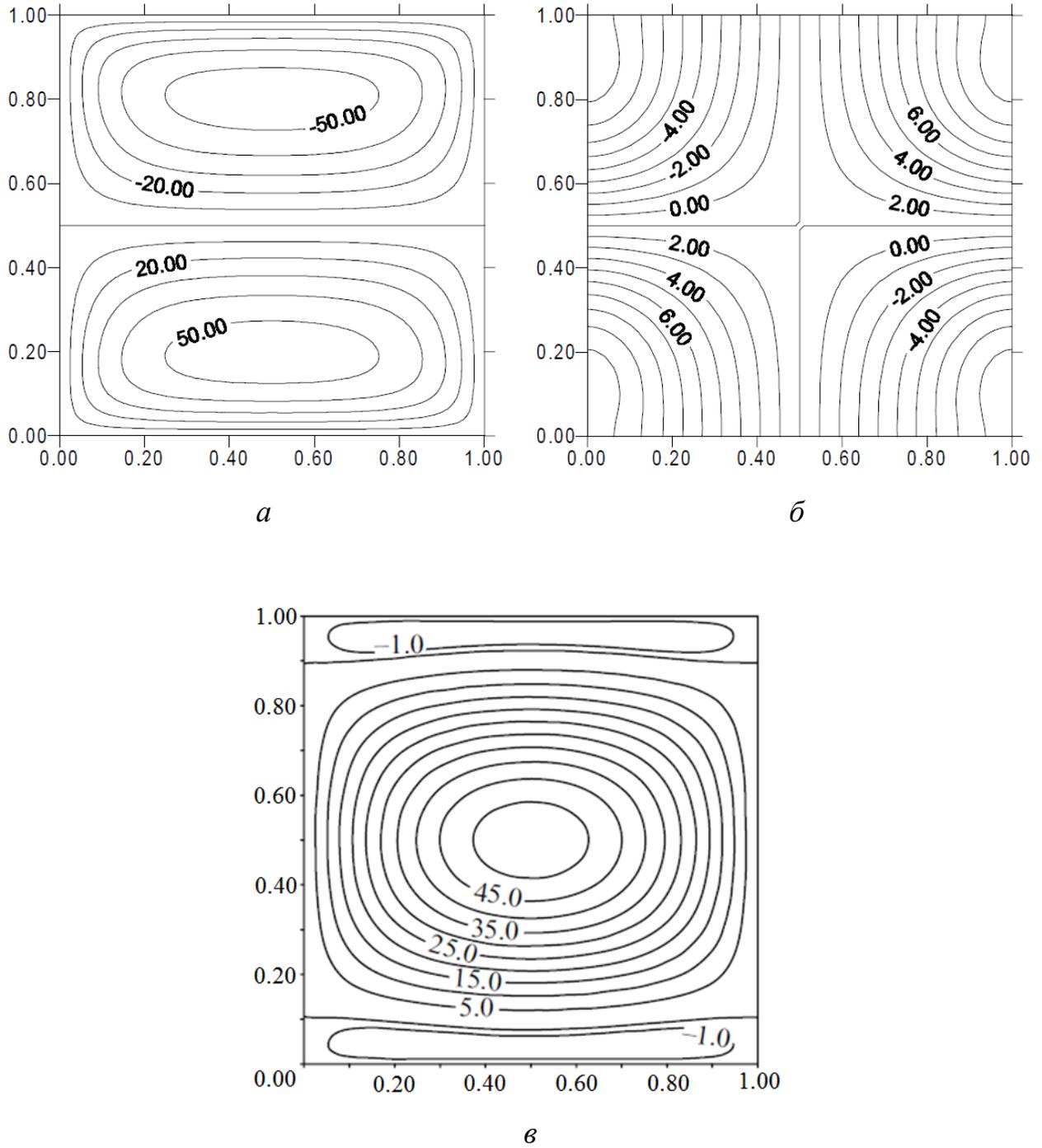


Рис. 6.4 Изолинии: *a* – продольной компоненты скорости; *б* – электрического потенциала; *в* – плотности электрического тока для $Ha = 5$ в случае вертикального магнитного поля ($Pr = 0$, $Gr = 10^5$, $l = 1$)

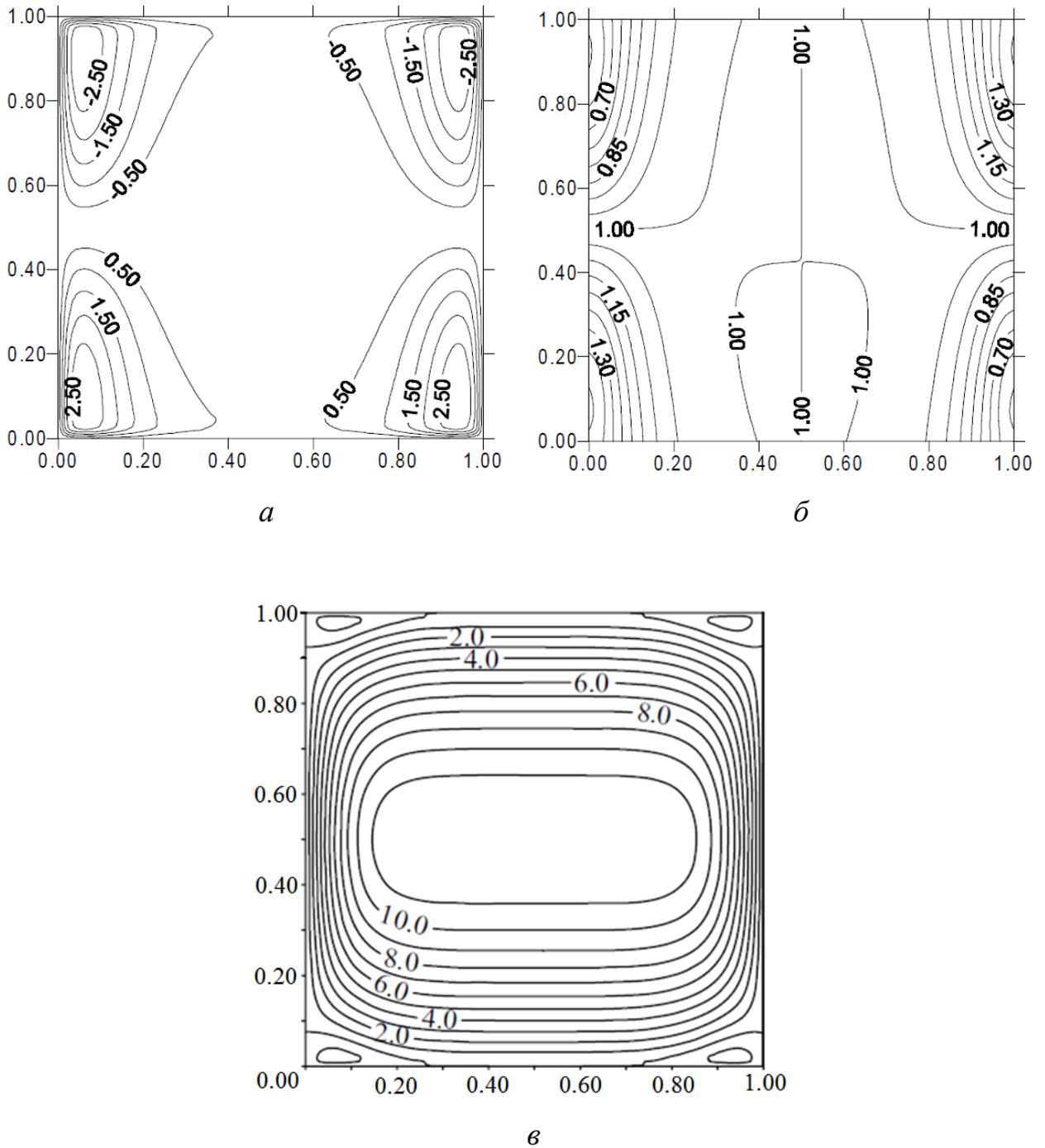


Рис. 6.5 Изолинии: *a* – продольной компоненты скорости; *б* – электрического потенциала; *в* – плотности электрического тока для $Ha = 100$ в случае вертикального магнитного поля ($Pr = 0$, $Gr = 10^5$, $l = 1$)

Расчеты показали, что увеличение числа Гартмана уменьшает интенсивность течения для обеих ориентаций магнитного поля. Зависимости максимума скорости от Ha для различных значений масштабного параметра l представлены на рисунке 6.6 для горизонтального поля и на рисунке 6.7 для вертикального поля.

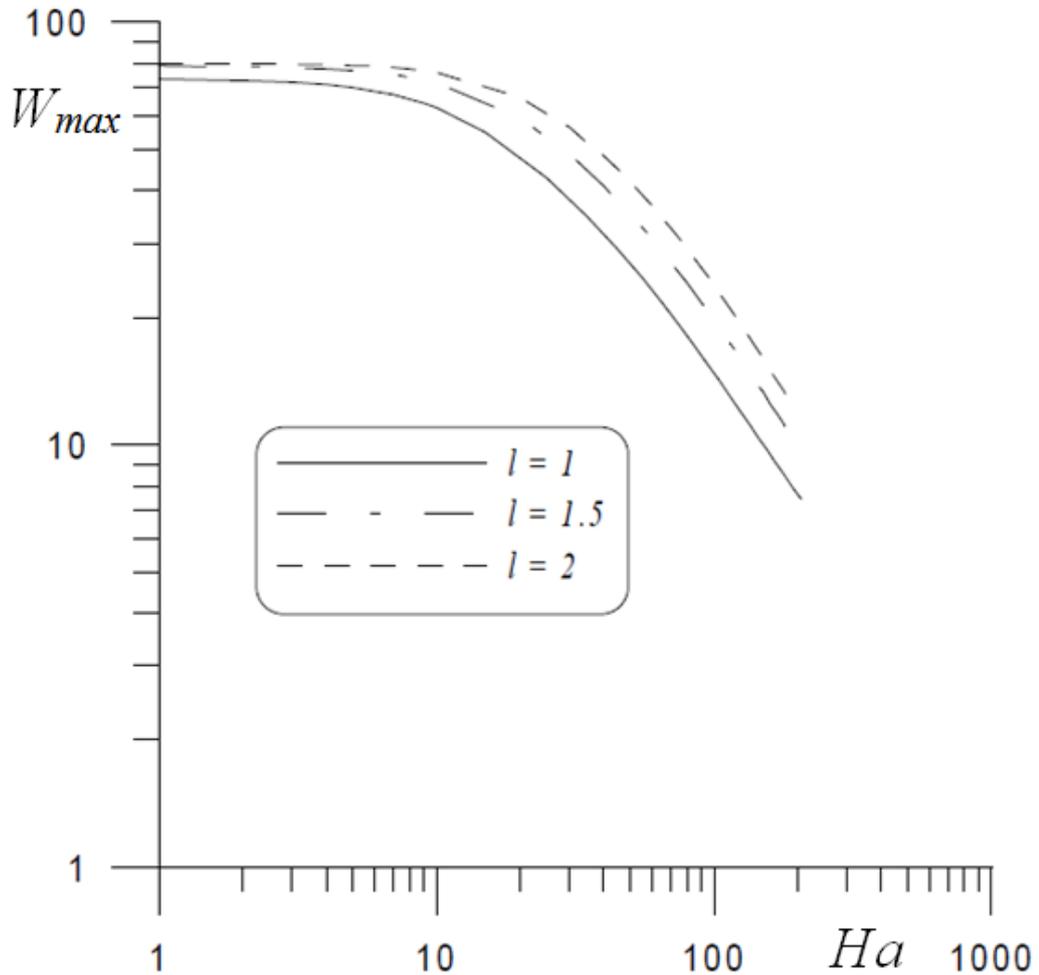


Рис. 6.6 Зависимости максимума скорости от числа Гартмана при различных значениях геометрического параметра l . Случай горизонтального магнитного поля и $Pr = 0$, $Gr = 10^5$

Из рисунка 6.7 видно, что для сильного вертикального магнитного поля ($Ha > 10$) значение максимума скорости спадает с ростом Ha по закону $W_{max} \sim Ha^{-1}$, а значение скорости W_{mid} между параллельными пограничными слоями в центре верхнего или нижнего потока жидкости уменьшается по закону

$W_{mid} \sim Ha^{-2}$. Эти результаты согласуются с выводами, сделанными в работах [284, 286].

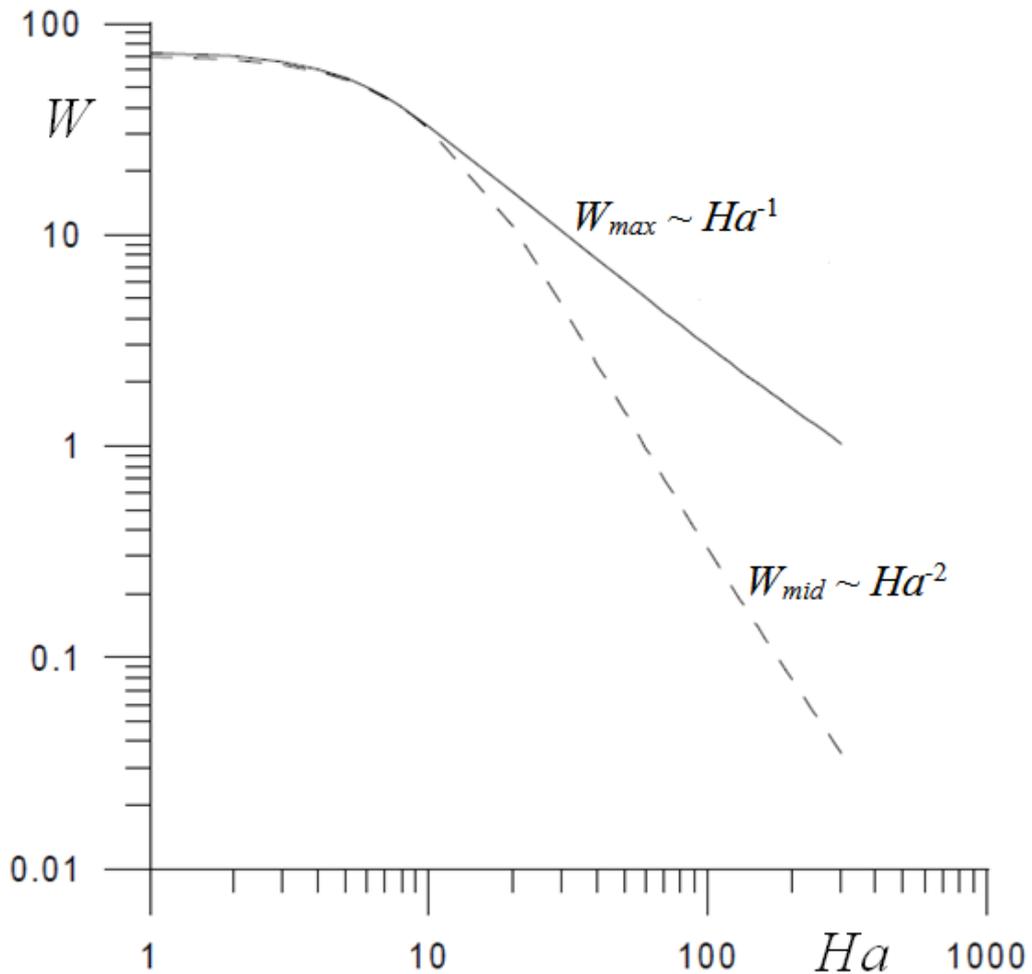


Рис. 6.7 Зависимости максимума скорости W_{max} и скорости W_{mid} в точке с координатами $x = l/2$, $y = 0.25$ от числа Гартмана в случае вертикального магнитного поля при $Pr = 0$, $Gr = 10^5$, $l = 1$

Слабые магнитные поля ($Ha < 10$) слабо влияют на интенсивность и структуру течения в полости. Форма течения в этом случае похожа на ту, что обсуждалась в работе [294], где рассматривалась аналогичная задача в отсутствие магнитного поля.

6.1.2.2 Случай ненулевого числа Прандтля

Для ненулевых чисел Прандтля течение жидкости определяется задачей (6.19) – (6.24), не допускающей решений, соответствующих плоскопараллельному течению [294]. Стационарные решения получались методом установления с использованием явной конечно-разностной схемы. Пространственные производные аппроксимировались центральными разностями. Уравнения Пуассона для функции тока и потенциала итерировались по методу последовательной верхней релаксации. Значения завихренности на границах полости получались по формуле Тома.

Для $Pr \neq 0$ и малых Ha поток жидкого металла слабо чувствителен к магнитному полю, а его структура близка к тому, что обсуждалась в работе [294]. Увеличение числа Гартмана, как и в случае $Pr = 0$, существенно замедляет и трансформирует течение.

Структура течения, поля потенциала, температуры и электрического тока для $Pr = 0.1$, $Ha = 100$ и $l = 1$ показаны на рисунках 6.8 ($\alpha = 0$) и 5.9 ($\alpha = \pi/2$). При числе Прандтля, отличном от нуля, движение жидкости можно представить как суперпозицию двух течений: течения вдоль канала, которое определяется скоростью W , и течения в плоскости поперечного сечения канала, которое описывается функцией тока ψ . Изолинии продольной компоненты скорости W для различных ориентаций магнитного поля приведены на рисунках 6.8а и 6.9а и при схожих параметрах идентичны случаю нулевого числа Прандтля. Изолинии функции тока для горизонтального и вертикального магнитных полей приведены на рисунках 6.8б и 6.9б соответственно. Как было отмечено выше, при $Pr \neq 0$ магнитное поле существенно замедляет течение жидкости в канале, трансформируя его к погранслоиному виду, аналогичному тому, что обсуждался в разделе 6.1.2.1.

При $Pr > 0$ в поперечном сечении полости имеется неоднородное распределение температурного поля, описываемое функцией θ . Изолинии этой функции для различных ориентаций магнитного поля при $Ha = 100$ показаны на рисунках 6.8в и 6.9в.

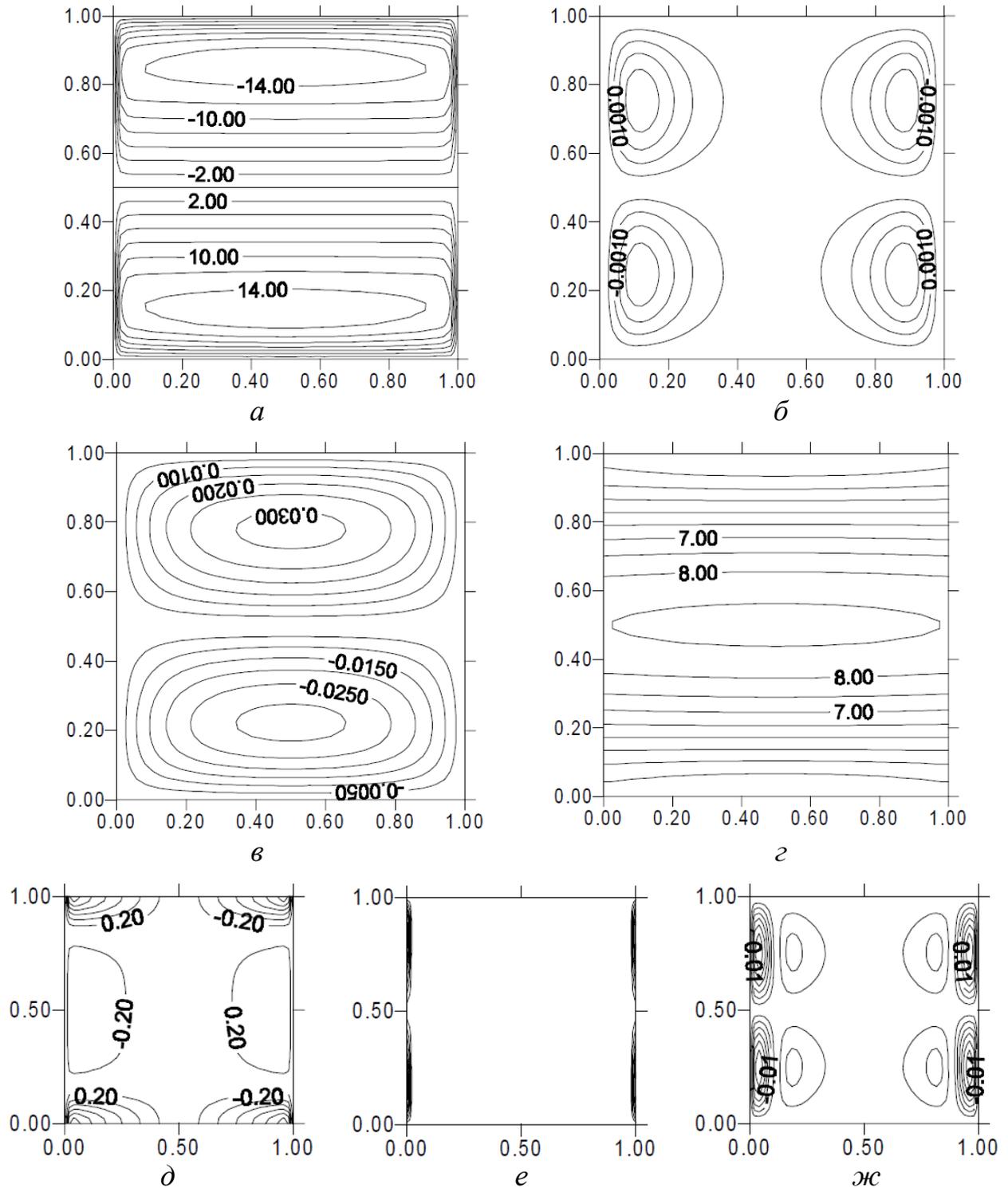


Рис. 6.8 Распределения продольной компоненты скорости (а), линий тока (б), изотерм (в), электрического потенциала (г), горизонтальной J_x (д), вертикальной J_y (е) и продольной J_z (ж) компонент электрического тока в плоскости xu для горизонтального магнитного поля ($Pr = 0.1$, $Gr = 10^5$, $l = 1$)

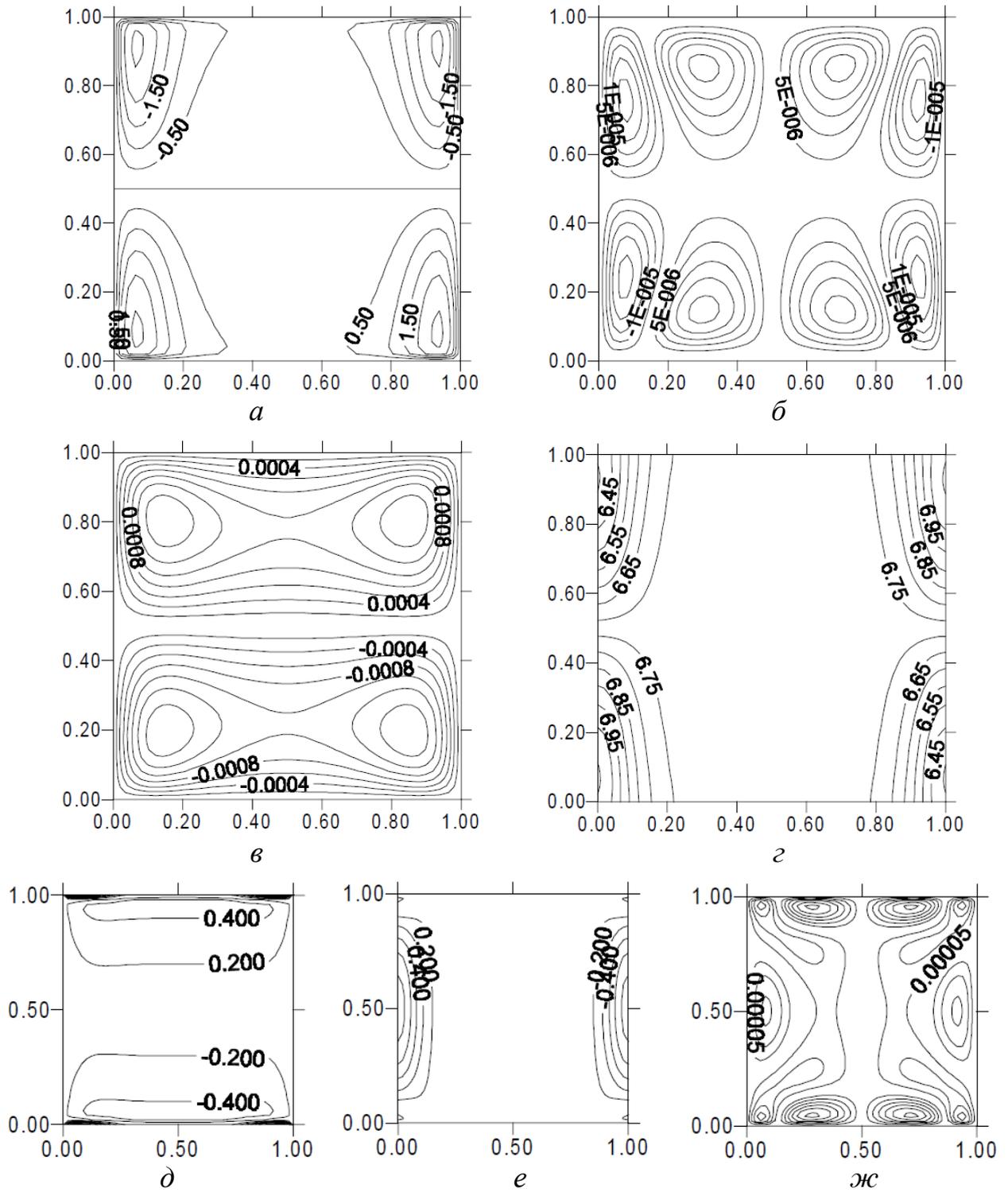


Рис. 6.9 Распределения продольной компоненты скорости (а), линий тока (б), изотерм (в), электрического потенциала (г), горизонтальной J_x (д), вертикальной J_y (е) и продольной J_z (ж) компонент электрического тока в плоскости xu для вертикального магнитного поля ($Pr = 0.1$, $Gr = 10^5$, $l = 1$)

Расчеты показали, что распределения потенциала (рис. 6.8г и 6.9г), горизонтальной (рис. 6.8д и 6.9д) и вертикальной (рис. 6.8е и 6.9е) составляющих вектора плотности тока не зависят от числа Прандтля и при тех же значениях Ha и l полностью идентичны соответствующим распределениям в случае $Pr = 0$. Таким образом, для $Pr \neq 0$ структура электрического тока в плоскости xu может быть определена функцией ψ_j и аналогична той, что показана рисунках 6.4в и 6.5в.

В случае ненулевого числа Прандтля имеется еще и продольная компонента электрического тока – J_z (см. рис. 6.8ж и 6.9ж), появление которой связано с наличием движения жидкости в поперечном сечении канала. Из рисунков 6.8 и 6.9 видно, что величина тока вдоль канала при любой ориентации магнитного поля существенно меньше, чем в поперечном сечении.

Как и в случае нулевого числа Pr , скорость движения жидкости уменьшается с увеличением числа Гартмана (см. рис. 6.10). Для вертикального поля при $Ha > 10$ справедливы законы: для максимума скорости $|\vec{V}|_{\max} \sim Ha^{-1}$ и для значения скорости между параллельными пограничными слоями в центре верхнего или нижнего потока жидкости $|\vec{V}|_{mid} \sim Ha^{-2}$, где $|\vec{V}|$ – модуль полной скорости движения жидкости.

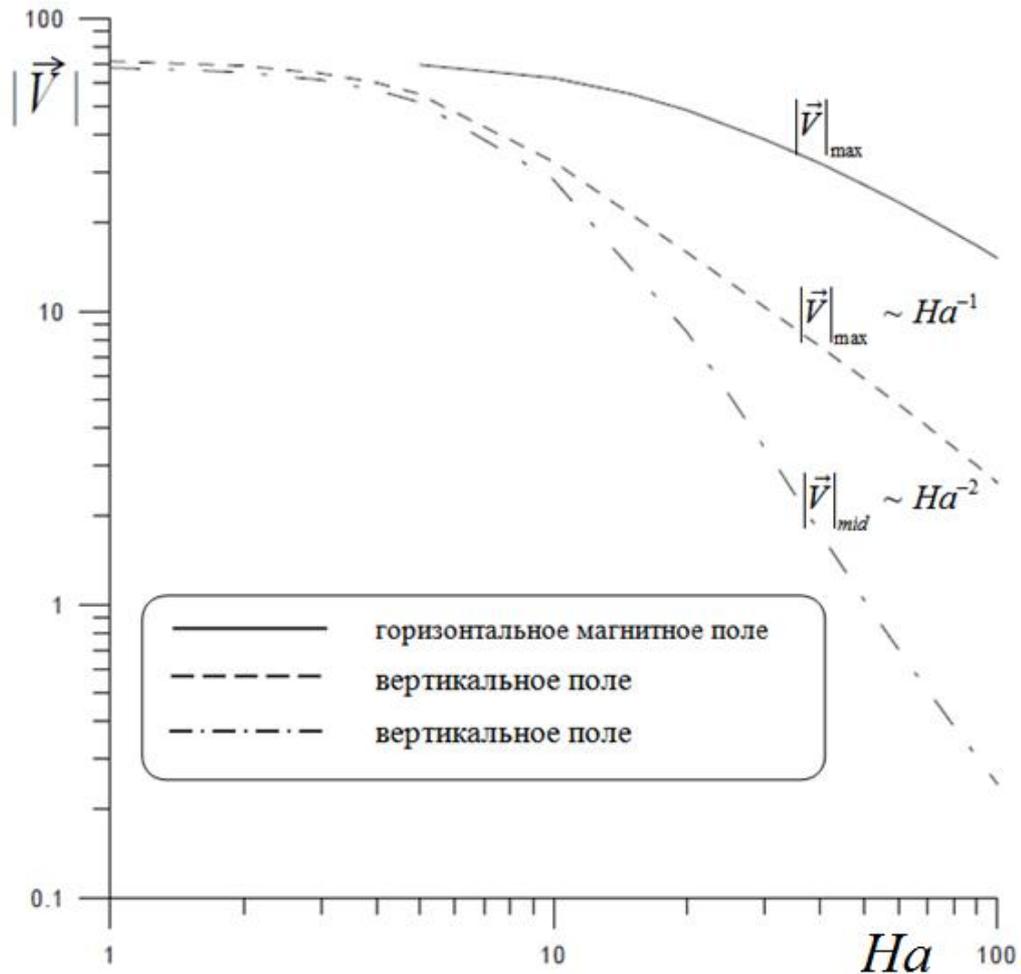


Рис. 6.10 Зависимости максимума модуля полной скорости и значения модуля полной скорости $|\vec{V}|_{mid}$ в точке с координатами $x = 0.5$ и $y = 0.25$ от числа Гартмана для $Pr = 0.1$, $Gr = 10^5$, $l = 1$

6.1.3 Анализ устойчивости

Перейдем к обсуждению устойчивости полученных стационарных течений. Рассматривается случай, когда вектор магнитного поля ориентирован в плоскости xu . Поля скорости, потенциала, давления, температуры и плотности тока представим в виде сумм основного стационарного решения и малых возмущений:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}', \quad P = P_0 + P', \quad T = \theta + T', \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi', \quad \vec{J} = \vec{J}_0 + \vec{J}'. \quad (6.28)$$

Поскольку задача однородна вдоль оси z , будем рассматривать малые нормальные возмущения, периодические вдоль этой оси:

$$\left(\vec{V}', P', T', \Phi', \vec{J}'\right) = \left(\vec{v}, p, \tau, \varphi, \vec{j}\right) e^{ikz + \lambda t}, \quad (6.29)$$

где k – волновое число вдоль координаты z , $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ – комплексный инкремент. Действительная часть λ_r определяет скорость роста возмущений, мнимая часть λ_i – частоту колебаний возмущений.

Подставляя выражения (6.28) с учетом (6.29) в систему (6.4) – (6.9), линеаризуя ее относительно малых возмущений и проектируя на оси координат получим систему уравнений и граничных условий для амплитуд возмущений в виде:

$$\begin{aligned} \lambda u = & -(\vec{u}_0 \nabla + ikW_0)u - (\vec{u} \nabla)U_0 - \frac{\partial p}{\partial x} + (\nabla^2 - k^2)u + \\ & + Ha^2 \left(ik\varphi \sin \alpha + \frac{1}{2}v \sin 2\alpha - u \sin^2 \alpha \right), \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \lambda v = & -(\vec{u}_0 \nabla + ikW_0)v - (\vec{u} \nabla)V_0 - \frac{\partial p}{\partial y} + (\nabla^2 - k^2)v + Gr\tau \\ & + Ha^2 \left(-ik\varphi \cos \alpha + \frac{1}{2}u \sin 2\alpha - v \cos^2 \alpha \right), \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} \lambda w = & -(\vec{u}_0 \nabla + ikW_0)w - (\vec{u} \nabla)W_0 - ikp + (\nabla^2 - k^2)w + \\ & + Ha^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \alpha - w \right), \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\lambda\tau = -(\vec{u}_0\nabla + ikW_0)\tau - \vec{u}\nabla\theta - w + \frac{1}{Pr}(\nabla^2 - k^2)\tau, \quad (6.33)$$

$$0 = (\nabla^2 - k^2)\varphi - \left(iku - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\sin\alpha - \left(\frac{\partial w}{\partial y} - ikv\right)\cos\alpha, \quad (6.34)$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + ikw, \quad (6.35)$$

$$x = \pm \frac{l}{2}, \text{ и } y = \frac{1}{2}: \quad \vec{u}|_{\Gamma} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\Gamma} = \tau|_{\Gamma} = 0, \quad (6.36)$$

где $\vec{v}=(\vec{u}, w)$, $\vec{u}=(u, v)$, ∇ – оператор дифференцирования по координатам x, y , $\vec{V}_0=(\vec{u}_0, W_0)$, $\vec{u}_0=(U_0, V_0)$ и θ – соответственно поля скорости и температуры основного стационарного течения. Отметим, что начало координат в задачах устойчивости совпадает с центром расчетной области.

