

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД УРО РАН

На правах рукописи

Биллер Анастасия Михайловна

**МЕЗОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ МЕХАНИКИ  
МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛИМЕРОВ**

Специальность 01.02.04 —  
«Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Райхер Юрий Львович

Пермь — 2016

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение . . . . .</b>	<b>5</b>
Обзор литературы . . . . .	5
Общая характеристика работы . . . . .	14
<b>Глава 1. Магнитное взаимодействие частиц ферромагнетика . . . . .</b>	<b>23</b>
1.1 Постановка задачи магнитостатики . . . . .	24
1.1.1 Уравнения магнитостатики . . . . .	25
1.1.2 Энергия и силы магнитного взаимодействия . . . . .	27
1.1.3 Уединённая частица во внешнем магнитном поле . . . . .	28
1.2 Приближение линейного намагничивания точечных частиц . . . . .	29
1.2.1 Модель линейных диполей . . . . .	29
1.2.2 Линейные взаимодействующие диполи . . . . .	31
1.3 Задача магнитостатики для пары линейно намагничающихся частиц конечного размера . . . . .	34
1.3.1 Система уравнений задачи . . . . .	37
1.3.2 Проверка: одночастичная задача . . . . .	39
1.3.3 Вычисление магнитной энергии . . . . .	41
1.3.4 Решение системы уравнений для коэффициентов $g_{mn}$ . . . . .	43
1.3.5 Численное нахождение коэффициентов $g_{mn}$ и аппроксимация результатов . . . . .	46
1.3.6 Магнитное притяжение и отталкивание частиц . . . . .	48
1.3.7 Зависимость силы межчастичного взаимодействия от магнитной проницаемости . . . . .	51
1.4 Приближение нелинейного намагничивания точечных частиц . . . . .	54
1.4.1 Модель нелинейных диполей . . . . .	54
1.4.2 Нелинейные взаимодействующие диполи . . . . .	56
1.5 Численное решение задачи магнитостатики для пары нелинейно намагничающихся частиц конечного размера . . . . .	62
1.5.1 Алгоритм численного решения . . . . .	64

1.5.2 Силовое взаимодействие нелинейно намагничивающихся частиц . . . . .	66
1.6 Области применения приближений дипольного типа . . . . .	75
Заключение к Главе 1 . . . . .	77
<b>Глава 2. Упругое взаимодействие двух твёрдых частиц в гиперупругой среде . . . . .</b>	<b>78</b>
2.1 Постановка задачи нелинейной теории упругости . . . . .	79
2.2 Численное решение задачи о двух включениях в неограниченной гиперупругой среде . . . . .	84
2.2.1 Постановка задачи и алгоритм решения . . . . .	84
2.2.2 Решение задачи в трёхмерной постановке . . . . .	87
2.2.3 НДС матрицы в межчастичном зазоре: сопоставление с литературными данными . . . . .	90
2.2.4 Гипотеза об однородном деформировании матрицы между частицами . . . . .	92
2.2.5 Аппроксимация упругой энергии . . . . .	94
2.3 Численное решение задачи о двух включениях в конечном гиперупругом массиве . . . . .	97
2.3.1 Постановка задачи и алгоритм решения . . . . .	97
2.3.2 Стержневая модель для интерполяции упругой энергии .	100
2.3.3 Малые деформации конечного образца эластомера . . . . .	102
2.3.4 Аппроксимация упругой энергии . . . . .	105
Заключение к Главе 2 . . . . .	108
<b>Глава 3. Магнитомеханика двухчастичной модели магнитореологического эластомера . . . . .</b>	<b>109</b>
3.1 Линейно намагничивающиеся частицы в неограниченной гиперупругой среде . . . . .	109
3.1.1 Энергия пары намагничивающихся линейно частиц в неограниченной гиперупругой среде . . . . .	109
3.1.2 Гистерезис межчастичного расстояния при изменении внешнего магнитного поля . . . . .	111
3.2 Нелинейно намагничивающиеся частицы в конечном гиперупругом массиве . . . . .	113

3.2.1	Энергия пары намагничивающихся нелинейно частиц в конечном гиперупругом массиве . . . . .	113
3.2.2	Гистерезис межчастичного расстояния при изменении внешнего магнитного поля . . . . .	117
3.2.3	Условия существования магнитомеханического гистерезиса . . . . .	118
3.2.4	Магнитоиндукционная деформация образца магнитореологического эластомера: сопоставление с литературными данными . . . . .	122
3.2.5	Механические характеристики двухчастичной модели . .	125
	Заключение к Главе 3 . . . . .	130
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>131</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>133</b>

## Введение

Магнитореологический (MR) эластомер представляет собой полимерную матрицу, наполненную намагничающимися частицами. Такие композиты относят к «умным» материалам, поскольку их механические свойства можно контролировать изменять с помощью внешнего магнитного поля. В диссертации исследуется мезоскопическая магнитомеханика магнитореологических эластомеров на примере представительного элемента — двух намагничающихся частиц, заключённых в эластомер. Уникальные эффекты, демонстрируемые MR эластомерами при приложении магнитного поля, открывают широкие перспективы их использования в промышленных и биологических технологиях.

## Обзор литературы

### **Электро- и магниточувствительные жидкости как предшественники магнитореологических эластомеров**

Первыми технологически перспективными микрокомпозитами, структура и механические свойства которых обладают высокой чувствительностью к электромагнитным полям, были так называемые электрореологические (ЭР) жидкости [1; 2]. Хотя в научно–техническом тезауре термин «жидкость» прочно закрепился за этими средами, трактовать его буквально и рассматривать ЭР среды как однофазные жидкости допустимо лишь относительно макроскопического масштаба. В действительности это суспензии твёрдых частиц с характерным размером порядка единиц микрон в непроводящей жидкости. Компоненты суспензии подобраны таким образом, что диэлектрические проницаемости материала частиц и жидкой матрицы отличаются по величине. Под действием электрического поля в такой среде происходит обратимое агрегирование частиц, существенно изменяющее её макроскопическую гидродинамику и реологию.

Создание ЭР жидкостей и их быстрое продвижение в технологии явились мощным стимулом для развития теории систем с дипольными и мультипольными взаимодействиями. В результате был разработан целый ряд аналитических и численных моделей для описания как равновесных структур, формируемых частицами под влиянием электрических и механических полей [3–5], так и отклика ЭР жидкостей на переменные поля и нагрузки [6; 7].

Почти одновременно с возникновением ЭР жидкостей началась работа над их магнитными аналогами — текучими средами, структуру и реологию которых можно контролировать с помощью магнитного поля. Так появились магнитореологические (МР) суспензии, где твёрдую фазу составляют микрочастицы ферромагнитных металлов или магнитодиэлектриков (ферритов) [8]. МР суспензии оказались более удобными в применении, в частности потому, что медленно меняющееся магнитное поле не экранируется проводящими телами. Используя близкое формальное сходство уравнений магнито- и электростатики, теоретическая гидродинамика и реология МР сред позаимствовали многое из подходов, развитых для их ЭР аналогов.

Общий недостаток ЭР жидкостей и МР суспензий хорошо известен — это их склонность к расслоению/оседанию. В самом деле, для того чтобы обеспечить сильный отклик микродисперсной ЭР или МР системы на приложенное поле умеренной величины, частицы должны обладать значительными индуцированными моментами, то есть быть достаточно крупными: 1–10 мкм. Броуновское движение слабо влияет на такие частицы и, в частности, не предотвращает их гравитационное оседание (отрицательная плавучесть), обусловленное различием плотностей твёрдой фазы и жидкой матрицы. Расслоение ЭР и МР суспензий усиливается в неоднородных электрических и магнитных полях, поскольку влияние их градиентов на частицы аналогично действию дополнительной гравитационной силы.

Указанного недостатка лишены системы на основе немагнитных полимерных гелей, в которых частицы или химически «пришиты» к макромолекулярной сетке, или физически заключены в её ячейки. Именно так устроены композиты, называемые магнитореологическими полимерами и феррогелями [9].

## Синтез магнитореологических эластомеров

МР полимер состоит из трех базовых компонентов: эластомерной матрицы в качестве основы, намагничивающихся частиц как наполнителя и специальных добавок [10; 11]. В качестве наполнителя выбирают обычно частицы карбонильного железа (см. например [12–15]), производимые промышленным способом. Они имеют форму близкую к сферической, обладают высокой восприимчивостью, низкой остаточной намагченностью и высокой намагченностью насыщения [16]. Высокая магнитная восприимчивость и намагченность насыщения позволяют получать значительные МР эффекты в небольших полях [10], при этом высокая остаточная намагченность нежелательна, поскольку такие частицы остаются слипшимся даже после снятия магнитного поля, что делает МР эффекты необратимыми [14]. Размер магнитных частиц варьируется от нескольких единиц до сотен микрон [14; 17]. Наполнитель может содержать зёरна примерно одинакового размера или несколько разноразмерных фракций [15; 18; 19].

Подходящие для МР эластомеров матрицы обычно изготавливают из натурального или силиконового каучука и других подобных материалов (см. например [12; 16; 20]). Кроме того, в смесь полимера и частиц вносят различные добавки. Как правило используют силиконовое масло, улучшающее распределение внутренних напряжений в материале [21]. Компоненты будущего МР эластомера тщательно перемешивают и удаляют пузырьки воздуха в вакуумной камере [10; 22] или при нагреве [23]. Следующим этапом изготовления композита является отверждение полимера. Обычно для этого требуется температура более 120°C [23; 24], но существуют матрицы, вулканизирующиеся при комнатной температуре [22; 25]. Процесс может занимать менее одного часа [23; 24; 26], а может потребовать и несколько суток [25]. На упругие свойства получаемого эластомера влияют различные факторы: свойства полимера, используемого в качестве основы, степень его сшивки, концентрация частиц и их пространственное распределение, а также количество добавленного пластификатора. Типичная величина модуля упругости получаемых материалов 30–100 кПа [17; 27]. Возможно и значительное снижение упругих характеристик до величин менее 10 кПа, например за счёт увеличения доли силиконового масла или уменьше-

ния размера частиц наполнителя [28]. Существуют также МР эластомеры с высоким модулем, достигающим нескольких МПа [29].

МР эластомер, приготовленный в отсутствии внешнего магнитного поля, будет иметь статистически однородное распределение частиц наполнителя. Такие композиты называют изотропными. Посредством включения поля в процессе полимеризации смеси можно добиться формирования различных структур внутри неё. Обычно для этого требуются величина поля порядка 0.5 – 1 Тл [23; 24; 26; 30]. Частицы во внешнем поле намагничиваются и между ними возникают силы, стремящиеся организовать их цепочку, вытянутую вдоль силовых линий поля — конфигурацию с наименьшей магнитной энергией [17; 21]. Таким образом, при включении однородного внешнего поля в полимере на этапе отверждения можно сформировать протяженные цепочечные структуры [31]. МР эластомеры, имеющие внутренние структуры называют анизотропными.

## Магнитодеформационный эффект

Одним из уникальных свойств МР эластомеров является проявляемый ими магнитодеформационный эффект. Будучи внесённым во внешнее магнитное поле, образец эластомера деформируется, а при снятии поля возвращается в исходное состояние. Интерес к этому свойству МР эластомеров обусловлен перспективами их применения в принципиально новых приводах механизмов и искусственных мышцах [32; 33]. В первых экспериментальных работах в этом направлении [32; 34; 35] было обнаружено изменение формы образцов магниточувствительных композитов в неоднородном магнитном поле. Затем, магнитодеформационный эффект был получен и в однородных полях. В экспериментальных работах наблюдалось удлинение изотропных образцов композита [36; 37] и сжатие анизотропных [36; 38]. Результаты согласовались с теорией [39—41] и численным моделированием [37; 42], выполненными в рамках континуального подхода, рассматривающего МР эластомер как сплошную среду, обладающую как упругими, так и магнитными свойствами.

Следует отметить, что континуальный подход не рассматривает мезоструктуру МР эластомера, и для оценки её влияния на свойства и поведение

композита исследователи используют другие методы. Например, численное моделирование в работе [42] показало, в чём состоит принципиальное отличие в поведении образцов МР эластомера с изотропной и анизотропной внутренней структурой. Были рассмотрены два варианта композита: случайное распределение, при котором все частицы отделены друг от друга и случайное распределение небольших агрегатов. При намагничивании образцы первого типа демонстрировали сжатие в направлении поля. В них преобладает взаимное притяжение частиц по направлению поля. Образцы второго типа при намагничивании увеличивались в направлении поля. В них ведущим механизмом является перестройка и поворот кластеров, стремящихся расположиться вдоль силовых линий поля. Сравнение полученных результатов с экспериментом наталкивает на мысль о том, что в неструктурированных образцах, сформированных в отсутствие поля, содержится достаточно много небольших агрегатов частиц перестраивающихся и поворачивающихся под действием магнитного поля. Этим и вызвано общее растяжение композита. В структурированных же образцах основной вклад в изменение микроструктуры вносит притяжение между частицами в одной цепочке, и отталкивание соседних цепей друг от друга, что проявляется в сжатии материала.

Для изучения магнитодеформационного эффекта полезен так называемый микроструктурный подход. В отличие от континуального подхода он учитывает внутреннюю структуру композита и взаимодействие частиц на мезоуровне. Так, в работе [43] показано, что МР эластомера со статистически однородным (в целом) распределением частиц, но отличающиеся типом ближнего порядка, демонстрируют качественно различный деформационный отклик на приложенное магнитное поле. Относительно недавно появились работы, стремящиеся проанализировать влияние как мезоструктуры, так и формы образца на его деформацию в поле [44; 45]. Отметим, что во всех этих теоретических моделях, построенных для описания магнитного взаимодействия частиц, используется дипольное приближение.

Результаты подобных исследований весьма ценные, однако их экспериментальная проверка представляет серьезные сложности. В настоящее время не существует способа синтеза МР эластомера с точно заданной пространственной структурой, а морфологический анализ готовых образцов не очень достоверен [46]. Выходом могло бы служить создание крупных образцов композита, в ко-

торых размер частиц составляет несколько миллиметров, а не микрометров. В магнитном отношении микронные и миллиметровые частицы эквивалентны: и те, и другие многодоменны, что определяет их магнитомягкое поведение. К сожалению, подобных работ очень мало. Из примеров укажем на эксперименты [47], где авторы использовали две частицы с диаметром 20 мм, и провели измерения напряжений, возникающих в полимерной матрице в зазоре между частицами. Отметим также работу [48], в которой был изготовлен образец МР эластомера с частицами, расположенными в узлах кубической решётки. Под действием внешнего поля образец сжался, что соответствует результатам теоретического анализа [49], выполненного в рамках микроструктурного подхода.

## **Упрочнение магнитореологических эластомеров в магнитном поле**

Другое многообещающее свойство МР эластомеров — обратимое изменение упругих характеристик во внешнем магнитном поле. Первое подробное исследование влияния поля на механические характеристики магниточувствительных композитов было проведено в 90-х годах. В работе [50] механические свойства предварительно структурированных в магнитном поле композитов из силиконовой резины испытывались на сдвиг. Образец продемонстрировал значительное увеличение сдвигового модуля в приложенном магнитном поле. Для объяснения подобного изменения механических свойств композита была предложена квазистатическая модель, основанная на рассмотрении дипольного взаимодействия частиц в идеальной цепочке.

Значительная часть экспериментальных работ по исследованию МР эластомеров посвящена их упругим свойствам в условиях сдвиговых деформаций в статическом и динамическом режимах [14; 17; 24; 28; 51–55]. Это связано с идеей их применения в качестве адаптивных демпферов [16; 23; 52] по аналогии с применением МР жидкостей. Здесь основной изучаемой характеристикой МР эластомера является величина магнитореологического эффекта — относительного изменения модуля сдвига при наложении магнитного поля [16]. Показано, что образцы, структурированные в магнитном поле при изготовлении, демонстрируют больший эффект, по сравнению с изотропными композитами [50]. На-

правление усилия сдвига при этом перпендикулярно вектору внешнего поля, который, в свою очередь, приложен параллельно выстроенным внутри эластомера цепочечным агрегатам. Различие между анизотропными и изотропными образцами связано с тем, что внесение в магнитное поле смеси полимер–частицы до её отверждения способствует формированию внутри будущего композита цепочечных агрегатов, которые и обусловливают МР эффект. Чем ближе такой агрегат к идеальной цепи, в которой частицы выстроены вдоль одной прямой с минимальными зазорами, тем сильнее магнитное взаимодействие внутри него, и тем большую работу необходимо совершить для сдвига частиц [50]. Очевидно, что в изотропном композите формирование таких цепочечных агрегатов значительно затруднено по сравнению с предварительно структурированными материалами. К росту магнитореологического эффекта ведёт и выбор наполнителя с частицами большего диаметра или большей разнородности по размерам, а также выбор полимера с меньшим модулем упругости [14; 17; 53; 54]. Кроме того, положительно влияет и увеличение концентрации частиц наполнителя [12; 56; 57].

Теоретические исследования упрочнения МР эластомеров подтверждают выводы экспериментов [24; 43; 50; 58; 59]. Построенные модели опираются на опыт предыдущих исследований МР жидкостей и цепочечных структур частиц. Чаще всего модуль сдвига определяется через свободную энергию, записанную как функцию, изменяющуюся межчастичного расстояния. Расширения этого подхода использовались в работе [24] для учёта взаимодействия всех частиц в бесконечной цепи, а также взаимодействия между цепями [42; 43]. Результаты одной из последних работ, в которой сделана попытка учесть мезоструктуру композита при его моделировании, подтверждают рост сдвигового модуля анизотропных образцов[59].

Упрочнение МР эластомеров в режиме растяжение–сжатие так же активно исследуется. В экспериментах образцы демонстрируют значительное увеличение модуля Юнга во внешнем магнитном поле [12; 15; 51; 57]. Аналогично испытаниям на сдвиг, при растяжении или сжатии анизотропные образцы демонстрируют больший рост упругого модуля, по сравнению с изотропными. Наибольший эффект наблюдается при совпадении направлений анизотропии композита, вектора магнитного поля и вектора приложенного усилия [31]. Несмотря на хорошие результаты, полученные в отношении упрочнения композитов при

сдвиге, простая дипольная модель предсказывает уменьшение модуля Юнга под действием поля, что противоречит результатам экспериментов. Это расхождение было продемонстрировано в работе [43] с помощью теоретической модели, описывающей структуру композита в виде вариантов прямоугольной пространственной решётки. Предполагается, что причины неудач теоретических подходов, описывающих мезоструктуру МР эластомера, заключаются в излишней идеализации анизотропии композита, в рамках которой цепочки частиц представляются идеально ровными [43; 59]. Этот вывод подтверждается в работе [49], где с помощью теоретической модели, рассматривающей различные статистически однородные распределения частиц, удалось получить эффект упрочнения в образцах с гексагональной решёткой, а моделирование «волнообразных» цепочек в исследовании [59] дало результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом.

## **Основные приемы построения теоретических моделей магнитореологических эластомеров и их недостатки**

Намагничающиеся частицы внутри композиционного материала делают его поведение и свойства зависимыми от приложенного магнитного поля. К настоящему времени подтверждена важнейшая роль межчастичных взаимодействий в различных полезных эффектах, демонстрируемых МР эластомерами. Согласно результатам теоретических исследований, небольшое изменение в пространственном распределении частиц может приводить к качественно различному поведению моделируемого образца композита [42; 49; 59]. Таким образом, критически важным становится понимание процесса взаимодействия частиц в микроструктурах МР эластомера. Это взаимодействие носит сложный магнитоупругий характер. Внешнее поле поляризует частицы, и между их индуцированными магнитными моментами возникают магнитные силы притяжения/отталкивания, которые стремятся организовать частицы в структуру, отвечающую минимуму магнитостатической энергии. Однако в МР полимере этой тенденции противодействуют упругие силы, которые возрастают по мере удаления частиц от их исходных положений внутри сетки. Сформированная магнитны-

ми частицами сетка стремится сохранить свою конфигурацию и это стремление пропорционально интенсивности приложенного поля. В то же время, чем выше степень спшивки полимерной матрицы, тем выше её модуль упругости, а значит, тем лучше она может сопротивляться воздействию частиц. Таким образом, чтобы найти макроскопический (наблюдаемый) отклик МР полимера на приложенное поле, необходимо выяснить, как устанавливается баланс магнитных и упругих сил в этой системе на мезоскопическом уровне.

Рассмотрим подробнее приемы, используемые в теоретических моделях МР эластомеров. В первых работах, концентрировавших внимание на сдвиговых деформациях анизотропных эластомеров, упругое взаимодействие частиц не рассматривалось вовсе [50]. Магнитные явления, возникающие в цепочках частиц, описывались дипольной моделью взаимодействия, представляющей частицы в виде точечных магнитных моментов. Эта модель продолжает использоваться в теоретических работах по МР эластомерам, что связано с её простотой и удобством при рассмотрении ансамблей частиц, представляющей их в виде суммы парных взаимодействий. Однако это упрощение накладывает ограничение на межчастичные расстояния, требуя, чтобы они были много больше размера частиц. В связи с этим предпринимаются попытки выработать простой метод точного и быстрого расчёта взаимодействий в небольших кластерах частиц. Такой способ был предложен, например, в работе [60] для парамагнитных частиц с невысокой восприимчивостью. Необходимо отметить, что задача о магнитостатическом взаимодействии двух сферических парамагнитных частиц имеет аналитическое решение, представляющее силу и энергию их взаимодействия в виде бесконечного ряда по обратным степеням безразмерного межчастичного расстояния [61; 62]. Типичные же частицы наполнителя МР эластомера обладают высокой восприимчивостью и намагничиваются с насыщением, так что они могут считаться парамагнитными, т.е. намагничающимися по линейному закону, лишь в небольших магнитных полях. Учёт намагниченности насыщения производится в некоторых теоретических моделях. Иногда закон намагничивания представляется упрощённо в виде кусочно-непрерывной функции [40] или используется приближенная формула, основанная на общих представлениях о распределении намагниченности по объёму частицы [63]. Однако есть ряд работ, в которых закон намагничивания записывается честно, обычно с использованием формулы Фрёлиха–Кенелли — непрерывной нелинейной функции, описыва-

ющей зависимость намагниченности частицы от напряжённости поля внутри неё (см. например [49; 64; 65]).

Упругие явления, возникающие в МР эластомерах, часто рассматривают-ся в приближении малых деформаций (см. например [43; 46; 52], что вполне обосновано для континуальных подходов, но сильно ограничивает перспективы моделирования в рамках микроскопического подхода. Частицы наполнителя МР эластомеров значительно жестче матрицы [59] и под действием магнитных сил, возникающих между ними в магнитном поле, способны сильно деформи-ровать её. Снимки образцов композита, полученные с помощью оптического микроскопа, подкрепляют это утверждение [17]. Сложная геометрия компози-та при различных конфигурациях частиц внутри него учитывается только в исследованиях, использующих численное моделирование [46; 48]. Обзор теоре-тических работ, посвящённых МР эластомерам, показывает, что упругий аспект взаимодействия частиц наполнителя в матрице МР эластомера изучен не доста-точно.

## Общая характеристика работы

Благодаря своим уникальным свойствам магниточувствительные компо-зиты уже нашли свое применение в промышленности в качестве адаптивных демпферов, датчиков, микроманипуляторов, а также деталей приборов, управ-ляемых или настраиваемых бесконтактно [16; 31]. Для новых магнитореологи-ческих (МР) эластомеров исследователи видят также широкие возможности применения в биологии и медицине [66]. Однако теоретические модели, при-званные достоверно предсказывать поведение и свойства МР эластомеров в зависимости от их мезоструктуры, зачастую содержат значительные упроще-ния. Это является одной из явных причин расхождения между результатами экспериментальных и теоретических исследований.