Уравнения и граничные условия (6.30) – (6.36) аппроксимировались методом конечных разностей с применением центральных разностей. Использовалась регулярная сетка с квадратными ячейками. Как и при решении задачи для основного состояния, в случае $Pr=0$ и вертикального магнитного поля использовалась ячейка со стороной 1/100, для горизонтального поля и нулевого числа Прандтля - ячейка со сторону 1/90, для $Pr \neq 0$ при обеих ориентаций поля – ячейка размером 1/70.

Полученные конечноразностные уравнения формируют алгебраическую задачу на собственные значения:

$$\lambda BX = AX, \quad (6.37)$$

где A – комплексная матрица, B – матрица с единицами на главной диагонали и нулевыми остальными элементами, X – вектор, состоящий из неизвестных переменных: $X = (\vec{v}, p, \tau, \varphi)$. Решение задачи (6.37) дает значение инкремента λ , полей возмущений скорости, температуры, давления и потенциала. Нейтральные возмущения находятся из условия $Re(\lambda) = 0$. Для решения алгебраической задачи на собственные значения применялись метод и пакет программ, разработанные и описанные в работе [4]. Проверочные расчеты проводились путем решения системы уравнений (6.30) – (6.36) эволюционным методом, в котором все производные аппроксимировались с помощью явной конечно-разностной схемы. Способы расчета пространственных мод возмущений таким методом представлены в работах [2, 369].

6.1.3.1 Случай нулевого числа Прандтля

В отсутствие магнитного поля при нулевом числе Прандтля неустойчивость связана с развитием вихрей на границе раздела двух встречных потоков [292]. Такие гидродинамические возмущения являются наиболее опасными в широком диапазоне значений параметра l . Расчеты показали, что при наличии магнитного поля и $Pr = 0$ характер критических возмущений остается тем же самым, что и без поля.

Из уравнения (6.33) и граничного условия (6.36) следует, что возмущения поля температуры в случае нулевого числа Прандтля отсутствуют. В ходе расчетов было выяснено, что наиболее опасными для $Pr = 0$ и обеих ориентаций магнитного поля являются монотонные трехмерные возмущения. Зависимости числа Грасгофа Gr нейтральных возмущений от волнового числа k при различных значениях числа Гартмана приведены на рисунке 6.11 для $\alpha = \pi/2$ и рисунке 6.12. для $\alpha = 0$.

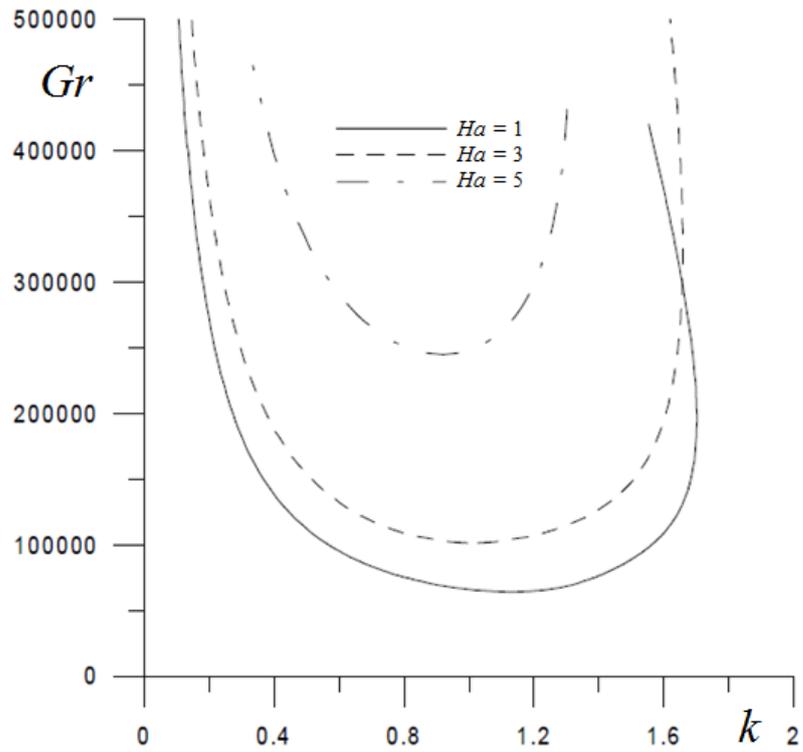


Рис. 6.11 Нейтральные кривые для случая $l = 1$, $Pr = 0$ и вертикального магнитного поля ($\alpha = \pi/2$) при различных числах Гартмана

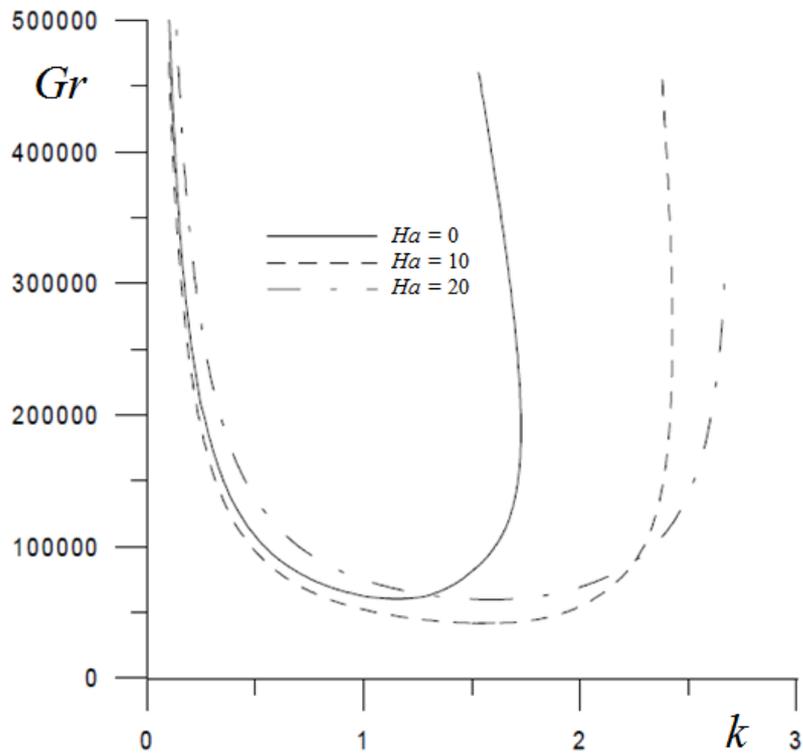


Рис. 6.12 Нейтральные кривые для случая $l = 1$, $Pr = 0$ и горизонтального магнитного поля ($\alpha = 0$) при различных числах Гартмана

Все кривые на этих рисунках имеют один минимум, соответствующий наиболее опасным (критическим) возмущениям. В дальнейшем рассматриваются только наиболее опасные возмущения, которым соответствуют минимальные критические значения числа Грасгофа Gr_c и соответствующие значения волнового числа k_c .

Усиление вертикального магнитного поля оказывает на движение жидкости стабилизирующее действие (см. рис. 6.11, 6.13а). Резкий рост минимального критического значения числа Грасгофа наблюдается даже при незначительном увеличении Ha . Эффект стабилизации усиливается при уменьшении относительной ширины канала l . Из рисунка 6.13б видно, что длина волны наиболее опасных возмущений увеличивается с ростом числа Гартмана при всех рассмотренных значениях параметра l .

Отметим, что эффект стабилизации вертикальным полем конвективного течения был обнаружен ранее в работе [275] для случая бесконечного слоя ($l \rightarrow \infty$). Сравнение с результатами [275] показывает, что в ограниченных полостях эффект стабилизации течения вертикальным магнитным полем усиливается. Экспоненциальный рост критических чисел Грасгофа при увеличении вертикального магнитного поля для жидкостей с малым числом Прандтля был получен в эксперименте [278] и численных расчетах [291], где исследовались трехмерные течения в замкнутых полостях. Было установлено, что числа Грасгофа, определяющие порог устойчивости течения в замкнутой полости, значительно превышают критические числа Грасгофа для бесконечного слоя.

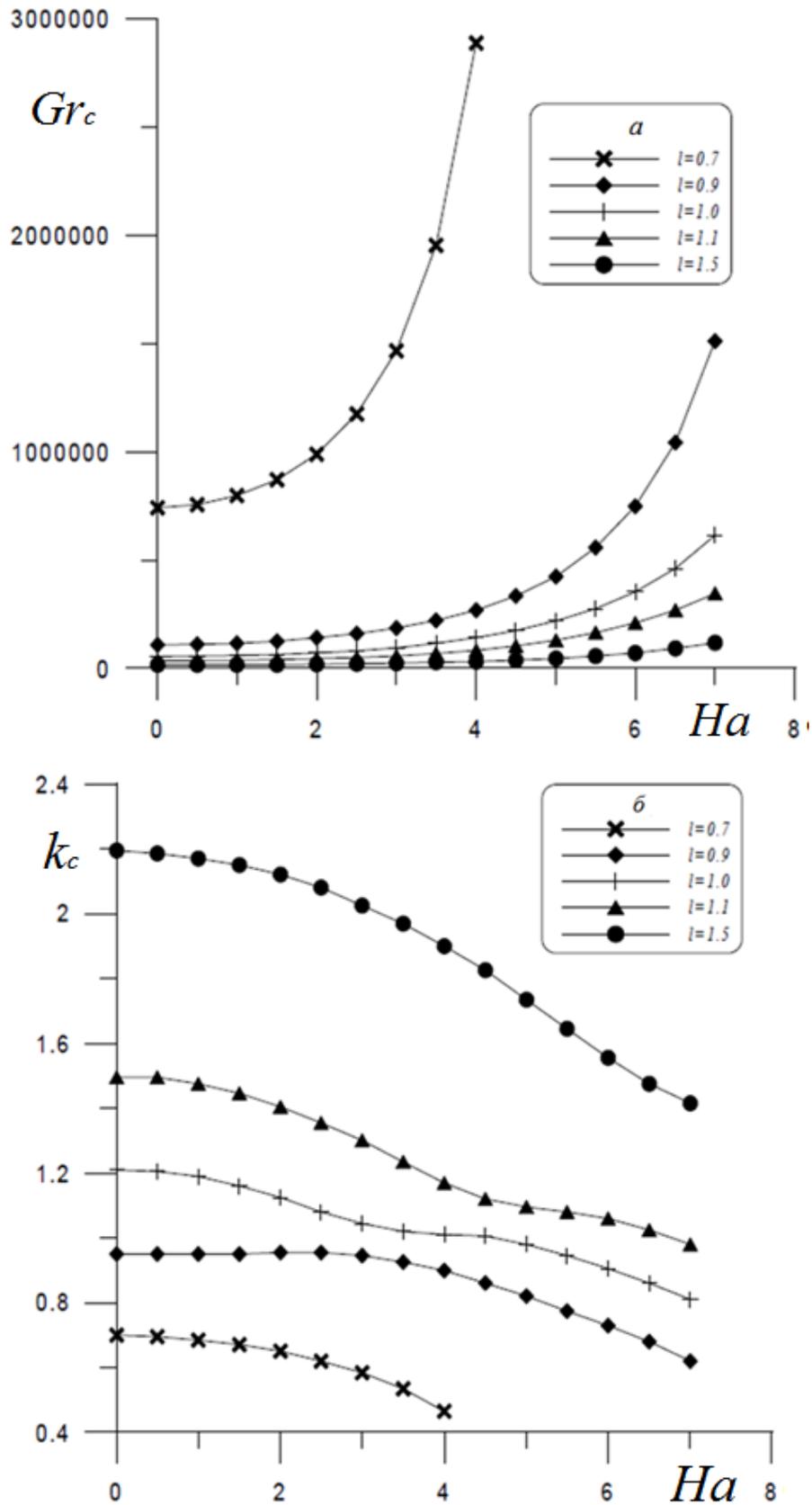


Рис. 6.13 Зависимости минимального критического числа Грасгофа (a) и волнового числа наиболее опасных возмущений (b) от числа Гартмана для вертикального магнитного поля при $Pr = 0$ и различных значениях геометрического параметра l

В рассматриваемой геометрии при $Pr = 0$ и вертикальном поле гидродинамическая неустойчивость развивается в центральной области канала вдали от твердых границ. В работе [294] показано, что в отсутствие поля такой характер неустойчивости наблюдается и при отличных от нуля числах Прандтля, если $Pr < 1$. Следовательно, можно ожидать сильную стабилизацию течения вертикальным полем в рассматриваемой полости и при ненулевых числах Прандтля.

Усиление вертикального магнитного поля приводит к трансформации основного течения, интенсивность которого в центральной части канала падает пропорционально Ha^{-2} . Из рисунка 6.5а видно, что в сильных вертикальных полях максимумы скорости смещаются к углам канала и разделяются медленно циркулирующим ядром. Развитие возмущений в малоподвижном ядре становится затруднительным. Уменьшение геометрического параметра l , т.е. сужение полости приводит к повышению устойчивости течения. Этот факт, по-видимому, связан с уменьшением центральной области течения, в которой генерируются гидродинамические моды неустойчивости.

При горизонтальной ориентации магнитного поля возможна дестабилизация течения в канале (см. рис. 6.12). Из рисунка 6.14а видно, что горизонтальное поле дестабилизирует конвективное течение жидкости в области небольших и умеренных значений числа Гартмана.

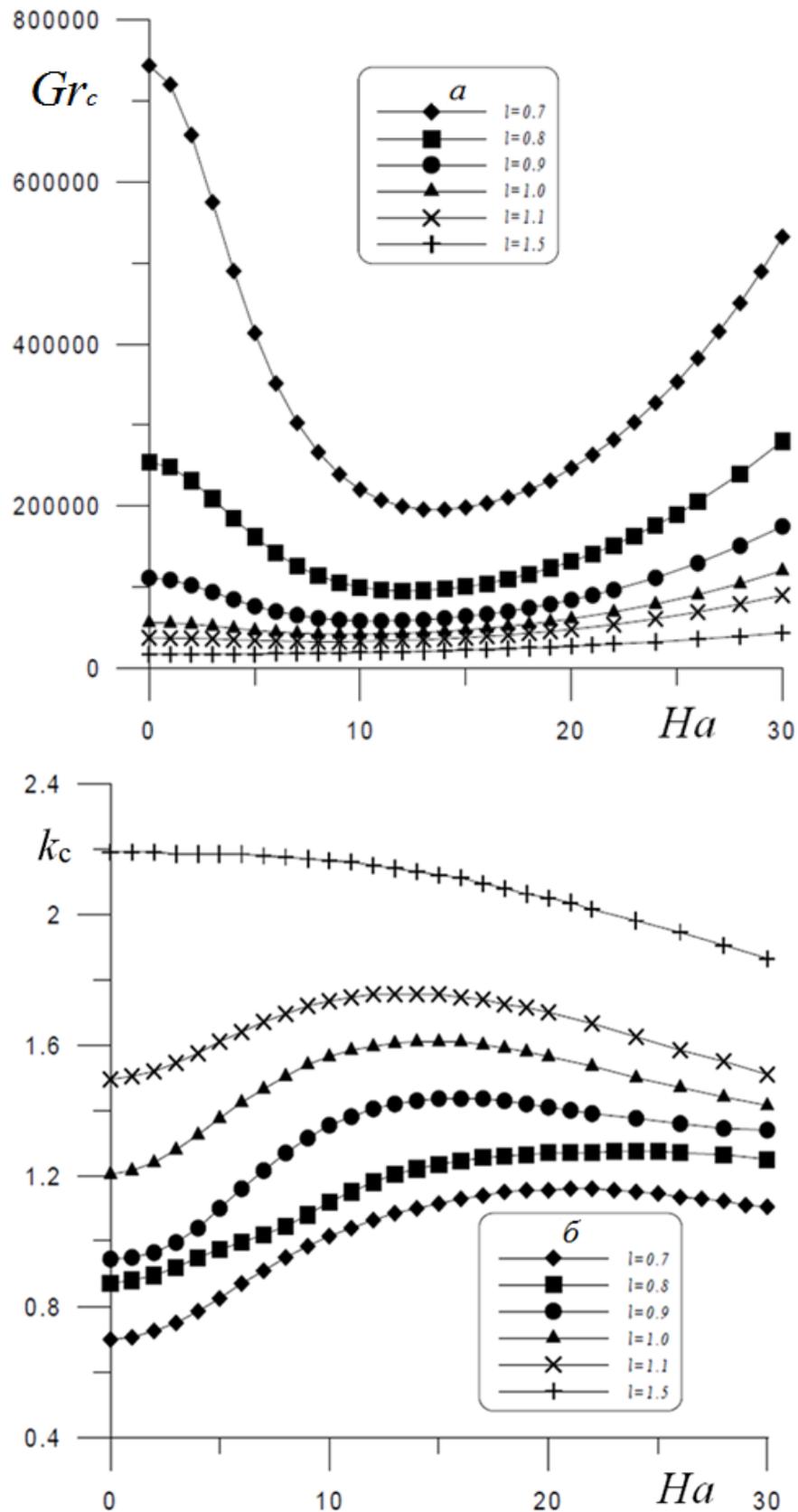


Рис. 6.14 Зависимости минимального критического числа Грасгофа (a) и волнового числа наиболее опасных возмущений (b) от числа Гартмана для горизонтального магнитного поля при $Pr = 0$ и различных значениях геометрического параметра l

Критическое число Gr_c уменьшается с ростом Ha , достигая минимума. При дальнейшем увеличении магнитного поля наблюдается рост Gr_c (см. рис. 6.14а). Эффект дестабилизации усиливается при уменьшении ширины канала и отсутствует в широких каналах, для которых $l \geq 1.4$. С уменьшением геометрического параметра l значения Ha , соответствующие минимальному критическому значению числа Грасгофа, увеличиваются. В каналах достаточно большой ширины включение горизонтального магнитного поля стабилизирует движение жидкости, но этот эффект значительно слабее, чем в вертикальном поле.

Из рисунка 6.14б следует, что волновые числа нейтральных возмущений при $\alpha = 0$ с ростом числа Ha растут, достигая максимума, затем начинают уменьшаться. Максимумы кривых, представленных на рисунке 6.14б, смещаются к нулю с увеличением параметра l . Для $l \geq 1.4$ наблюдается монотонное уменьшение критических волновых чисел.

Необходимо отметить, что в случае бесконечного слоя горизонтальное поперечное магнитное поле не оказывает влияния на устойчивость течения относительно рассматриваемых гидродинамических возмущений. В трехмерных полостях наблюдается стабилизация течения горизонтальным полем, но менее эффективная, чем вертикальным полем [275, 278, 291]. Эффект дестабилизации течения горизонтальным магнитным полем в указанных выше работах не был обнаружен.

В горизонтальном поле трансформация основного течения менее значительна, чем в вертикальном поле (см. рис. 6.3а). Максимумы скорости смещаются к горизонтальным границам полости. Вблизи вертикальных границ образуются пограничные слои, где наблюдаются значительные градиенты скорости. Взаимодействие этих пограничных слоев между собой в узких каналах и умеренных магнитных полях вносит дополнительный механизм дестабилизации течения. Усиление магнитного поля уменьшает ширину вертикальных пограничных слоев, и они перестают взаимодействовать. Увеличение ширины канала разделяет вертикальные пограничные слои, и механизм дестабилизации

исчезает. В широких каналах горизонтальное магнитное поле замедляет основное течение жидкости, практически не изменяя его форму, поэтому стабилизация адвективного течения горизонтальным поперечным полем незначительна.

Численные расчеты основного течения и энергетический анализ возмущений, выполненный Анри Д. (Henry D.) в работе [16], позволили сделать вывод, что основной механизм, приводящий к флуктуациям энергии возмущений, связан с напряжениями сдвига, возникающими при взаимодействии встречных потоков основного течения жидкости. Наиболее существенное влияние на флуктуации энергии возмущений оказывают напряжения сдвига, возникающие вдоль вертикальной оси y . Изменение магнитного поля обеих ориентаций приводит к значительной трансформации основного течения. Увеличение числа Гартмана при вертикальном магнитном поле приводит к уменьшению сдвиговых напряжений вдоль оси y , что приводит к уменьшению энергии возмущений и стабилизации течения. В горизонтальном поле рост Ha (особенно в узких каналах) сначала увеличивает вертикальные напряжения сдвига, что приводит к дестабилизации течения при малых и умеренных числах Гартмана, а при больших Ha наблюдается уменьшение сдвиговых напряжений, т.е. стабилизация течения.

6.1.3.2 Случай ненулевого числа Прандтля

Зависимости числа Грасгофа Gr для нейтральных возмущений от волнового числа k для отличных от нуля значений числа Прандтля показаны на рисунке 6.15. Видно, что кривые имеют один минимум, соответствующий наиболее опасным возмущениям. При дальнейшем увеличении волнового числа возмущений наблюдается монотонный рост Gr . Далее рассматриваются только наиболее опасные возмущения, соответствующие минимумам нейтральных кривых. Таким возмущениям отвечают минимальные критические значения числа Грасгофа Gr_c и соответствующие значения волнового числа k_c .

Расчеты, результаты которых представлены в данном параграфе, проводились для канала квадратного сечения ($l = 1$) при $Pr = 0.01 \div 0.15$. В отсутствие магнитного поля в указанном диапазоне чисел Прандтля наиболее опасными возмущениями являются монотонные гидродинамические возмущения [294]. При конечных числах Прандтля имеется дополнительный механизм генерации неустойчивости, связанный с движением жидкости в плоскости xu (см. рис. 6.8б и 6.9б). Такое движение создает дополнительную циркуляцию развитого продольного потока, приводящую к снижению устойчивости течения.

В заданном диапазоне чисел Прандтля вертикальное и горизонтальное магнитные поля оказывают на движение жидкости стабилизирующее влияние. Из рисунков 6.16 и 6.17 видно, что с ростом числа Гартмана минимальные критические значения числа Грасгофа и волновые числа наиболее опасных возмущений при обеих ориентациях магнитного поля увеличиваются. Возрастание волновых чисел наиболее опасных возмущений с ростом Ha отличает характер неустойчивости течения в рассматриваемом интервале чисел Pr , от ситуации, когда $Pr = 0$.

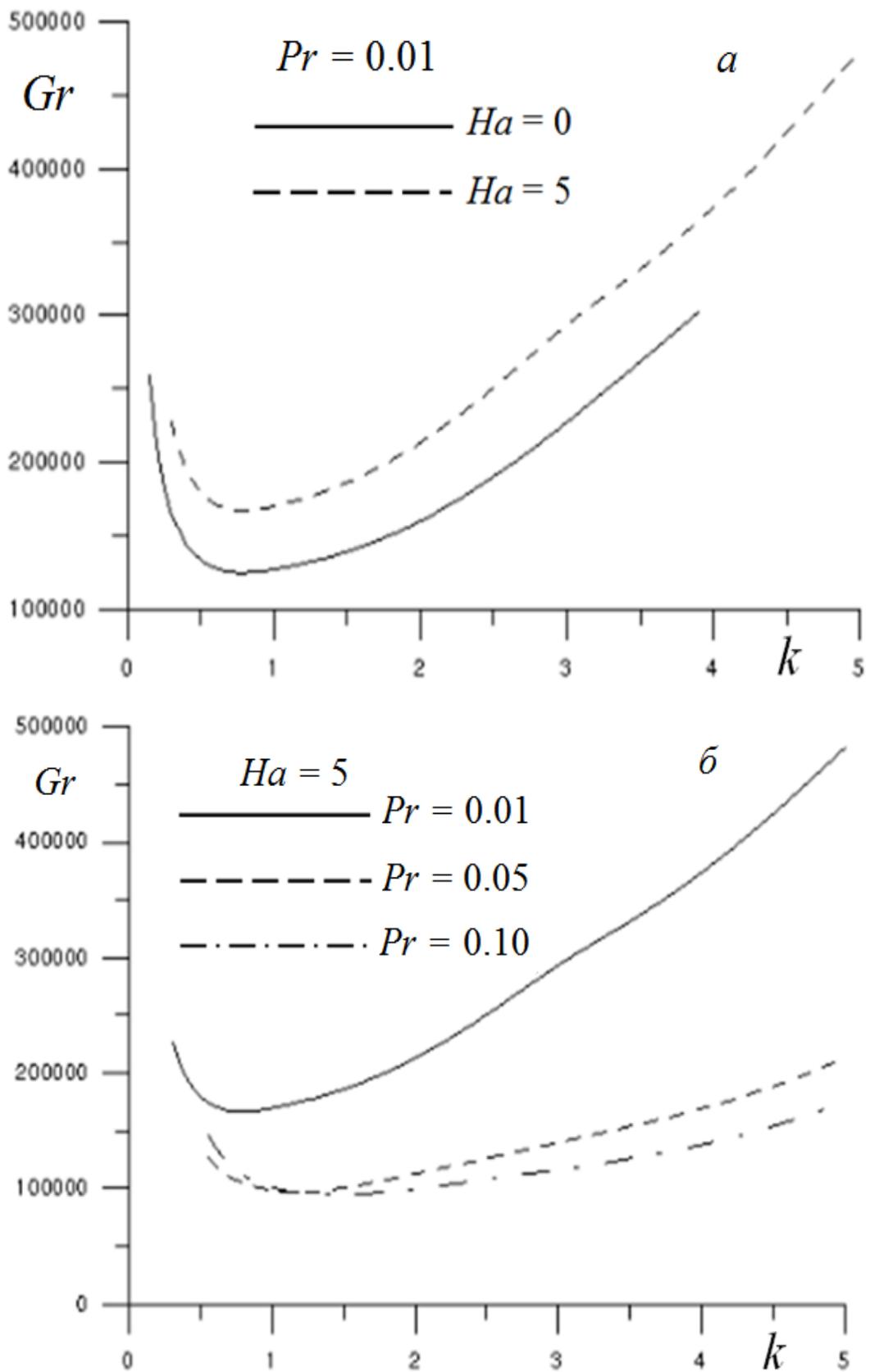


Рис. 6.15 Нейтральные кривые для $l=1$ в вертикальных магнитных полях различной интенсивности (а) и при разных значениях числа Прандтля (б)

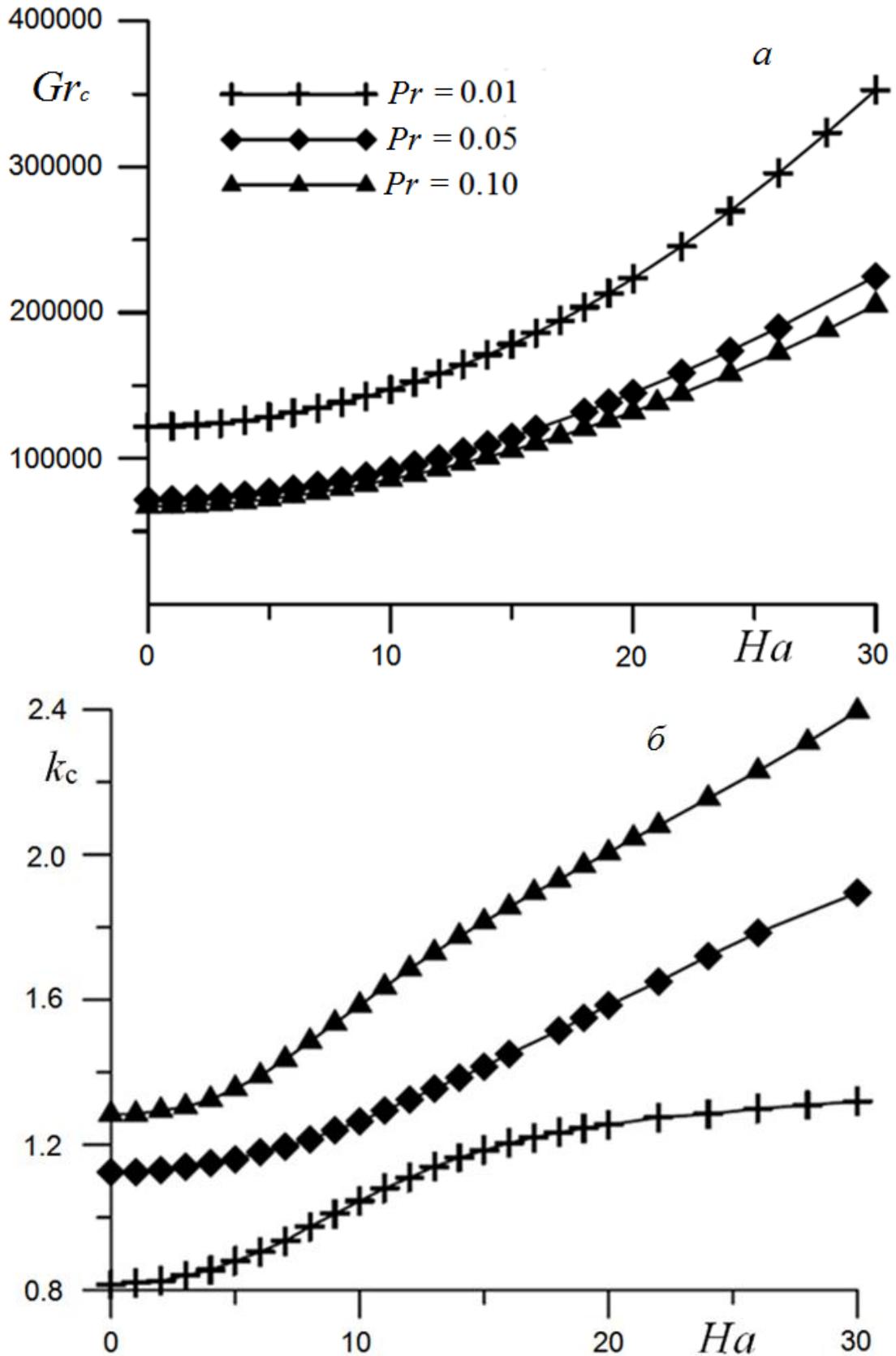


Рис. 6.16 Зависимости минимального критического числа Грасгофа (а) и волнового числа наиболее опасных возмущений (б) от числа Гартмана для горизонтального магнитного поля при $l = 1$ и различных значениях числа Pr

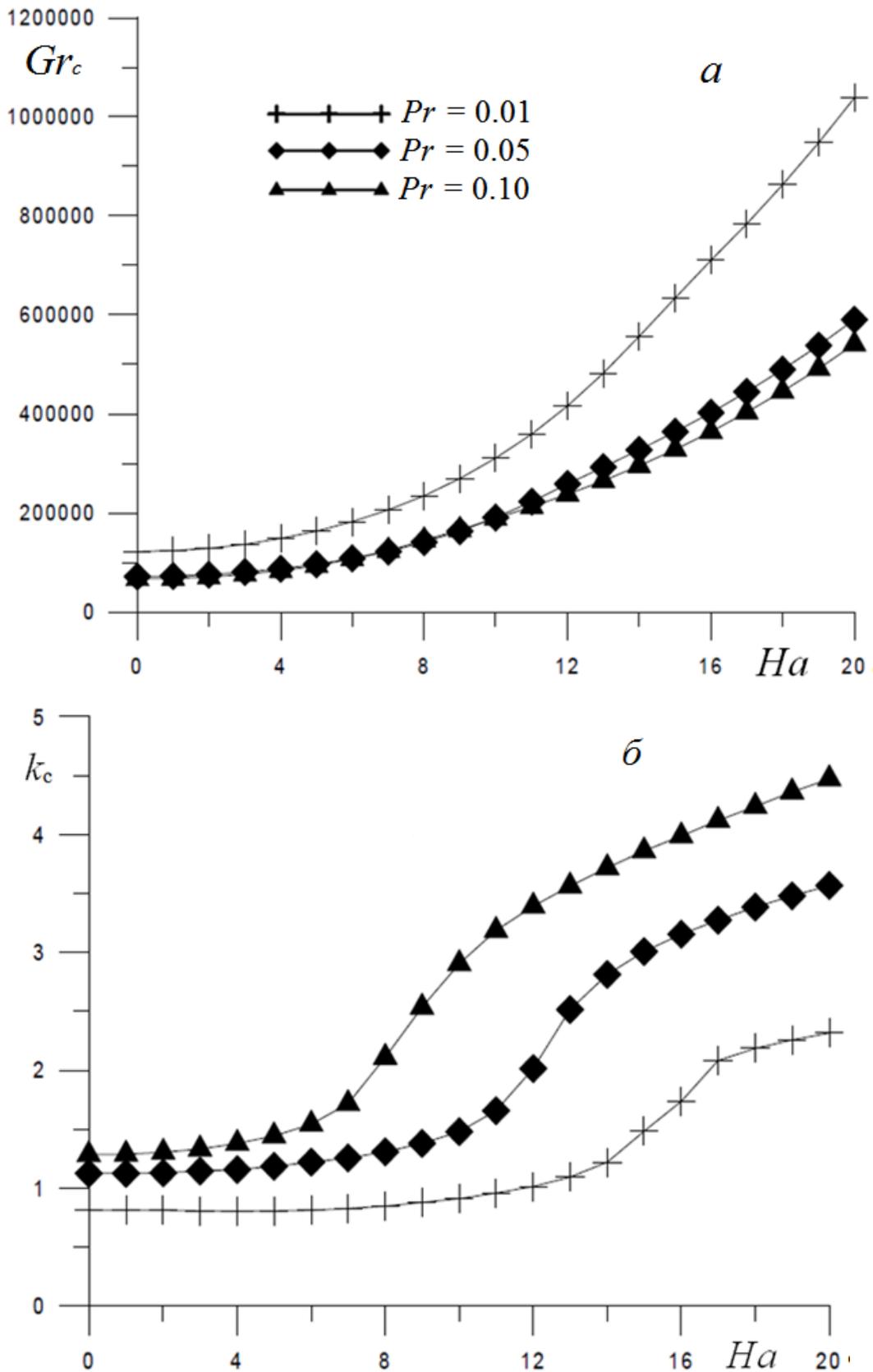


Рис. 6.17 Зависимости минимального критического числа Грасгофа (а) и волнового числа наиболее опасных возмущений (б) от числа Гартмана для вертикального магнитного поля при $l = 1$ и различных значениях числа Pr