Анализ теоретических работ, посвященных поведению и свойствам МР эластомеров, показывает, что пространственное распределение частиц являет-ся определяющим для эффектов магнитоиндукционных деформации и упроч-нения [46; 49; 59; 67]. В связи с этим принципиально важно располагать кор-

ректным описанием как магнитного, так и упругого взаимодействия частиц в полимерной матрице. При этом решение связанной задачи магнитоупругости представляет значительные трудности, в особенности при рассмотрении многочастичных ансамблей. В стремлении справиться с решением исследователи зачастую следуют интуитивным представлениям, оставляя вопрос о применимости использованных критериев открытым.

Одним из таких удобных, но нечётко определённых упрощений является дипольная модель магнитного взаимодействия частиц. Она позволяет трактовать магнитные силы, действующие на частицы, как парное взаимодействие, что значительно облегчает рассмотрение ансамблей. Приближение дипольного взаимодействия предполагает, что расстояния между частицами значительно превышают их собственные размеры, и поэтому напряжённость поля и намагниченность внутри каждой частицы можно считать однородными. В результате, частица заменяется материальной точкой, несущей магнитный момент. С целью получить наибольшие эффекты МР эластомеры изготавливают обычно с достаточно высоким объёмным содержанием частиц: в диапазоне от 10 до 30 об.% (см. например [17; 47]). В структурированном композите средней концентрации (10%), изученном в работе [47], зазор между частицами составил величину меньшую чем радиус. При увеличении объёмного содержания наполнителя, структура, образуемая частицами внутри эластомера, усложняется: возникают тяжи, состоящие из нескольких цепочек [68], и разветвлённые 3D структуры [54; 55; 69]. Очевидно, что при таком расположении частиц поле внутри композита, складывающееся из приложенного извне и полей, создаваемых намагничающимися частицами, существенно неоднородно. А значит, неоднородным является и поле внутри самих частиц. Очевидно, что в этих условиях дипольное приближение непригодно.

Другое часто используемое приближение заключается в гипотезе о линейном законе намагничивания частиц. Типичные МР эластомеры наполнены микронными дисперсиями ферритов или ферромагнетиков. Примером служит карбонильное железо с размером частиц 1–10 мкм, см., например, [13; 14; 50; 70]. Этот материал является магнитомягким; он характеризуется высокой начальной восприимчивостью, а его намагниченность насыщается в полях величиной в несколько сотен кА/м [71]. Таким образом, микрочастицы железа в МР композите не имеют собственных магнитных моментов, а приобретают их лишь под

действием приложенного поля. В слабом поле магнитный момент частицы, действительно, растёт пропорционально величине поля, однако в сильных полях (режим насыщения) он стремится к предельному значению, то есть становится постоянным. Неоднородность поля внутри частиц, вызванная их близким соседством друг с другом, приводит к значительному росту намагниченности в зонах потенциального контакта частиц. Частицы, таким образом, могут насыщаться в отдельных областях, близких к точке контакта [50; 63], несмотря на то, что внешнее поле невелико. Из этих соображений вытекает необходимость учёта нелинейного закона намагничивания. В работах, которые рассматривают насыщение намагниченности частиц, принято использовать соотношение Фрёлиха-Кеннели (например [72–74]), которое хорошо описывает закон намагничивания железа.

Ещё одно допущение, к которому прибегают исследователи МР эластомеров — линейный закон упругости для эластомерной матрицы. Как показывают эксперименты, соотношение напряжений и деформаций типичных материалов, использующихся как основа МР эластомеров, может считаться линейным вплоть до 50% относительной деформации испытываемого образца [17; 28]. Между тем, твёрдые частицы, движимые пондеромоторными силами в мягкой матрице, способны приводить к её значительной деформации, превышающей предел применимости линейного приближения. В этой связи учёт нелинейного характера упругости эластомерной матрицы композита [75], очевидно, необходим. Как известно, нелинейно упругие материалы демонстрируют упрочнение при больших деформациях и, следовательно, нелинейность упругих свойств эластомера может значительно повлиять на характер перераспределения частиц в матрице под действием поля. По этой причине гораздо более оправдано использовать в качестве определяющего соотношения для матрицы МР эластомера модель Муни–Ривлина [47].

Теоретики, стремящиеся учесть мезоструктуру МР эластомеров при описании их свойств, часто пренебрегают нелинейностью геометрии рассматриваемой системы. Очевидно, что при смещении частиц навстречу друг другу наибольшие напряжения концентрируются в той области матрицы, которая находится между ними. Деформация эластомера в зазоре между частицами лишь весьма упрощено может представляться как однородная деформация стерж-

ня определённого сечения, поскольку частицы наполнителя чаще всего имеют (квази)сферическую форму.

Важность межчастичных взаимодействий для моделирования и предсказания свойств МР эластомеров диктует необходимость располагать точным представлением о магнитных и упругих силах, возникающих в композите на мезоскопическом уровне. Две частицы в некотором образце полимера — это наименьший представительный элемент МР эластомера [69], являющийся носителем свойств композита как целого. Кроме того, гипотеза парного взаимодействия является известным приёмом, с помощью которого строятся модели сложных многоуровневых сред (см. например [44; 47; 60]). Укажем, например, на подход Фойгта.

Магнитоупругое взаимодействие частиц в матрице эластомера — это совместный, связанный механизм. Однако в некоторых случаях возможно раздельное решение силовой задачи магнитостатики для двух намагничающихся частиц и задачи о конечных деформациях упругой матрицы, созданной их перемещениями. Объединение этих двух решений позволяет получить представление о поведении рассматриваемой системы и сделать некоторые выводы о влиянии межчастичных взаимодействий на макроскопические свойства МР эластомера в целом.

Из приведённых выше рассуждений вытекает **Цель** настоящего диссертационного исследования: теоретическое исследование магнитного и упругого взаимодействия двух намагничающихся частиц в эластомерной матрице. В рамках поставленной цели были сформулированы следующие **задачи**:

1. Найти с высокой точностью распределение магнитного поля и намагнченности в системе из двух сферических частиц, намагничающихся: по линейному и по нелинейному законам.
2. Рассчитать энергию и силы магнитного взаимодействия в такой паре частиц.
3. Определить критерии применимости приближенных моделей для описания магнитного взаимодействия пары частиц.
4. Найти в рамках нелинейной теории упругости напряжённо-деформированное состояние гиперупругой матрицы, неограниченной или конечной, содержащей два абсолютно твёрдых сферических включения.
5. Вычислить энергию упругого взаимодействия такой пары включений.

6. Изучить поведение двух намагничающихся частиц в эластомерной матрице под действием внешнего поля.

### **Научная новизна**

В настоящей диссертационной работе впервые в полной постановке получено решение задачи о магнитных силах, связывающих две сферические частицы, намагничающиеся нелинейно. Для решения этой задачи был разработан алгоритм и на его основе создан программный модуль. Для случая линейно намагничающихся частиц решение задачи получено с точностью, необходимой для описания частиц с высокой восприимчивостью, что характерно для наполнителя МР эластомеров.

Установлены рамки применения приближенных дипольных моделей.

Предложены интерполяционные формулы, которые описывают энергию гиперупругой среды, деформируемой двумя абсолютно твёрдыми включениями.

Исследовано магнитоупругое поведение модельного образца эластомера с двумя намагничающимися частицами.

Предложено теоретическое объяснение механизма образования, так называемых магнитных «скрепок» — плотных кластеров частиц, возникающих при приложении поля.

На мезоскопическом уровне оценено влияние взаимодействия частиц на эффективные характеристики композиционного материала.

**Практическая значимость** работы заключается в построении мезоскопических моделей для представительного элемента МР эластомера, позволяющих учесть влияние структуры композита на его макроскопические свойства. Решения магнитостатической и упругой задач вместе с предложенными интерполяционными формулами дают возможность корректного выбора упрощений при описании магнитоупругого взаимодействия магнитомягких частиц в гиперупругой матрице.

### **Методология и методы исследования**

В рамках исследований используются в основном численные методы решения краевых задач и задач оптимизации (метод конечных элементов, методы Нелдера–Мида и Пауэлла), реализованные средствами программных пакетов `esys.escript`, `sfepy` и `fenics`, написанных для языка `Python`.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Результаты численного решения магнитостатической задачи для пары намагничивающихся сферических частиц, расположенных на произвольном расстоянии друг от друга, для двух вариантов закона намагничивания: линейного (парамагнетик) и нелинейного (ферромагнетик); расчёт сил магнитного взаимодействия частиц, выполненный на основе этого решения; интерполяционная формула для квазианалитического расчёта сил в случае линейно намагничивающихся частиц;
2. Сравнительный анализ различных приближений дипольного типа для расчёта межчастичных магнитных сил, установление критериев и областей применимости стандартных моделей, обоснование и формулировка новой модели, дополнительной к известным;
3. Результаты численного решения задачи о взаимных перемещениях пары твёрдых частиц, находящихся в гиперупругой среде (эластомер); расчёт энергии, накапливающейся в системе при конечных деформациях; интерполяционная формула для квази-аналитического расчёта в случае эластомера Муни-Ривлина;
4. Результаты исследования механического поведения системы из двух намагничивающихся частиц, погруженных в эластомерный массив; доказательство бистабильности такой системы; характеристики эффекта магнитомеханического гистерезиса;
5. Выявление принципиальной роли магнитомеханического гистерезиса, существующего на мезоскопическом уровне, как причины уникальных макроскопических эффектов, проявляемых реальными магнитореологическими эластомерами в ответ на приложение магнитного поля и механической нагрузки.

**Достоверность** полученных результатов основывается на корректной математической постановке задач, применении общепризнанных численных методов, выполнении тестовых расчётов, сопоставлении данных численных и аналитических расчётов в предельных случаях, а также сравнении данных, полученных в рамках разных подходов, в том числе другими авторами.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях: Всероссийской конференции молодых учёных «Неравновесные переходы в сплошных средах» (Пермь, 2011 г.), XVIII и XIX Зимних школах по механике сплошных сред (Пермь, 2013 и 2015 гг.).

VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твёрдого тела (Ростов-на-Дону, 2013), Moscow International Symposium on Magnetism (Москва, 2014), 14 International Conference on Electrorheological Fluids and Magnetorheological Suspensions (Гранада, Испания, 2014), 2 International Summer School and Workshop “Complex and Magnetic Soft Matter Systems: Physico-Mechanical Properties and Structure” (Дубна, 2014); Работа также представлялась и обсуждалась на семинарах: кафедры механики композиционных материалов и конструкций ПНИПУ (рук. проф. А. Н. Аношкин), кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ (рук. проф. П.В. Трусов) и Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. акад. РАН В.П. Матвеенко).

**Личный вклад автора.** Постановка задач, результаты исследовании и их интерпретация обсуждались с руководителем работы Ю.Л. Райхером. Представленные в работе теоретические модели были разработаны автором совместно с Ю.Л. Райхером - для главы 1 и автором совместно с О.В. Столбовым - для глав 2 и 3. Подготовка компьютерных кодов проводилась совместно с О.В. Столбовым. Все данные компьютерного моделирования получены лично диссертантом и являются определяющими. Подготовка публикаций проводилась совместно с соавторами.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 14 работ [76–89], 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [77; 79–81], 1 в сборнике материалов конференций, 8 тезисов конференций и 1 свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

**Объём и структура работы.** Диссертация состоит из введения, которое включает обзор современного состояния исследований в рассматриваемой области, трёх глав, заключения, приложения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 143 страницы с 55 рисунками и 7 таблицами. Список литературы содержит 108 наименований.

**Введение** к диссертации начинается с обзора современного состояния исследований магнитореологических (МР) эластомеров. Затем обосновывается актуальность настоящего исследования, отмечаются основные проблемы построения теоретических моделей МР эластомеров и формулируются цель и задачи работы. Основные полученные результаты, их новизна, значимость и достовер-

ность также приведены во введении. Эту часть завершают положения, выносимые на защиту, и описание структуры диссертации.

**Первая глава** диссертации посвящена задаче магнитного взаимодействия двух сферических частиц. В начале главы производится общая постановка задачи магнитостатики. В разделах 1.2 и 1.4 представлены приближенные дипольные модели описания магнитного взаимодействия в случае линейного и нелинейного намагничивания частиц соответственно. Раздел 1.3 содержит точное решение задачи магнитостатики в случае линейного намагничивания частиц, а раздел 1.5 — в случае намагничивания частиц с насыщением. В этих разделах представлены полученные в результате расчётов силы магнитного взаимодействия между частицами, а также их сравнение с силами, предсказываемыми дипольными моделями. Расширение зоны притяжения частиц за счёт уменьшения области отталкивания обосновано и проиллюстрировано. Кроме того, в разделе 1.3 предложена интерполяционная формула для энергии пары линейно намагничающихся частиц. В заключение приводится диаграмма применимости дипольных моделей для описания взаимодействия намагничающихся частиц.

**Вторая глава** диссертации содержит решение задачи о конечных деформациях нелинейноупругой среды двумя абсолютно твёрдыми сферическим включениями. Общая постановка задачи механики деформируемого твёрдого тела представлена в разделе 2.1. Далее в разделе 2.2 рассматривается бесконечная эластомерная среда, а в разделе 2.3 — конечный образец эластомера. Массив упругой энергии, полученный в результате вычислений интерполируется с помощью эвристических схем. Алгоритмы построения интерполяционных формул для описания энергии деформируемой среды также приведены в этих разделах.

**Третья глава** объединяет результаты, полученные в первых двух. Она содержит результаты исследования суммарной энергии системы из пары линейно намагничающихся частиц, помещённых в неограниченную эластомерную среду (раздел 3.1), и системы нелинейно намагничающихся частиц в конечном образце (раздел 3.2). Обнаружено, что обе рассмотренные системы обладают бистабильностью в определённом диапазоне значений внешнего магнитного поля. Прослежен механизм образования плотного кластера частиц по гистерезисному сценарию, оказывающий значительное влияние на изменение внутренней

структуры МР эластомера. Подраздел 3.2.5 посвящён попытке оценки влияния обнаруженного механизма на эффективные упругие свойства рассматриваемого модельного образца.

**В заключении** диссертации изложены основные результаты диссертационного исследования и определены перспективные направления дальнейшей разработки темы.

## Глава 1. Магнитное взаимодействие частиц ферромагнетика

Наполнителями магнитореологических (МР) суспензий и эластомеров являются микрочастицы магнитомягкого (намагничающегося) ферромагнетика. Примером является карбонильное железо с размером частиц 1–10 мкм, см., например, [13; 14; 50; 70]. Этот материал является магнитомягким; он характеризуется высокой начальной восприимчивостью, а его намагниченность насыщается в полях величиной в несколько сотен кА/м [71]. Таким образом, микрочастицы железа в МР-композите не имеют собственных магнитных моментов, а приобретают их лишь под действием приложенного поля. В слабом поле магнитный момент частицы растёт пропорционально величине поля, а в сильных полях (режим насыщения) стремится к предельному значению, то есть становится постоянным.

Отдельная частица из ферромагнетика в присутствие внешнего поля намагничивается практически однородно. Находясь в ансамбле, частица испытывает действие магнитных полей соседей, и в ней возникает неоднородное распределение намагниченности, существенно влияющее на межчастичные силы притяжения-отталкивания. Для описания взаимодействия частиц в присутствие статического поля наиболее часто используются модели точечных диполей. Это приближение предполагает, что расстояния между частицами значительно превышают их собственные размеры, так что напряжённость поля и намагниченность внутри каждой частицы можно считать однородными. По этой причине все дипольные модели, в которых намагниченные частицы конечного размера заменяются точечными магнитными моментами, заведомо являются приближёнными. Однако они широко используются из-за своей простоты.

Итак, целью настоящей главы является уточнение одного из главных приближений магнитомеханики МР эластомеров. А именно: большинство моделей МР полимеров исходят из того, что магнитное взаимодействие частиц ферромагнетика, то есть чувствительной к полю компоненты материала, допустимо рассматривать, полагая их магнитные моменты точечными [37; 50; 59].

Для мезоскопической механики МР полимеров задача о взаимодействии, которое возникает между двумя частицами из магнитомягкого ферромагнетика в постоянном внешнем поле, имеет фундаментальное значение. Хорошо извест-

но решение, полученное в парамагнитном приближении, когда намагниченность прямо пропорциональна полю [3; 4; 7; 60; 62]. Однако магнитный отклик феррочастиц, которыми наполнены реальные МР системы, можно считать линейным только в относительно слабых полях. С возрастанием поля приращения намагниченности уменьшаются, стремясь к нулю, когда ферромагнетик входит в режим насыщения. Поскольку энергия взаимодействия частиц пропорциональна квадрату их магнитных моментов, ясно, что для описания межчастичных сил (они определяются производными) в широком диапазоне полей необходимо построить выражение для парной энергии, учитывающее нелинейность намагничивания ферромагнетика.

## 1.1 Постановка задачи магнитостатики

Рассмотрим две магнитомягкие сферические частицы радиуса  $a$  из намагничающегося материала с изотропной относительной проницаемостью  $\mu_m$ . Частицы находятся в бесконечном изотропном массиве с относительной проницаемостью  $\mu$ . Из центра частицы 1 в центр частицы 2 проведён вектор  $\mathbf{l}$ , его длину обозначим  $l = |\mathbf{l}|$ . Система помещена в однородное магнитное поле с напряжённостью  $\mathbf{H}_0$ , направленное под углом  $\gamma$  к межцентрому вектору  $\mathbf{l}$ . Уединённая частица, вследствие отличия проницаемостей  $\mu_m$  и  $\mu$ , намагничивается однородно, приобретая собственный магнитный момент, и становится источником неоднородного поля, которое действует на окружающую её среду. Если же по соседству находится другая частица, то поле, создаваемое первой, влияет на вторую, и наоборот. Взаимная поляризация создаёт в них неоднородную намагниченность, так что магнитный момент  $\mathbf{m}_k$  каждой частицы обуславливается не только  $\mathbf{H}_0$ , но также длиной и ориентацией вектора  $\mathbf{l}$ . Этот эффект рас тёт при уменьшении расстояния между частицами. Из соображений симметрии (перестановочность частиц 1 и 2) можно сделать вывод о том, что магнитные моменты частиц  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  должны быть равны по абсолютной величине и иметь одинаковые по абсолютной величине проекции на направление поля. В условиях неоднородного распределения намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  внутри частиц для нахождения  $\mathbf{m}_k$  необходимо вычислить соответствующий объёмный интеграл

от  $\mathbf{M}$ . Отсюда следует, что магнитный момент частицы зависит от приложенного поля не явным образом, а как функционал от решения магнитостатической задачи.

### 1.1.1 Уравнения магнитостатики

В наиболее общем виде постановка задачи магнитостатики включает уравнения Максвелла и граничные условия. Запишем уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции, а  $\mathbf{H}$  — вектор напряжённости магнитного поля. Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  представляется суммой векторов напряжённости поля  $\mathbf{H}$  и намагниченности  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}).\tag{1.2}$$

Здесь  $\mu_0$  магнитная постоянная равная  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м. В непроводящей среде магнитное поле  $\mathbf{H}$  является потенциальным (см. уравнения Максвелла (1.1)), а значит, напряжённость может быть выражена в терминах магнитного скалярного потенциала  $\psi$ :

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi,\tag{1.3}$$

В отсутствие магнитного поля частицы из ферромагнетика многодоменные, вследствие чего магнитный момент у них отсутствует. В относительно слабых полях главным механизмом намагничивания является рост «выгодных» доменов. В этом режиме намагничивание материала частицы можно, хотя и грубо, аппроксимировать линейным законом  $\mathbf{M} \sim \mathbf{H}$ . В полях умеренной величины рост  $M(H)$  существенно замедляется, а затем происходит насыщение:  $M \rightarrow M_s = \text{const}(H)$ . Таким образом, в общем случае намагниченность ферро-

магнетика нелинейно зависит от напряжённости поля:

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \chi(H)\mathbf{H}, \quad (1.4)$$

где  $\chi$  — магнитная восприимчивость материала частиц. Используя определение магнитной индукции (1.2), перепишем первое из уравнений Максвелла (1.1) в виде:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})) = \\ &= \mu_0 \nabla \cdot (\chi(H)\mathbf{H}) = \mu_0 (\mathbf{H} \cdot \nabla \chi(H) + \chi(H) \nabla \cdot \mathbf{H}) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Преобразуем:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \nabla \ln(\chi(H)). \quad (1.6)$$

Затем, выразим напряжённость поля через магнитный скалярный потенциал  $\psi$  по формуле (1.3) и в результате получим уравнение задачи магнитостатики в терминах магнитного скалярного потенциала:

$$\Delta \psi = -\nabla \ln \chi(|-\nabla \psi|) \cdot \nabla \psi, \quad (1.7)$$

конкретный вид которого определяется зависимостью магнитной проницаемости  $\alpha$  материала от напряжённости поля.

Запишем граничные условия задачи магнитостатики:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\tau^{(i)} \Big|_{\Gamma_k} &= \mathbf{H}_\tau^{(e)} \Big|_{\Gamma_k}, \\ \mathbf{B}_n^{(i)} \Big|_{\Gamma_k} &= \mathbf{B}_n^{(e)} \Big|_{\Gamma_k}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $\mathbf{B}_n$  — нормальная составляющая вектора магнитной индукции, а  $\mathbf{H}_\tau$  — тангенциальная компонента вектора напряжённости на поверхности  $k$ -ой частицы  $\Gamma_k$ . Индекс  $(i)$  обозначает вектор внутри намагничивающейся области,  $(e)$  — вне её. Выражая магнитную индукцию и напряжённость поля через магнит-

ный скалярный потенциал  $\psi$  получим

$$\psi^{(i)} \Big|_{\Gamma_k} = \psi^{(e)} \Big|_{\Gamma_k}, \quad \mu_m \left( -\nabla \psi^{(i)} \right) \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_k} = \mu \frac{\partial \psi^{(e)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_k}, \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{n}$  - внешняя нормаль к поверхности частицы.

Уравнения (1.7) и (1.9) образуют постановку задачи магнитостатики в терминах магнитного скалярного потенциала. Из физических соображений необходимо добавить два условия  $\psi(\infty) = 0$  и  $\psi < \infty$ .

### 1.1.2 Энергия и силы магнитного взаимодействия

Найденный в результате решения задачи (1.7), (1.9) потенциал поля  $\psi$  позволяет вычислить любые другие характеризующие систему магнитные величины. Векторные характеристики магнитного поля: напряжённость, намагченность и магнитная индукция, естественным образом получаются из формул (1.3), (1.4) и (1.2) соответственно. Магнитный момент частицы  $\mathbf{m}_k$  находится по интегральной формуле:

$$\mathbf{m}_k = \int_{V_k} \mathbf{M} dV = \int_{V_k} \chi \mathbf{H} dV = - \int_{V_k} \chi \nabla \psi^{(i)} dV, \quad (1.10)$$

где  $V_k$  — объём  $k$ -ой частицы, относительная проницаемость является функцией напряжённости поля  $\alpha = \alpha(H)$ . Полная энергия намагничивающихся частиц общим объёмом  $V$

$$U_{\text{маг}} = \mu_0 \int \left( \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) - \int_0^H \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H} \right) dV \quad (1.11)$$

получена преобразованием более общего выражения [90].