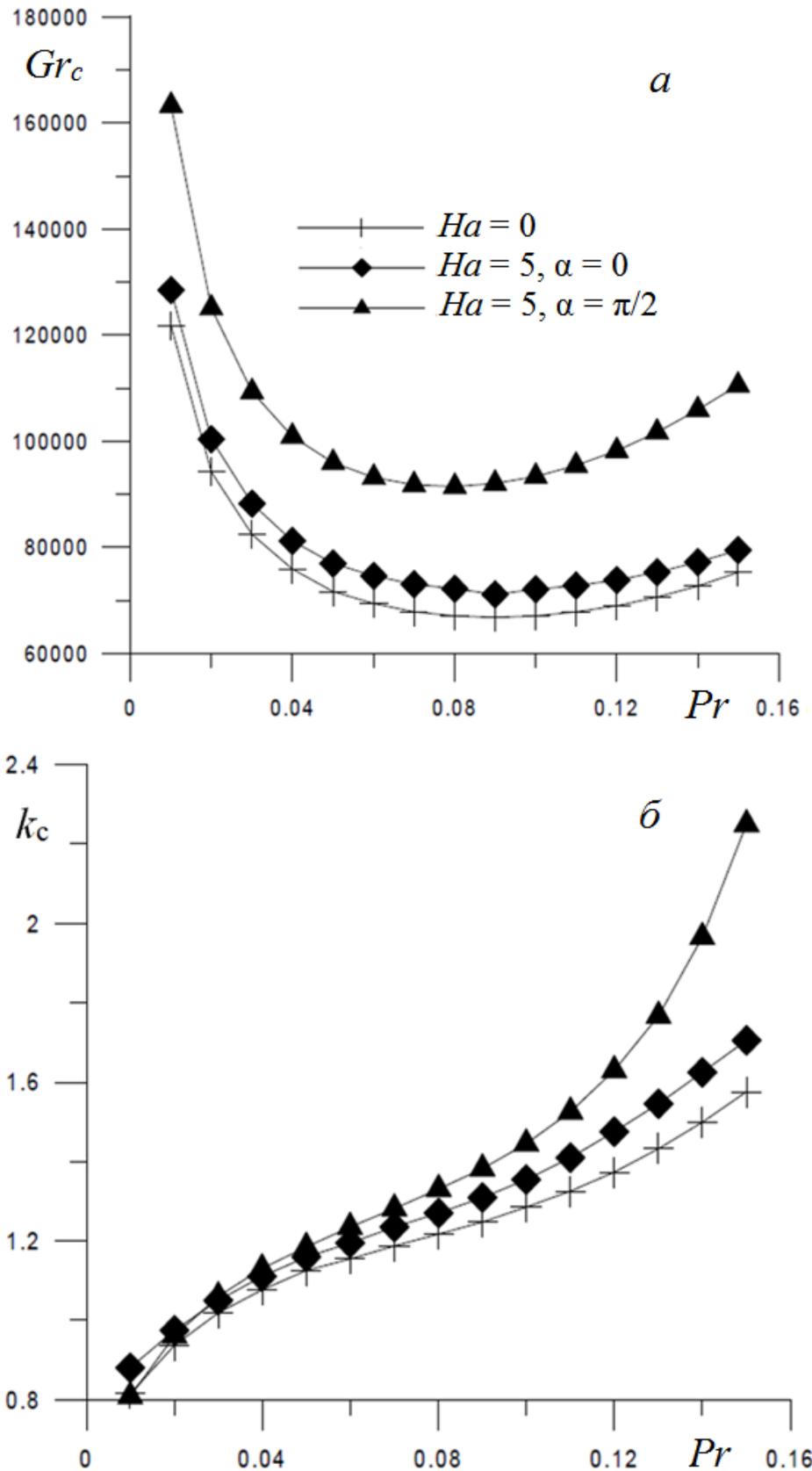


Рис. 6.18 Зависимости Gr_c (а) и k_c (б) от числа Прандтля при различных значениях и ориентациях магнитного поля: $\alpha = 0$ — горизонтальное поле; $\alpha = \pi/2$ — вертикальное поле. Расчет выполнен для $l = 1$

Стабилизирующий эффект, полученный для канала квадратного сечения в вертикальном поле при отличных от нуля числах Прандтля менее значителен, чем тот же эффект при $Pr = 0$. Из рисунка 6.9б видно, что в вертикальном магнитном поле при $Pr \neq 0$ основное течение жидкости в плоскости xu имеет восьмивихревую структуру. Вязкое трение, возникающее между отдельными вихрями и между потоком и твердыми стенками, обеспечивает дополнительный механизм неустойчивости течения. В горизонтальном поле этот механизм менее заметен, т.к. вихри, возникающие в плоскости xu , слабее взаимодействуют друг с другом (см. рис. 6.8б).

Кривые, показывающие зависимость минимального критического числа Грасгофа и волнового числа наиболее опасных возмущений k_c от числа Прандтля для $Ha = 0$ и $Ha = 5$ показаны на рисунке 6.18. Видно, что зависимости Gr_c от Pr не являются монотонными. Аналогичный характер зависимости наблюдается и в отсутствие магнитного поля [294]. Можно отметить, что на всем интервале рассматриваемых чисел Прандтля вертикальное поле сильнее стабилизирует течение жидкости, чем горизонтальное. Наиболее устойчивыми являются конвективные движения жидкостей с меньшими числами Прандтля.

6.2 Математическая модель процессов тепломассопереноса и диффузии магнитного поля в индукционной печи

В настоящем параграфе рассматривается движение металлического расплава в переменном неоднородном магнитном поле короткого соленоида. Строится математическая модель и анализируется возможность расщепления полной магнитогидродинамической задачи на две подзадачи: о диффузии магнитного поля и о тепломассопереносе с известным распределением объемных источников теплоты и сил. Проводится численное моделирование структуры магнитного поля в расплаве.

6.2.1 Геометрические и физические параметры задачи. Основные уравнения

Индукционный нагрев широко применяется в различных областях металлургии и при производстве полупроводниковых и диэлектрических элементов. При индукционном нагреве материалов используется тепло, выделяемое токами, которые индуцируются в проводящем материале переменным внешним магнитным полем. Описание тепломассопереноса в этом случае требует решения системы уравнений электродинамики, переноса тепла и массы.

Если частота поля велика, то результирующее магнитное поле, складывающееся из внешнего поля индуктора и полей индукционных токов, затухает вглубь проводника и практически равно нулю на небольшом расстоянии ζ от его поверхности [302, 303]. Индукционные токи (источники теплоты) и объемные электромагнитные силы, действующие на движущийся расплав, локализованы внутри пограничного слоя толщиной ζ .

При моделировании конвекции часто пользуются осредненными по периоду пульсаций распределениями объемных сил. Например, в работе [308] авторы вводят осредненное значение электродинамической силы, действующей на расплав, и работают со средним значением температуры. Однако такой подход может не дать удовлетворительных результатов в случае, когда индукционно разогревается непосредственно металл, и создаются условия для появления периодических знакопеременных объемных сил, которые могут привести к различным гидродинамическим эффектам. Поэтому возникает необходимость разработки корректной математической модели тепломассопереноса в расплавленном металле, помещенном в неоднородное переменное магнитное поле, учитывающей как медленные свободноконвективные течения, так и быстрые пульсационные процессы, которые могут оказывать влияние, например, на распределение примесей. Процессы плавления и кристаллизации в рамках модели не рассматриваются, т.е. граница раздела фаз отсутствует.

Принципиальная схема теплового узла печи представлена на рисунке 6.19. Шихта жаропрочного никелевого сплава 1 помещается в тигель 2, спекаемый из смеси шамота и электрокорунда и находящийся внутри водоохлаждаемого медного индуктора 3, установленного на асбестовом основании 4. Заливка металла происходит через носик электрокорундового стакана 5. Индукторная печь находится внутри вакуумной камеры, а процесс электромагнитного переплава происходит в условиях технического вакуума (при давлении 10^{-3} Па). Верхняя граница расплава считается свободной и недеформируемой. Параметры технологического процесса представлены в таблице 6.1. Физические свойства никелевого расплава, использованные для моделирования, приведены в таблице 6.2.

Рассматривается заполненная парамагнитным ($\mu \approx 1$) проводящим расплавом вертикальная цилиндрическая область (см. рис. 6.19), которая находится во внешнем неоднородном переменном магнитном поле $\vec{H}^{out} = \vec{H}^{out}(\vec{r})\cos\omega t$. Полагается, что диэлектрические стенки не влияют на магнитное поле, созданное индуктором. Характерные частоты и параметры катушки индуктора приведены в таблице 6.1.

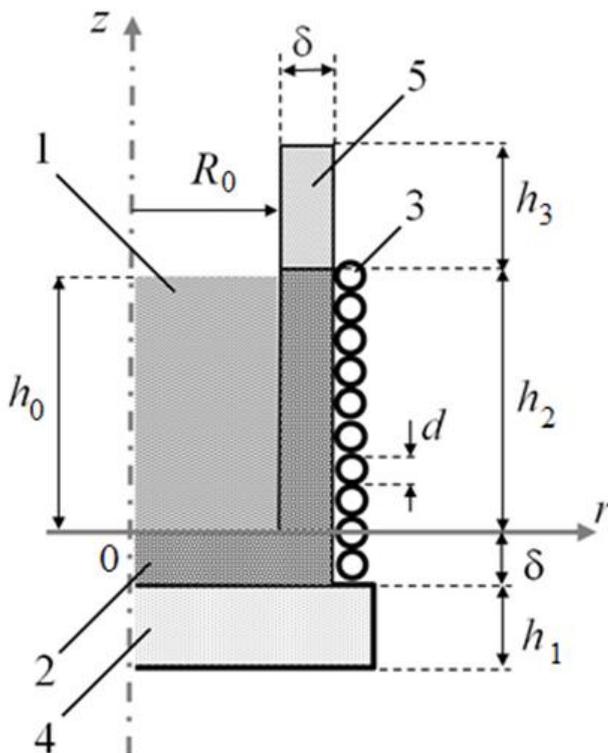


Рис. 6.19 Тепловой узел индукторной печи:

- 1 – расплав металла;
- 2 – тигель;
- 3 – индуктор;
- 4 – асбестовое основание;
- 5 – электрокорундовый стакан

Геометрические параметры, мм		
внутренний радиус тигля	R_0	125
толщина стенки тигля	δ	10
высота столба расплава металла	h_0	200...250
высота асбестового основания	h_1	50...60
высота шамотного тигля	h_2	200...300
высота электрокорундового стакана	h_3	50...100
радиус витка	R_1	150
диаметр витка	d	35
Физические параметры индуктора		
рабочий ток индуктора, А	I	250
частота переменного тока, кГц	$\omega/2\pi$	1...2
число витков индуктора	N	8...12

Табл. 6.1 Параметры технологического процесса

Параметр	Обозначение	Значение
теплопроводность, Вт/(м·К)	λ	100
удельная теплоёмкость, Дж/(кг·К)	c	655
плотность, кг/м ³	ρ	7770
удельная проводимость, МСм/м	σ	13,3
кинематическая вязкость, м ² /с	ν	$5.28 \cdot 10^{-6}$
коэффициент объёмного расширения, К ⁻¹	β	$38.5 \cdot 10^{-6}$
температура плавления, К	$T_{\text{п}}$	1726
степень черноты поверхности	$\tilde{\epsilon}$	0.15

Табл. 6.2 Физические свойства никелевого расплава¹

¹ Дрица М. Е. Свойства элементов: Справ. изд. в 2-х кн. Кн. 1. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Металлургия, ГУП «Журнал Цветные металлы», 1997. – 432 с.

Система уравнений, описывающих состояние расплава, состоит из уравнений Максвелла, закона Ома и уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска, в которых учтена электродинамическая сила и слагаемое, описывающее распределение источников тепла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J}, \quad \operatorname{div}\vec{E} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{H} = 0, \quad (6.38)$$

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \mu\mu_0 [\vec{V} \times \vec{H}] \right), \quad (6.39)$$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{V} + g\beta T\vec{\gamma} + \frac{\mu\mu_0}{\rho}\vec{J} \times \vec{H}, \quad \operatorname{div}\vec{V} = 0, \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)T = \chi\Delta T + \frac{\vec{J}^2}{\rho c \sigma}. \quad (6.41)$$

Для оценки влияния конвекции на распределение магнитного поля и электрических токов применим операцию rot к уравнению (6.39) и используем теорему о циркуляции электрического поля (6.38):

$$\operatorname{rot}\vec{J} = \sigma \left(-\mu\mu_0 \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\vec{V} \times \mu\mu_0 \vec{H}) \right). \quad (6.42)$$

Оценивая порядок величины слагаемых в (5.42), приходим к выводу, что при выполнении неравенства $\omega \gg VR_0^{-1}$ вторым слагаемым в правой части уравнений (6.39) и (6.42), а значит и влиянием конвективного движения на распределение токов, можно пренебречь.

Для установившегося движения жидкости конвективное слагаемое $(\vec{V}\nabla)\vec{V}$ и слагаемое с подъемной силой $g\beta T$ в уравнении Навье-Стокса (5.40) имеют одинаковый порядок величины. В этом случае для значения скорости получаем оценку $V \sim \sqrt{g\beta R_0 \Delta T}$, где характерная разность температур $\Delta T \approx 20$ К (отклонение температуры расплава от температуры плавления). Тогда $VR_0^{-1} = R_0^{-1} \sqrt{g\beta R_0 \Delta T} \approx 0,4$ с⁻¹. Рабочие частоты колебаний тока в индукторе значительно превосходят критические значения частоты, ниже которой генерируемые конвективным движением расплава электрические токи влияют на распределение магнитного поля внутри расплава.

Таким образом, полная задача (6.38) – (6.41) распадается на две подзадачи:

1. задача о диффузии магнитного поля в расплав (уравнения (6.38) и (6.39)), при решении которой находятся распределения магнитного поля, тока и источников тепла;
2. задача о конвективном движении проводящей парамагнитной жидкости в переменном магнитном поле, решение которой позволяет определить структуру течений, их устойчивость и эволюцию при изменении управляющих параметров (уравнения (6.40) и (6.41)).

6.2.1.1 Уравнения диффузии магнитного поля в расплав

Пренебрегая конвективным слагаемым в уравнении (6.39) и учитывая второе и четвертое уравнения из (6.38), можно получить уравнение для диффузии магнитного поля в расплав

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\mu_0\sigma} \Delta \vec{H}. \quad (6.43)$$

Следуя [303], оценим глубину проникновения магнитного поля в расплав. Сравнивая порядки левой и правой частей уравнения (6.43) для характерной

глубины проникновения магнитного поля в расплав, получаем выражение $\zeta \approx \sqrt{1/\sigma\mu_0\omega}$. Оценки, выполненные с использованием данных из таблиц 6.1 и 6.2. показывают, что в широком диапазоне частот ω глубина проникновения магнитного поля в расплав значительно меньше размеров тигля. Это свидетельствует о том, что токи, определяющие разогрев расплава, сконцентрированы в основном в пределах пограничных слоев, примыкающих к границам полости.

Решение уравнения диффузии магнитного поля (6.43) в расплав металла будем искать в виде суперпозиции составляющих магнитного поля: внешней гармонической \vec{H}^{out} , создаваемой индуктором, и внутренней \vec{H}^{ind} , создаваемой индукционными токами $\vec{H} = \vec{H}^{out} \cos \omega t + \vec{H}^{ind}$. Плотность тока в этом случае определяется как $\vec{J} = \text{rot} \vec{H}^{ind}$, поскольку в расплаве $\text{rot} \vec{H}^{out} = 0$. Уравнение для индукционной составляющей магнитного поля примет вид

$$\frac{\partial \vec{H}^{ind}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\mu_0\sigma} \Delta \vec{H}^{ind} + \omega \vec{H}^{out} \sin \omega t. \quad (6.44)$$

Представив индукционное магнитное поле в виде суммы гармоник

$$\vec{H}^{ind} = \vec{H}_1 \sin \omega t - \vec{H}_2 \cos \omega t, \quad (6.45)$$

уравнение (6.44) можно записать в виде системы уравнений

$$\Delta \vec{H}_1 = Re_m (\vec{H}_2 - \vec{H}^{out}), \quad \Delta \vec{H}_2 = -Re_m \vec{H}_1, \quad (6.46)$$

где $Re_m = \mu\mu_0\sigma R_0^2\omega$ – магнитное число Рейнольдса. Для заданных радиуса тигля и удельной проводимости расплава этот параметр является фактически

безразмерной частотой пульсаций магнитного поля. Используя данные таблиц 6.1 и 6.2 для рассматриваемой ситуации, можно записать $Re_m \approx 1.64 \frac{\omega}{2\pi}$.

В силу осевой симметрии задачи для радиальной компоненты поля и плотности тока на оси симметрии выполняются условия

$$r = 0: H_r^{ind} = 0, \vec{J} = \text{rot}\vec{H} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_z^{ind}}{\partial r} = 0. \quad (6.47)$$

Поле индукционных токов \mathbf{H}^{ind} затухает на некотором расстоянии от поверхности расплава, поэтому в качестве внешнего граничного условия для системы уравнений (6.46) использовано условие

$$z, r \rightarrow \infty \quad \vec{H}_{1,2} = 0. \quad (6.48)$$

Для удовлетворения условия (6.48) в расчетную область включается пространство вокруг расплава, при этом магнитное число Рейнольдса в уравнениях (6.46) можно рассматривать в качестве переменного коэффициента, который имеет конечное значение в проводящем расплаве и равен нулю там, где $\sigma = 0$, т.е. в диэлектрике.

Внешнее магнитное поле создается индуктором, представляющим собой короткую катушку. Стенка тигля неэлектропроводная и при температуре расплава диамагнитная, следовательно, на основании теоремы о циркуляции магнитного поля не влияет на напряжённость магнитного поля индуктора \vec{H}^{out} .

Рассмотрим поле, создаваемое кольцевым током I радиусом R в некоторой точке пространства. Ось кольцевого тока совпадает с осью Oy , а его плоскость перпендикулярна ей и отстоит от начала координат на расстояние z_k . Поясняющая схема приведена на рисунке 6.20а. Идеализированный соленоид представляет собой систему из N подобных кольцевых токов.

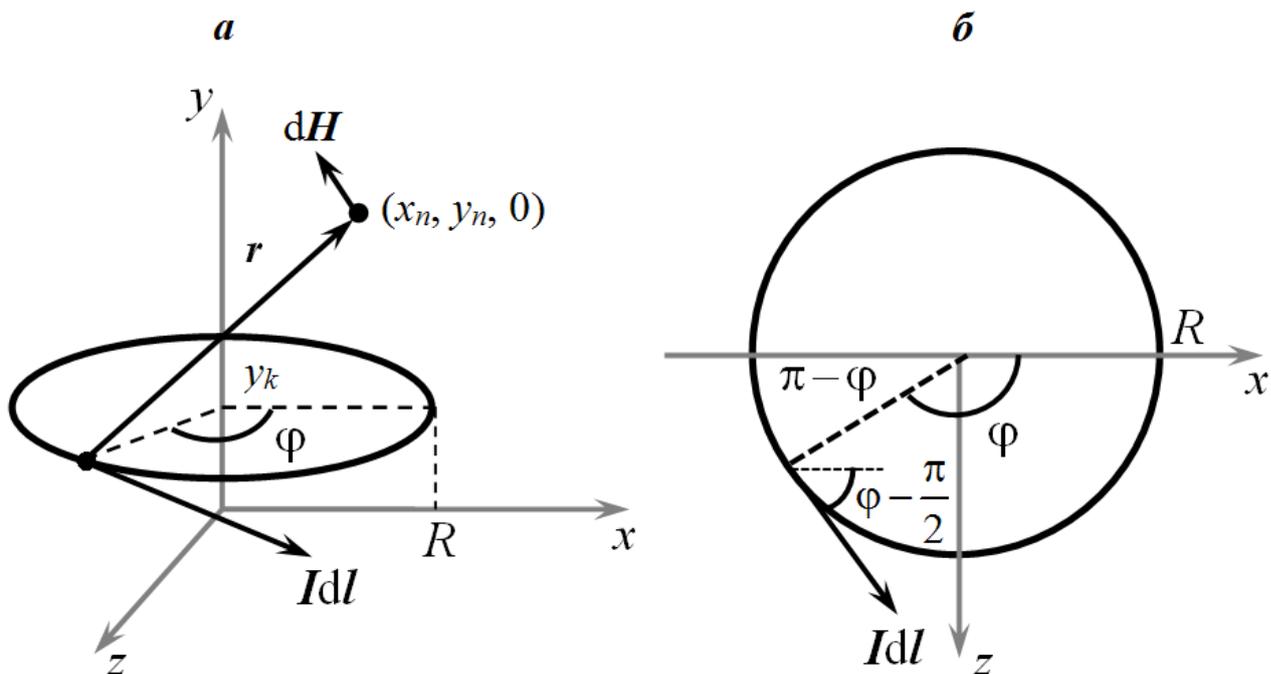


Рис. 6.20 Схема к определению магнитного поля кольцевого тока в точке с координатами $(r_n, z_n, 0)$: общий вид (а) и вид сверху (б)

Магнитное поле соленоида определяется на основании закона Био-Савара-Лапласа

$$d\vec{H} = \frac{\vec{Idl} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (6.49)$$

в точках с координатами $(x_n, y_n, 0)$, принадлежащих плоскости xOy декартовой системы координат, где оно имеет только x - и y -компоненты. Несмотря на классическую постановку, расчет магнитного поля короткого соленоида на основании закона (6.49) представляет нетривиальную проблему, требующую отдельного обсуждения.

Запишем закон (6.49) через компоненты векторов. Компоненты элемента тока в декартовой системе могут быть записаны в виде (см. рис. 6.20б)

$$\begin{aligned} \overline{Idl} &= \left\{ IRd\varphi \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right), 0, IRd\varphi \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right\} = \\ &= \{ IR \sin \varphi d\varphi, 0, -IR \cos \varphi d\varphi \}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Радиус-вектор, проведенный от элемента тока к точке наблюдения

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \{ x_n - R \cos \varphi, (y_n - y_k), -R \sin \varphi \}, \\ r^2 &= \left[R^2 + x_n^2 + (y_n - y_k)^2 - 2Rx_n \cos \varphi \right]. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Подставив (6.50) и (6.51) в (6.49), получим выражение для x и y компонент вектора напряженности магнитного поля, создаваемого элементом k -го кольца

$$\begin{aligned} dH_x^{(k)} &= \frac{IR(y_n - y_k) \cos \varphi}{4\pi \left[R^2 + x_n^2 + (y_n - y_k)^2 - 2Rx_n \cos \varphi \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot d\varphi, \\ dH_y^{(k)} &= \frac{IR(R - x_n \cos \varphi)}{4\pi \left[R^2 + x_n^2 + (y_n - y_k)^2 - 2Rx_n \cos \varphi \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot d\varphi. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Для нахождения поля индуктора соотношения (6.52) необходимо проинтегрировать по азимутальному углу и просуммировать по всему набору кольцевых токов

$$H_x(x_n, y_n) = \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} dH_x^{(k)}, \quad H_y(x_n, y_n) = \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} dH_y^{(k)}. \quad (6.53)$$

Для перехода от декартовых к цилиндрическим координатам в формулах (6.52) и (6.53) следует произвести формальную замену координат x на r и y на z . Магнитное поле индуктора вычислялось по формулам (6.52) и (6.53) в узлах дискретной сетки расположенной внутри короткого соленоида в плоскости $r - z$ (см. рис. 6.19).

6.2.1.2 Уравнения конвекции проводящей парамагнитной жидкости в высокочастотном магнитном поле

Представим электродинамическую силу и распределение источников тепла в уравнениях (6.40) и (6.41) с учетом (6.45) в виде

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{H} = \vec{f}_0 - \vec{f}_1 \cos \Omega t - \vec{f}_2 \sin \Omega t,$$

$$\vec{J} = \text{rot} \vec{H}^{ind} = \vec{J}_1 \sin \omega t - \vec{J}_2 \cos \omega t, \quad (6.54)$$

$$J^2 = j_0^2 - j_1^2 \cos \Omega t - j_2^2 \sin \Omega t.$$

$$\vec{J}_1 = \text{rot} \vec{H}_1, \quad \vec{J}_2 = \text{rot} \vec{H}_2,$$

$$\vec{f}_0 = \frac{1}{2} (\vec{J}_1 \times \vec{H}_1 + \vec{J}_2 \times \vec{H}_2), \quad \vec{f}_1 = \frac{1}{2} (\vec{J}_1 \times \vec{H}_1 - \vec{J}_2 \times \vec{H}_2),$$

$$\vec{f}_2 = \frac{1}{2} (\vec{J}_1 \times \vec{H}_2 + \vec{J}_2 \times \vec{H}_1),$$

$$j_0^2 = \frac{1}{2} (J_1^2 + J_2^2), \quad j_1^2 = \frac{1}{2} (J_1^2 - J_2^2), \quad j_2^2 = \vec{J}_1 \vec{J}_2, \quad \Omega = 2\omega \gg 1.$$

Из выражений (6.54) следует, что расплав находится в поле объемной силы, величина которой гармонически изменяется с высокой частотой около некоторого

среднего значения \vec{f}_0 . Распределение токов и источников тепла аналогично распределению силы. Не зависящие от времени слагаемые в равенствах (6.54) определяют осредненные температуру и скорость конвективного течения расплава, на фоне которых наблюдаются высокочастотные пульсации этих полей.

Для определения пульсационных и осредненных полей применим к уравнениям (6.40) и (6.41) методы многих масштабов [5] и осреднения [6]. Введем иерархию времен $\tau = \varepsilon^{-1}t$, $t_0 = t$, $t_1 = \varepsilon t$, $t_2 = \varepsilon^2 t$ Полагаем, что все физические поля, кроме \vec{f} и J^2 , зависят как от «быстрого» (пульсационного) времени τ , так и от «медленных» (конвективных) времен t_0, t_1, t_2, \dots . Поля электродинамической силы \vec{f} и мощности тепловых источников J^2 определяются только «быстрым» временем τ (см. формулы (6.54)) и имеют нулевой порядок по ε .

Представим производную по времени и поля скорости, давления и температуры в виде степенных рядов по малому параметру $\varepsilon = \Omega^{-1}$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots,$$

$$V = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \dots, \quad T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots, \quad (6.55)$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$$

Подставив разложения (6.55) в уравнения (6.40), (6.41) и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε , в главном (минус первом) порядке имеем

$$\frac{\partial \vec{V}_0}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial T_0}{\partial \tau} = 0,$$

т.е. главные части полей скорости и температуры не зависят от пульсационного времени.

В нулевом порядке разложения по ε уравнения (6.40), (6.41) записываются в виде

$$\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{V}_0}{\partial t_0} + (\vec{V}_0 \nabla) \vec{V}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_0 + \nu \Delta \vec{V}_0 + g \beta T_0 \vec{\gamma} + \frac{\mu \mu_0}{\rho} \vec{f}, \quad \text{div} \vec{V}_0 = 0, \quad (6.56)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \frac{\partial T_0}{\partial t} + (\vec{V}_0 \nabla) T_0 = \chi \Delta T_0 + \frac{J^2}{\rho c \sigma},$$

где \vec{f} и J^2 задаются равенствами (6.54).

Система (6.56) распадается на две части. Первую часть образуют слагаемые, определяющие пульсации полей скорости и температуры

$$\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial \tau} = -\frac{\mu \mu_0}{\rho} (\vec{f}_1 \cos \tau + \vec{f}_2 \sin \tau), \quad \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho c \sigma} (j_1^2 \cos \tau + j_2^2 \sin \tau). \quad (6.57)$$

Во второй части собраны слагаемые, не зависящие от пульсационного времени и описывающие осредненное конвективное течение жидкости в поле постоянной силы \vec{f}_0 при стационарном объемном распределении источников тепла j_0^2

$$\frac{\partial \vec{V}_0}{\partial t_0} + (\vec{V}_0 \nabla) \vec{V}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_0 + \nu \Delta \vec{V}_0 + g \beta T_0 \vec{\gamma} + \frac{\mu \mu_0}{\rho} \vec{f}_0, \quad \text{div} \vec{V}_0 = 0, \quad (6.58)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t_0} + (\vec{V}_0 \nabla) T_0 = \chi \Delta T_0 + \frac{j_0^2}{\rho c \sigma}.$$

При записи первого уравнения в (6.58) полагалось, что главная часть давления, так же как и главные части полей скорости и температуры, не зависит от быстрого времени τ . Для выяснения характера пульсаций поля давления необходимо выписать следующий порядок разложения уравнений (6.40) и (6.41).

Таким образом, средние части электромагнитной силы \vec{f}_0 и распределения источников тепла j_0^2 приводят к генерации осредненного конвективного течения. Пульсации силы и теплового поля определяют малоамплитудные колебания физических полей около своих средних значений. Основным интересом представляет осредненное конвективное течение, генерируемое в расплаве магнитным полем, однако и пульсации физических полей могут оказывать влияние, например, на сегрегацию примесей.

Уравнения, аналогичные (6.58), представлены, например, в работе [308], где изучается зонная плавка с целью очистки полупроводниковых кристаллов. Авторы феноменологически вводят осредненные значения электродинамической силы, действующей на расплав, и работают со средними значениями остальных физических полей.

Для обезразмеривания (6.67) введем характерные единицы измерения времени – R_0^2/ν , скорости – ν/R_0 , температуры – θ , магнитного поля – H_0 и тока – H_0/R_0 . Уравнения конвекции в безразмерной форме примут вид

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\nabla p + \Delta \vec{V} + GrT\vec{\gamma} + Ha^2 \vec{f}_0, \quad \text{div} \vec{V} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) T = \frac{1}{Pr} \Delta T + \frac{Q}{Pr} j_0^2, \quad (6.59)$$

$$\vec{f}_0 = \frac{1}{2} (\vec{J}_1 \times \vec{H}_1 + \vec{J}_2 \times \vec{H}_2), \quad j_0^2 = \frac{1}{2} (J_1^2 + J_2^2),$$

где $Gr = g\beta\theta R_0^3/\nu^2$ – число Грасгофа; $Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля; $Q = H_0^2/(\rho\sigma\chi\theta)$ – параметр тепловыделения, задающий интенсивность источников тепла, $Ha = \sqrt{\mu\mu_0 H_0^2 R_0^2/(\rho\nu^2)}$ – число Гартмана.

С учетом $\vec{J} = \text{rot}\vec{H}$ для осредненной электродинамической силы можно записать выражение $\vec{f}_0 = \frac{1}{2}\left[\left(\vec{H}_1\nabla\right)\vec{H}_1 + \left(\vec{H}_2\nabla\right)\vec{H}_2 - \frac{1}{2}\nabla\left(H_1^2 + H_2^2\right)\right]$, тогда уравнение движения в (6.59) примет вид

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} = -\nabla\Pi + \Delta\vec{V} + GrT\vec{\gamma} + \frac{1}{2}Ha^2\vec{F},$$

$$\vec{F} = \left[\left(\vec{H}_1\nabla\right)\vec{H}_1 + \left(\vec{H}_2\nabla\right)\vec{H}_2\right], \quad \Pi = p + \frac{Ha^2}{4}\left(H_1^2 + H_2^2\right).$$

6.2.1.3 Граничные условия

Для скорости течения расплава на твердых границах должно выполняться условие прилипания. На свободной недеформируемой поверхности потребуем равенства нулю нормальной компоненты скорости и касательных компонент тензора вязких напряжений.

Течение в расплаве, так же как и распределение магнитного поля, считается осесимметричным, что позволяет численно решать конвективную задачу в двумерной постановке. На оси цилиндра для скорости жидкости ставится условие симметрии, а для температурного поля полагается отсутствие потока тепла.

При электромагнитном переплаве единственным тепловыделяющим элементом является сам расплав металла, поэтому в условиях установившегося теплообмена на границах области могут быть заданы стационарные тепловые потоки $q = -\lambda\nabla T$.

Для корректной записи тепловых граничных условий в рассматриваемой задаче распределение температурного поля удобно задавать текущей абсолютной температурой расплава, а в качестве характерной температуры θ выбирать разницу между абсолютной температурой расплава и температурой плавления $T_{\text{п}}$, которая считается равновесной. В этом случае давление в (6.59) переписется в виде $\tilde{p} = p + Gr\tilde{T}_{\text{п}}z$, где $\tilde{T}_{\text{п}}$ - безразмерная температура плавления металла.