Между намагничающимися частицами, помещёнными во внешнее поле, возникают силы магнитного (пондеромоторного) взаимодействия, стремящиеся привести пару в состояние с наименьшей энергией. Так, между частицами расположеными вдоль внешнего поля, возникают силы притяжения, если же поле

направленно перпендикулярно межцентровому вектору — силы отталкивания. Очевидно, что сила  $\mathbf{f}_1$ , действующая на частицу 1, равна по величине и противоположна по направлению силе  $\mathbf{f}_2$ , действующей на частицу 2. Учитывая это обстоятельство, будем рассматривать силу  $\mathbf{f}_1$ , опуская обозначение частицы. Удобно представить её в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_\tau, \quad (1.12)$$

вычисляемых по определению силы  $\mathbf{f} = -\nabla U$ . Составляющая  $\mathbf{f}_n$  направлена вдоль межцентрового вектора  $\mathbf{l}$  и является силой притяжения/отталкивания:

$$\mathbf{f}_n = -\frac{\mathbf{l}}{l^2} \left( \mathbf{l} \cdot \frac{\partial U_{\text{маг}}}{\partial \mathbf{l}} \right). \quad (1.13)$$

Компонента  $\mathbf{f}_\tau$  расположена перпендикулярно  $\mathbf{f}_n$ :

$$\mathbf{f}_\tau = \frac{1}{l^2} \left( \mathbf{l} \times \left( \mathbf{l} \times \frac{\partial U_{\text{маг}}}{\partial \mathbf{l}} \right) \right), \quad (1.14)$$

и в паре с  $\mathbf{f}_\tau$ , приложенной ко второй частице, образует врачающий момент:

$$\mathcal{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{f}_\tau = -\mathbf{l} \times \partial U_{\text{маг}} / \partial \mathbf{l}, \quad \mathcal{M} = -\partial U_{\text{маг}} / \partial \gamma, \quad (1.15)$$

стремящийся ориентировать межцентровую линию пары вдоль вектора внешнего поля  $\mathbf{H}_0$ .

Следует отметить, что для вычисления силы не важно, какую энергию дифференцировать: полную или энергию взаимодействия, так как величина, на которую они отличаются — энергия уединённой частицы, не зависит от  $\mathbf{l}$ .

### 1.1.3 Уединённая частица во внешнем магнитном поле

Пусть в некоторой среде создано однородное внешнее поле  $\mathbf{H}_0$ . Уединённая частица с изотропной восприимчивостью  $\chi$  намагничивается однородно, следовательно напряжённость поля  $\mathbf{H}$  внутри неё зависит только от внешнего

поля  $\mathbf{H}_0$ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - NM = \mathbf{H}_0 - \chi(H)\mathbf{H}N, \quad \mathbf{H} = \frac{3\mathbf{H}_0}{\chi(H) + 3}, \quad (1.16)$$

где  $N$  - размагничивающий фактор, равный  $1/3$  для сферической частицы [71]. Поскольку внутреннее магнитное поле частицы однородно, для вычисления её магнитного момента не требуется интегрирование:

$$\mathbf{m}_k = \int_{V_k} \mathbf{M} dV = \chi(H) \mathbf{H} V = \frac{3\chi(H)\mathbf{H}_0 V}{\chi(H) + 3}. \quad (1.17)$$

По общей формуле (1.11) теперь можно найти энергию уединённой частицы, предварительно определив закон намагничивания  $\chi(H)$ .

## 1.2 Приближение линейного намагничивания точечных частиц

В начальной области намагничивания  $M \ll M_s$  ферромагнетик можно уподобить парамагнетику и принять линейный изотропный закон намагничивания  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ , где восприимчивость  $\chi$  не зависит от поля. Это значительно упрощает описание взаимодействия намагничающихся частиц.

Общей чертой моделей точечных диполей является использование единственного вектора — дипольного момента, для описания частицы. В силу значительного расстояния между частицами  $l \gg a$ , принимается предположение об однородности распределения намагниченности по их конечному объёму. Магнитный момент частицы  $\mathbf{m} = \mathbf{M}V$  вычисляется и присваивается материальной точке, находящейся в её центре.

### 1.2.1 Модель линейных диполей

Пусть в рассматриваемой системе из двух линейно намагничающихся частиц расстояние между ними  $l$  настолько велико, что они совершенно не «чув-

ствуют» полей друг друга. В таком случае каждая из частиц намагничивается как уединённая и приобретает магнитный момент согласно формуле (1.17):

$$\mathbf{m} = \frac{3\chi}{\chi + 3} \mathbf{H}_0 V. \quad (1.18)$$

Намагниченная частица-диполь является источником собственного поля, определяемого известным соотношением:

$$\mathbf{H}_d = \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right]. \quad (1.19)$$

где  $r$  — модуль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  любой точки в окружающем пространстве. Энергия взаимодействия пары дипольных частиц имеет вид:

$$U_d = -\mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_d = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{l^3} - 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{l})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{l})}{l^5} \right], \quad (1.20)$$

где  $\mathbf{l}$  — введённый ранее межцентровой вектор. Сила межчастичного взаимодействия может быть вычислена по определению как производная энергии:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= -\nabla U_d = -\frac{\partial U_d}{\partial \mathbf{l}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \left[ \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{l^3} - 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{l})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{l})}{l^5} \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2)\mathbf{l}}{l^5} + 3 \frac{\mathbf{m}_1(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{l})}{l^5} + 3 \frac{\mathbf{m}_2(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{l})}{l^5} - 15 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{l})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{l})\mathbf{l}}{l^7} \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

С учётом того, что  $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}$  формула (1.21) принимает вид:

$$\mathbf{f} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ 3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m})\mathbf{l}}{l^5} + 6 \frac{\mathbf{m}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l})}{l^5} - 15 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l})(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l})\mathbf{l}}{l^7} \right]. \quad (1.22)$$

Используя представления (1.13) и (1.14), выведем составляющие силы: нормальную

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n &= -\frac{\mathbf{l}}{l^2} \left( \mathbf{l} \cdot \frac{\partial U_d}{\partial \mathbf{l}} \right) = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{l}}{l^2} \left[ -\frac{3|\mathbf{m}|^2(\mathbf{l} \cdot \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|^5} - \frac{6(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l})^2}{|\mathbf{l}|^5} + \frac{15(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l})^2(\mathbf{l} \cdot \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|^7} \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3|\mathbf{m}|^2\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|^5} - \frac{9(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l})^2\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|^7} \right], \end{aligned} \quad (1.23)$$

и тангенциальную

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_\tau &= \frac{1}{l^2} \left( \mathbf{l} \times \left( \mathbf{l} \times \frac{\partial U_d}{\partial \mathbf{l}} \right) \right) = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{l^2} \left( \mathbf{l} \times \left( -\frac{3|\mathbf{m}|^2(\mathbf{l} \times \mathbf{l})}{l^5} - \frac{6(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l})(\mathbf{l} \times \mathbf{m})}{l^5} + \frac{15(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l})^2(\mathbf{l} \times \mathbf{l})}{l^7} \right) \right) = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -\frac{6(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l})^2 \mathbf{l}}{l^7} + \frac{6(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l}) \mathbf{m}}{l^5} \right]. \quad (1.24)
 \end{aligned}$$

Описанную модель взаимодействия точечных диполей будем называть моделью *линейных диполей* (ЛД).

### 1.2.2 Линейные взаимодействующие диполи

Общий критерий применимости модели точечных диполей имеет вид  $l \ll a$ , где  $a$  — радиус частицы. Он предполагает, что частицы настолько удалены, что разницей между взаимодействием друг с другом их наиболее близких и наиболее удалённых элементов можно пренебречь. В этом случае при рассмотрении магнитных взаимодействий частицу конечного размера, содержащую распределение (возможно, неоднородное) намагниченности по объёму, допустимо характеризовать посредством единственного вектора — магнитного дипольного момента.

Поле диполя описывается формулой (1.19) и спадает с расстоянием по степенному закону; то есть оно имеет дальнодействующий характер. По этой причине сила, испытываемая данной частицей, определяется суммарным дипольным полем  $\mathbf{H}_{loc}$ , которое создают в точке её расположения все остальные частицы системы. Для намагничивающейся (поляризующейся) частицы величина её собственного магнитного момента  $\mathbf{m}$  является функцией совокупного поля  $\mathbf{H}_{ext} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{loc}$ . Учёт влияния поля, создаваемого соседними частицами, при вычислении магнитного момента диполя приводит к модели *линейных взаимодействующих диполей* (ЛВД).

Рассмотрим с помощью модели ЛВД простейшую систему из двух одинаковых сферических частиц. Поскольку частицы идентичны по размеру и

магнитным свойствам, то они будут иметь совпадающие магнитные моменты  $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}$  и создавать одинаковые поля  $\mathbf{H}_{loc1} = \mathbf{H}_{loc2} = \mathbf{H}_d$ .

Гипотеза точечного диполя равносильна предположению об однородной намагниченности частицы, так что  $\mathbf{m} = \mathbf{M}V$ . В рассматриваемой задаче на частицу действует внешнее поле  $\mathbf{H}_{ext} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d$ , которое определяет внутреннее поле  $\mathbf{H}$  посредством

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{ext} - NM = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d - \frac{1}{3}\mathbf{M}. \quad (1.25)$$

Напомним, что размагничивающий фактор для сферической частицы равен  $1/3$ . Таким образом, в рамках этой модели предполагается, что взаимное влияние частиц однородно по всему их объёму. Перепишем выражение (1.25) для поля внутри диполя, используя формулы (1.4) для намагниченности и (1.19) поля диполя:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{\chi HV}{l^3} + 3\frac{\chi V(\mathbf{H} \cdot \mathbf{l})\mathbf{l}}{l^5} \right] - \frac{\chi}{3}\mathbf{H}. \quad (1.26)$$

Приходим к системе уравнений для поля  $\mathbf{H}$  в виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{A} = \left[ 1 + \frac{\chi a^3}{3l^3} + \frac{\chi}{3} \right] \mathbf{g} - \frac{\chi a^3}{l^5} \mathbf{ll}. \quad (1.27)$$

Здесь  $\mathbf{g}$  — единичный тензор,  $\mathbf{ll}$  — диадное произведение.

Из решения этой системы линейных уравнений находим напряжённость поля внутри частицы согласно модели ЛВД. Определив  $\mathbf{H}$ , можно записать магнитный момент каждой из частиц, а затем — вычислить энергию дипольного взаимодействия пары. Для этого сначала запишем общую энергию по формуле (1.11) и упростим её для случая линейного намагничивания среды

$$\begin{aligned} U_{\text{маг}}^{\text{Л}} = \mu_0 \int \left( \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) - \chi \int_0^h \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} \right) dV = \\ = -\frac{\mu_0}{2} \int (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_0) dV. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Поскольку магнитное поле считается однородным внутри частиц, подынтегральное выражение не зависит от объёма. В результате получаем выражение

для энергии линейно намагничивающейся частицы, обладающей моментом  $\mathbf{m}$ :

$$U_{\text{маг}}^{\text{л}} = -\frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_0. \quad (1.29)$$

При выборе в качестве  $V$  объёма одной сферы  $V_k$  энергия пары удваивается. Для расчёта силы, связывающей частицы, вновь воспользуемся определением:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{\partial U_{\text{маг}}^{\text{л}}}{\partial \mathbf{l}} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_0) = \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} (\chi V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0) = -\mu_0 \chi V \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Используем соотношение (1.27) между напряжённостями приложенного и внутреннего полей:

$$\mathbf{f} = -\mu_0 \chi V \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H}_0) = \mu_0 \chi V \left( \mathbf{H}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{l}} \cdot \mathbf{H}_0 \right). \quad (1.31)$$

С учётом того, что  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$  и следовательно

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= -\mu_0 \chi V \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H}_0) = \\ &= \mu_0 \chi V \left( \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{l}} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H}_0 \right) = \mu_0 \chi V \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{l}} \cdot \mathbf{H} \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Как видно, дифференцирование энергии по вектору  $\mathbf{l}$  сводится к вычислению производной от тензора  $\mathbf{A}$  из (1.27). Запишем её:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \left[ \left( 1 + \frac{\chi a^3}{3l^3} + \frac{\chi}{3} \right) \mathbf{g} - \frac{\chi a^3}{l^5} \mathbf{u} \right] = \frac{\chi a^3}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \left( \frac{1}{l^3} \mathbf{g} - \frac{3}{l^5} \mathbf{u} \right). \quad (1.33)$$

Подставим полученное выражение в свёртку из формулы (1.31)

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{l}} \cdot \mathbf{H} &= \\ &= \frac{\chi a^3}{3} \left[ \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \left( \frac{1}{l^3} \right) \mathbf{g} \cdot \mathbf{H} - 3 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \left( \frac{1}{l^5} \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{H} - 3 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{l}} \frac{1}{l^5} \cdot \mathbf{H} \right]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

После вычисления скалярных произведений, входящих в это выражение свёртка (1.34) будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{l}} \cdot \mathbf{H} &= \chi a^3 \left[ -\frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{l})\mathbf{H}}{l^5} + 5 \frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{l})^2 \mathbf{l}}{l^7} - \frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})\mathbf{l} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{l})\mathbf{H}}{l^5} \right] = \\ &= \frac{3\chi V}{4\pi} \left[ -\frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})\mathbf{l}}{l^5} - 2 \frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{l})\mathbf{H}}{l^5} + 5 \frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{l})^2 \mathbf{l}}{l^7} \right]. \quad (1.35) \end{aligned}$$

Подставим её в выражение для силы (1.31) и получим формулу

$$\mathbf{f} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \left[ -\frac{3}{l^5}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m})\mathbf{l} - \frac{6}{l^5}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l})\mathbf{m} + \frac{15}{l^7}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l})^2 \mathbf{l} \right], \quad (1.36)$$

в точности совпадающую с (1.22), полученной при дифференцировании энергии диполей с не зависящими друг от друга магнитными моментами. Тем самым, мы убедились, что выражение для силы парного взаимодействия имеет один и тот же вид независимо от того, являются ли магнитные моменты частиц спонтанными или индуцированными. Именно это соотношение было использовано авторами [62] при построении моделей ЛВД.

Важнейшее удобство моделей точечных диполей заключается в том, что в них взаимодействие магнитных моментов является парным. В этом случае расчёт энергии многочастичной системы исчерпывается суммированием энергий всех имеющихся пар. Именно благодаря этому упрощающему обстоятельству дипольный подход стал и продолжает оставаться главным «инструментом» как теории электро- и магнитореологических супензий, так и теории МР эластомеров.

### 1.3 Задача магнитостатики для пары линейно намагничивающихся частиц конечного размера

Ограничение межцентрового расстояния, необходимое для применения модели точечных диполей, выполняется в магнитных системах с небольшой концентрацией частиц. В этом случае взаимное влияние частиц мало и не зависит от направления  $\mathbf{l}$ . Большой интерес представляет случай  $l \gtrsim 2a$ , когда взаим-

ное подмагничивание частиц значительно, и дипольное приближение становится непригодным ни для расчёта парной энергии, ни для определения межчастичных сил.

Вернёмся к концептуальной постановке задачи магнитостатики для системы из двух частиц. Мы рассматриваем пару одинаковых сферических частиц радиуса  $a$  из магнетика, поляризующегося линейно с изотропной проницаемостью  $\mu_m$  относительно внешней среды. Частицы находятся в бесконечном массиве на расстоянии  $l$  друг от друга, вектор  $\mathbf{l}$  проведён из центра частицы 1 в центр частицы 2. Система помещена в однородное магнитное поле  $\mathbf{H}_0$ , которое направлено под углом  $\gamma$  к вектору  $\mathbf{l}$ .

Будем характеризовать размер системы параметром  $q = l/a$ , так что значение  $q = 2$  отвечает плотному контакту частиц. Введём в каждой из них локальную систему координат следующим образом. Полярные оси лежат вдоль  $\mathbf{l}$  и обращены навстречу друг другу. Через них проведена плоскость, в которой лежит вектор  $\mathbf{H}_0$ ; положение этой плоскости соответствует азимуту  $\phi = 0$  в каждой из локальных систем, что полностью их определяет. Укажем также полезную в дальнейшем лабораторную декартову систему. Её начало поместим в центр частицы 1, ось  $Oz$  направим вдоль межцентровой линии  $\mathbf{l}$  (она же — полярная ось) в сторону частицы 2, а ось  $Ox$  проведём в плоскости  $\phi = 0$  перпендикулярно  $Oz$ . Соответственно, ось  $Oy$  будет иметь азимут  $\phi = \pi/2$ .

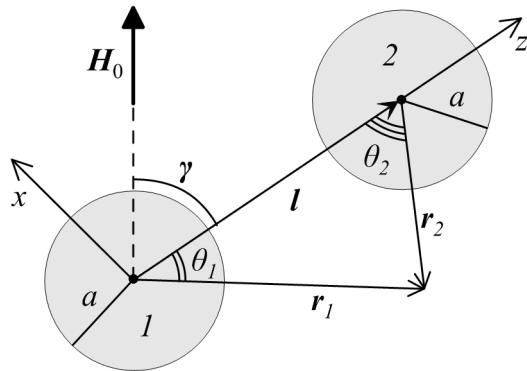


Рисунок 1.1 — Выбор системы координат задачи

Задача математической физики, которая определяет распределение магнитного поля внутри частиц и в окружающем их пространстве, формально полностью аналогична задаче о стационарном потоке тепла через бесконечный массив, содержащий пару сферических включений, теплопроводность которых отлична от теплопроводности массива. Аналитическое решение последней дано

в работе [61]. Воспроизведём этот результат применительно к магнито–поляризующимся частицам.

Представим внешнее однородное поле  $\mathbf{H}_0$  как сумму компонент, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна вектору  $\mathbf{l}$ , то есть полярным осям локальных систем координат. Таким образом, в лабораторной системе  $\mathbf{H}_0$  имеет вид  $\mathbf{H}_0 = (H_\perp, 0, H_\parallel) = (H_0 \sin \gamma, 0, H_0 \cos \gamma)$ . При свёртке в суммы удобно обозначать введенные компоненты индексом  $m$ , так что  $H_{m=0} = H_\parallel$  и  $H_{m=1} = H_\perp$ .

Решение уравнения Лапласа для скалярного магнитостатического потенциала рассматриваемой системы ищется в виде разложения по степеням пространственных переменных и по кратным угловым гармоникам. Внутри каждой частицы (i) этот ряд имеет форму

$$\psi_{(k)}^{(i)} = -\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x} - \sum_{m=0}^1 \sum_{n=m}^{\infty} H_m d_{mn}^{(k)} \left(\frac{r_k}{a}\right)^n P_n^m(\cos \theta_k) \cos m\phi, \quad (1.37)$$

а вне частиц (e):

$$\begin{aligned} \psi^{(e)} = & -\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x} - \sum_{m=0}^1 \sum_{n=m}^{\infty} H_m \cdot \\ & \left\{ g_{mn}^{(1)} \left(\frac{a}{r_1}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta_1) + g_{mn}^{(2)} \left(\frac{a}{r_2}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta_2) \right\} \cos m\phi; \end{aligned} \quad (1.38)$$

здесь  $k = 1, 2$  — номер частицы,  $r_k$  — радиальная координата точки в системе  $k$ -ой частицы,  $\mathbf{x}$  — координата точки наблюдения в лабораторной системе. Отметим, что выбор знаков в формулах (1.37) и (1.38) соответствует введённому определению  $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ , в котором  $\psi$  включает также и вклад внешнего поля  $\mathbf{H}_0$ .

### 1.3.1 Система уравнений задачи

Коэффициенты разложений (1.37) и (1.38) находятся из граничных условий на поверхности частиц. Согласно (1.9) запишем

$$\psi_{(k)}^{(i)} = \psi^{(e)}, \quad \mu_m \frac{\partial \psi_{(k)}^{(i)}}{\partial r_k} = \mu \frac{\partial \psi^{(e)}}{\partial r_k}, \quad (1.39)$$

при  $r_k = a$ . Напомним,  $\mu_m$  — относительная магнитная проницаемость материала частиц, а  $\mu$  — относительная проницаемость среды (матрицы), в которую они помещены. Подставим потенциалы (1.37) и (1.38) в первое граничное условие (1.39), например, для первой частицы, то есть запишем соотношение  $\psi_{(1)}^{(i)} = \psi^{(e)}$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^1 \sum_{n=m}^{\infty} H_m \left( \frac{r_1}{a} \right)^n d_{mn}^{(1)} P_n^m(\cos \theta_1) \cos m\phi = \\ & = \sum_{m=0}^1 \sum_{n=m}^{\infty} H_m \left[ \left( \frac{a}{r_1} \right)^{n+1} g_{mn}^{(1)} P_n^m(\cos \theta_1) + \left( \frac{a}{r_2} \right)^{n+1} g_{mn}^{(2)} P_n^m(\cos \theta_2) \right] \cos m\phi. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Используя формулу Хобсона:

$$\left( \frac{a}{r_k} \right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta_k) = \left( \frac{a}{l} \right)^{n+1} \sum_{s=m}^{\infty} \binom{n+s}{s+m} \left( \frac{r_{3-k}}{l} \right)^s P_s^m(\cos \theta_{3-k}). \quad (1.41)$$

преобразуем выражение (1.40), что приведет к системе уравнений при  $k = 1$ :

$$d_{mn}^{(1)} = g_{mn}^{(1)} + \left( \frac{a}{l} \right)^{n+1} \sum_{s=m}^{\infty} \binom{n+s}{n+m} \left( \frac{a}{l} \right)^s g_{ms}^{(2)}. \quad (1.42)$$

Аналогичным образом выполним подстановку рядов  $\psi$  во второе граничное условие из (1.39):

$$\begin{aligned} & \mu_m \frac{\partial (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x})}{\partial r_1} - \mu \frac{\partial (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x})}{\partial r_1} = - \sum_{m=0}^1 \sum_{n=m}^{\infty} H_m P_n^m(\cos \theta_1) \cos m\phi \cdot \\ & \cdot \left[ \frac{\mu_m n}{a} d_{mn}^{(1)} + \frac{\mu(n+1)}{a} g_{mn}^{(1)} - \frac{\mu n}{a} \left( \frac{a}{l} \right)^{n+1} \sum_{s=m}^{\infty} \binom{n+s}{n+m} \left( \frac{a}{l} \right)^s g_{ms}^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Рассмотрим левую часть уравнения, содержащую скалярное произведение внешнего поля на координатный вектор  $\mathbf{x}$ . Запишем его в системе координат первой частицы:

$$\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x} = H_{\perp} r_1 \sin \theta_1 \cos \phi + H_{\parallel} r_1 \cos \theta_1. \quad (1.44)$$

Представляя синус и косинус через полиномы Лежандра согласно

$$P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta, \quad P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta, \quad (1.45)$$

продифференцируем скалярное произведение (1.44) по  $r_1$ :

$$\frac{\partial(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{x})}{\partial r_1} = \sum_{m=0}^1 \sum_{n=m}^{\infty} H_m P_n^m(\cos \theta_1) \cos(m\phi) \cdot (-1)^m \delta_{1n}. \quad (1.46)$$

Объединим все части выражения (1.43) в единую сумму и потребуем обращения в нуль каждого из слагаемых. После замены индексов  $n \leftrightarrow s$  при суммировании находим

$$\begin{aligned} (\mu_m - \mu) (-1)^m \delta_{1n} + \frac{\mu_m n}{a} d_{mn}^{(1)} + \frac{\mu(n+1)}{a} g_{mn}^{(1)} - \\ - \frac{\mu n}{a} \left(\frac{a}{l}\right)^{n+1} \sum_{s=m}^{\infty} \binom{n+s}{n+m} \left(\frac{a}{l}\right)^s g_{ms}^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Введём обозначение  $\mu_m/\mu = \alpha$  и домножим (1.47) на  $a/\mu n$ . Это приводит нас ко второму уравнению для коэффициентов потенциала:

$$\alpha d_{mn}^{(1)} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) g_{mn}^{(1)} - \sum_{s=m}^{\infty} \binom{n+s}{n+m} g_{ms}^{(2)} \left(\frac{a}{l}\right)^{n+s+1} = -\frac{a}{n} \cdot (\alpha - 1) (-1)^m \delta_{1n}. \quad (1.48)$$

В итоге, приходим к следующей системе уравнений для коэффициентов  $d_{nm}^{(k)}$  и  $g_{nm}^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} d_{mn}^{(k)} &= g_{mn}^{(k)} + \sum_{s=m}^{\infty} \binom{n+s}{n+m} g_{ms}^{(3-k)} \left(\frac{a}{l}\right)^{n+s+1}, \\ \alpha d_{mn}^{(k)} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) g_{mn}^{(k)} - \sum_{s=m}^{\infty} \binom{n+s}{n+m} g_{ms}^{(3-k)} \left(\frac{a}{l}\right)^{n+s+1} &= \frac{a}{n} \cdot (\alpha - 1) (-1)^{k(m+1)} \delta_{1n}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Поскольку задача симметрична относительно выбора частицы, введём, следуя за автором [61], безразмерную величину  $g_{mn}$ :

$$a g_{mn} = g_{mn}^{(1)} = (-1)^{m+1} g_{mn}^{(2)}, \quad \text{или} \quad g_{mn}^{(2)} = (-1)^{m+1} g_{mn}^{(1)}. \quad (1.50)$$

а также параметр:

$$\beta_n = n(\alpha - 1)/(n\alpha + n + 1). \quad (1.51)$$

После этого коэффициент  $d_{mn}^{(k)}$  легко исключить из уравнений (1.49), что приводит к системе

$$\frac{(-1)^{m+1}}{\beta_n} g_{mn} + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{n+s}{n+m} g_{ms} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+s+1} = \frac{1}{n} \delta_{1n}. \quad (1.52)$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (1.52) ищется в виде разложения искомого  $g_{mn}$  в ряд по  $a/l$ . Автор [61] этих вычислений не приводит, а сразу записывает результат. Мы же продолжим расчёт после выполнения простейшей проверки.