Тепловой поток излучением с верхней свободной поверхности металла q рассчитывается по закону Стефана-Больцмана

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \tilde{\epsilon} \sigma_B (T^4 - T_{\text{cp}}^4),$$

где T и T_{cp} - соответственно абсолютные температуры поверхности расплава и окружающей среды; λ - коэффициент теплопроводности расплава; $\tilde{\epsilon}$ - степень черноты расплава; σ_B - постоянная Стефана-Больцмана. В безразмерном виде это условие примет вид

$$-\frac{\partial T}{\partial z} = Bi \left(T^4 - \left(\frac{G_{\text{эф}}}{Gr} \right)^4 \right) \quad (6.60)$$

где $Bi = \tilde{\epsilon} \sigma_B \theta^3 R_0 / \lambda \approx 8.5 \cdot 10^{-8}$ - радиационное число Био для верхней границы, $G_{\text{эф}} = g\beta T_{\text{cp}} R_0^3 / \nu^2 \approx 10^7$ - эффективное число Грасгофа (оценки выполнены для $\theta = 20$ К, $T_{\text{cp}} = 400$ К и значений параметров, приведенных в таблицах 6.1 и 6.2).

Боковая поверхность и дно тигля полагаются теплоизолированными, поэтому для этих границ, соответственно, имеют место условия

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (6.61)$$

При использовании условия (6.60) необходимо учитывать, что выражение для числа Bi дает завышенную оценку радиационного теплового потока, т.к. в рамках модели не учитывается ряд технологических факторов, уменьшающих поток тепла со свободной поверхности расплава, поэтому в (6.60) целесообразно использовать эффективное число Био $Bi_{эф} \leq Bi$. Температура окружающей тепловой узел среды T_{cp} подлежит экспериментальному определению для конкретной индукционной печи.

6.2.2 Результаты численного моделирования распределения магнитного поля

Распределение амплитуды магнитного поля индуктора в области расплава, рассчитанное по соотношениям (6.52) и (6.53), показано на рисунке 6.21. Для расчетов внешнего поля использовался безразмерный радиус витка индуктора $R = 1 + \delta/R_0$. В качестве характерных масштабов для координаты выбран внутренний радиус тигля R_0 (см. рис. 6.19), а для магнитного поля – величина $H_0 = NI/4\pi R_0 \approx 10^3 \text{ А} \cdot \text{м}^{-1}$. Высота тигля во всех расчетах полагалась равной двум его радиусам.

Для определения индукционной составляющей магнитного поля \vec{H}^{ind} методом установления решалась система (6.46) – (6.48). Уравнения и граничные условия записывались в цилиндрической системе координат. Все производные аппроксимировались конечными разностями. Вычисления производились на равномерной пространственной сетке со стороной ячейки 0.01, размер которой определялся в ходе исследования сходимости результатов расчетов с уменьшением шага пространственной сетки.

Распределения амплитуд компонент индукционного магнитного поля для $Re_m = 12$ и 1000 показаны на рисунках 6.22 и 6.23 соответственно. Анализ структуры полей показывает, что гармоника индукционного поля \vec{H}_2 внутри рабочей области индукционной печи при $Re_m \geq 1000$ практически совпадает с полем индуктора \vec{H}^{out} и слабо зависит от магнитного числа Рейнольдса (см.

рис. 6.21 и рис. 6.23 *в* и *г*). Количественное отличие наблюдается только вблизи границ тигля. Компонента \vec{H}_1 , меньшая по модулю, чем \vec{H}_2 , при $Re_m \geq 1000$ быстро затухает вглубь расплава (см. рис. 6.23 *а* и *б*). Это свидетельствует о том, что возникающие вблизи поверхности расплава индукционные токи экранируют центральную часть проводника от влияния магнитного поля. Распределение и интенсивность токов, а следовательно и источников тепла в образце, определяется магнитным числом Рейнольдса. Распределение j_0^2 внутри расплава показано на рисунке 6.24, из которого видно, что токи сосредоточены в пограничном слое, куда проникает поле. Наибольшее тепловыделение наблюдается вблизи боковой стенки цилиндра. Расчетная глубина проникновения магнитного поля в расплав при заданной частоте (магнитном числе Рейнольдса) коррелирует с оценкой, сделанной выше. Уменьшение частоты магнитного поля приводит к увеличению глубины проникновения поля в расплав (см. рис. 6.24*а*), а увеличение частоты уменьшает эту глубину (см. рис. 6.24*б*).

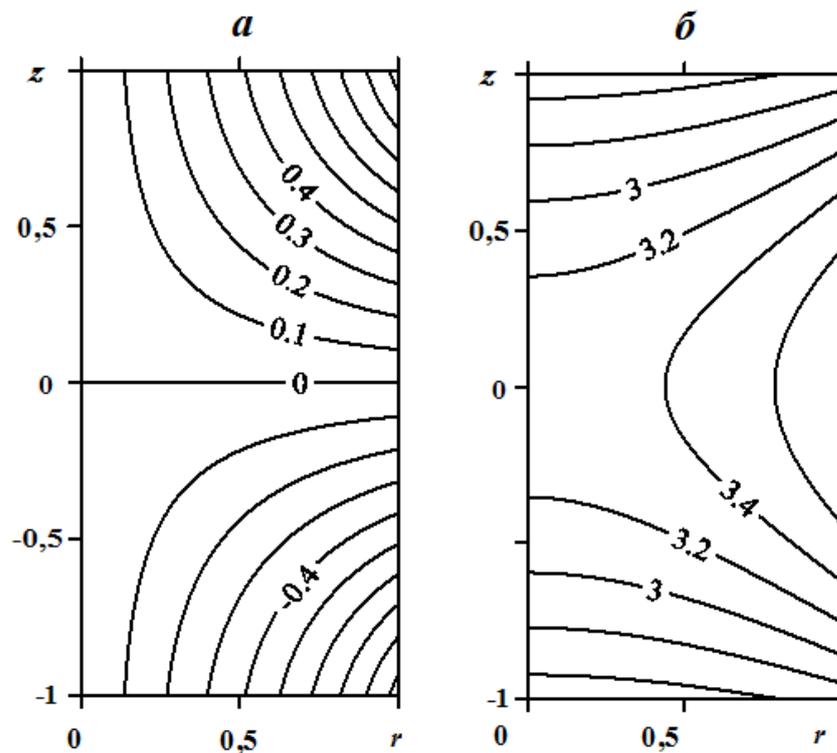


Рис. 6.21 Распределение магнитного поля индуктора \vec{H}^{out} : радиальная H_r (*а*) и аксиальная H_z (*б*) компоненты

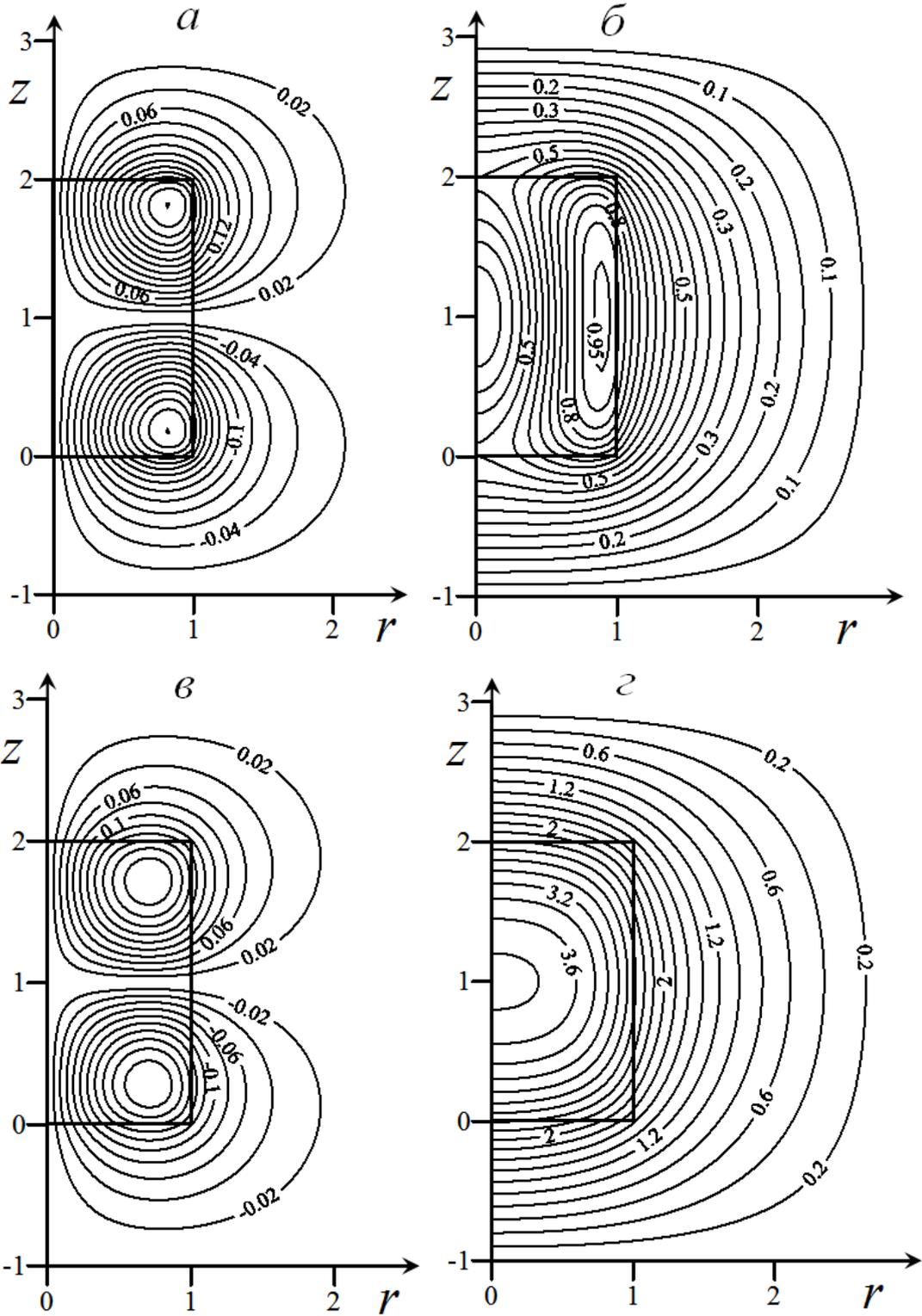


Рис. 6.22 Распределение амплитуд индукционного магнитного поля для $Re_m = 12$:
 a – радиальная H_{1r} , $б$ – аксиальная H_{1z} компоненты \vec{H}_1 ; $в$ – радиальная H_{2r} , $г$ –
 аксиальная H_{2z} компоненты \vec{H}_2

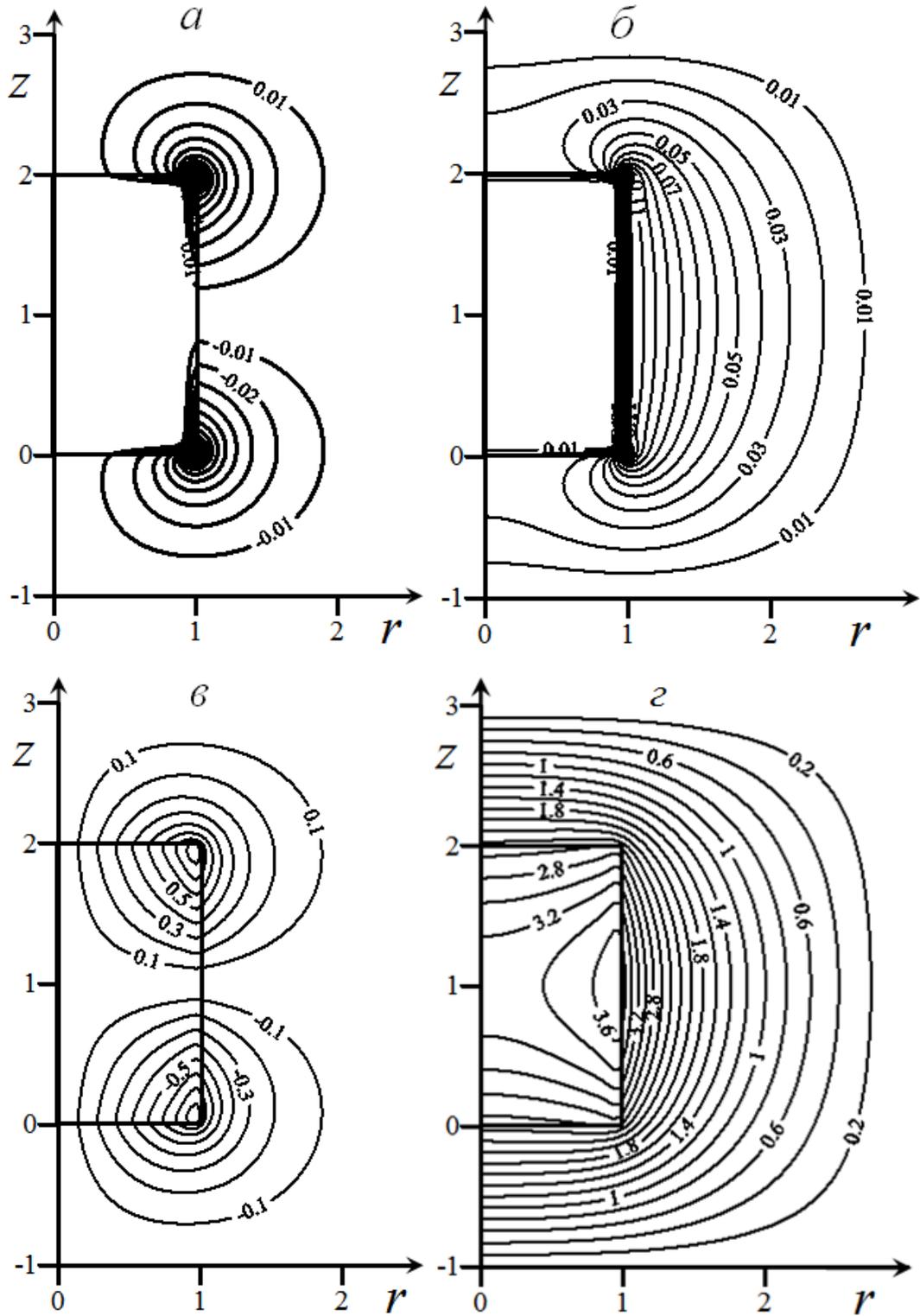


Рис. 6.23 Распределение амплитуд индукционного магнитного поля для $Re_m = 1000$: *a* – радиальная H_{1r} , *б* – аксиальная H_{1z} компоненты \vec{H}_1 ; *в* – радиальная H_{2r} , *г* – аксиальная H_{2z} компоненты \vec{H}_2

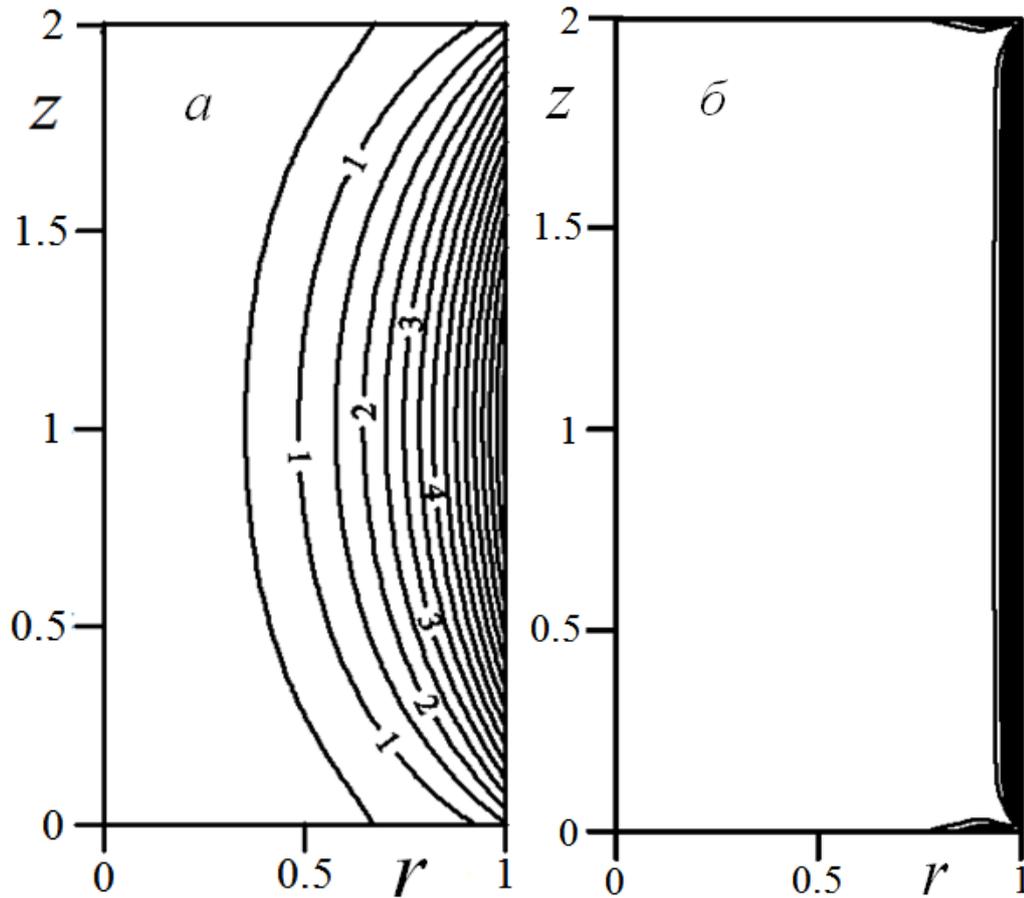


Рис. 6.24 Распределение интенсивности источников тепла j_0^2 в образце при $Re_m = 12$ (а) и 1000 (б)

На рисунке 6.25 представлена зависимость суммарной мощности тепловыделения P_V в объеме образца от Re_m

$$P_V = \int_V j_0^2 dV = 2\pi r \int_S j_0^2 dS,$$

где V – объем расплава, а S – площадь расчетной области для токов. Видно, что график имеет экстремум при $Re_m = 12$, наличие которого связано с изменением глубины проникновения поля в расплав, и имеет достаточно простое физическое объяснение.

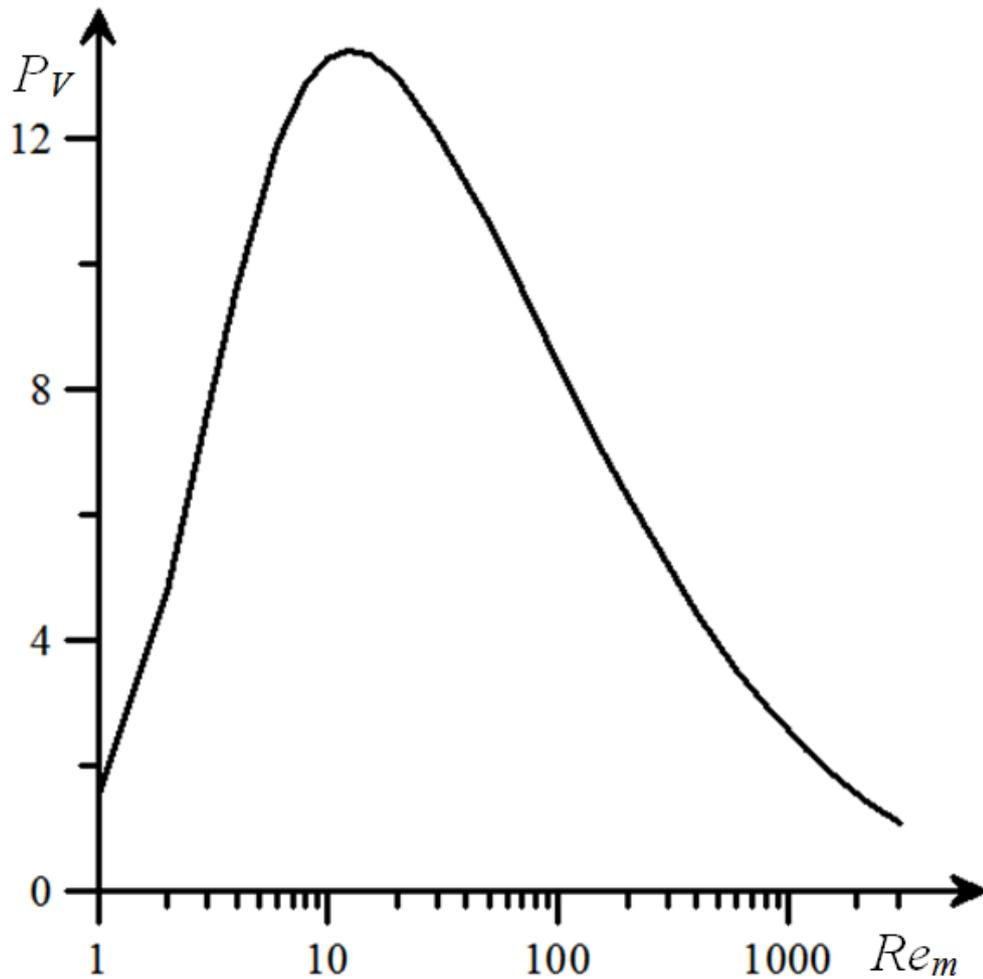


Рис. 6.25 Зависимость суммарной мощности тепловыделения от магнитного числа Рейнольдса

Величина тока в расплаве, следовательно, мощность тепловыделения зависят от ЭДС индукции \mathcal{E}_i , т.е. определяются законом электромагнитной индукции Фарадея. В нашем случае \mathcal{E}_i задается скоростью изменения напряженности магнитного поля $d\vec{H}/dt$ и площадью контура, который пронизывается полем. Скорость изменения магнитного поля определяется частотой пульсаций поля или магнитным числом Рейнольдса, а площадь контура – глубиной проникновения поля в расплав ζ . При малых Re_m величина $d\vec{H}/dt$ нарастает быстрее, чем уменьшается ζ . Поэтому наблюдается рост величины P_V с увеличением Re_m , и при $Re_m = 12$ достигается максимум (см. рис. 6.25). Дальнейшее увеличение магнитного числа Рейнольдса приводит к уменьшению толщины пограничного

слоя, где концентрируются токи. Скорость этого процесса при больших Re_m значительно превосходит быстроту увеличения $d\vec{H}/dt$. Поэтому для $Re_m > 12$ наблюдается уменьшение суммарной мощности тепловыделения в объеме образца с увеличением магнитного числа Рейнольдса. Расчеты показали, что при $Re_m \geq 1000$ величина токов слабо зависит от Re_m .

Величина $Re_m = \mu\mu_0\sigma R_0^2\omega$ в общем случае зависит от материальных параметров среды, частоты пульсаций магнитного поля и размеров образца. В силу этого зависимость, показанная на рисунке 6.25, носит достаточно общий характер и определяет диапазон магнитных чисел Рейнольдса вблизи максимума кривой, соответствующий наиболее эффективному прогреву парамагнитного материала. Оценки показывают, что оптимальный размер образца, который разогревается магнитным полем с частотой 1000 Гц, равен 1 см. Для эффективного разогрева цилиндрического массива, соответствующего размерам индукционной печи, достаточно частоты магнитного поля 7 – 8 Гц.

В промышленных условиях в индукционную печь первоначально помещают шихту из жаропрочного сплава, которая состоит из отдельных кусочков размером порядка 1 см. Поэтому при температурах выше точки Кюри до плавления металла наиболее разумно использовать переменные магнитные поля с частотой более 1000 Гц. После плавления магнитное поле необходимо для поддержания требуемой температуры и возбуждения конвективных течений в расплаве.

6.3 Основные результаты и выводы

Исследовано влияние постоянного однородного магнитного поля на стационарное конвективное течение в горизонтальном канале прямоугольного сечения, вызванное продольным градиентом температуры. В нижней части канала жидкость движется в направлении приложенного градиента температуры, а в верхней части – в противоположную сторону. Интенсивность течения и распределение скорости в поперечном сечении зависят от величины и направления магнитного поля.

В сильном вертикальном магнитном поле конвективное течение сосредоточено возле углов канала, так, что вместо двух противоположно направленных потоков имеются четыре горизонтальных струи. Направление двух струй совпадают с направлением приложенного градиента температуры, а другие две движутся в противоположную сторону. Интенсивность течения в центре канала обратно пропорциональна квадрату числа Гартмана, а в углах полости обратно пропорционально числу Гартмана.

В случае горизонтального магнитного поля, направленного поперек полости, обнаружено замедление основного потока с увеличением числа Гартмана, но менее сильное, чем при вертикальном поле. Изменения в структуре течения в этом случае менее выражены. Можно отметить уменьшение величины горизонтального градиента скорости в центральной зоне течения и рост градиентов в пограничных слоях, которые формируются вблизи стенок канала.

Проанализировано влияние магнитного поля на устойчивость течения для малых чисел Прандтля в диапазоне $0 - 0.15$. Выяснено, что в указанном диапазоне чисел Прандтля наиболее опасными являются монотонные возмущения с конечной длиной волны. Магнитное поле в большинстве случаев подавляет эти возмущения, причем стабилизирующее действие вертикального магнитного поля более сильное, чем горизонтального.

Обнаружено дестабилизирующее влияние горизонтального магнитного поля на течение жидкости в случае нулевого числа Прандтля. Порог устойчивости понижается с ростом числа Гартмана при малых и умеренных Ha и повышается при больших Ha . Эффект дестабилизации наиболее заметен, когда ширина канала меньше его высоты. Для канала квадратного сечения имеет место слабая дестабилизация, а когда ширина канала в 1.5 раза превышает его высоту эффект исчезает.

Сформулирована математическая модель конвекции металлического расплава в переменном неоднородном магнитном поле, учитывающая как медленные процессы, определяемые осредненными величинами, так и быстрые пульсационные явления, вызванные взаимодействием переменного

неоднородного магнитного поля и индукционных токов в расплаве. Проведено разделение полной задачи на две подзадачи: о диффузии магнитного поля в расплав и о конвекции расплава в переменном магнитном поле.

Предложена методика расчета поля индуктора, представляющего собой короткий соленоид. Рассчитаны распределения индукционных магнитных полей и токов для различных значений магнитного числа Рейнольдса, характеризующего интенсивность влияния внешнего поля индуктора на расплав. Получена зависимость интегральной мощности тепловыделения в объеме расплава от магнитного числа Рейнольдса. Показано, что оптимальный режим прогрева парамагнитного образца в переменном неоднородном магнитном поле происходит при $Re_m \approx 12$.

ГЛАВА 7. ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ПЛОСКОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ

Исследования адвективных течений в слоях и каналах являются важными и актуальными как с теоретической точки зрения (изучение гидродинамической устойчивости и закономерностей перехода к сложным режимам поведения), так и с точки зрения непосредственных технологических приложений. К течениям указанного типа относятся, в частности, атмосферная циркуляция Хэдли, некоторые типы движений в океане, коре и мантии Земли, процессы переноса в мелких водоемах, а также течения и тепломассообмен при выращивании кристаллов горизонтальным методом Бриджмена, широко применяемым в полупроводниковой микроэлектронике для получения монокристаллов.

В литературе имеется ряд работ, посвященных изучению одно- и двумерных адвективных течений однокомпонентных и бинарных жидкостей в плоском горизонтальном слое и в вытянутой по горизонтали прямоугольной области при различных тепловых условиях на границах. Устойчивость адвективного течения однокомпонентной жидкости в плоском горизонтальном слое с твердыми границами исследовалась в работах [358 - 360] для случая идеально-теплопроводных границ (см. также монографию [80]) и в работе [361] для случая теплоизолированных границ. В работе [362] для случаев идеально-теплопроводных и адиабатических границ численно исследовались стационарные адвективные течения однокомпонентной жидкости в вытянутой по горизонтали прямоугольной полости. В [363] исследована устойчивость адвективного течения бинарной смеси в плоском горизонтальном слое с твердыми границами при наличии заданных однородных продольных градиентов температуры и концентрации (без учета термодиффузии). В работе [365] с учетом эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности аналитически и численно изучены стационарные адвективные течения бинарной жидкости в вытянутой по горизонтали прямоугольной полости с теплоизолированными границами.

Устойчивость стационарных адвективных течений бинарных жидкостей в горизонтальном слое с учетом эффекта термодиффузии (эффекта Соре) ранее не рассматривалась.

Устойчивость и нелинейные режимы адвективного течения в плоском горизонтальном слое двухкомпонентной смеси с теплоизолированными (адиабатическими) границами исследованы в [22, 371, 372].

Настоящая глава посвящена исследованию устойчивости стационарного адвективного течения двухкомпонентной смеси в плоском горизонтальном слое с идеально-теплопроводными твердыми границами при наличии однородного продольного градиента температуры. Задача решается с учетом эффекта Соре (эффекта термодиффузии).

7.1 Постановка задачи. Определяющие уравнения

Рассмотрим конвективное движение бинарной смеси в плоском горизонтальном слое, ограниченном снизу и сверху твердыми плоскостями $x = \pm h$ при наличии однородного продольного градиента температуры (см. рис. 7.1). Плотность смеси полагается линейно зависящей от температуры и концентрации легкой компоненты:

$$\rho = \langle \rho \rangle (1 - \beta_1 T - \beta_2 C), \quad (7.1)$$

где $\langle \rho \rangle$ – плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации; T и C – отклонения от средних значений, которые предполагаются малыми; β_1 – коэффициент теплового расширения смеси, β_2 – концентрационный коэффициент плотности ($\beta_2 > 0$).

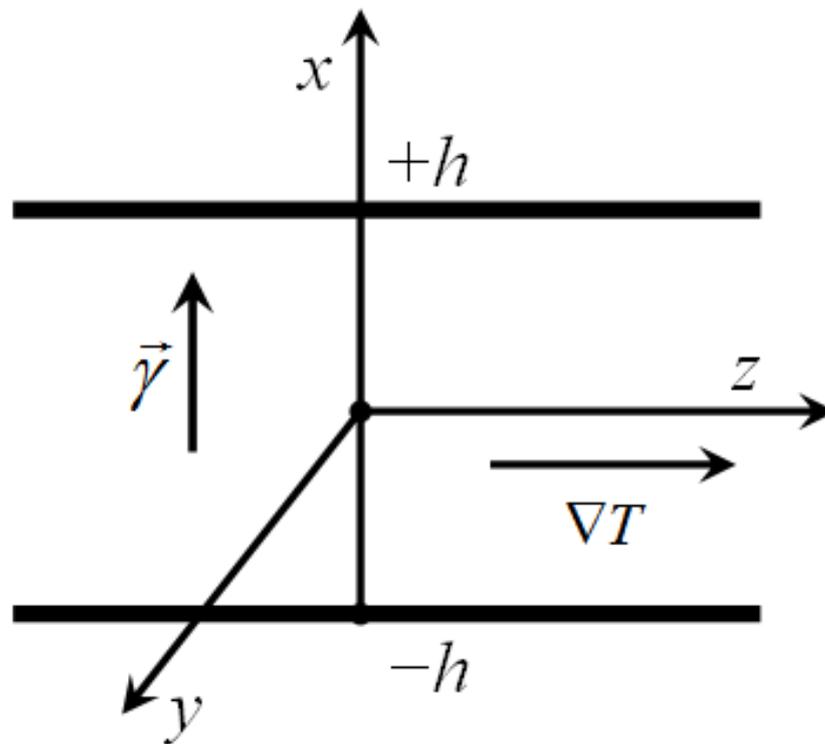


Рис. 7.1 Плоский горизонтальный слой бинарной жидкости, ограниченный твердыми плоскостями

Введем безразмерные переменные, выбрав в качестве единиц: расстояния – полутолщину слоя h , времени h^2/χ , скорости χ/h , температуры Ah (A – величина продольного градиента температуры), концентрации $Ah\beta_1/\beta_2$, давления $\langle\rho\rangle\nu\chi/h^2$. Запишем безразмерные уравнения свободной конвекции смеси в приближении Буссинеска с учетом эффекта термодиффузии (эффектом диффузионной теплопроводности пренебрегается)

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \nabla \vec{V} \right) = -\nabla P + \Delta \vec{V} + Ra(T + C) \vec{\gamma},$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \nabla T = \Delta T, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \nabla C = \frac{1}{Le} (\Delta C - \varepsilon \Delta T),$$

$$\varepsilon = -\frac{\alpha \beta_2}{\beta_1}, \quad Ra = \frac{g \beta_1 A h^4}{\nu \chi}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Le = \frac{\chi}{D}.$$

В системе уравнений (7.2) введены следующие обозначения: \vec{V} – вектор скорости жидкости; P – конвективная добавка к гидростатическому давлению; ε – параметр разделения, характеризующий отношение вкладов эффектов термодиффузии и теплового расширения в изменение плотности при изменении температуры в равновесном состоянии; Ra – число Релея; Pr – число Прандтля; Le – число Льюиса; g – ускорение силы тяжести; ν и χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности смеси, предполагаемые постоянными; D – коэффициент диффузии; $\alpha = k_T/T$, где k_T – термодиффузионное отношение, T – абсолютная температура; $\vec{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх (см. рис. 7.1); ∇ и Δ – дифференциальные операторы градиента и Лапласа. Зависимостью параметра α и остальных кинетических коэффициентов от температуры пренебрегаем.

На идеально-теплопроводных границах слоя для скорости выполняются условия прилипания, и задается распределение температуры, соответствующее однородному продольному градиенту температуры. Кроме того, считаются выполненными условия замкнутости течения и замкнутости потока вещества

(примеси). Величина горизонтального градиента температуры считается заданной. Поток вещества через твердые границы отсутствует.

7.2 Основное стационарное течение

Задача допускает стационарное решение, соответствующее плоскопараллельному течению, в виде

$$\vec{V}_0 = (0, 0, v_0(x)), \quad C_0 = Bz + c_0(x), \quad (7.3)$$

$$T_0 = z + \vartheta_0(x), \quad P_0 = p_0(x, z),$$

где B – величина продольного градиента концентрации, который формируется в слое и подлежит определению.