### 1.3.2 Проверка: одночастичная задача

Проверим получившиеся формулы для случая одной частицы. Это можно сделать различными способами. Например, устремив в найденном решении двухчастичной задачи расстояние  $l$  к бесконечности. Однако полное решение пока не известно. Поэтому используем простейший способ: положим в системе (1.49) все коэффициенты с индексом (2) равными нулю, то есть

«уничтожим» одну из частиц. Тогда первая строка формулы (1.49) сразу даёт  $d_{mn}^{(1)} = g_{mn}^{(1)} = ag_{mn}$ , и система превращается в единственное линейное уравнение, имеющее своим решением

$$d_{mn} = \frac{a\beta_n}{n} (-1)^{m+1} \delta_{n1} = \begin{cases} a\beta_1(-1)^{m+1}, & n = 1; \\ 0, & n \neq 1; \end{cases} \quad (1.53)$$

номер частицы здесь опущен. Как видно, из всего множества коэффициентов  $d_{mn}$  отличны от нуля только два:

$$d_{01} = -a\beta_1, \quad d_{11} = a\beta_1, \quad \beta_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} = \frac{\mu_m - \mu}{\mu_m + 2\mu}. \quad (1.54)$$

Рассмотрим для простоты конфигурацию, в которой приложенное магнитное поле параллельно межцентровому вектору; в этом случае следует учитывать только слагаемые с  $m = 0$ . Подставим  $d_{01}$  из (1.54) в выражения для внутреннего (1.37) и внешнего (1.38) скалярных потенциалов, помня о том, что в нашем примере отлична от нуля только  $z$ -проекция поля:  $H_{\parallel} = H_0$ :

$$\begin{aligned} \psi^{(i)} &= -zH_0 + z\beta_1 H_0; \\ \psi^{(e)} &= -zH_0 + \frac{\beta_1 a^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} H_0 z. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Дифференцируя первое из уравнений (напомним, что  $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ ), находим, что поле внутри сферической частицы однородно и имеет величину

$$\mathbf{H} = (1 - \beta_1) \mathbf{H}_0 = \frac{3}{\alpha + 2} \mathbf{H}_0 = \frac{3\mu}{\mu_m + 2\mu} \mathbf{H}_0. \quad (1.56)$$

Отсюда для намагниченности поляризующейся сферы получаем известный результат:

$$\mathbf{M} = (\alpha - 1) \mathbf{H} = \frac{3(\alpha - 1)}{\alpha + 2} \mathbf{H}_0 = \frac{3(\mu_m - \mu)}{\mu_m + 2\mu} \mathbf{H}_0, \quad (1.57)$$

а для её магнитного момента

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}V = \frac{3(\mu_m - \mu)}{\mu_m + 2\mu} \mathbf{H}_0 V, \quad (1.58)$$

здесь  $V$  — объём сферы. С учётом однородности поля внутри частицы её энергия во внешнем поле согласно (1.28):

$$U^{\text{л}} = -\frac{\mu_0}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_0 dV = -\frac{\mu_0}{2} \int (\alpha - 1) \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0 dV = -\frac{3\mu_0(\alpha - 1)}{2(\alpha + 2)} H_0^2 V, \quad (1.59)$$

где  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума. Используя формулу (1.59) удобно определить безразмерную энергию линейно поляризующихся частиц:

$$\tilde{U}_{\text{маг}}^{\text{л}} = \frac{U_{\text{маг}}^{\text{л}}}{\mu_0 H_0^2 a^3}. \quad (1.60)$$

Дифференцированием внешнего потенциала получаем выражение для поля вне частицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{ext}} &= \mathbf{H}_0 - \beta_1 a^3 \left[ \frac{\mathbf{H}_0}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_0)}{r^5} \right] = \\ &= \mathbf{H}_0 + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} \cdot a^3 \cdot \left[ 3 \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_0)}{r^5} - \frac{\mathbf{H}_0}{r^3} \right]. \end{aligned} \quad (1.61)$$

В этом выражении узнаём формулу для поля индуцированного диполя. Таким образом, мы убедились, что в рассмотренном случае редукция полной задачи к одночастичной даёт правильный результат. Приведённые формулы удобны и для проверки конечного результата: предела решения полной задачи при  $l \rightarrow \infty$ .

### 1.3.3 Вычисление магнитной энергии

Нашей целью является определение энергии пары частиц. Для этого, строго говоря, необходимо взять два интеграла того же типа, что и в выражении (1.59). Однако в линейном приближении по полю интегрирование превращается просто в умножение на  $1/2$ , а симметрия системы позволяет заменить суммирование удвоением. Записывая магнитный момент частицы в виде:

$$\mathbf{m} = -(\alpha - 1) \int \nabla \psi dV. \quad (1.62)$$

получаем следующее представление для энергии:

$$U_{\text{маг}}^{\text{л}} = -\mu_0 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_0) = \mu_0(\alpha - 1) \int \mathbf{H}_0 \cdot \nabla \psi dV. \quad (1.63)$$

Используя введенную выше лабораторную систему координат, подынтегрально-му выражению можно придать вид:

$$\mathbf{H}_0 \cdot \nabla \psi = H_{\perp} \frac{\partial \psi}{\partial x} + H_{\parallel} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (1.64)$$

Найдём необходимые для конкретизации выражения (1.64) производные скалярного магнитного потенциала. Номер частицы ( $k$ ) опускаем, считая, что все рассуждения проводятся относительно первой частицы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -\frac{\partial(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r})}{\partial r} - \sum_{m=0}^1 \sum_{n=m}^{\infty} H_m d_{mn} n \left( \frac{r^{n-1}}{a^n} \right) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi; \\ \frac{\partial \psi}{\partial(\cos \theta)} &= -\frac{\partial(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r})}{\partial(\cos \theta)} - \sum_{m=0}^1 \sum_{n=m}^{\infty} H_m d_{mn} \left( \frac{r}{a} \right)^n \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \cos \theta} \cos m\phi; \\ \frac{\partial \psi}{\partial(\cos \phi)} &= -\frac{\partial(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r})}{\partial(\cos \phi)} - \sum_{m=0}^1 \sum_{n=m}^{\infty} H_m d_{mn} \left( \frac{r}{a} \right)^n P_n^m(\cos \theta) \frac{\partial \cos m\phi}{\partial \cos \phi}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Требуется вычислить интеграл из формулы (1.63). Обозначим его  $I$ :

$$I = \int \mathbf{H}_0 \cdot \nabla \psi dV = \left( H_{\perp} \frac{\partial \psi}{\partial x} + H_{\parallel} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dV. \quad (1.66)$$

Перейдем к сферическим координатам

$$\begin{aligned} I &= \int H_{\perp} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial(\cos \theta)} \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial(\cos \phi)} \frac{\partial(\cos \phi)}{\partial x} \right) dV + \\ &\quad + \int H_{\parallel} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial(\cos \theta)} \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial(\cos \phi)} \frac{\partial(\cos \phi)}{\partial z} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Используя производные для потенциала по сферическим координатам  $\psi$  (1.65) можно расписать подробно каждый интеграл. После интегрирования собираем

вместе все вычисленные части выражения (1.67):

$$\begin{aligned} I &= \left( -H_{\perp}^2 V + \frac{4}{3} \pi a^2 d_{11} H_{\perp}^2 \right) + \left( -H_{\parallel}^2 V - \frac{4}{3} \pi a^2 d_{01} H_{\parallel}^2 \right) \\ &= -H_{\perp}^2 V \left( 1 - \frac{d_{11}}{a} \right) - H_{\parallel}^2 V \left( 1 + \frac{d_{01}}{a} \right). \end{aligned} \quad (1.68)$$

Приходим к выражению для энергии пары изотропно поляризующихся частиц, находящихся во внешнем однородном магнитном поле:

$$\begin{aligned} U_{\text{маг}}^{\text{л}} &= \mu_0(\alpha - 1) \int \mathbf{H}_0 \cdot \nabla \psi \, dV = \mu_0(\alpha - 1) I = \\ &= -\mu_0(\alpha - 1) \left[ H_{\perp}^2 V \left( 1 - \frac{d_{11}}{a} \right) + H_{\parallel}^2 V \left( 1 + \frac{d_{01}}{a} \right) \right] = \\ &= -\mu_0(\alpha - 1) H_0^2 V \left[ 1 - \frac{d_{11}}{a} + \left( \frac{d_{11}}{a} + \frac{d_{01}}{a} \right) \cos^2 \gamma \right]. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Таким образом, из всего бесконечного разложения скалярного потенциала исключую энергию определяет лишь слагаемые с коэффициентами  $d_{01}$  и  $d_{11}$ . Безразмерную энергию пары частиц, намагничивающих линейно, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\text{маг}}^{\text{л}}(q, \gamma) &= \omega_0(q) + \omega(q) \cos^2(\gamma), \\ \omega_0 &= -\frac{4\pi(\alpha - 1)}{3} \left( 1 - \frac{d_{11}}{a} \right), \quad \omega_2 = -\frac{4\pi(\alpha - 1)}{3} \frac{(d_{11} - d_{01})}{a}, \end{aligned} \quad (1.70)$$

явно демонстрирующем, что угловая зависимость энергии пары взаимодействующих частиц носит тот же характер, что и энергия пары диполей, а зависимость от расстояния между частицами определяют коэффициенты  $d_{01}$  и  $d_{11}$ .

### 1.3.4 Решение системы уравнений для коэффициентов $g_{mn}$

Коэффициенты  $d_{01}$  и  $d_{11}$  с помощью уравнений (1.49) могут быть выражены через коэффициенты  $g_{mn}$ , которые мы находим решая систему (1.52).