После подстановки (7.3) в исходную систему (7.2) получаем уравнения

$$-\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0, \quad -\frac{\partial p_0}{\partial x} + Ra((1+B)z + \vartheta_0 + c_0) = 0, \quad (7.4)$$

$$v_0 = \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial x^2}, \quad LeBv_0 = \frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial x^2}.$$

Комбинируя первые два уравнения в (7.4), можно исключить из рассмотрения поле давления. В результате получаем систему, описывающую стационарное распределение поля скорости, температуры и концентрации легкой примеси в бинарной жидкости

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} = Ra(1+B), \quad v_0 = \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial x^2}, \quad -LeBv_0 = \frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial x^2}. \quad (7.5)$$

К системе (7.5) добавим граничные условия при $x = \pm 1$:

$$v_0 = 0, \quad \vartheta_0 = 0, \quad \frac{\partial c_0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} = 0. \quad (7.6)$$

Систему (7.5) – (7.6) необходимо дополнить условиями замкнутости течения и потока примеси, который обусловлен тремя факторами: диффузионным и термодиффузионным потоками и конвективным переносом

$$\int_{-1}^1 v_{0z} dx = 0, \quad \int_{-1}^1 (Le v_{0z} c_0 - B + \varepsilon) dx = 0. \quad (7.7)$$

Несмотря на простую структуру основного решения (7.3), задача (7.5) – (7.7) является нелинейной (см. второе уравнение (7.7)).

Решая задачу (7.5) – (7.7), для произвольных чисел Ra , получаем профиль скорости

$$v_0 = V_0 x(x^2 - 1), \quad V_0 = \frac{1}{6} Ra(1 + B). \quad (7.8)$$

Параметр V_0 аналогичен числу Пекле и характеризует интенсивность адвективного течения в слое.

Профили температуры и концентрации в основном состоянии принимают вид

$$\vartheta_0 = \frac{1}{60} V_0 x(x^2 - 1)(3x^2 - 7), \quad (7.9)$$

$$c_0 = \frac{1}{60} V_0 x Le B (3x^4 - 10x^2 + 15) + \varepsilon \vartheta_0.$$

Величина продольного градиента концентрации определяется из второго уравнения (7.7)

$$B = -\frac{3 \varepsilon (4V_0^2 Le - 525)}{5 \cdot 8V_0^2 Le^2 + 315}. \quad (7.10)$$

С учетом (7.10) определяется связь между числом Релея и амплитудой скорости

$$Ra = \frac{30V_0(8V_0^2 Le^2 + 315)}{40V_0^2 Le^2 + 1575 - 12\varepsilon LeV_0^2 + 1575\varepsilon}. \quad (7.11)$$

Существенное упрощение решения (7.8) получается при малых Ra . В этом случае можно пренебречь нелинейным слагаемым в (7.7), тогда получаем, что $B = \varepsilon$, то есть имеет место компенсация диффузионного и термодиффузионного потоков вещества. Отсюда следует

$$v_0 = V_0 x(x^2 - 1), \quad V_0 = \frac{1}{6} Ra(1 + \varepsilon). \quad (7.12)$$

В работе [22] для случая адиабатических границ получено аналогичное (7.12) выражение, что говорит о независимости распределения скорости при $Ra \rightarrow 0$ от тепловых условий на границах слоя.

В случае нормального эффекта Соре ($\varepsilon > 0$) термодиффузия ведет к накоплению легкой компоненты смеси в той части слоя, где выше температура. Таким образом, при $\varepsilon > 0$ плотность смеси в области высокой температуры понижается вследствие двух факторов – теплового расширения и обогащения легкой компонентой. Из (7.12) видно, что в этом случае термодиффузия приводит к увеличению скорости конвективного движения. При аномальном эффекте Соре ($\varepsilon < 0$) термодиффузия ведет к накоплению легкой компоненты смеси в той

области слоя, где температура ниже. В этом случае происходит торможение потока и при $\varepsilon = -1$ скорость обращается в нуль вместе с градиентом плотности. Отметим, что при $\varepsilon = -1$ состояние равновесия возможно при любых числах Релея. При $\varepsilon < -1$ происходит смена знака скорости, обусловленная изменением знака градиента плотности.

С возрастанием числа Релея возрастает роль нелинейных эффектов и, как следует из (7.11), в некоторой области значений параметров ε , Le зависимость параметра V_0 от числа Ra становится неоднозначной. Граница области неоднозначности решения слоя определяется выражением

$$\varepsilon_* = -\frac{80}{3} \frac{Le}{30Le + 1}. \quad (7.13)$$

Нетрудно убедиться, что при $\varepsilon > \varepsilon_*$ решение однозначно, а при $\varepsilon < \varepsilon_*$ имеется зависящий от ε интервал значений числа Релея, в котором существуют три стационарных решения.

На рисунке 7.2 приведены амплитудные кривые для различных значений параметра разделения и $Le = 13/7$. Все кривые пересекаются в точке $V_0 = \sqrt{525/4Le}$, в которой обращается в нуль величина продольного градиента концентрации B , когда термодиффузионный поток вещества полностью компенсируется адвективным переносом.

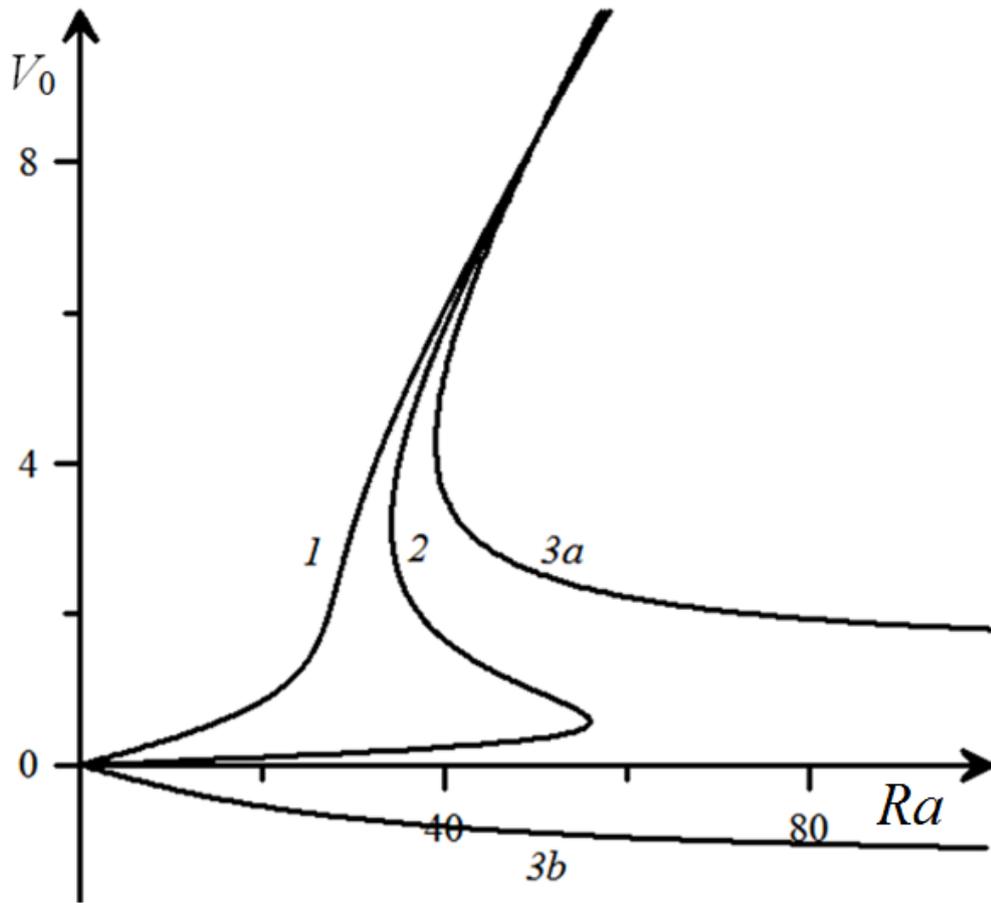


Рис. 7.2 Зависимости амплитуды стационарного течения V_0 от числа Релея при $Le = 13/7$ и $\varepsilon = -0.87, -0.95, -1.2$ (кривые 1 – 3)

Границы области неоднозначности удобно представить в параметрической форме, используя в качестве параметра амплитуду скорости V_0

$$Ra = -\frac{64\xi^4 Le - 7560\xi^2 - 2520\xi^2 Le - 99225}{840\xi(Le + 1)}, \quad (7.14)$$

$$\varepsilon = \frac{64\xi^4 + 50407560\xi^2 + 99225}{64\xi^4 Le - 7560\xi^2 - 2520\xi^2 Le - 99225}.$$

где параметр ξ связан с амплитудой скорости соотношением $\xi = V_0 Le$. При этом для $\varepsilon > -1$ область неоднозначности ограничена сверху и снизу и существует при $\varepsilon < \varepsilon_*$, а при $\varepsilon \leq -1$ область неоднозначности ограничена только снизу.

Случай $\varepsilon = -1$, как уже отмечалось выше, является особым. При этом значении ε одной из ветвей стационарных решений соответствует состояние механического равновесия, в котором тепловой и концентрационный эффекты изменения плотности компенсируют друг друга. Возникновение конвекции в прямоугольных замкнутых полостях для параметра $CoRe$, равного -1 , рассматривалось в работах [363, 364].

7.3 Линейная задача устойчивости стационарного течения

Для исследования устойчивости стационарного течения (7.8) – (7.9) представим все физические поля в виде

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{v}^*, \quad T = T_0 + T^*, \quad C = C_0 + C^*, \quad P = P_0 + p^*, \quad (7.15)$$

где подстрочный индекс «0» обозначает решение, соответствующее основному состоянию, а звездочкой помечены малые возмущения.

Подставим выражения (7.15) в исходную систему (7.2) и линеаризуем её относительно малых возмущений основного состояния. В итоге получим систему уравнений и граничных условий, описывающих эволюцию возмущений (надстрочный индекс «*» у возмущений здесь и далее опущен)

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla T_0 + \vec{v}_0 \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \Delta \vec{v} + Ra(T + C) \vec{\gamma}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T_0 + \vec{v}_0 \nabla T = \Delta T, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{v} \nabla C_0 + \vec{v}_0 \nabla C = \frac{1}{Le} (\Delta C - \varepsilon \Delta T).$$

$$x = \pm 1: \quad \vec{v} = 0, \quad T = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (7.17)$$

Рассмотрим нормальные возмущения, в которых все переменные пропорциональны $\exp[-\lambda t + i(k_y y + k_z z)]$. Предполагая такую зависимость от горизонтальных координат и времени в (7.16), получим уравнения для амплитуд возмущений в проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned} -\lambda Pr^{-1}v_x &= -p' + Dv_x + Ra(\theta + c) - Pr^{-1}ik_z v_0 v_x, \\ -\lambda Pr^{-1}v_y &= -ik_y p + Dv_y - Pr^{-1}ik_z v_0 v_y, \\ -\lambda Pr^{-1}v_z &= -ik_z p + Dv_z - Pr^{-1}(v_0' v_x + ik_z v_0 v_z), \\ v_x' + ik_y v_y + ik_z v_z &= 0, \quad -\lambda \theta = D\theta - T_0' v_x - v_z - ik_z v_0 \theta, \end{aligned} \tag{7.18}$$

$$-\lambda c = Le^{-1}(Dc - \varepsilon D\theta) - C_0' v_x - Bv_z - ik_z v_0 c, \quad D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_z^2 - k_y^2.$$

Штрихом здесь и далее обозначено дифференцирование по поперечной координате x . Для амплитуд возмущений скорости и давления сохранены прежние обозначения; θ и c – соответственно амплитуды возмущений температуры и концентрации.

Для исследуемой проблемы (7.18) отсутствует преобразование Сквайра, сводящее задачу о пространственных возмущениях к плоской задаче, поэтому были рассмотрены два предельных случая – плоские возмущения (валы с осями, ортогональными направлению основного потока, $k_y = 0$) и спиральные возмущения (валы с осями, параллельными направлению основного потока, $k_z = 0$).

Для плоских возмущений, когда $k_y = 0$, $v_y = 0$, $k_z \neq 0$, спектральная амплитудная задача с учетом (7.3) принимает вид

$$D^2\varphi + ik_z Pr^{-1}(v_0''\varphi - v_0 D\varphi) - ik_z Ra(\theta + c) = -\lambda Pr^{-1}D\varphi,$$

$$D\theta + ik_z(\mathfrak{G}'_0 \varphi - v_0\theta) - \varphi' = -\lambda\theta,$$

(7.19)

$$Le^{-1}D(c - \varepsilon\theta) + ik_z(c'_0 \varphi - v_0 c) - B\varphi' = -\lambda c,$$

$$x = \pm 1: \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = 0, \quad c' - \varepsilon\theta' = 0,$$

где амплитуда возмущений поля скорости определена через амплитуду функции тока φ таким образом, что $v_x = -ik_z\varphi$, $v_z = \varphi'$.

Для пространственных спиральных возмущений с $k_z = 0$, $k_y \neq 0$ после исключения v_y и p получаем спектральную амплитудную задачу

$$D^2v_x - k_y^2 Ra(\theta + c) = -\lambda Pr^{-1}Dv_x, \quad Dv_z - Pr^{-1}v'_0 v_x = -\lambda Pr^{-1}v_z,$$

$$D\theta - v_x \mathfrak{G}'_0 - v_z = -\lambda\theta, \quad Le^{-1}D(c - \varepsilon\theta) - c'_0 v_x - Bv_z = -\lambda c, \quad (7.20)$$

$$x = \pm 1: \quad v_x = v'_x = 0, \quad v_z = 0, \quad \theta = 0, \quad c' - \varepsilon\theta' = 0.$$

В уравнениях (7.19) и (7.20) вид функции v_0 определен формулой (6.8); функции c_0 и \mathfrak{G}_0 выражены формулами (7.9). При численном решении задач (7.19) и (7.20) в качестве основных (определяющих) параметров выбирались: амплитуда основного течения – V_0 ; параметр разделения – ε ; число Льюиса – Le ; число Прандтля – Pr . Через указанные параметры по формулам (7.10) – (7.11) вычислялись значения равновесного градиента концентрации – B и числа Релея – Ra .

Краевые задачи (7.19) и (7.20) решались численно с использованием методов дифференциальной прогонки и построения фундаментальной системы решений с пошаговой ортогонализацией [2, 3]. Для проверки некоторых результатов применялся спектральный метод коллокаций [372], где в качестве базисных функций использовались полиномы Чебышева. Количество базисных функций выбиралось из требования сходимости результатов и варьировалось в пределах от 15 до 30 для различных мод неустойчивости.

Предельным случаем сформулированных задач являются задачи устойчивости адвективного течения однокомпонентной жидкости [80, 358 - 360]. В случае однокомпонентной жидкости при малых числах Прандтля наиболее опасной является плоская монотонная гидродинамическая мода неустойчивости, связанная с развитием неподвижных вихрей на границе встречных потоков. При повышении числа Прандтля эта мода неустойчивости стабилизируется из-за формирования в области образования вихрей устойчивой температурной стратификации. В интервале чисел Прандтля $0.14 < Pr < 0.45$ наибольшую опасность представляет колебательная спиральная мода неустойчивости, связанная с возбуждением внутренних волн в зоне устойчивой стратификации. При превышении числом Прандтля 0.45 неустойчивость определяется развитием монотонных спиральных возмущений релеевской природы в зонах потенциально неустойчивой стратификации температуры, примыкающих к твердым границам.

7.4 Результаты численных расчетов

Сформулированная задача устойчивости не позволяет получить аналитическое решение при произвольном наборе параметров. Однако в случае длинноволновых возмущений возможно достаточно полное аналитическое исследование, которое было проведено Любимовым Д.В и Любимовой Т.П. Представленные ниже результаты численных расчетов для предельных случаев $k_z \rightarrow 0$ и $k_y \rightarrow 0$ совпадают с аналитическими формулами, полученными в работе [17].

Далее подробно проанализирована устойчивость стационарного адвективного течения для трех характерных бинарных смесей: 1 – жидкометаллического расплава с $Pr=0.01, Le=1000$; 2 – газовой смеси с $Pr=0.7, Le=13/7$; 3 – раствора соли в воде с $Pr=6.7, Le=101$. Результаты численных расчетов представлены в виде карт устойчивости на плоскости $Ra - \varepsilon$.

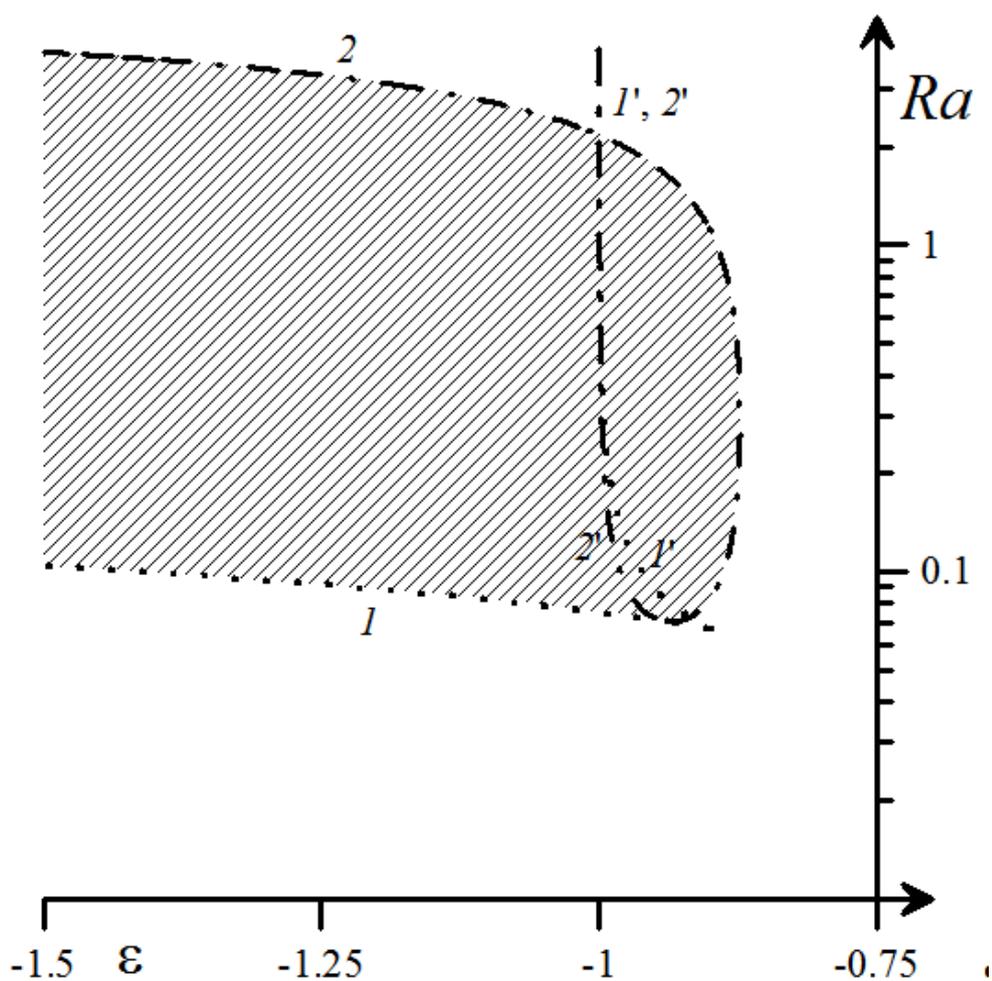


Рис. 7.3 Границы области неоднозначности стационарного решения (пунктирные линии 1, 1') и неустойчивости основного состояния относительно длинноволновых спиральных монотонных возмущений (штрих-пунктирные линии 2, 2') для смеси №1

Численные расчеты показали, что границы устойчивости по отношению к плоским длинноволновым возмущениям совпадают с границами области

неоднозначности основного решения (см. формулы (7.14)), причем неустойчивой является средняя ветвь решений (см. рис. 7.2).

Для спиральных длинноволновых возмущений границы области устойчивости приведены на рисунке 7.3, там же нанесены границы области неоднозначности стационарного течения для смеси №1. Заштрихована область неустойчивости верхней ветви стационарных решений. Как видно из рисунка, для рассматриваемой смеси точка сборки лежит вне области длинноволновой спиральной неустойчивости, в результате оказывается, что нижняя ветвь стационарных решений устойчива во всей области ее существования. Напомним, что средняя ветвь стационарных решений во всей области ее существования неустойчива.

На рисунке 7.4 приведены границы области неоднозначности стационарного течения и границы неустойчивости основного решения по отношению к спиральным длинноволновым возмущениям для смеси №2, а также фрагмент диаграммы вблизи точки сборки. Штриховкой показаны области неустойчивости стационарного решения. В области неоднозначности на основной части рисунка заштрихованна зона неустойчивости верхней ветви стационарных решений, а на фрагменте – область параметров, соответствующая неустойчивости нижней ветви.

Ниже будет приведен более детальный анализ карт устойчивости по отношению к различным типам возмущений, в том числе и для смеси №3.

Полные карты устойчивости для трех названных выше бинарных смесей, построенные на плоскости параметров $Ra - \epsilon$, приведены рисунках 7.5 – 7.7. На этих рисунках сплошными линиями показаны границы неустойчивости по отношению к монотонным возмущениям с конечной длиной волны ($k \neq 0$), штриховыми – к колебательным возмущениям с $k \neq 0$, штрихпунктирными линиями – границы длинноволновой неустойчивости, пунктирными линиями – границы области неоднозначности стационарного решения. Заштрихованы области неустойчивости верхней ветви стационарного решения.

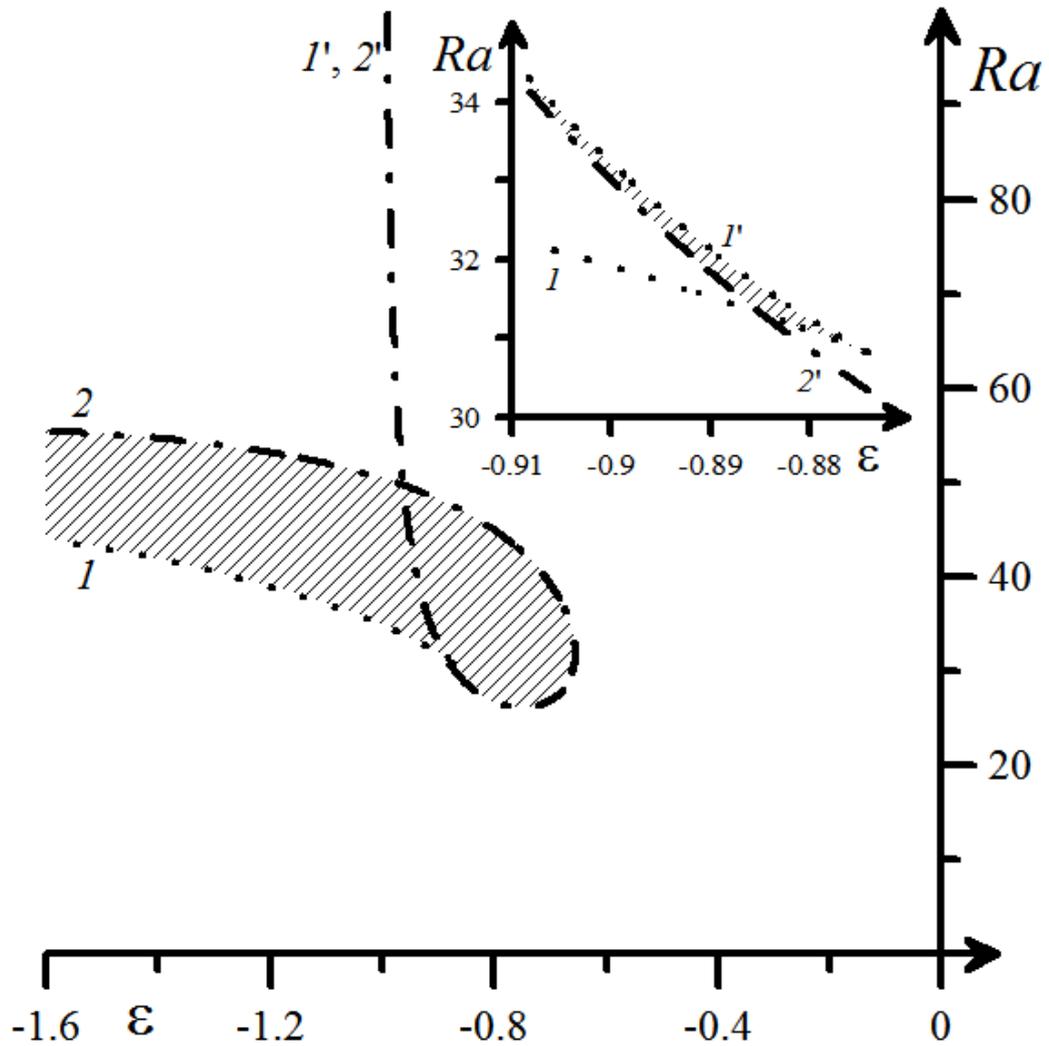


Рис. 7.4 Границы области неоднозначности стационарного решения (пунктирные линии $1, 1'$) и неустойчивости основного состояния относительно длинноволновых спиральных монотонных возмущений (штрих-пунктирные линии $2, 2'$) для смеси №2

На рисунке 7.5 приведена карта устойчивости адвективного течения жидкометаллической бинарной смеси (смесь №1). Границе неустойчивости по отношению к гидродинамическим возмущениям соответствует кривая 3, пересекающая ось чисел Релея при $Ra = 5.048$. Как видно из рисунка, термодиффузия слабо влияет на порог устойчивости: в области нормальной термодиффузии ($\epsilon > 0$) наблюдается незначительная стабилизация гидродинамической моды, аномальная термодиффузия оказывает слабое дестабилизирующее действие.

Кривая 4 на рисунке 7.5 соответствует спиральной колебательной моде неустойчивости с $k \approx 1$. При $\varepsilon = 0$ критическое число Релея для этой моды составляет 104.9; термодиффузия практически не влияет на эту моду, в результате она ни при каких значениях ε не является наиболее опасной.

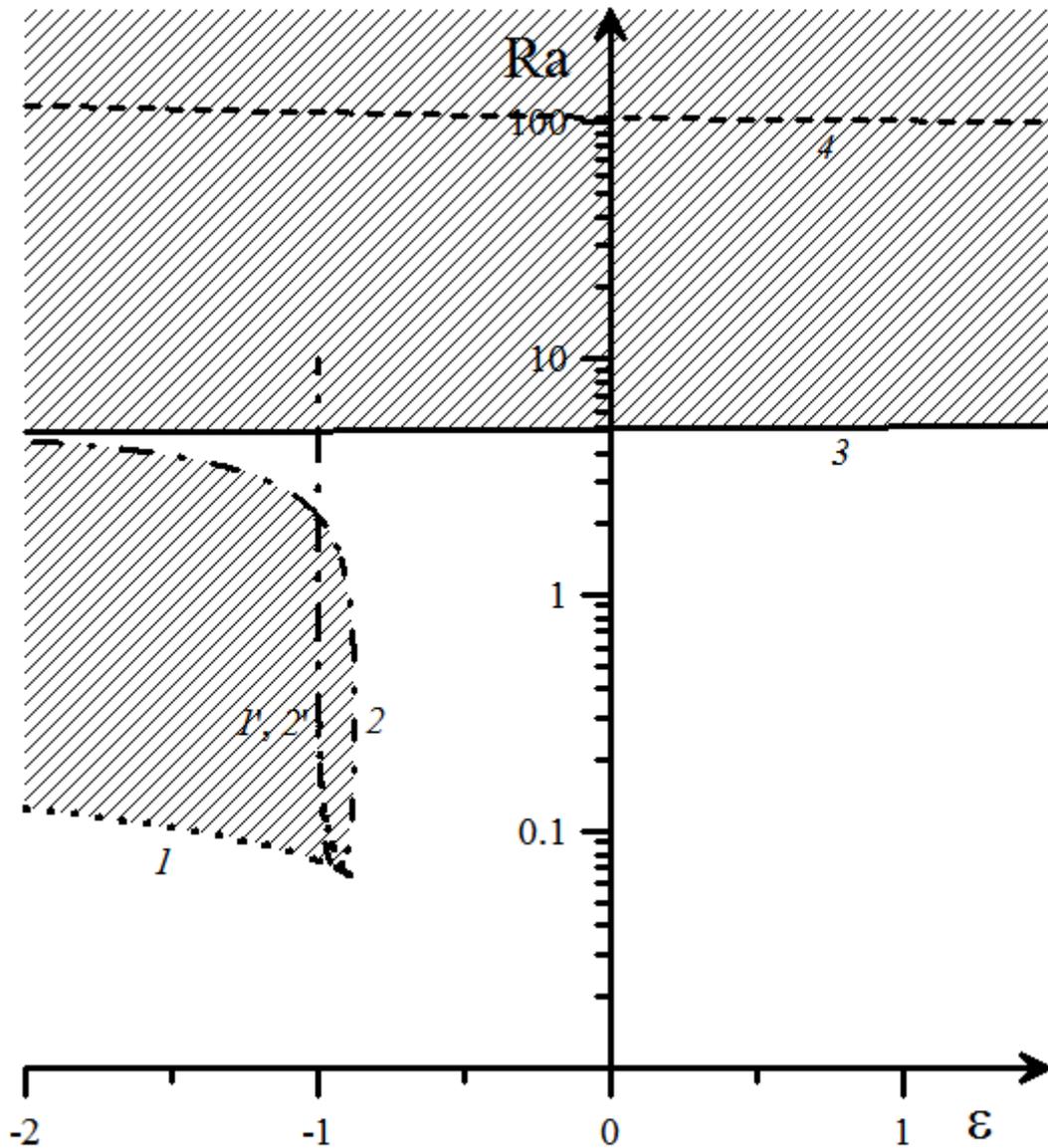


Рис. 7.5 Смесь №1 – жидкометаллический расплав $Pr = 0.01$, $Le = 1000$. Границы области неоднозначности стационарного решения (пунктирные линии 1, 1') и зависимости минимального критического числа Релея от параметра разделения: штрих-пунктирные линии 2, 2' – спиральная монотонная длинноволновая мода, 3 – плоская монотонная гидродинамическая мода, 4 – спиральная колебательная мода

При отрицательных значениях параметра разделения имеется область неустойчивости по отношению к спиральным возмущениям, обязанная своим происхождением эффекту термодиффузии. Эта область ограничена справа и сверху границей неустойчивости по отношению к длинноволновым спиральным возмущениям (кривая 2), а снизу – границей области неоднозначности стационарного решения (кривая 1). На нижней границе указанной области неустойчивость имеется по отношению к возмущениям в целом интервале волновых чисел (от нуля до некоторого конечного значения k), с повышением числа Релея интервал волновых чисел, соответствующих нарастающим возмущениям, уменьшается, на верхней границе неустойчивость имеется только по отношению к длинноволновым возмущениям.

Перейдем к детальному обсуждению результатов расчетов для смеси №2, которые представлены на рисунке 7.6.

Неустойчивость адвективного течения однокомпонентной жидкости при $Pr = 0.7$ связана с развитием спиральных монотонных возмущений релеевского типа с волновым числом, близким к 4. Граница неустойчивости по отношению к плоской релеевской колебательной моде неустойчивости лежит выше. Волновые числа характерные для этой моды неустойчивости также близки к 4 [73, 358-360].

Кривые 3 и 4 на рисунке 7.6, определяющие границы неустойчивости смеси №2 по отношению к спиральным монотонным и плоским колебательным возмущениям релеевской природы, пересекают ось чисел Релея при $Ra = 805.7$ и $Ra = 1608.3$ соответственно. При положительных значениях параметра разделения ε наблюдается дестабилизация обеих мод. За кризис основного течения при всех положительных значениях параметра разделения ответственна спиральная монотонная релеевская мода.

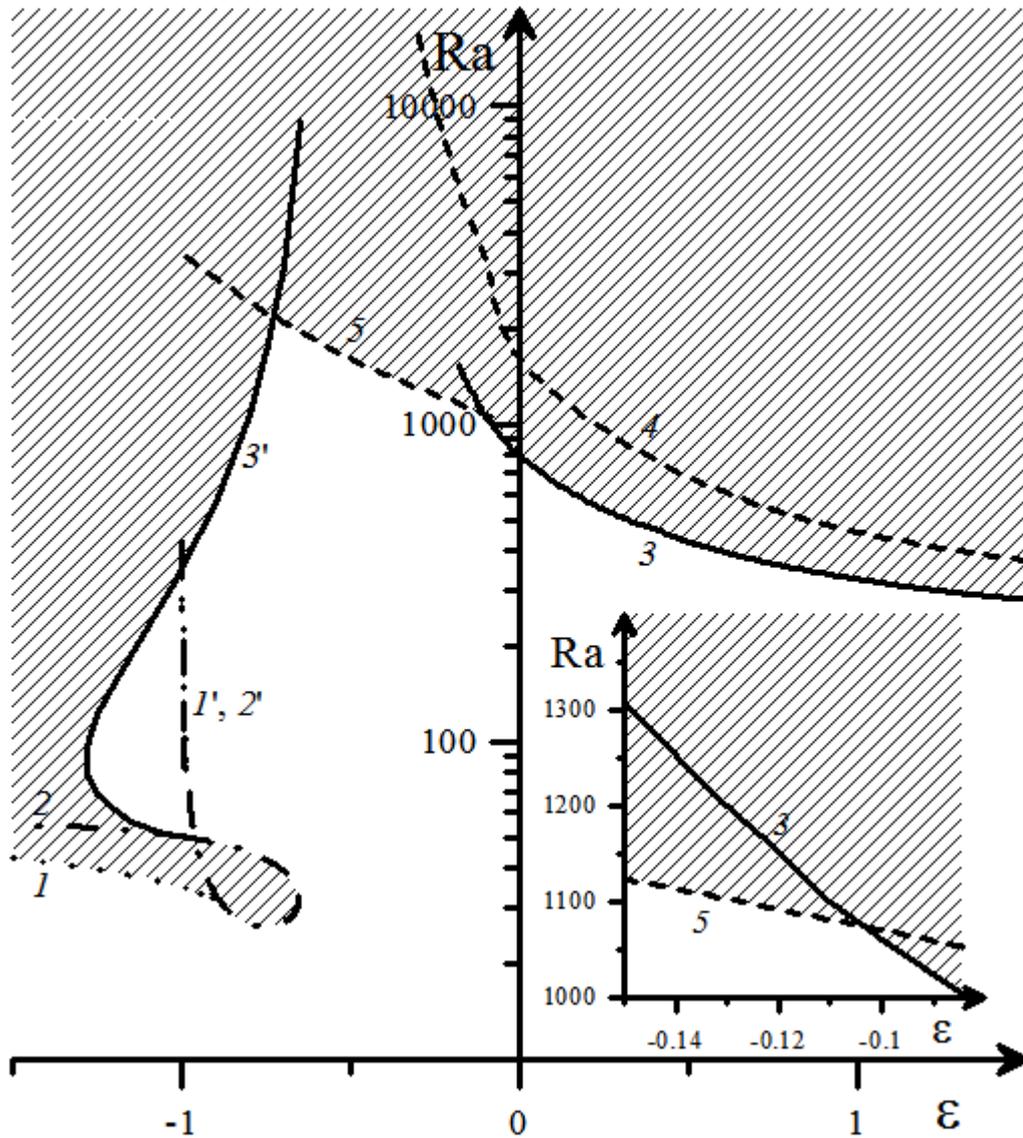


Рис. 7.6 Смесь №2 – газовая смесь $Pr = 0.7, Le = 13/7$. Границы области неоднозначности стационарного решения (пунктирные линии $1, 1'$) и зависимости минимального критического числа Релея от параметра разделения: штрих-пунктирные линии $2, 2'$ – спиральная монотонная длинноволновая мода, $3, 3'$ – спиральная монотонная релеевская мода, 4 – плоская колебательная релеевская мода, 5 – спиральная колебательная мода

При аномальной термодиффузии ($\varepsilon < 0$) структура зон неустойчивости имеет более сложный вид. В области малых по модулю значений параметра разделения ε , как и при $\varepsilon \geq 0$, наиболее опасными являются монотонные спиральные возмущения (кривая 3). Уменьшение ε приводит к стабилизации этой моды, и при некотором значении ε она перестает быть наиболее опасной. За кризис

основного состояния становятся ответственными спиральные колебательные возмущения (кривая 5). С дальнейшим уменьшением ε спиральная колебательная мода также стабилизируется, и наиболее опасными снова становятся монотонные спиральные возмущения (кривая 3'). В нижней своей части кривая 3' примыкает к области длинноволновой неустойчивости. Левее кривой 3' имеет место неустойчивость по отношению к возмущениям с $k \neq 0$, в области неоднозначности относящаяся к верхней ветви стационарных решений. В области между кривыми 3' и 1' верхняя ветвь устойчива, при $\varepsilon < -1.283$ вся верхняя ветвь неустойчива, нижняя же ветвь устойчива во всей области ее существования.

В области отрицательных значений параметра разделения неустойчивость наступает для достаточно медленных течений. Например, при $\varepsilon = -1.2$, основное плоскопараллельное течение смеси №2 теряет устойчивости при числе Релея $Ra \approx 40$, которому соответствует безразмерная амплитуда скорости $V_0 \approx -0.5$ (см. рис. 7.2). Размерное значение скорости адвективного течения газовой смеси в этом случае приблизительно равно 0.5 мм/с. Оценка выполнена для $\chi \approx 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $h \approx 10^{-2} \text{ м}$.

На рисунке 7.7 приведена карта устойчивости смеси №3 и фрагмент этой карты в области значений $\varepsilon \rightarrow 0$. Как видно из рисунка 7.7, форма границ неустойчивости стационарного решения для смеси №3 аналогична форме, которая наблюдалась в случае смеси №2 (см. рисунок 7.6). Неустойчивость адвективного течения однокомпонентной жидкости при $Pr = 6.7$, как и при $Pr = 0.7$, связана с развитием спиральных монотонных возмущений релеевского типа. Граница неустойчивости по отношению к плоской релеевской колебательной моде лежит немного выше [73, 358-360].

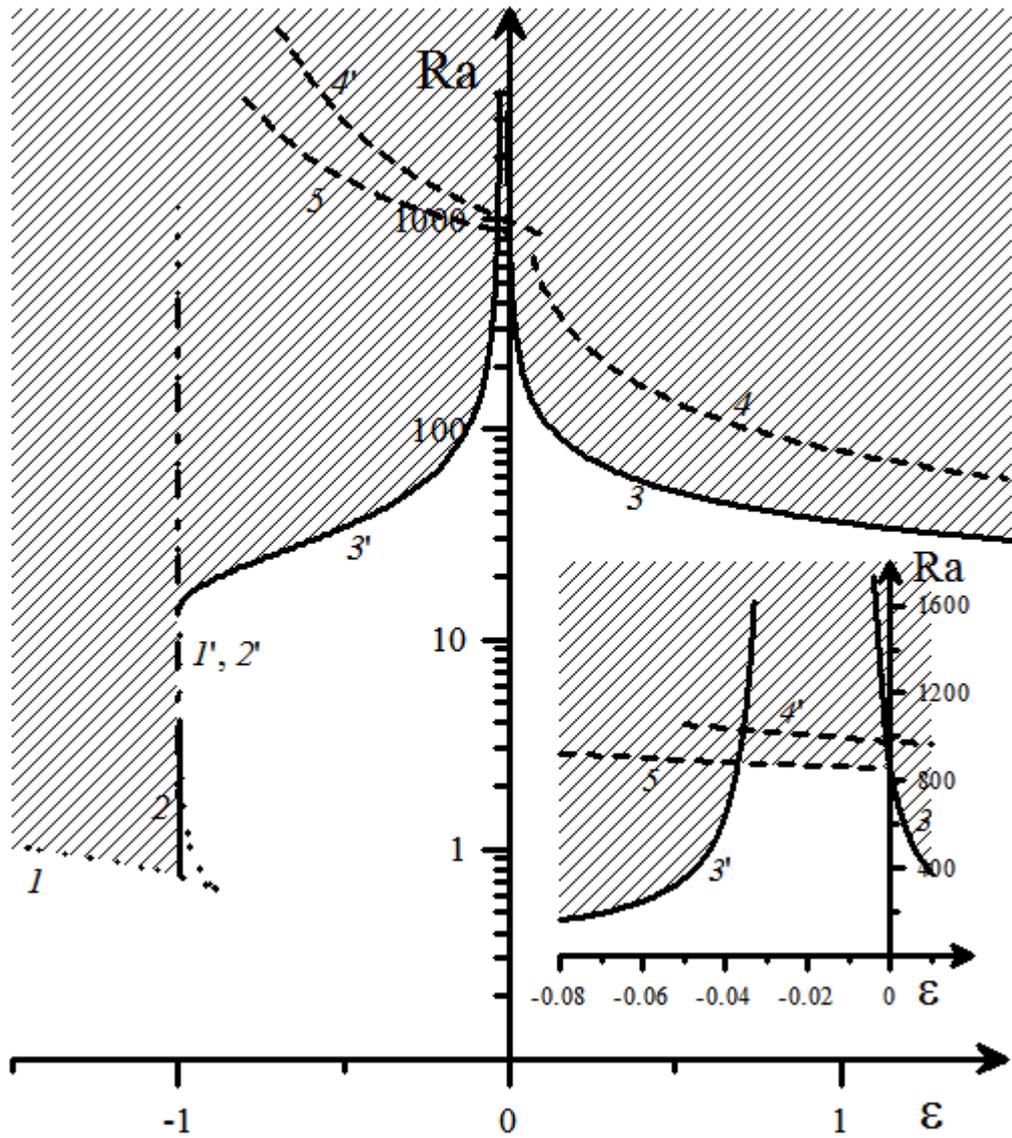


Рис. 7.7 Смесь №3 – раствор соли в воде $Pr = 6.7, Le = 101$. Границы области неоднозначности стационарного решения (пунктирные линии $1, 1'$) и зависимости минимального критического числа Релея от параметра разделения: штрих-пунктирные линии $2, 2'$ – спиральная монотонная длинноволновая мода, $3, 3'$ – спиральная монотонная релеевская мода, 4 – плоская колебательная релеевская мода, 5 – спиральная колебательная мода

Кривые 3 и 4 на рисунке 7.7, определяющие границы неустойчивости смеси №3 по отношению к спиральным монотонным и плоским колебательным возмущениям релеевской природы, пересекают ось чисел Релея при $Ra = 857.5$ и $Ra = 978.7$ соответственно. При положительных значениях параметра разделения наблюдается дестабилизация как спиральной монотонной, так и плоской

колебательной релеевских мод, причем эффект дестабилизации спиральной монотонной моды гораздо сильнее, так что в случае нормальной термодиффузии ($\varepsilon > 0$) эта мода остается наиболее опасной.

При аномальной термодиффузии в узком интервале $-0.037 < \varepsilon < -2.3 \cdot 10^{-5}$ наиболее опасной является спиральная колебательная мода неустойчивости с отличным от нуля волновым числом (см. фрагмент к рисунку 7.7). Справа и слева от этого интервала в диапазонах значений параметра разделения $-2.3 \cdot 10^{-5} \leq \varepsilon \leq 0$ и $-0.87 < \varepsilon < -0.037$ за кризис основного состояния ответственна спиральная монотонная релеевская мода неустойчивости (кривые 3 и 3' на рисунке 7.7 и фрагменте к нему).

Далее, в интервале $-1 < \varepsilon < -0.87$ неустойчивость связана с развитием плоских длинноволновых возмущений (кривая 1 на рисунке 7.7), а при $\varepsilon \leq -1$, как и в случаях смесей 1 и 2, верхняя ветвь стационарных решений неустойчива по отношению к спиральным возмущениям.

7.5 Основные результаты и выводы

Адвективное течение приводит к формированию плотностной вертикальной стратификации, которая является потенциально неустойчивой в слоях жидкости, прилегающих к границам, и потенциально устойчивой в центральной части слоя. Нормальный эффект Соре усиливает обе стратификации, поэтому он оказывает стабилизирующее действие на гидродинамическую моду неустойчивости, порождаемую вихрями, локализованными на границе встречных потоков, и дестабилизирующе действует на релеевскую моду, связанную с развитием возмущений в областях неустойчивой стратификации.

В результате при малых числах Прандтля, когда в отсутствие термодиффузии за неустойчивость плоскопараллельного адвективного течения ответственны гидродинамические возмущения, нормальный термодиффузионный эффект оказывает стабилизирующее действие. Однако это действие слабое, поскольку с ним конкурирует эффект увеличения интенсивности адвективного течения

вследствие возрастания продольного градиента плотности. При достаточно больших числах Прандтля, когда в отсутствие термодиффузии наиболее опасными являются релеевские моды неустойчивости, нормальный термодиффузионный эффект приводит к дестабилизации, причем теперь оба эффекта – и увеличение интенсивности течения, и усиление стратификации работают в одну сторону, так что дестабилизация оказывается сильной.

В области аномальной термодиффузии и небольших по модулю значениях параметра разделения имеют место эффекты, аналогичные описанным выше, с точностью до перемены знака. При достаточно больших по модулю отрицательных значениях параметра разделения амплитуда скорости адвективного течения уже не является однозначной функцией параметров, в некоторой области параметров имеется три стационарных режима с различными интенсивностями течения. При этом средняя ветвь решений всегда неустойчива, нижняя ветвь почти всюду устойчива, а для верхней ветви появляются новые термоконцентрационные механизмы неустойчивости, которые проявляют себя при значительно меньших числах Релея, чем гидродинамический и релеевский механизмы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты, полученные в диссертации.

1. Получены уравнения, описывающие пульсационное и осредненное течения степенной дилатантной жидкости в вязком пограничном слое вблизи твердой поверхности, и эффективное граничное условие на внешней границе пограничного слоя. Показано, что увеличение показателя неньютоновости приводит к уменьшению толщины пограничного слоя, увеличению амплитуды пульсационного течения и уменьшению интенсивности осредненного течения.

2. Показано, что при обтекании бесконечного твердого цилиндра пульсационным потоком вязкопластичной жидкости вблизи него образуются жидкие и жесткие зоны, взаимное расположение которых изменяется в течение периода пульсаций. Осредненное течение вязкопластичной жидкости качественно отличается от течения ньютоновской жидкости.

3. Изучено движение слоя вязкопластичной жидкости по колеблющейся в своей плоскости наклонной твердой поверхности. Рассмотрены симметричные и несимметричные вибрации. Показано, что вибрации порождают течение даже при слабом гравитационном воздействии, когда напряжения сдвига малы и в отсутствие вибраций весь слой, находясь в жестком состоянии, покоится на твердой поверхности. При несимметричных вибрациях возможны режимы, когда либо весь слой жидкости, либо его жесткая часть в среднем движутся против поля тяжести. Получены немонотонные зависимости расхода жидкости от периода вибраций наклонной плоскости. Определены значения пороговой амплитуды скорости вибраций твердой поверхности a_c , при достижении которой в слое возможна генерация осредненного движения. Несимметричность вибраций существенно понижает пороговое значение a_c . Показано, что для ускорения процесса стекания слоя вязкопластичной жидкости наиболее эффективны несимметричные вибрации.

4. Рассмотрена устойчивость стационарных плоскопараллельных течений, в наклонных слоях вязкопластичной и псевдопластичной жидкостей со свободной поверхностью. Показано, что для обеих жидкостей наиболее опасными являются колебательные длинноволновые возмущения свободной поверхности. При слабом и умеренном гравитационном воздействии движение слоя вязкопластичной жидкости более устойчиво, чем псевдопластичной. Усиление влияния поля тяжести приводит к снижению порога устойчивости течения в обеих жидкостях. Приближение ориентации слоя к горизонтальной повышает устойчивость течения, а частота колебательных возмущений растет. При приближении слоя к вертикали порог устойчивости течения понижается, а частота наиболее опасных возмущений стремится к нулю. Показано, что для вязкопластичной жидкости при сильном гравитационном воздействии, а для псевдопластичной жидкости при слабом и сильном гравитационном воздействиях, критическое число Рейнольдса, так же как и для ньютоновской жидкости, прямо пропорционально тангенсу угла наклона слоя.

5. Получены осредненные выражения для тензоров вязких напряжений обобщенных ньютоновских жидкостей в поле малоамплитудных высокочастотных неакустических вибраций. Выполнено обобщение условия существования квазиравновесных состояний при действии малоамплитудных высокочастотных неакустических вибраций на класс неоднородно-нагретых обобщенных ньютоновских жидкостей.

6. Показано, что наклонный слой вязкопластичной жидкости в поле высокочастотных вибраций может находиться в жестком состоянии при произвольной ориентации вектора градиента температуры – \vec{m} , но вибрации должны быть направлены вдоль \vec{m} . Жесткое состояние может стать неустойчивым при ориентациях слоя, близких к вертикали или горизонтали. Высокочастотные вибрации стабилизируют жесткое состояние слоя.

7. Исследовано конвективное движение вязкопластичной жидкости в плоском вертикальном слое при нагреве сбоку в присутствии высокочастотных

продольных вибраций. Показано, что с увеличением интенсивности вибраций проявление вязкопластичных свойств жидкости ослабляется.

8. Исследована устойчивость стационарного плоскопараллельного конвективного течения жидкости Уильямсона между двумя вертикальными плоскостям, на которых поддерживаются постоянные разные температуры. Получены карты устойчивости течения на плоскости параметров число Грасгофа – число Прандтля. Показано, что, как и в ньютоновской жидкости, при малых значениях числа Прандтля наиболее опасны монотонные гидродинамические возмущения, а при больших – тепловые колебательные возмущения. Пороговое значение числа Прандтля, определяющее переход от монотонной неустойчивости течения жидкости к колебательной, уменьшается с усилением неньютоновских свойств жидкости. Получены зависимости числа Грасгофа от реологических параметров жидкости, определяющие переход от псевдопластичного поведения жидкости к вязкопластичному. Показано, что при вязкопластичном поведении жидкости Уильямсона усиление неньютоновских свойств приводит к стабилизации течения относительно обеих мод неустойчивости.

9. Проведено прямое численное моделирование пространственно-периодических структур, возникающих в вертикальном слое псевдопластичной жидкости после потери устойчивости стационарного плоскопараллельного течения. Полученные значения критических чисел Грасгофа и частоты критических возмущений оказались близки к найденным при линейном анализе устойчивости.

10. Исследовано влияние постоянного однородного магнитного поля на устойчивость стационарного конвективного течения в горизонтальном канале прямоугольного сечения, вызванного продольным градиентом температуры. Показано, что при малых числах Прандтля в диапазоне $0 - 0.15$ наиболее опасными являются монотонные гидродинамические возмущения. Магнитное поле в большинстве случаев подавляет эти возмущения, причем стабилизирующее действие вертикального магнитного поля является более сильным, чем горизонтального. Для случая нулевого числа Прандтля обнаружено

дестабилизирующее действие горизонтального магнитного поля на течение жидкости при малых и умеренных числах Гартмана, причем эффект дестабилизации наиболее заметен, когда ширина канала меньше его высоты и исчезает в широких каналах.

11. Сформулирована математическая модель конвекции металлического расплава в переменном высокочастотном неоднородном магнитном поле, учитывающая явления вызванные взаимодействием поля и индукционных токов в расплаве. Предложена методика расчета магнитного поля индуктора, представляющего собой короткий соленоид. Рассчитаны распределения индукционных магнитных полей и токов для различных значений магнитного числа Рейнольдса. Показано, что оптимальный режим прогрева парамагнитного образца в переменном неоднородном магнитном поле происходит при значении магнитного числа Рейнольдса, близком к 12.

12. Изучено влияние эффекта термодиффузии (эффекта Соре) на устойчивость стационарного адвективного течения бинарной смеси в плоском горизонтальном слое с твердыми идеально-теплопроводными границами. Показано, что при малых числах Прандтля, когда в отсутствие термодиффузии за неустойчивость плоскопараллельного адвективного течения ответственны гидродинамические возмущения, нормальный термодиффузионный эффект оказывает слабое стабилизирующее действие. При достаточно больших числах Прандтля, когда в отсутствие термодиффузии наиболее опасны релеевские моды неустойчивости, нормальный термодиффузионный эффект приводит к сильной дестабилизации течения. В случае аномальной термодиффузии при небольших по модулю значениях параметра разделения имеют место эффекты, аналогичные описанным выше, с точностью до перемены знака. При достаточно больших по модулю отрицательных значениях параметра разделения возможно существование трех стационарных режимов с различными интенсивностями течения. Показано, что средняя ветвь решений всегда неустойчива, нижняя ветвь почти всюду устойчива, а для верхней ветви найдены новые термоконцентрационные механизмы неустойчивости, которые проявляют себя

при значительно меньших числах Релея, чем гидродинамический и релеевский механизмы.

В диссертации найдены закономерности течений и тепломассообмена в нелинейно-вязких и вязкопластических средах при наличии вибраций, а также условия устойчивости гравитационных и свободно-конвективных течений псевдо- и вязкопластичных жидкостей. Получили развитие теория конвективных течений проводящих жидкостей в переменных магнитных полях и теория устойчивости адвективных течений бинарных жидкостей с учетом эффекта темодиффузии (эффекта Соре).

Перспективы применения результатов связаны с моделированием технологических процессов в пищевой, химической, нефтехимической и нефтедобывающей отраслях промышленности, а также с совершенствованием реометрических методик. Возможно также применение результатов для изучения природных явлений, таких как оползни, селевые потоки и снежные лавины. Результаты, представленные в диссертации, важны и с общетеоретической точки зрения, на их основе возможно дальнейшее развитие исследований нестационарных и неизотермических течений неньютоновских жидкостей.

Важным практическим приложением результатов по адвективным течениям проводящих жидкостей и бинарных смесей является выращивание кристаллов горизонтальным методом Бриджмена. Результаты диссертации могут быть применены при разработке методик управления движением жидкостей с помощью магнитных полей, при изучении атмосферных циркуляций, движений в океане, коре и мантии Земли, а также при описании процессов тепло- и массопереноса в мелких водоемах.

На основе построенной в диссертации математической модели индукционного нагрева и тепло- массопереноса парамагнитного расплава в промышленной индукционной печи планируется создать методические рекомендации по оптимизации процесса индукционной плавки, что позволит увеличить энергоэффективность процесса и повысить степень чистоты получаемого продукта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарунин, Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции / Е.Л. Тарунин – Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1990. – 228 с.
2. Лобов, Н.И. Численные методы решения задач теории гидродинамической устойчивости: учебное пособие / Н.И. Лобов, Д.В. Любимов, Т.П. Любимова – Пермь: Изд-во Пермского университета, 2004. – 101 с.
3. Гольдштик, М.А. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М.А. Гольдштик, В.Н. Штерн – Новосибирск: Наука, 1977. – 368 с.
4. Lyubimov, D.V. Software package for numerical investigation of linear stability of multi-dimensional flows / D.V. Lyubimov, T.P. Lyubimova, V.A. Morozov // Вестник Пермского университета. Информационные системы и технологии. – 2001. – №5 – С.74-81.
5. Найфе, А.Х. Методы возмущений: пер. с англ. / А.Х. Найфе – М.: Мир, 1976. – 456 с.
6. Любимов, Д.В. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях / Д.В. Любимов, Т.П. Любимова, А.А. Черепанов – М.: Физматлит, 2003. – 216 с.
7. Любимов, Д.В. Генерация осредненного течения вблизи твердой стенки на фоне пульсационного поля скоростей в дилатантной жидкости / Д.В. Любимов, А.В. Перминов // Вибрационные эффекты в гидродинамике: сборник статей. – Пермь: Изд-во Пермского университета, 1998. – С. 222 – 236.
8. Любимов, Д.В. Движение вязкопластичной жидкости вблизи твердого тела / Д.В. Любимов, А.В. Перминов // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. – 30. – №1. – С. 63-80.
9. Любимов, Д.В. Движение пленки бингамовского пластика по вертикальной твердой стенке / Д.В. Любимов, А.В. Перминов // Вибрационные эффекты в

гидродинамике: сборник статей. – Пермь: Изд-во Пермского университета, 2001. – С. 201-213.

10. **Любимов, Д.В. О движении тонкого наклонного слоя псевдопластичной жидкости / Д.В. Любимов, А.В. Перминов // Инженерно-физический журнал. – 2002. – Т. 75, №4. – С 123–127.**
11. Перминов, А.В. Устойчивость стационарного течения пленки вязкопластичной жидкости / А.В. Перминов // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. – 2004 – №1. – С. 77 – 84.
12. Lyubimov, D.V. Static magnetic field influence on linear stability of advective flow in a horizontal channel of rectangular cross-section / D.V. Lyubimov, T.P. Lyubimova, A.V. Perminov, D. Henry, H. Ben Hadid // Proceedings of International Conference “Advanced Problems in Thermal Convection”. – 2004. – P. 49–55.
13. Любимова, Т.П. Устойчивость адвективных течений бинарной смеси в плоском горизонтальном слое / Т.П. Любимова, Д.А. Никитин, А.В. Перминов // Зимняя школа по механике сплошных сред (пятнадцатая). Пермь 2007. Сборник статей. В 3-х частях. Часть 2. – Екатеринбург: Изд.-во УрО РАН, 2007. – С. 340–343.
14. Любимова, Т.П. Исследование устойчивости адвективного течения двухкомпонентной смеси в плоском горизонтальном слое с теплопроводными границами / Т.П. Любимова, А.В. Перминов // Всероссийская конференция молодых ученых (с международным участием) «Неравновесные процессы в сплошных средах», материалы конференции. – Пермь, 2007. – С. 298 - 301.
15. Любимов, Д.В. Движение тонкого наклонного слоя вязкопластичной жидкости в поле неоднородных вибраций [Электронный ресурс] / Д.В. Любимов, А.В. Перминов // Труды XVI Зимней школы по механике сплошных сред (механика сплошных сред как основа современных технологий) – Пермь: ИМСС УрО РАН, 2009. – Электрон. оптич. диск. (CD-ROM).

16. Lyubimov, D.V. Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 2. Effect of a magnetic field / D.V. Lyubimov, T.P. Lyubimova, A.V. Perminov, D. Henry, H. Ben Hadid // *J. Fluid Mech.* – 2009. – Vol. 635 – P. 297-319.
17. Любимов, Д.В. Устойчивость адвективного течения бинарной смеси в плоском горизонтальном слое с идеально теплопроводными границами / Д.В. Любимов, Т.П. Любимова, Д.А. Никитин, А.В. Перминов // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* – 2010. – № 3. – С. 129–139.
18. Любимов, Д.В. Воздействие несимметричных вибраций на движение тонкого слоя вязкопластичной жидкости / Д.В. Любимов, А.В. Перминов // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* – 2011. – № 1. – С. 30–41.
19. Перминов, А.В. Воздействие высокочастотных вибраций на конвективное движение неньютоновской жидкости / А.В. Перминов, Е.В. Шулепова // *Научно–технические ведомости СПбГПУ. Серия «Физико-математические науки».* – 2011. – Т.129, №3. – С.169–175.
20. Перминов, А.В. Равновесные состояния обобщенной ньютоновской жидкости / А.В. Перминов // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.* – 2012.– Т.146, № 2. –С. 163 – 169.
21. Любимов, Д.В. Устойчивость стационарного движения слоя неньютоновской жидкости / Д.В. Любимов, А.В. Перминов // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* – 2012. – № 6. – С. 15–23.
22. Lyubimova, T.P. Stability of the advective flow of a binary mixture in a horizontal layer with adiabatic boundaries / Tatyana P. Lyubimova, Dmitriy V. Lyubimov, Dmitriy A. Nikitin, Anatolii V. Perminov. // *Comptes Rendus - Mecanique.* – 2013. – Vol. 341, №4–5. – P. 483–489.
23. Nikulin, I.L. Mathematical model of conducting fluid convection in a non-uniform alternating magnetic field / I.L. Nikulin, A.V. Perminov, A.I. Tsaplin // *Magnetohydrodynamics.* – 2013. – Vol. 49, No. 1. – P. 203–209.
24. Никулин, И.Л. Моделирование индукционных процессов в проводящем цилиндре, помещенном в неоднородное переменное магнитное поле /

- И.Л. Никулин, А.В. Перминов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2013. – Т.165, №1. – С. 188-195.
25. Никулин, И.Л., Математическая модель конвекции никелевого расплава при индукционном переплаве. Решение магнитной подзадачи / И.Л. Никулин, А.В. Перминов // Вестник Пермского Национального Исследовательского Политехнического Университета. Механика. – 2013. – №3. – С. 192-209.
26. Перминов, А.В. Устойчивость жесткого состояния обобщенной ньютоновской жидкости / А.В. Перминов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2014. – № 2. – С. 6-15.
27. Перминов, А.В. Нестационарное движение обобщенной ньютоновской жидкости около твердого тела / А.В. Перминов // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, №1. – С. 145-153.
28. Перминов, А.В. Устойчивость стационарного плоскопараллельного течения псевдопластической жидкости в плоском вертикальном слое / А.В. Перминов, Т.П. Любимова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 270-278.
29. Перминов, А.В. Устойчивость течения вязкопластичной жидкости в плоском вертикальном слое / А.В. Перминов, Т.П. Любимова // XIX зимняя школа по механике сплошных сред. Сборник статей. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. – С. 243- 249
30. Никулин, И.Л. Математическое моделирование тепломассопереноса в расплаве в тигле индукционной печи / И.Л. Никулин, А.В. Перминов // XIX зимняя школа по механике сплошных сред. Сборник статей. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. – С. 224- 229.
31. Lyubimova, T.P. Stability of stationary plane-parallel flow of viscoplastic fluid between two differentially heated vertical plates / T.P. Lyubimova, A.V. Perminov // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2015. - Vol.224. - P.51–60.

32. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц – 5-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 736 с.
33. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов / Л.Г. Лойцянский. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003 – 840 с.
34. Dodge, D.W. Fluid Systems / D.W. Dodge // Industrial and Engineering Chemistry. – 1959. – Vol. 51, №7. – P. 839–840.
35. Уилкинсон, У.Л. Неньютоновские жидкости. Гидромеханика, перемешивание и теплообмен / У.Л. Уилкинсон – М.: Мир, 1964. – 216 с.
36. Шульман, З.П., Берковский Б.М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей / З.П. Шульман, Б.М. Берковский – Минск: Наука и техника, 1966. – 238 с.
37. Литвинов, В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости / В.Г. Литвинов – М.: Наука, 1982. – 376 с.
38. Цвелодуб, О.Ю. Волновые режимы на пленке обобщенной ньютоновской жидкости, стекающей по вертикальной плоскости / О.Ю. Цвелодуб // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2007. – №4. – С. 3-15.
39. Матвиенко, В.Н. Вязкоупругость и структура дисперсных систем / В.Н. Матвиенко, Е.А. Кирсанов // Вестн. Моск. Ун-та. Сер.2. Химия. – 2011. – Т.52, №4. – С. 243-276.
40. Baloch, M.K. Steady shear behavior of coal-oil suspensions / M.K. Baloch // Rheologica Acta. – 1989. – Vol. 28, No.4. – P. 316-320
41. Малкин, А.Я. Реология: концепции, методы, приложения. Пер. с англ. / А.Я. Малкин, А.И. Исаев – СПб.: Профессия, 2007. – 560 с.
42. Леванов, И.Г. Обзор реологических моделей моторных масел, используемых при расчетах динамики подшипников скольжения коленчатого вала / И.Г. Леванов // Вестник ЮУрГУ. – 2010. – №10. – С. 54-62.
43. Мурко, В.И. Результаты исследования влияния механической активации на структурно-реологические характеристики угольных суспензий на основе фильтр-кеков / В.И. Мурко, Г.Д. Вахрушева, В.И. Федяев, В.И. Карпенко,

- В.П. Мاستихина, Д.А. Дзюба // *Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies.* – 2011. – Vol. 4, №6. – P. 601-612.
44. Арет, В.А. Инженерная реология жиросодержащих пищевых продуктов / В.А. Арет, Г.П. Забровский, Б.Л. Николаев, Л.К. Николаев – СПб.: Профессия, 2002. – 294 с.
45. Тетельмин, В.В. Реология нефти. Учебное издание / В.В. Тетельмин, В.А. Язев – М.: Граница, 2009. – 256 с.
46. Тетельмин, В.В. Нефтегазовое дело. Полный курс. Учебное пособие / В.В. Тетельмин, В.А. Язев – Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2009. – 800 с.
47. Cheng, D.C.-H. The art of coarse rheology / D.C.-H. Cheng // *Brit. Soc. Rheol. Bull.* – 1989. – Vol. 32, №16. – P. 1-15
48. Craban, S. Non-Newtonian behavior of kaolin suspensions, in *Progress and Trends in Rheology II* / S. Craban, W. Parzonka, V. Havlik – N.Y.: Springer-Verlag, 1988. – 325 p.
49. Reher, E.O. Strömungen nicht-Newtonscher Flüssigkeiten / E.O. Reher, D. Haroske, K. Köhler // *Cherm.*, 21 Jg., Heft 3., Marz. – 1969. – S. 137-143.
50. Wildemuth, C.R. Viscosity of suspension modeled with a shear-dependent maximum packing fraction / C.R. Wildemuth, M.C. Williams // *Rheol. Acta.* – 1984. – Vol. 23. №6. – P. 627-635.
51. Doraiswamy, D. The Cox–Merz rule extended: A rheological model for concentrated suspensions and other materials with a yield stress / D. Doraiswamy, A.N. Mujumdar, I. Tsao, A.N. Beris, S.C. Danforth, A.B. Metzner // *J. Rheology.* – 1991. – Vol. 35, №4. – P. 647-686.
52. Фролов, Ю.Г. Курс коллоидной химии. Поверхностные явления и дисперсные системы. Учебник для вузов / Ю.Г. Фролов, — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Химия, 1988. – 464 с.
53. Фройштетер, Г.Б. Реологические и теплофизические свойства пластичных смазок / Г.Б. Фройштетер, К.К. Трилиский, Ю.Л. Ищук, П.М. Ступак – М.: Химия, 1980. – 175 с

54. Barnes, H.A. A Handbook of Elementary Rheology / H.A. Barnes. – Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics. University of Wales. Aberystwyth, 2000. – 201 p.
55. Cross, M. Rheology of non-Newtonian fluids: A new flow equation for pseudoplastic systems / M. Cross // Journal of Colloid Science. – 1965. – Vol. 20, № 5. – P. 417–437
56. Scott Blair, G.W. The success of Casson's equation / G.W. Scott Blair // Rheologica Acta. – 1966. – Vol. 5, №3. – P. 184-187
57. Ostwald, W. Ueber die Viscositat Kolloider Losungen im Struktur-, Laminar-und Turbalenz-gebiet / W. Ostwald, R. Auerbach //Kolloid Zeitschrift. – 1926, №38. – S. 261-264.
58. Рейнер, М. Деформация и течение / М. Рейнер. – М.: Гостоптехиздат, 1965. – 381 с.
59. Семакин, И.Г. Гидродинамическая устойчивость конвективного течения неньютоновской жидкости в вертикальном слое/ И.Г. Семакин // Инженерно-физический журнал. – 1977. – Т. 32, №6. – С. 1065-1070.
60. Семакин, И.Г. Колебательная неустойчивость стационарной конвекции неньютоновской жидкости / И.Г. Семакин // Инженерно-физический журнал. – 1978. – Т. 35, №2. – С. 320-325.
61. Любимов, Д.В. О конвективных движениях неньютоновской жидкости, подогреваемой снизу / Д.В. Любимов, Т.П. Любимова // Учен. зап. Перм. унта. Гидродинамика. Пермь. – 1974. – Вып.5. – P.41-50.
62. Williamson, R. V. The Flow of Pseudoplastic Materials // Industrial and Engineering Chemistry / R. V. Williamson. – 1929. – Vol. 21, №11. – P. 1108–1111
63. Campbell, L.E. Pseudo-plastic properties of molten chocolate / L.E. Campbell // Journal of the Society of Chemical Industry. – 1940. – Vol. 59. – P. 71-74.
64. Gillespie, T. An extension of Goodeve's impulse theory of viscosity to pseudoplastic systems / T. Gillespie // J. Colloid Sci. – 1960. – Vol. 15. № 3. – P. 219-231.

65. Bingham, E.C. Fluidity and Plasticity / E.C. Bingham. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1922. – 463 p.
66. Рейнер, М. Реология / М. Рейнер. – М.: Наука, 1965. – 224 с.
67. Barnes, H.A. The yield stress myth? / H.A. Barnes, K. Walters // Rheol. Asta. – 1985. – Vol. 24, №4. – P. 323-326.
68. Barnes, H.A. “The yield stress myth?” revisited / H.A. Barnes // Theoretical and Applied Rheology. Proc. XIth Int. Congr. on Rheology, Brussels, Belgium. Aug. 17-21. Elsevir Sience Publishers, New York. –1992. – Vol. 2. – P. 576-578.
69. Gershuni, G.Z. Convective stability of a vertical layer of a non-newtonian liquid / G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitsky, T.P. Lyubimova. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1973. – Vol.14, N 5. – P.675-680.
70. Гершуни, Г.З. О конвективной устойчивости жидкости Бингама / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 208, №1. – С. 63-65.
71. Turan, O. Aspect ratio effects in laminar natural convection of Bingham fluids in rectangular enclosures with differentially heated side walls. / O. Turan, R.J. Poole, N. Chakraborty // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 2011. – Vol. 166. – P. 208–230.
72. Turan, O. Laminar Rayleigh-Benard convection of yield stress fluids in a square enclosure / O. Turan, N. Chakraborty, R.J. Poole // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2012. – Vol. 171–172 – P. 83–96.
73. Смольский, Б.М. Реодинамика и теплообмен нелинейно вязкопластичных материалов / Б.М. Смольский, З. П. Шульман, В.М. Гориславец. – Мн.: Наука и техника, 1970. – 448 с.
74. Casson, N. A flow equation for pigment-oil suspensions of the printing ink. / N. Casson; In: Rheology of Disperse Systems. C.C. Mill (ed). – London: Pergamon Press, 1959 – P. 84-104.
75. Hershell, W.H. Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollosungen / W.H. Hershell, R. Bulkey // Kolloid Zeitschrift. – 1926. – Vol. 39. – S. 291-300.

76. Георгиевский, Д.В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластичных тел / Д.В. Георгиевский. – М.: УРСС, 1998. – 176 с.
77. Любимова, Т.П. Конвективная устойчивость жидкости Уильямсона в вертикальном слое / Т.П. Любимова, Н.И. Лобов, Д.В. Любимов // Гидродинамика. Уч. зап. Пермск. ун-та. Пермь. –1976. – Вып. 8. – С.31–43.
78. Любимова, Т.П. Численное исследование конвекции вязкопластичной жидкости в замкнутой области / Т.П. Любимова // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1977. – №1. – С.1-5.
79. Гершуни, Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 392 с.
80. Гершуни Г.З. Устойчивость конвективных течений / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, А.А. Непомнящий – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989. – 320 с.
81. Шапошников, И.Г. К теории конвективных явлений в бинарной смеси / И.Г. Шапошников // ПММ. – 1953. – Т.17, вып. 5. – С.604-606.
82. Mair, W.A. Bluff bodies in vortex shedding - A report on Euromech 17 / W.A. Mair, D.J. Maull // J. Fluid Mech. – 1971. – Vol. 45. – P. 209-224.
83. Berger, E Periodic flow phenomena / E. Berger, R. Wille // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1972. – Vol. 24. – P. 313-340.
84. Parkinsogn V. Mathematical models of flow-induced vibrations. In Flour-Induced Structural Vibrations (ed. E. Naudascher). / V. Parkinsogn. – New York: Springer, 1974. – P. 81-127.
85. Sarpkay, T. Vortex-induced oscillations: A selective review / T. Sarpkay // Trans. ASME E: J. Appl.Mech. – 1979. – Vol. 26. – P.241-258.
86. Bearman P.W. Vortex shedding from oscillating bluff bodies / P.W. Bearman // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1984. – Vol. 16. – P. 195-222.
87. Bearman, P.W. Vortex shedding from bluff bodies in oscillatory flow : A report on Euromech 19 / P.W. Bearman, J.M.R. Graham // J . Fluid Mech. – 1980. – Vol. 99. – P. 225-245.

88. Bouhairie, S. Two-dimensional simulation of unsteady heat transfer from a circular cylinder in cross flow / S. Bouhairie, V.H. Chu // *J. Fluid Mech.* – 2007. – Vol. 570. – P. 177–215.
89. Eckert, E.R.G. Distributions of heat transfer coefficients around circular cylinders in cross flow at Reynolds numbers from 20 to 500 / E.R.G. Eckert, E. Soehngen // *Trans. ASME.* – 1952. – Vol.75. – P. 343–347.
90. Persillon, H. Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier-Stokes simulation / H. Persillon, M. Braza // *J. Fluid Mech.* – 1998. – Vol. 365. – P. 23 -88.
91. Karwa, N. Experimental study of non-boiling heat transfer from a horizontal surface by water sprays / N. Karwa, S.R. Kale, P.M.V. Subbarao // *Experimental Thermal and Fluid Science.* – 2007. – Vol. 32, №2. – P. 571-579.
92. Моренко, И.В. Ламинарное неизотермическое обтекание вращающегося кругового цилиндра вязкой жидкостью с твердыми частицами / И.В. Моренко, В.Л. Федяев // *Инженерно-физический журнал.* – 2014. – Т.87, №3. – С.549—555.
93. Isaev, S.A. Laminar cross flow over circular cylinder with inner ducts / S.A. Isaev, V.L. Zhdanov // *Int. J. Fluid Mech. Res.* – 2002. – Vol. 29, №.3. – P. 493–498.
94. Исаев, С.А. Моделирование снижения лобового сопротивления и прекращения действия знакопеременной поперечной силы на круговой цилиндр за счет дросселирующего эффекта / С.А. Исаев, А.Г. Судаков, Ю.В. Жукова, А.Е. Усачов // *Инженерно-физический журнал.* – 2014. – Т. 87, № 4. – С. 904-907.
95. Schlichting, H. Berechnung ebener periodischer Grenzschichtstromungen / H. Schlichting // *Z. Phys.* – 1932. – Vol. 33. – P. 327-335.
96. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. Перевод с немецкого / Г. Шлихтинг – М.: «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 744 с.
97. Лойцянский, Л.Г. Аэродинамика пограничного слоя / Л.Г. Лойцянский. – М.: ОГИЗ. Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1941. – 412 с.

98. Лойцянский, Л.Г. Ламинарный пограничный слой / Л.Г. Лойцянский – М.: Физ.-мат. лит., 1962. – 478 с.
99. Lord Rayleigh. On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems / Rayleigh // Phil. Trans. Roy. Soc. London, A. – 1883. – Vol.175. – P. 1-21.
100. Лорд Рэлей. Теория звука. В 2-х томах / Лорд Рэлей. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 504 с.
101. Lyubimov, D.V. New approach in the vibrational convection theory / D.V. Lyubimov // Proc. of the 14th IMACs World Congress on Computation and Applied Mathematics, July 11-15, Atlanta, Jeorgia, USA. – 1994. – Vol.2. – P.813-815.
102. Lyubimov, D.V. Thermovibrational flows in non-uniform systems / D.V. Lyubimov // Microgravity Quarterly. – 1994. – Vol.4, N 4. – P.221-226.
103. Lyubimov, D.V. A new approach in the vibrational convection theory / D.V. Lyubimov // C. R. Acad. Sci. Paris. Serie IIb. – 1995. – Vol.320. – P.271-275.
104. Honji, H. Streaked around an oscillating circular cylinder / H. Honji // J. Fluid. Mech. – 1981. – Vol. 107. – P. 509-520.
105. Hall, P On the stability of the unsteady boundary layer on a cylinder oscillating transversely in a viscous fluid / P. Hall // J. Fluid Mech. – 1984. – Vol.146. – P.339-353.
106. Lyubimov, D.V. The flows induced by a heated oscillating sphere / D.V. Lyubimov, A.A. Cherepanov, T.P. Lyubimova, B. Roux // J. Heat Mass Transfer. – 1995. – Vol. 38, №11. – P. 2089-2100.
107. Ongoren, A. Flow structure from an oscillating cylinder Part 1. Mechanisms of phase shift and recovery in the near wake / A. Ongoren, D. Rockwell // J. Fluid Mech. – 1988. – Vol. 191. – P. 197-223
108. Ongoren, A. Flow structure from an oscillating cylinder Part 2. Mode competition in the near wake / A. Ongoren, D. Rockwell // J. Fluid Mech. – 1988. – Vol. 191. – P. 225-245

109. Malakhova, T.V. Heat transfer of an oscillating cylinder in a viscous incompressible fluid flow / T.V. Malakhova // *Thermophysics and Aeromechanics*. – 2012. – Vol. 19, №1. – P. 69-76.
110. Nakayama, A. Combined forced and free-convection heat-transfer in power-law fluid-saturated porous-media / A. Nakayama, A.V. Shenoy // *J Appl. Sci. Res.* – 1993. – Vol. 50. – P. 83-95.
111. Wang, T.Y. Mixed convection heat-transfer from a horizontal plate to non-newtonian fluids / T.Y. Wang // *Int. Commun. Heat Mass Transf.* –1993. – Vol. 20. – P. 431-443.
112. Wang, T.Y. Mixed convection heat-transfer from a vertical plate to non-newtonian fluids / T.Y. Wang // *Int. Commun. Heat Mass Transf.* – 1995. – Vol. 16. P. 56-61.
113. Огибалов, П.М. Нестационарные движения вязкопластичных сред / П.М. Огибалов, А.Х. Мирзаджанзаде. – 2-е изд. – М.: Изд-во Мос. ун-та, 1977. – 372 с.
114. Ильюшин, А.А. К вопросу о вязкопластичном течении материалов / А.А. Ильюшин // *Труды конф. по пластичн. деформации*. М.—Л.: Изд. АН СССР. – 1938. – С. 5-19.
115. Соундалгекар, В.М. Продольное обтекание полубесконечной пластины упруговязкой жидкостью с учетом теплообмена / В.М. Соундалгекар, Т.В. Римана Мурти // *Инженерно-физический журнал* – 1981. – Т.40, №2. – С. 225-230.
116. Huang, P.Y. Wall effects on the of viscoelastic fluids around a circular cylinder / P.Y. Huang, J. Feng // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 1995 – Vol. 60. – P. 179-198.
117. Debbaut, B. On the development of secondary motions in straight channels induced by the second normal stress difference: experiments and simulations / B. Debbaut, T. Avalosse, J. Dooley, K. Hughes // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 1997. – Vol. 69 – P. 255 – 271.

118. Hagen, T. Boundary layer analysis of the Phan-Thien-Tanner and Giesekus model in high Weissenberg number flow / T. Hagen, M. Renardy // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 1997. – Vol. 73. – P. 181-189.
119. Phan-Thien, N. A new constitutive equation derived from network theory / N. Phan-Thien, R.I. Tanner // *J Non-Newtonian Fluid Mech.* – 1977 – Vol. 2. – P. 353-365.
120. Giesekus, H. A unified approach to a variety of constitutive models for polymer fluids based on the concept of configuration dependent molecular mobility / H. Giesekus // *Rheol. Acta.* – 1982. – Vol. 21. – P. 366-375.
121. Снигерев, Б.А. Численное моделирование обтекания цилиндра потоком упруговязкой жидкости Олдройда-Б / Б.А. Снигерев, Ф.Х. Тазюков, Ф.А. Гарифулин, М.А. Кутузова, А. Аль-Раваш // *Международная конференция по интенсификации нефтехимических процессов «Нефтехимия-2005»*, Нижнекамск. – 2005. – С. 219-220.
122. Аль-Раваш, А. Течение упруговязкой жидкости в вискозиметре с падающим грузом. 1. Математическая модель / А. Аль-Раваш, Ф.А. Гарифуллин, Б.А. Снигерев, Ф.Х. Тазюков // *Материалы межвузовской научно-практической конференции «Актуальные проблемы образования, науки и производства»*, - г. Нижнекамск. – 2006. – С. 35-36.
123. Кутузова, М.А. Течение упруговязкой жидкости в вискозиметре с падающим грузом. 2. Результаты численного моделирования / М.А. Кутузова, А. Аль-Раваш, Т. Аль-Смади, Г.С. Кутузова // *Материалы межвузовской научно-практической конференции «Актуальные проблемы образования, науки и производства»*, - г. Нижнекамск. – 2006. – С. 37-39.
124. Аль-Раваш, А. Математическая модель вискозиметра с падающим грузом / А. Аль-Раваш // *Материалы межвузовской научно-практической конференции «Актуальные проблемы образования, науки и производства»*, - г. Нижнекамск. – 2006. – С. 41-42.

125. Morton, M. D. Fifty Years of Non-Newtonian Fluid Dynamics / M. D. Morton // American Institute of Chemical Engineers Journal. – 2004. – Vol.50, No.10. – P. 2335 – 2345.
126. Georgievskii, D.V. Stability of Bingham flows: from the earliest works of A.A. Il'yushin to the present / D.V. Georgievskii // J Eng Math. – 2013. – Vol. 78. – P. 9–17.
127. Coussot, P. Yield stress fluid flows: A review of experimental data / P. Coussot // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2014. – Vol. 211. – P.31–49.
128. Telis-Romero, J. Friction loss coefficients across valves and fittings for laminar flow of non-Newtonian fluids / J. Telis-Romero, A.C. Gratao, C.H. Garcia-Cruz, V.R.N. Telis // Science and Engineering Journal. – 2000. – Vol. 9, Issue 1. – P. 78–82.
129. Fitt, A.D. Asymptotic analysis of the flow of shear-thinning foodstuffs in annular scraped heat exchangers / A.D. Fitt, C.P. Please // Journal of Engineering Mathematics. – 2001. – Vol.39. – P. 345–366.
130. Joye, D. D. Shear rate and viscosity corrections for a Casson fluid in cylindrical (Couette) geometries / D. D. Joye // Journal of Colloid and Interface Science. – 2003. – Vol. 267. – P. 204-210.
131. Vidal, G. E. Chocolate rheology / Gonçalves Estela Vidal, Lan Suzana Caetano da Silva // Ciênc. Tecnol. Aliment., Campinas. – 2010. – Vol. 30, №4. – P.845-851.
132. Khan, W.A. Fluid Flow and Heat Transfer in Power-Law Fluids Across Circular Cylinders: Analytical Study / W.A. Khan, J.R. Culham, M.M. Yovanovich // J. Heat Transfer. – 2006. – Vol. 128, №9. – P. 870-878.
133. Hussain, Q.E. Numerical modeling of helical flow of pseudoplastic fluids / Q.E. Hussain, M.A.R. Sharif // Numerical Heat Transfer, Part A. – 2000. – Vol.38. – P. 225–241.
134. Ashrafi, N. Order in chaotic pseudoplastic flow between coaxial cylinders / N. Ashrafi // Arch. Appl. Mech. – 2012. – Vol.82. – P. 809–825.
135. Ashrafi, N. Axial drive to nonlinear flow between rotating cylinders / N. Ashrafi, A. Hazbavi // Mech. Time-Depend Mater. – 2014. – Vol. 18. – P.293–308.

136. Bird, R.B. Dynamics of Polymeric Liquids / R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager – Fluid Mechanics, 2nd Edition. Vol. 1 – New York: Wiley, 1987. – 672 p.
137. Matvienko, O.V. Mathematical simulation of a twisted pseudoplastic fluid flow in a cylindrical channel / O.V. Matvienko, V.P. Bazuev, N.K. Yuzhanova // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2011. – Vol. 84, No. 3. – P. 589-593
138. Matvienko, O.V. Mathematical simulation of the swirling flow of a dilatant liquid in a cylindrical channel / O.V. Matvienko, V.P. Bazuev, N.K. Dul'zon // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2014. – Vol. 87, No.1. – P. 200-207.
139. Khali, S. Numerical investigation of non-Newtonian fluids in annular ducts with finite aspect ratio using lattice Boltzmann method / S. Khali, R. Nebbali, D.E. Ameziani, K. Bouhadeb // Physical review E. – 2013. – Vol. 87, №5. – 053002. – P.1-15.
140. Ouldhadda, D. Heat transfer in non-Newtonian falling liquid film on a horizontal circular cylinder / D. Ouldhadda, A. Idrissi, M. Asbik // Heat and Mass Transfer. – 2002. – Vol. 38. – P. 713-721.
141. Chyu, M.C. An analytical and experimental study of falling film evaporation on a horizontal tube / M.C. Chyu, A.E. Bergles // ASME J. Heat Transfer. – 1987. – Vol. 109. – P. 983-990.
142. Rogers, J.T. Experimental laminar falling film heat transfer coefficients on a large diameter horizontal tube / J.T. Rogers, S.S. Goindi // Can. J. Chem. Eng. – Vol. 67. – P. 560-568.
143. Bhowmick, S. Non-newtonian mixed convection flow along an isothermal horizontal circular cylinder / Sidhartha Bhowmick, Md Mamun Molla, Lun-Shin Yao // Numerical Heat Transfer, Part A. – 2014. – Vol. 66. – P. 509–529.
144. Merkin, J.H. Mixed Convection from a Horizontal Circular Cylinder / J.H. Merkin // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1977. – Vol. 20. – P. 73–77.

145. Roquet, N. An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder / N. Roquet, P. Saramito // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2003. – Vol. 192. – P. 3317–3341
146. Самарский, А.А. Теория разностных схем. / А.А. Самарский – М.: Наука, 1977. – 656 с.
147. Любимова, Т.П. Применение метода сеток в задаче о конвекции вязкопластической жидкости / Т.П. Любимова // Свердловск, УНЦ АН СССР. – 1981. – С. 36-44.
148. Любимов, Д.В. О конвективном движении вязкопластичной жидкости в пористой среде / Д.В. Любимов, Т.П. Любимова // *Прикладная математика и механика.* – 1981. – Т. 45, №2. – С. 287-293.
149. Любимова, Т.П. О конвективных течениях вязкопластичной жидкости с переменными реологическими параметрами. Нестационарные процессы в жидкостях и твердых телах / Т.П. Любимова // Свердловск, УНЦ АН СССР. – 1983. – С. 30–39.
150. Любимова, Т.П. О стационарных решениях уравнений конвекции вязкопластичной жидкости, подогреваемой снизу, при учете температурной зависимости реологических параметров / Т.П. Любимова // *Весті Академії наук БССР, Серія фізика-енергетычных навук.* – 1986. – №1. – С. 91-96
151. Lyubimova, T.P. Thermal convection of non-Newtonian fluids under low gravity conditions / T.P. Lyubimova // *Fluid Dynamics in Microgravity*, ed. by H.J. Rath. Springer-Verlag. – 1992. – P. 555-562.
152. Reynolds, O. On the theory and application and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, Including and experimental determination of the viscosity of olive oil / O. Reynolds // *Philosophical Transactions of the Royal Society.* – 1886. – Vol. 117. – P. 157–234.
153. Капица, П.Л. Волновое течение тонких слоев жидкости / П.Л. Капица // *Журн. эксперим. и теор. физ.* – 1948. – Т. 18, №1. – С. 3-28.
154. Капица, П.Л. Волновые течения тонких слоев жидкости / П.Л. Капица С.П. Капица // *Журн. эксперим. и теор. физ.* – 1949. – Т. 19, №2. – С. 105-120.

155. Дерягин, Б.В. Физико-химия нанесения тонких слоев на движущуюся подложку / Б.В. Дерягин, С.М. Леви. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 208 с.
156. Воронцов, Е.Г. Теплообмен в жидкостных пленках / Е.Г. Воронцов, Ю.М. Тананайко. – Киев: Издательство Техника, 1972. – 196 с.
157. Тананайко, Ю.М. Методы расчета и исследования пленочных процессов / Ю.М. Тананайко, Е.Г. Воронцов – Киев: Издательство Техника, 1975. – 312 с.
158. Шульман, З.П. Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях / З.П. Шульман, В.И. Байков; под ред. А.Г. Шашкова – Мн.: Наука и техника, 1979. – 296 с.
159. Balmforth, N.J. The viscoplastic Stokes layer / N.J. Balmforth, Y. Forterre, O. Pouliquen // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 2009. – Vol.158. – P.46–53.
160. Шульман, З.П. Ламинарное волновое течение пленки вязкопластичной жидкости / З.П. Шульман, В.И. Байков // *Инженерно-физический журнал.* – 1979. – Т.36, №4. – С.721-727.
161. Байков, В.И. Гидродинамика и теплообмен в неньютоновских жидкостях при пленочном и свободноконвективном течении в гравитационном поле применительно к процессам химической технологии: дис. ... д-ра техн. наук. / В.И. Байков. – Казань. 1987.
162. Шульман, З.П. Течение пленки вязкопластичной жидкости при динамическом воздействии / З.П. Шульман, В.И. Байков, С.Л. Бендерская // *Инженерно-физический журнал.* – 1977. – Т.33, №4. – С. 666-670.
163. Байков, В.И. Течение пленки вязкопластичной жидкости по вибрирующей поверхности при гидродинамическом взаимодействии фаз / В.И. Байков // *Сб. науч. тр. ИГМО АН БССР. Тепло- и массоперенос: итоги и перспективы.* Минск. – 1985. – С. 75-78.
164. Куцкий, А.С. Движение струи нелинейно-вязкопластичной жидкости вдоль движущейся под углом к горизонту пластины / А.С. Куцкий // *Инженерно-физический журнал.* – 1987. – Т.52. №4. – С. 597-605.
165. Пеев, Г. Толщина пленки, получаемой при вертикальном извлечении пластины из суспензии, описываемой моделью Шведова-Бингама / Г. Пеев,

- М. Кыршева // Инженерно-физический журнал. – 1988. – Т.55, №6. – С.920-924.
166. Городцов, В.А. Растекание пленки нелинейно-вязкой жидкости по горизонтальной гладкой твердой поверхности / В.А. Городцов // Инженерно-физический журнал. – 1989. – Т.57, №2. – С.903-909.
167. Liu, K.F. Approximate equations for the slow spreading of a thin sheet of Bingham plastic fluid / K.F. Liu, C.C. Mei // *Physics of Fluids A*. – 1990. – Vol. 2, №1. – P. 30–36.
168. Piau, J.M. Flow of a yield stress fluid in along do main: application to flow on an inclined plane / J.M. Piau // *Journal of Rheology*. – 1996. – Vol. 40. – P. 711–723.
169. Balmforth, N.J. A consistent thin-layer theory for Bingham plastics / N.J. Balmforth, R.V. Craster // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 1999. – Vol. 84. – P.65-81.
170. Balmforth, N.J. Shallow viscoplastic flow on an inclined plane / N.J. Balmforth, R.V. Craster, R. Sassi // *J. Fluid Mech.* –2002. – Vol. 470. – P. 1-29.
171. Siviglia, A. Effect of bottom curvature on mud flow dynamics: theory and experiments / A. Siviglia, A. Cantelli // *Water Resources Research*. – 2005. – Vol. 41, №11. – P. 1–17.
172. Ionescu, I.R. Viscoplastic hallow flow equations with topography / I.R. Ionescu // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. – 2013. – Vol. 193 – P. 116–128.
173. Bouchut, F. A new model for shallow viscoelastic fluids / F. Bouchut, S. Boyaval // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2013. – Vol. 23. №8. – P. 1479–1526.
174. Fusi, L. On the mathematical paradoxes for the flow of a viscoplastic film down an inclined surface / L. Fusi, A. Farina, F. Rosso // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2014. – Vol.58. – P.139–150.
175. Benjamin, T.B. Wave formation in laminar flow down an inclined plane / T.B. Benjamin // *Journal of Fluid Mech.* – 1957. – Vol. 2. – P. 554–574.
176. Chia-Shun, Y. Stability of liquid flow down an inclined plane / Yih Chia-Shun // *Phys. Fluids*. – 1963. – Vol. 6. № 3. – P. 312-334.

177. Benney, B.J. Long waves in liquid films / B.J. Benney // Journal of Math. Phys. – 1966. – Vol.45. – P. 150 – 155.
178. Шкадов, В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести / В.Я. Шкадов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1967. – №1. – С. 43-51.
179. Gjevik, B. Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films / B. Gjevik // Phys. Fluids. – 1970. – Vol. 13. № 8. – P.1918-1925.
180. Lin, S.P. Finite amplitude side-band stability of viscous film / S.P. Lin // J. Fluid Mech. – 1974. – Vol. 63, pt 3. – P. 417-429.
181. Непомнящий, А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости / А.А. Непомнящий // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1974. – №3. – С. 28–34.
182. Непомнящий, А.А. Устойчивость волновых движений в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости / А.А. Непомнящий // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах: Сб. науч. трудов. Новосибирск. – 1977. – С. 190-195.
183. Цвелодуб, О.Ю. Стационарные плоские волны на стекающей пленке жидкости / О.Ю. Цвелодуб // В сб.: Теплофизические исследования. Новосибирск. – 1977.
184. Цвелодуб, О.Ю. Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости / О.Ю. Цвелодуб // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1980. – №4. – С. 142-146.
185. Демехин, Е.А. О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости / Е.А. Демехин, В.Я. Шкадов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1981. – № 3. – С. 151-154.
186. Алексеенко, С.В. Волновое течение пленок жидкости / С.В. Алексеенко, В.Е. Накоряков, Б.Г. Покусаев. – Наука: Сибирское отделение, 1992. – 255 с.
187. Chang, H.-C. Wave evolution on a falling film / H.-C. Chang // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1994. – Vol. 26. – P. 103-136.

188. Шкадов, В.Я. Волновые движения пленок жидкости на вертикальной поверхности (теория для истолкования экспериментов) / В.Я. Шкадов, Е.А. Демехин // Успехи механики. – 2006. – Т.4. – С. 3 - 65.
189. Трифонов, Ю.Я. Расчет волнового стекания пленок в рамках уравнений Навье- Стокса / Ю.Я. Трифонов // Доклады РАН. – 2007. – Т. 416. №2. – С. 195 - 199.
190. Трифонов, Ю.Я. Расчет устойчивости волнового стекания пленок с использованием уравнений Навье-Стокса / Ю.Я. Трифонов // ПМТФ. –2008. – Т. 49, №2. – С. 98-112.
191. Dandapat, B.S. Long waves on a layer of a visco-elastic fluid down an inclined plane / B.S. Dandapat, A.S. Gupta // Rheol. Acta. – 1978. – Vol. 17. – P. 492 - 499.
192. Miladinova, S. Thin-film flow of a power-law liquid falling down an inclined plane / S. Miladinova, G. Lebon, E. Toshev // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 2004. – Vol. 122. – P. 69-78.
193. Shkadov, V.Ya Numerical bifurcation analysis of the travelling waves on a falling liquid film / V.Ya Shkadov, G.M. Sisoiev // Computers and Fluids. – 2005. – Vol. 34, Issue 2. – P. 151-168.
194. Цвелодуб, О.Ю. Волновые режимы на пленке нелинейно-вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости / О.Ю. Цвелодуб, В.Ю. Шушеначев // ПМТФ. – 2005. – №3. – С. 73-84.
195. Могилевский, Е.И. Течения тонких пленок вязкой жидкости по криволинейным вращающимся поверхностям / Е.И. Могилевский, В.Я. Шкадов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2009. – №2. – С. 18 - 32.
196. Mogilevskiy, E.I. Nonlinear Waves in Liquid Films on a Spinning Disk / E.I. Mogilevskiy, V.Ya. Shkadov // XXXIV Summer School- Conference "Advanced Problems in Mechanics". Book of Abstracts. SPb: IPME RAS. – 2005. – P.63.

197. Могилевский, Е.М. Волны в пленке жидкости со сложной реологией / Е.М. Могилевский // Научная конференция Ломоносовские чтения. Секция Механика. Тезисы докладов. – 2007. – С. 158.
198. Могилевский, Е.И. Спектральная задача неустойчивости пленок обобщенно ньютоновских жидкостей / Е.М. Могилевский // Научная конференция Ломоносовские чтения. Секция Механика. Тезисы докладов. – 2008. – С. 130 – 131
199. Могилевский, Е.И. Волны в пленке обобщенно ньютоновской жидкости / Е.М. Могилевский, В.Я. Шкадов // III Всероссийская конференция "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент, приложения". Тезисы докладов. Новосибирск. – 2008. – С. 75 - 76
200. Могилевский, Е.И. Исследование волновых режимов течения пленки жидкости при внешних воздействиях: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 / Могилевский Евгений Ильич. – М., 2008. – 116 с.
201. Байков, В.И. Устойчивость пленки, стекающей по осциллирующей поверхности / В.И. Байков, А.Т. Листров, З.А. Шабунина // Инженерно-физический журнал. – 1982. – Т.43, №6. – С.1006-1012.
202. Шабунина, З.А. Устойчивость пленочного течения по вибрирующей стенке / З.А. Шабунина, В.И. Байков // Изв. АН БССР. Серия физ.-энерг.наук. – 1984. – №1. – С. 88-94.
203. Woods, D. R. Instabilities of a liquid film flow over a vibrating inclined plane / D.R. Woods, S.-P. Lin // J. Fluid Mech. – 1995. – Vol. 294. – P. 391-407.
204. Буря, А.Г. Устойчивость пленки жидкости, стекающей по колеблющейся наклонной поверхности / А.Г. Буря, В.Я. Шкадов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2001. – №5. – С. 3 – 13.
205. Тарунин, Е.Л. Обзор особенностей асимметричных колебаний / Е.Л. Тарунин // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь. – 2005. – № 37. – С. 169-187.
206. Тарунин, Е.Л. Эффекты асимметричных колебаний / Е.Л. Тарунин // Гидродинамика: Сб. трудов Перм. пед. ун-та. Пермь. – 2007. – С. 236-249.

207. Мелентьев, А.Б. Эффекты асимметричных колебаний в конвекции / А.Б. Мелентьев, Е.Л. Тарунин // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 3. – С. 284-291.
208. Блехман, И.И. Вибрационная механика / И.И. Блехман– М.: Физматлит, 1994. – 400 с.
209. Жуховицкий, Е.М. К теории инерциоида / Е.М. Жуховицкий, Е.Л. Тарунин, И.Г. Шапошников // Ученые записки Перм. ун-та. Пермь. – 1972. – № 257. – С. 89-98.
210. Тарунин, Е.Л. Особенности асимметричных колебаний при наличии нелинейного вязкого трения / Е.Л. Тарунин // Вест. ПГТУ. Прикл. математика и механика. – 2003. – С. 9–15.
211. Yablonskii, V.O. Hydrodynamics of Nonlinear Viscoplastic Fluid in Cylindrical Hydrocyclone / V.O. Yablonskii // Russian Journal of Applied Chemistry. – 2013.– Vol. 86, No. 8. – P. 1212–1219.
212. Myers, T.G. Application of non-Newtonian models to thin film flow / T.G. Myers // Physical Review E. – 2005. – Vol. 72. – 066302. – P. 1-11.
213. Гледзер, Е.Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е.Б. Гледзер, Ф.В. Должанский, А.М. Обухов. – М.: Наука, 1981. – 366 с.
214. Дразин, Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости / Ф. Дразин. Пер. с англ. Г.Г. Цыпкина; под ред. А.Т. Ильичева. – М.: Физматлит, 2005. – 288 с.
215. Гершуни, Г.З. О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в условиях невесомости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий // Доклады Акад. Наук СССР. – 1979. – Т. 249, №3. – С. 580-584.
216. Гершуни, Г.З. О конвективной неустойчивости жидкости в вибрационном поле в невесомости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий // Изв. Акад. Наук СССР. Механика жидкости и газа. – 1981. – №4. – С. 12-19.
217. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т.1. Механика. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц – 5-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 224 с.

218. Зеньковская, С.М. О влиянии вибраций высокой частоты на возникновение конвекции / С.М. Зеньковская, И.Б. Симоненко // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1966. – №5. – С. 51-55.
219. Gershuni, G.Z. Thermal Vibrational Convection / G.Z. Gershuni, D.V. Lyubimov – N.Y. et al.: Wiley, 1998. – 358 p.
220. Бирих, Р.В. О вибрационной конвекции в плоском слое с продольным градиентом температуры / Р.В. Бирих // Изв. АН. СССР. Механика жидкости и газа. – 1990. – №4. – С.12-15.
221. Гершуни, Г.З. Плоскопараллельные адвективные течения в вибрационном поле / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховитский // Инженерно-физический журнал. – 1989. – Т.56, №2. – С.238-242.
222. Анисимов, И.А. Гидродинамическая неустойчивость вибрационного адвективного течения в условиях невесомости / И.А. Анисимов, Р.В. Бирих // Вибрационные эффекты в гидродинамике: Сб. статей. Перм. ун-т. Пермь. – 1998. – С.17-24.
223. Yang, W.-J. Free convection flow of Bingham plastic between two vertical plates / Yang Wen-Jei, Yeh Hsu-Chien // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. – 1965. – Vol. 87, №2. – P. 319-320.
224. Любимов, Д.В. Стационарная конвекция вязкопластичной жидкости в вертикальном слое / Д.В.Любимов, Т.П.Любимова // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1980. – №2. – С.118–123.
225. Karimfazli, I. Natural convection flows of a Bingham fluid in a long vertical channel / I. Karimfazli, I.A. Frigaard // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2013 – Vol. 201 – P. 39–55.
226. Demin, V.A. Mechanical quasi-equilibrium and thermovibrational convective instability in an inclined fluid layer / V.A. Demin, G.Z. Gershuni, I.V.Verkholantsev // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1996. – Vol. 39. №9. – P.1979–1991.

227. Демин, В.А. Вибрационная конвекция в наклонном слое жидкости при подогреве снизу / В.А. Демин // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2005. – №6. – С.38-48.
228. Демин, В.А. Термовибрационная конвективная неустойчивость наклонного слоя жидкости: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 / Демин Виталий Анатольевич. – Пермь, 1998. – 161 с.
229. Nakayama, A. Combined forced and free-convection heat-transfer in power-law fluid-saturated porous-media / A. Nakayama, A.V. Shenoy // *J Appl. Sci. Res.* – 1993. – Vol. 50. – P. 83-95.
230. Wang, T.Y. Mixed convection heat-transfer from a horizontal plate to non-newtonian fluids / T.Y. Wang // *Int. Commun. Heat Mass Transf.* – 1993. – Vol. 20. – P. 431-443.
231. Wang, T.Y. Mixed convection heat-transfer from a vertical plate to non-newtonian fluids / T.Y. Wang. // *Int. Commun. Heat Mass Transf.* – 1995. – Vol. 16 – P. 56-61.
232. Шульман, З.П. Тепло- и массообмен при свободной конвекции в неньютоновских жидкостях / З.П. Шульман, В.И. Байков, Э.А. Зальцгендлер. – Минск: Наука и техника, 1975. – 134 с.
233. Chi Tlen. Thermal instability of a horizontal layer of non-Newtonian fluid heated from below / Chi Tlen, Hun Sheng Tsuei, Zu Shung Sun. // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* – 1969. – Vol. 12, №9. – P. 1173-1178.
234. Wankat, P.C. Note on thermal instability of a horizontal layer of non-Newtonian fluid heated from below / P.C. Wankat // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* – 1970. – Vol. 13, №9. – P.1506 – 1507.
235. Liang, S.F. Experiments on buoyancy-driven convection in a non-Newtonian fluid / S.F. Liang, A. Acrivos // *Rheol. Acta.* – 1970. – Vol. 9, №3. – P.447-455.
236. Семакин, И.Г. Неустойчивость стационарного конвективного движения неньютоновской жидкости в вертикальном слое / И.Г. Семакин // *Гидродинамика. Пермь. ППИ.* – 1974. – Вып. 7. – С. 25 –32.

237. Семакин, И.Г. Стационарная конвекция неньютоновской жидкости в вертикальном слое / И.Г. Семакин // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1972. – №4. – С. 137-139.
238. Семакин, И.Г. Вторичные конвективные движения неньютоновской жидкости в вертикальном слое / И.Г. Семакин // Гидродинамика. Пермь. ППИ. – 1976. – Вып. 9. – С. 60–70.
239. Любимова, Т.П. Конвекция неньютоновской жидкости при почти вертикальном подогреве / Т.П. Любимова // Учен. зап. Перм. ун-та. Гидродинамика. Пермь. – 1975. – Вып.6. – С. 39-46.
240. Lyubimova, T.P. Convection of non-Newtonian liquids in closed cavities heated from below / T.P. Lyubimova // Fluid Dynamics. – 1974 – Vol. 9, №2. – P. 319-322.
241. Ozoe, H. Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwald-de Waele and Ellis fluids: the development of a numerical solution. / H. Ozoe, S.W. Churchill // AIChE Journal. – 1972. – Vol. 18, №6. – P. 1196-1207.
242. Любимова, Т.П. О конвективных движениях вязкопластичной жидкости в прямоугольной области / Т.П. Любимова // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1979, №5. – С. 141-144
243. Любимова, Т.П. О применении вариационных принципов в задаче о конвекции вязкопластичной жидкости / Т.П. Любимова, Д.В. Любимов // ПГПИ. Пермь. Конвективные течения.– 1979. – №1. – С. 81-86.
244. Zhang, J. Yield stress effects on Rayleigh–Benard Convection / J. Zhang, D. Vola, I.A. Frigaard // J. Fluid Mech. – 2006. – Vol. 566. – P. 389–419.
245. Darbouli, M. Rayleigh–Bénard convection for viscoplastic fluids / M. Darbouli, C. Métivier, J.-M. Piau, A. Magnin, A. Abdelali // Physics of Fluids. – 2013. – Vol. 25. – 023101 – P.1-15.
246. Kebiche, Z. Experimental investigation of the Rayleigh–Benard convection in a yield stress fluid / Z. Kebiche, C. Castelain, T. Burghelea // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2014. – Vol.203. – P.9–23.

247. Balmforth, N.J. Weakly nonlinear viscoplastic convection / N.J. Balmforth, A.C. Rust // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 2009. – Vol.158 – P. 36–45.
248. Métivier, C. On linear stability of Rayleigh–Bénard Poiseuille flow of viscoplastic fluids / C. Métivier, C. Nouar // *Physics of Fluids.* – 2008. – Vol. 20. – 104101. – P.1-14.
249. Cherkasov, S.G. Combined convection of a viscoplastic liquid in a plane vertical layer / S.G. Cherkasov // *Fluid Dynamics.* – 1979. – Vol. 14, № 6. – P.901-903.
250. Vikhansky, A. On the onset of natural convection of Bingham liquid in rectangular enclosures / A. Vikhansky // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 2010. – Vol. 165. – P. 1713–1716.
251. Гершуни, Г.З. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий // *Изв. Вузов. Физика.* – 1958 – № 4 – С.43-47.
252. Рудаков, Р.Н. О малых возмущениях конвективного течения между вертикальными плоскостями / Р.Н. Рудаков // *Прикладная математика и механика* – 1966. – Т.30, вып.2. – С.362-368.
253. Бирих, Р.В. О колебательной неустойчивости плоскопараллельного конвективного движения в вертикальном канале / Р.В. Бирих, Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, Р.Н. Рудаков // *Прикладная математика и механика.* – 1972. – Т.36, Вып.4. – С.745-748.
254. Антонов, П.В. Зависимость формы фронта кристаллизации и скорости роста слитка кремния от режима теплообмена в методе Бриджмена-Стокбаргера / П.В. Антонов, В.С. Бердников // *Прикладная механика и техническая физика.* – 2012. – Т.53, №6. – С. 65 – 77.
255. Бердников, В.С. Моделирование сопряженного теплообмена на начальной стадии процесса в методе Бриджмена / В.С. Бердников, М.А. Кудрявцева // *Вестник НГУ. Серия: Физика.* – 2012. – Т.7, вып. 4. – С.127 – 135.
256. Антонов, П.В. Влияние формы дна тиглей на сопряженный конвективный теплообмен в методе Бриджмена / П.В. Антонов, В.С. Бердников // *Известия*

- высших учебных заведений. Материалы электронной техники. – 2011. – № 4. – С. 21 – 28.
257. Hurle, D.T.J. Convective temperature oscillations in molten gallium / D.T.J. Hurle, E. Jakeman, C.P. Johnson // *J. Fluid Mech.* – 1974. – Vol. 64. – P.565–576.
258. Dold, P. Convective temperature fluctuations in liquid gallium in dependence on static and rotating magnetic fields / P. Dold, K.W. Benz // *Cryst. Res. Technol.* – 1995. – Vol. 30, №8. – P. 1135–1145.
259. Dold, P. Modification of fluid flow and heat transport in vertical Bridgman configurations by rotating magnetic fields / P. Dold, K.W. Benz // *Cryst. Res. Technol.* – 1997. – Vol. 32, №1. – P. 51–60.
260. Davoust, L. Buoyancy-driven convection with a uniform magnetic field. Part 2. Experimental investigation / L. Davoust, M.D. Cowley, R. Moreau, R. Bolcato // *J. Fluid Mech.* – 1999. – Vol. 400. – P. 59–90.
261. Juel, A. Magnetohydrodynamic convection in molten gallium / A. Juel, T. Mullin, H. Ben Hadid, D. Henry // *J. Fluid Mech.* – 1999 – Vol. 378. – P. 97–118.
262. Series, R.W. The use of magnetic field in semiconductor crystal growth / R.W. Series, D.T.J. Hurle // *J. Cryst. Growth.* – 1991. – Vol.113 – P. 305–327.
263. Hurle, D.T.J. *Crystal Pulling From the Melt* / D.T.J. Hurle. – N.Y.: Springer-Verlag, 1993. – 148 с.
264. Utech, H.P. Elimination of solute banding in Indium Antimonide crystals by growth in a magnetic field / H.P. Utech, M.C. Flemings // *J. Appl. Phys.* – 1966. – Vol. 37, №5. – P. 2021–2024.
265. Thompson, W.B. Thermal convection in a magnetic field / W.B. Thompson // *Phil. Mag.* – 1951. – Vol. 42, №335. – P. 1417-1432.
266. Chandrasekhar, S. On the inhibition of convection by a magnetic field: I / S. Chandrasekhar // *Phil. Mag.* – 1952. – Vol. 43, №340. – P. 501-532.
267. Chandrasekhar S. On the inhibition of convection by a magnetic field: II / S. Chandrasekhar // *Phil. Mag.* – 1954. – Vol. 45, №370. – P. 1177-1191.
268. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability* / S. Chandrasekhar – Clarendon Press: Oxford University Press, 1961. – 652 p.

269. Любимов, Д.В. Влияние вращающегося магнитного поля на конвекцию в горизонтальном слое жидкости / Д.В. Любимов, Т.П. Любимова, Е.С. Садилов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2008. – № 2. – С. 3-10.
270. Ben Hadid, H. Rotating magnetic field in fluence on a non-uniformly heated fluid / H. Ben Hadid, A.V. Burnysheva, D.V. Lyubimov, T.P. Lyubimova // Journee du GDR 2258. Reunioin generale du GDR-Paris. France. 27-28 May. Recueil des resumes. – 2002. – P.23.
271. Ben Hadid, H. Stabilization of conductive state of horizontal fluid layer by rotating magnetic field / H. Ben Hadid, A.V. Burnysheva, D.V. Lyubimov, T.P. Lyubimova // Proceedings of XXIX Summer School «Advanced Problems in Mechanics», St.Petersburg, Russia. – 2002. – P.82-92.
272. Садилов, Е.С. Влияние осложняющих факторов на возникновение и нелинейные режимы конвекции в горизонтальных слоях: дис. ... канд. физ.-мат. наук.: 01.02.05 / Садилов Евгений Сергеевич. – Пермь, 2007. — 152 с.
273. Бурнышева, А.В. Влияние нестационарных полей на устойчивость равновесия и течений жидкости: дис. ... канд. физ.-мат. наук.: 01.02.05 / Бурнышева Анастасия Викторовна. – Пермь, 2011. — 142 с.
274. Kaddeche, S. Instabilities in liquid metals controlled-by constant magnetic field Part I: vertical magnetic field / S. Kaddeche, D. Henry, T. Putelat, H. Ben Hadid // Journal of crystal growth. — 2002. — Vol. 242. – P. 491-500.
275. Kaddeche, S. Magnetic stabilization of the buoyant convection between infinite horizontal walls with a horizontal temperature gradient / S. Kaddeche, D. Henry, H. Ben Hadid // J. Fluid Mech. — 2003. – Vol. 480. – P. 185-216.
276. Garandet, J.P. Buoyancy-driven convection in a rectangular enclosure with a transverse magnetic field / J.P. Garandet, T. Alboussière, R. Moreau // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1992. – Vol. 35, №4. – P. 741–748.
277. Hof, B. Magnetohydrodynamic damping of convective flows in molten gallium / B. Hof, A. Juel, T. Mullin // J. Fluid Mech. – 2003. – Vol. 482. – P. 163–179.

278. Hof, B. Magnetohydrodynamic damping of oscillations in low-Prandtl number convection / B. Hof, A. Juel, T. Mullin // *J. Fluid Mech.* – 2005. – Vol. 545. – P. 193–201.
279. Alboussière, T. Buoyancy-driven convection with a uniform magnetic field. Part 1. Asymptotic analysis / T. Alboussière, J.P. Garandet, R. Moreau // *J. Fluid Mech.* – 1993. – Vol. 253. – P. 545–563.
280. Alboussière, T. Asymptotic analysis and symmetry in MHD convection / T. Alboussière, J.P. Garandet, R. Moreau // *Phys. Fluids.* – 1996. – Vol. 8, №8. – P. 2215–2226.
281. Ozoe, H. The effect of the direction of the external magnetic field on the three-dimensional natural convection in a cubical enclosure / H. Ozoe, K. Okada // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 1989. – Vol. 32. – P.1939–1954.
282. Okada, K. Experimental heat transfer rates of natural convection of molten gallium suppressed under an external magnetic field in either the x-, y- or z-direction / H. Ozoe, K. Okada // *ASME J. Heat Transfer.* – 1992. – Vol. 114. – P. 107–114.
283. Ben Hadid, H. Numerical simulations of convective three-dimensional flows in a horizontal cylinder under the action of a constant magnetic field / H. Ben Hadid, D. Henry // *J. Cryst. Growth.* – 1996. – Vol. 166. – P. 436–445.
284. Ben Hadid, H. Numerical simulation of convective three-dimensional flows in a horizontal Bridgman configuration under the action of a constant magnetic field. / H. Ben Hadid, D. Henry // *In Proceedings of the Second Intl Conf. on Energy Transfer in Magnetohydrodynamic Flows, Aussois, France. MHD Pamir Publications, Grenoble.* – 1994. – Vol.1. – P. 47–56.
285. Ben Hadid, H. Numerical study of convection in the horizontal Bridgman configuration the action of a constant magnetic field. Part 1. Two-dimensional flow / H. Ben Hadid, D. Henry, S. Kaddeche // *J. Fluid Mech.* – 1997. – Vol. 333. – P. 23-56.
286. Ben Hadid, H. Numerical study of convection in the horizontal Bridgman configuration under the action of a constant magnetic field. Part 2. Three-

- dimensional flow / H. Ben Hadid, D. Henry // *J. Fluid Mech.* – 1997. – Vol. 333. – P. 57–83.
287. Baumgartl, J. Calculation of the effects of magnetic field damping on fluid flow – comparison of magnetohydrodynamic models of different complexity / J. Baumgartl, G. Müller // In *Proceedings of the Eighth European Symposium on Materials and Fluid Sciences in Microgravity (ESA SP- 333)*, ESA Publication Division c/o ESTEC, Noordwijk, The Netherlands. – 1992. – P. 161–164.
288. Baumgartl, J. The use of magnetohydrodynamic effects to investigate fluid flow in electrically conducting melts / J. Baumgartl, A. Hubert, G. Müller // *Phys. Fluids A.* – 1993. – Vol. 5. – №12. – P. 3280–3289.
289. Ben Hadid, H. Unsteady three-dimensional buoyancy-driven convection in a circular cylindrical cavity and its damping by magnetic field / H. Ben Hadid, D. Henry, R. Touihri // *J. Cryst. Growth.* – 1997. – Vol. 180. – P. 433–441.
290. Henry, D. Magnetic stabilization of melt flows in horizontal Bridgman configurations / D. Henry, H. Ben Hadid, S. Kaddeche, W. Dridi // *J. Cryst. Growth.* – 2008. – Vol. 310. – P. 1533–1539.
291. Henry, D. Directional effect of a magnetic field on oscillatory low-Prandtl-number convection / D. Henry, A. Juel, H. Ben Hadid, S. Kaddeche // *Phys. Fluids.* – 2008 – Vol. 20. – 034104. – P.1–12.
292. Lyubimov, D.V. Rotating magnetic field effect on convection and its stability in a horizontal cylinder subjected to a longitudinal temperature gradient / D.V. Lyubimov, A.V. Burnysheva, H. Ben Hadid, T.P. Lyubimova, D. Henry // *Journal of Fluid Mechanics.* – 2010. – Vol. 664. – P.108-137.
293. Lyubimov, D.V. Rotating magnetic field effect on convection and its stability in a differentially heated horizontal cylinder / D.V. Lyubimov, A.V. Burnysheva, H. Ben Hadid, T.P. Lyubimova, D. Henry // *Euromech Fluid Mechanics Conference - 8. September 16-17. Abstract s.* – 2010.– P. 16-3.
294. Lyubimova, T. P. Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 1. Effect of aspect ratio and Prandtl number

- / T.P. Lyubimova, D.V. Lyubimov, V.A. Morozov, R.V. Scuridin, H. Ben Hadid, D. Henry // *J. Fluid Mech.* – 2008. – Vol. 635. – P. 275–295.
295. Fischer, B. The use of time-dependent magnetic fields for control of convective flows in melt growth configurations / B. Fischer, J. Friedrich, H. Weimann, G. Muller // *Journal of crystal growth.* – 1999. – Vol. 198/199. – P. 170-175.
296. Friedrich, J. Experimental and numerical study of Rayleigh-Benard convection affected by a rotating magnetic field / J. Friedrich, Y.S. Lee, B. Fisher, C. Kupfer, D. Vizman, G. Müller // *Physics of fluids.* – 1999. – Vol.11, N.4. – P. 853-861.
297. Dold, P. Convective temperature fluctuations in liquid gallium in dependence on static and rotating magnetic fields / P. Dold, K.W. Benz // *Cryst. Res. Technol.* – 1995. – Vol. 30. – P. 1135–1145.
298. Volz, M.P. Thermoconvective instability in a rotating magnetic field / M.P. Volz, K. Mazuruk // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* – 1999. – Vol. 42. – P. 1037-1045.
299. Walker, J.S. Rayleigh-Benard instability in a vertical cylinder with a rotating magnetic field / J.S. Walker, M.P. Volz, K. Mazuruk // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* – 2004. – Vol. 47. – P. 1877-1887.
300. Моßner, R. Buoyant melt flows under the influence of steady and rotating magnetic fields / R. Моßner, G. Gerbeth // *Journal of crystal growth.* – 1999. – Vol. 197. – P. 341-354.
301. Marty, P.H. On the stability of rotating MHD flows / P.H. Marty, L. Martin Witkowski, P. Trombetta, T. Tomasino // *Transfer Phenomena in magnetohydrodynamic and electroconducting flows.* A. Alemany et al. (eds.). - Kluwer Academic Publishers. – 1999. – P. 327-343.
302. Chen, S.C. Simulations and verifications of induction heating on a mold plate / S.C. Chen, H.S. Peng, J.A. Chang, W.R. Jong // *International Communications in Heat and Mass Transfer.* – 2004. – Vol. 31. – P. 971–980.
303. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т.VIII. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц – 4-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1995, (2002 Reprint). – 656 с.

304. Jang, J.Y. Numerical and experimental thermal analysis for a metallic hollow cylinder subjected to step-wise electro-magnetic induction heating / J.Y. Jang, Y.W. Chiu // *Appl. Therm. Eng.* – 2007. – Vol. 27. – P. 1883–1894.
305. Haddar, H. Artificial boundary conditions for axisymmetric eddy current probe problems / H. Haddar, Z. Jiang, A. Lechleiter // *Comput. Math. with Appl.* – 2014. – Vol. 68, №12. – P. 1844–1870.
306. Naar, R. Numerical optimisation for induction heat treatment processes / R. Naar, F. Bay // *Appl. Math. Model.* – 2013. – Vol. 37. – P. 2074–2085.
307. Bermúdez, A. Analysis of two stationary magnetohydrodynamics systems of equations including Joule heating / A. Bermúdez, R. Muñoz-Sola, R. Vázquez // *J. Math. Anal. Appl.* – 2010. – Vol. 368, №2. – P. 444–468.
308. Bermúdez, A. Numerical simulation of a thermo-electromagneto-hydrodynamic problem in an induction heating furnace / A. Bermúdez, D. Gómez, M.C. Muñiz, P. Salgado, R. Vázquez // *Appl. Numer. Math.* – 2009. – Vol. 59, №9. – P. 2082–2104.
309. Кутателадзе, С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справ. пособие. / С.С. Кутателадзе – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 367 с.
310. Вертгейм Б.А. Об условиях возникновения конвекции в бинарной смеси / Б.А. Вертгейм // *ПММ.* – 1955. – №6, Т.19. – С.745-750.
311. Накорякова, С.Б. К вопросу об устойчивости механического равновесия неравномерно нагретой бинарной смеси / С.Б. Накорякова // *Сб. научн. тр. Пермск. Политехн. ин-та.* – 1963. – №13. – С.58-66.
312. Славнова, Э.И. О свободной тепловой конвекции в водных растворах солей, заполняющие вертикальные трубы круглого сечения / Э.И. Славнова // *Инженерно-физический журнал.* – 1963. – Т. 6, № 3. – С. 106-109.
313. Гершуни, Г.З. О конвективной неустойчивости двухкомпонентной смеси в поле тяжести / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий // *ПММ.* – 1963. – Т. 27, №2. – С. 301-308.
314. Stern, M.E. The Salt Fountain and Thermohaline Convection / M.E. Stern // *Tellus.* – 1960. – Vol. 12, №2. – P. 172-175.

315. Walin, G. Note on the stability of water stratified by both salt and heat / G. Walin // *Tellus*. – 1964. – Vol.16, №3. – P. 389–393.
316. Nield, D.A. The thermohaline Rayleigh-Jeffreys problems / D.A. Nield // *J. Fluid Mech.* – 1967. – Vol.29, №3. – P. 545-558.
317. Baines, G. On thermohaline convection with linear gradients / G. Baines, A.E. Gill // *J. Fluid Mech.* – 1969. – Vol.37, №2. – P. 289–306.
318. Hurle, D.T.J. Significance of the Soret effect in the Rayleigh-Jeffrey's problem / D.T.J. Hurle, E. Jakeman // *Phys. Fluids*. – 1969. – Vol.12, №12. – 2704.
319. Hurle, D.T.J. Soret-driven thermosolutal convection / D.T.J. Hurle, E. Jakeman // *J. Fluid Mech.* – 1971. – Vol. 47, part 4. – P. 667-687
320. Братухин, Ю.К. О конвективной неустойчивости смеси в шаровой полости / Ю.К. Братухин, М.И. Шлиомис // *Пермь. Гидродинамика*, вып. 1: Уч. зап. Пермск. ун-та. – 1968. – С. 75-82.
321. Shirtcliffe, T.G.L. An experimental investigation of thermosolutal convection at marginal stability / T.G.L. Shirtcliffe // *J. Fluid Mech.* – 1969. – Vol. 35, part 4. – P. 677-688.
322. Гершуни, Г.З. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного течения бинарной смеси / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, Л.Е. Сорокин // *ПММ*. – 1980. – Т.44, вып. 5. – С.823-830.
323. Гершуни, Г.З. Об устойчивости конвективного течения бинарной смеси с термодиффузией / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, Л.Е. Сорокин // *ПММ*. – 1982. – Т.46, вып. 1. – С.66-71.
324. Hart, J.E. On sideways diffusive instability / J.E. Hart // *J. Fluid Mech.* – 1971. – V.49, №2. – P.279-288.
325. Paliwal, R.C. Double-diffusive instability in an inclined fluid layer. Part 2. Stability analysis / R.C. Paliwal, C.F. Chen // *J. Fluid Mech.* – 1980. – Vol.98, №4. – P.769-785.
326. Thangam, S. Transition from shear to sideways diffusive instability in a vertical slot / S. Thangam, A. Zebib, C.F. Chen // *J. Fluid Mech.* – 1981. – Vol.112. – P.151-160.

327. Срокин, Л.Е. О колебательной неустойчивости плоскопараллельного конвективного течения бинарной смеси / Л.Е. Срокин // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин.-т. – 1981. – С.69-75.
328. Срокин, Л.Е. Устойчивость конвективного течения бинарной смеси с термодиффузией относительно длинноволновых возмущений / Л.Е. Срокин // Конвективные течения. – Пермь: Перм. пед. ин.-т. – 1983 – С.72-76.
329. Срокин, Л.Е. О нелинейном конвективном движении бинарной смеси с термодиффузией / Л.Е. Срокин // Гидродинамическая и конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Свердловск: УНЦ АН СССР. – 1984. – С.19-26.
330. Срокин, Л.Е. Подкритическое конвективное движение бинарной смеси с термодиффузией / Л.Е. Срокин // Неизотермические течения вязкой жидкости. Свердловск: УНЦ АН СССР. – 1985. – С. 19-23.
331. Срокин Л.Е. Устойчивость конвективного течения бинарной смеси при наличии термодиффузии и вертикального градиента концентрации / Л.Е. Срокин // Конвективные течения. Пермь: Перм.пед. ин.-т. – 1983. – С.63-71.
332. Thorpe, S.A. The effect of horizontal gradients on thermohaline convection / S.A. Thorpe, P.K. Hutt, R. Soulsby // J. Fluid Mech. – 1969. – V.38, №2. – P.375-400.
333. Paliwal, R.C. Double-diffusive instability in an inclined fluid layer. Part 1. Experimental investigation / R.C. Paliwal, C.F. Chen // J. Fluid Mech. – 1980. – V.98, №4. – P.755-768.
334. Narusawa, U. Experimental study of double-diffusive cellular convection due to a uniform lateral heat flux / U. Narusawa, Y. Suzukawa // J. Fluid Mech. – 1981. – V.113. – P.387-405.
335. Hart, J.E. Finite amplitude sideways diffusive convection / J.E. Hart // J. Fluid Mech. – 1973. – Vol.59, №1. – P.47-64.

336. Wirtz, R.A. Experiments on convective layer formation and merging in a differentially heated slot / R.A. Wirtz, C.S. Reddy // *J. Fluid Mech.* – 1979. – Vol.91, №3. – P.451-464.
337. Trevisan, O.V., Bejan A. Combined heat and mass transfer by natural convection in a vertical enclosure / O.V. Trevisan, A. Bejan // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 1987. – Vol. 109. – P. 104–112.
338. Alavyoon F. On natural convection in a vertical porous enclosure due to prescribed fluxes of heat and mass at the vertical boundaries / F. Alavyoon // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 1993. – Vol. 36. – P. 2479-2498.
339. Mamou, M. Analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure / M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen // *Heat Mass Transfer.* – 1996. – Vol. 32. – P. 115-125.
340. Ranganathan, P. Natural convection in a square cavity due to combined driving forces / P. Ranganathan, R. Viskanta // *Numerical Heat Transfer.* – 1988. – Vol. 14. – P. 35-39.
341. Han, K. Double diffusive convection in a vertical rectangular enclosure. – I. Experimental study / K. Han, T. Kuchn // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 1991. – Vol. 34. – P. 449-459.
342. Lee, J. Natural convection in confined fluids with combined horizontal temperature and concentration gradients / J. Lee, M.T. Hyun, W. Kim // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 1988. – Vol. 31. – P. 1969-1977.
343. Lee, J. Double-diffusive convection in a rectangle with opposing horizontal temperature and concentration gradients / J. Lee, J.M. Hyun // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 1990. – Vol. 33. – P. 1619-1632.
344. Shyy, W. Double-diffusive flow in enclosures / W. Shyy, M. Chen // *Phys. Fluids.* – 1991. – Vol. 3. – P. 2592-2602.
345. Gobin, D. Double-diffusion convection in a vertical fluid layer: onset of the convection regime / D. Gobin, R. Bennacer // *Phys. Fluids.* – 1994. – Vol. 6. – P. 59-67.

346. Bergman, T.L. Numerical simulation of Soret-induced double diffusion in an initially uniform concentration binary fluid / T.L. Bergman, R. Srinivasan // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. – 1989. – Vol. 32. – P. 679-687.
347. Traore, Ph. Analyse de l'effet Soret en convection thermosolutale / Ph. Traore, A. Mojtabi // *Entropie*. – 1989. – Vol. 184/185. – P. 32-37.
348. Krishnan, R. A numerical study of the instability of double-diffusive convection in a square enclosure with horizontal temperature and concentration gradients, Heat transfer in convective flows. / R. Krishnan // *HTD ASME National Heat Transfer Conference, Philadelphia*. – 1989. – Vol. 107. – P. 357-368.
349. Kolodner, P. Coexisting traveling waves and steady rolls in binary-fluid convection / P. Kolodner // *Physical Review E*. – 1993. – Vol.48, №2. – P. R665-R668.
350. Barten, W. Convection in binary fluid mixtures. I. Extended traveling-wave and stationary states / W. Barten, M. Lücke, M. Kamps, R. Schmitz // *Physical Review E*. – 1995. – Vol. 51, №6. – P. 5636-5661.
351. Glässl, M. Convection in colloidal suspensions with particle-concentration-dependent viscosity / M. Glässl, M. Hilt, W. Zimmermann // *European Physical Journal E*. – 2010. – Vol. 32, №3. – P. 265-272.
352. Kim, M.C. Linear stability analysis on the onset of Soret-driven motion in a nanoparticles suspension / M.C. Kim // *European Physical Journal E*. – 2011. – Vol. 34, №3. – 27.
353. Lobov, N.I. Stability of Soret-induced flow in a vertical layer / N.I. Lobov, T.P. Lyubimova // *Comptes Rendus - Mecanique*. – 2013. – Vol. 341, №4-5. – P. 393-398.
354. Глухов, А.Ф. Разделение смесей и тепломассоперенос в связанных каналах / А.Ф. Глухов, В.А. Демин, Г.Ф. Путин // *Письма в ЖТФ*. – 2008. – Том 34, вып. 17. – С. 45-51.
355. Глухов, А.Ф. Осредненная стационарная конвекция бинарной смеси в связанных каналах при наличии высокочастотных вибраций / А.Ф. Глухов,

- В.А. Демин // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2009. – № 6. – С.160-164.
356. Глухов, А.Ф. Тепловая конвекция магнитной наносuspension в узких каналах / А.Ф. Глухов, В.А. Демин, Е.А. Попов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2013. – № 1. – С. 41 – 51.
357. Демин, В.А. Конвективные сепараторы / В.А. Демин // Прикладная физика. – 2013. – № 4. – С. 60 - 67.
358. Гершуни, Г.З. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного течения жидкости в горизонтальном слое / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, В.М. Мызников // ПМТФ. – 1974. – № 1. – С. 95-100.
359. Гершуни, Г.З. Устойчивость плоскопараллельного конвективного течения жидкости в горизонтальном слое относительно пространственных возмущений / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, В.М. Мызников // ПМТФ. – 1974. – № 5. – С. 145-147.
360. Hart, J. A note of the stability of low-Prandtl-number Hadley circulations / J. Hart // J. Fluid Mech. – 1983. – Vol. 132. – P. 271 – 281.
361. Kuo, H.P. Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from a side / H.P. Kuo, S.A. Korpela // Phys. Fluids. – 1988. – Vol. 31. – № 1. – P. 33–42.
362. Drummond, J.E. Natural convection in a shallow cavity / J.E. Drummond, S.A. Korpela // J. Fluid Mech. – 1987. – Vol. 182. – P. 543–564.
363. Gershuni, G.Z. Plane-parallel advective binary mixture flow stability in a horizontal layer / G.Z. Gershuni, A.V. Shalimov, V.M. Myznikov // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1994. – Vol. 37. – N. 15. – P. 2327-2342.
364. Gershuni, G.Z. Stability of advective binary mixture flows / G.Z. Gershuni, A.V. Shalimov, V.M. Myznikov // Ninth European symposium «Gravity-dependent phenomena in physical sciences». Berlin, Germany, 2-5 May. – 1995. – P. 307-308.

365. Ouriemi, M. Natural convection in a horizontal layer of a binary mixture / M. Ouriemi, P. Vasseur, A. Bahloul, L. Robillard // *Int. J. of Thermal Sciences*. – 2006. – Vol. 45. – P. 752-759.
366. Ghorayeb, K. Double diffusive convection in a vertical rectangular cavity / K. Ghorayeb, A. Mojtabi // *Phys. Fluids*. – 1997. – Vol.9. – P. 2339–2348.
367. Meca, E. Complex dynamics in double-diffusive convection / E. Meca, I. Mercader, O. Batiste, L. Ramirez-Piscina // *Theor. Comput. Fluid Dyn.* – 2004. – Vol. 18. – P. 231–238.
368. Boersma, W.H. Shear thickening (dilatancy) in concentrated dispersions / Willem H. Boersma, Jozua Laven and Hans N. Stein // *AIChE Journal*. – 1990. – Vol. 36, Iss. 3. – P.321-332.
369. Лобов, Н.И. Об адвективном течении в горизонтальном канале прямоугольного сечения / Н.И. Лобов, Д.В. Любимов, Т.П. Любимова, Р.В. Скуридин // *Гидродинамика: Сб. науч. трудов. Перм. Ун.-т.-Пермь*. – 1998. – Вып. 11. – С.167-175.
370. Moreau, R. *Magnetohydrodynamics* / R. Moreau – Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1990. – 313 p.
371. Любимова, Т.П. Устойчивость и нелинейные режимы адвективного течения двухкомпонентной смеси в плоском горизонтальном слое с теплоизолированными границами / Т.П. Любимова, Д.А. Никитин // XVI Зимняя школа по механике сплошных сред «Механика сплошных сред как основа современных технологий». Тез. докладов. Пермь. – 2009. – С. 245.
372. Никитин Д.А. Устойчивость и нелинейные режимы адвективных течений в слоях и каналах с адиабатическими границами: дис. ... канд. физ.-мат. наук.: 01.02.05 / Никитин Дмитрий Алесеевич. – Пермь, 2012. – 117 с.