Запишем её снова

$$-\frac{(-1)^{m-1}}{\beta_n} g_{mn} + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{n+s}{n+m} g_{ms} \left(\frac{a}{l}\right)^{n+s+1} = \delta_{1n}. \quad (1.71)$$

Эта система может быть разделена на две независимые системы уравнений при  $m = 0$  и  $m = 1$ . Решение первой даёт нам коэффициенты  $g_{0n}$  необходимые для выражения  $d_{01}$ , второй — коэффициенты  $g_{1n}$  с помощью которых выражается  $d_{11}$ . Рассмотрим сначала систему для коэффициентов  $g_{0n}$ :

$$-\frac{1}{\beta_n} g_{0n} + \sum_{s=1}^{\infty} \binom{n+s}{n} g_{0s} \left(\frac{a}{l}\right)^{n+s+1} = \delta_{1n}. \quad (1.72)$$

Следуя за автором [61], можно строить решения методом последовательных приближений по степеням параметра  $a/l$ . Для этого искомые величины представляются в виде рядов

$$g_{0n} = \sum_{q=0}^{\infty} g_{0nq} \left(\frac{a}{l}\right)^q. \quad (1.73)$$

После подстановки ряда в выражение (1.72) и проведения вычислений оказывается, что среди найденных коэффициентов  $g_{0n}$  с точностью  $(a/l)^3$  отличен от нуля только один коэффициент. Переходя к размерным величинам с помощью (1.50), запишем его в виде (1.73):

$$g_{01}^{(1)} = -a\beta_1 - 2a\beta_1^2 \left(\frac{a}{l}\right)^3. \quad (1.74)$$

Для нахождения энергии пары, как показано выше, нам необходим коэффициент  $d_{01}^{(1)}$ . Он выражается через  $g_{0n}^{(1)}$  согласно первому из соотношений (1.49). Запишем конкретный вид последнего, полагая  $n = 1$ :

$$d_{01}^{(1)} = g_{01}^{(1)} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1+s)!}{1!s!} g_{0s}^{(1)} \left(\frac{a}{l}\right)^{s+2}. \quad (1.75)$$

Теперь подставим сюда разложение 1.74:

$$d_{01}^{(1)} = -a\beta_1 - 2a\beta_1^2 \left(\frac{a}{l}\right)^3 + 2a\beta_1 \left(\frac{a}{l}\right)^3 = -a\beta_1 \left[1 - 2\beta_1 (1 - \beta_1) \left(\frac{a}{l}\right)^3\right]. \quad (1.76)$$

Можно продолжить расчёт и получить для коэффициента  $d_{01}$  ряд с членами более высокого порядка, пусть до девятого:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} d_{01} = & -\beta_1 + 2\beta_1(1-\beta_1) \left(\frac{a}{l}\right)^3 + 4\beta_1^2(1-\beta_1) \left(\frac{a}{l}\right)^6 + \\ & + 9\beta_1\beta_2(1-\beta_1) \left(\frac{a}{l}\right)^8 + 8\beta_1^3(1-\beta_1) \left(\frac{a}{l}\right)^9. \end{aligned} \quad (1.77)$$

При решении аналогичной системы для коэффициентов  $g_{1n}$  вычисляется коэффициент  $d_{11}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} d_{11} = & \beta_1 + \beta_1(1-\beta_1) \left(\frac{a}{l}\right)^3 - \beta_1^2(1-\beta_1) \left(\frac{a}{l}\right)^6 - \\ & - 3\beta_1\beta_2(1-\beta_1) \left(\frac{a}{l}\right)^8 + \beta_1^3(1-\beta_1) \left(\frac{a}{l}\right)^9. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Теперь можно выразить энергию двух взаимодействующих поляризующихся частиц с точностью до 9 порядка. Подставим найденные коэффициенты  $d_{01}$  и  $d_{11}$  в формулу (1.69):

$$\begin{aligned} U_{\text{маг}}^{\text{л}} = & -\mu_0(\alpha-1)H_0^2V \left[ 1 - \frac{d_{11}}{a} + \left( \frac{d_{11}}{a} + \frac{d_{01}}{a} \right) \cos^2 \alpha \right] = \\ = & -\mu_0(\alpha-1)H_0^2V(1-\beta_1) \left[ 1 - \beta_1 \left(\frac{a}{l}\right)^3 + \beta_1^2 \left(\frac{a}{l}\right)^6 + 3\beta_1\beta_2 \left(\frac{a}{l}\right)^8 - \beta_1^3 \left(\frac{a}{l}\right)^9 \right] - \\ - & \mu_0(\alpha-1)H_0^2V(1-\beta_1) \left[ 3\beta_1 \left(\frac{a}{l}\right)^3 + 3\beta_1^2 \left(\frac{a}{l}\right)^6 + 6\beta_1\beta_2 \left(\frac{a}{l}\right)^8 + 9\beta_1^3 \left(\frac{a}{l}\right)^9 \right] \cos^2 \alpha = \\ = & -\frac{3\mu_0(\alpha-1)}{\alpha+2}H_0^2V \left[ 1 - \sum_{p=3}^{\infty} \left(\frac{a}{l}\right)^p (A_p - B_p \cos^2 \alpha) \right]. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Здесь коэффициенты  $A_p$  и  $B_p$

$$\begin{aligned} A_3 = & \beta_1; \quad A_6 = -\beta_1^2; \quad A_8 = -3\beta_1\beta_2; \quad A_9 = \beta_1^3; \quad A_{4,5,7} = 0; \\ B_3 = & 3\beta_1; \quad B_6 = 3\beta_1^2; \quad B_8 = 6\beta_1\beta_2; \quad B_9 = 9\beta_1^3; \quad B_{4,5,7} = 0; \end{aligned} \quad (1.80)$$

В предельных случаях формула (1.79) даёт хорошо известные выражения. Если намагничивающиеся сферы не влияют друг на друга, то весь ряд по степеням  $a/l$  должен быть отброшен. Тогда  $U_{\text{маг}} = -3\mu_0H_0^2V[(\alpha-1)/(\alpha+2)]$ , что, как и должно быть, совпадает с удвоенным значением энергии уединённой однородно поляризованной сферы. Если же сохранить только первый неисчезающий

порядок по  $a/l$ , то имеем

$$U_{\text{маг}}^{\pi} = -3\mu_0 H_0^2 V \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} \right) \left[ 1 + 2 \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} \right) \left( \frac{a}{l} \right)^3 \right]. \quad (1.81)$$

Здесь второе слагаемое в квадратных скобках (с учётом коэффициента перед ними) — это парная энергия взаимодействия в дипольном приближении, которую мы уже получали в разделе 1.1 (см. 1.20); как видно, взаимное влияние частиц приводит к возрастанию магнитного момента каждой из них. Здесь уместно также отметить, что решение рассматриваемой задачи существенно упрощается, если материал частиц можно считать идеально намагничивающимся:  $\alpha \rightarrow \infty$ . В этом случае все коэффициенты  $\beta_n$  обращаются в единицу.

### 1.3.5 Численное нахождение коэффициентов $g_{mn}$ и аппроксимация результатов

Ряды коэффициентов  $d_{01}$  и  $d_{11}$ , определяющих величину энергии, бесконечны. Чем большее число членов ряда мы вычислим, тем более точное выражение коэффициентов, а значит и энергии получим. Для этого требуется знать коэффициенты  $g_{mn}$  с индексами намного выше, чем 9. Аналитический способ здесь утрачивает свою полезность из-за катастрофического роста объёма вычислений, однако численное нахождение  $g_{mn}$  трудностей не представляет. Используя этот путь и последовательно увеличивая число членов ряда, мы вычисляли энергию пары частиц, находящихся в плотном контакте, ориентированных так, что межцентровой вектор  $\mathbf{l}$  сонаправлен вектору внешнего поля  $\mathbf{H}_0$ .

Определение «плотный контакт» требует некоторых разъяснений. Под плотным контактом понимается такая конфигурация частиц, в которой расстояние между ними наименьшее из возможных, то есть сферы соприкасаются поверхностями. Однако, в реальных МР эластомерах плотный контакт в строгом смысле едва ли реализуем. Этому препятствует как форма частиц, далёкая от идеальной сферы, так и полимер, окружающий их. В дальнейшем, используя определение «плотный контакт», мы будем подразумевать конфигурацию частиц с межцентровым расстоянием  $q \leq 2.01$ .

В результате исследования сходимости обнаружилось, что ряд сходится медленно при  $q = l/a = 2.0$  (рис. 1.2а). Однако, при увеличении межчастичного расстояния до  $q = 2.001$  сходимость достигается уже при числе членов ряда  $N$  равном 100 (рис. 1.2б). Относительное приращение энергии  $\delta = (1 - U_{\text{маг}}^{\pi}(N+1)/U_{\text{маг}}^{\pi}(N))$  монотонно убывает с ростом числа  $N$  членов ряда (рис. 1.2в). При  $N \geq 100$  величина  $\delta$  составляет менее 0.5%.

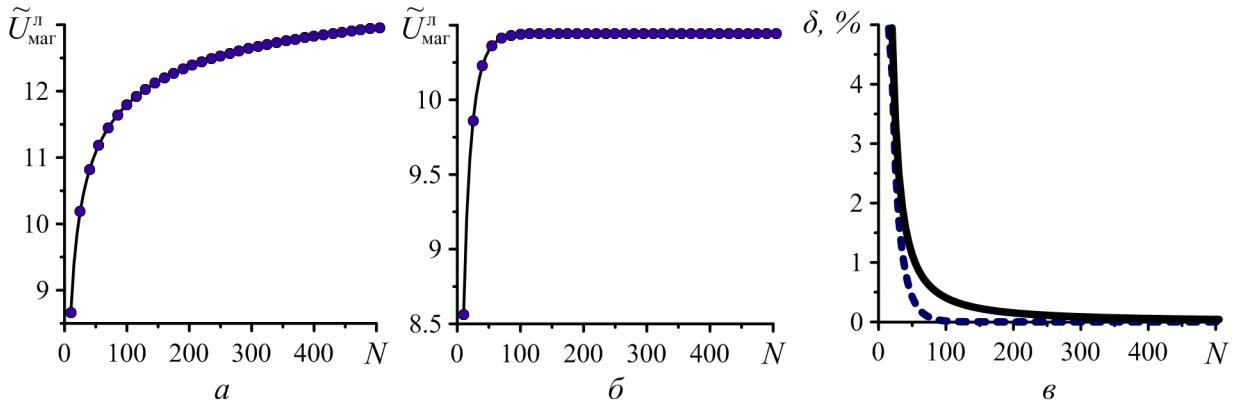


Рисунок 1.2 — Безразмерная энергия взаимодействия двух частиц с проницаемостью  $\alpha = 10^4$  в конфигурации  $\gamma = 0^\circ$  в зависимости от числа членов ряда  $N$  при а)  $q = 2.0$  и б)  $q = 2.001$ ; в) относительное приращение энергии в зависимости от числа членов ряда  $N$  при  $q = 2.0$  (сплошная линия)  
 $q = 2.001$  (штриховая линия)

Положив в расчёте  $N = 100$ , мы получили массив числовых данных, представляющий собой дискретизированную запись функций  $\omega_0(q)$  и  $\omega_2(q)$  (1.70) — в диапазоне межчастичных расстояний  $q \in [2; 6]$ . Разбиение указанного интервала было неравномерным, плотность расчётных точек возрастила по мере приближения к  $q = 2$ .

Одной из целей нашей работы является расчёт межчастичных магнитных сил, что предполагает вычисление производных  $U_{\text{маг}}^{\pi}(q, \gamma)$ . Эта операция существенно облегчается, если заменить полученный численно набор значений  $\omega_0(q)$  и  $\omega_2(q)$  компактной аппроксимационной формулой. Мы сконструировали её из подходящих алгебраических дробей, требуя от них близости к точному результату в интервале  $2 < q < 6$  и асимптотического перехода в функции  $\omega_0$  и  $\omega_2$

дипольного приближения при  $1/q \ll 1$ :

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{\text{маг}}^{\text{л}}(q, \gamma) &= \frac{U_{\text{маг}}^{\text{л}}}{\mu_0 H_0^2 a^3} = \\ &= -\frac{4\pi}{3} \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} \right)^2 \sum_{i=3}^7 \left[ \frac{a_i}{(q - b_i)^i} + \frac{c_i}{(q - d_i)^i} \cos^2 \gamma \right].\end{aligned}\quad (1.82)$$

Величины коэффициентов и показатели степени в формуле (1.82) приведены в таблице 1. Выбор функций для интерполяционной формулы обуславливается стремлением придать выражению энергии некий физический смысл. Так, подобные дроби могут интерпретироваться как энергия диполя со смещенным магнитным моментом. Анализ показал, что интегральная погрешность выражения (1.82), оценённая по всему массиву числовых данных (он имеет максимальную плотность при  $q \sim 2$ ), не превышает 2% (рис. 1.3).

Таблица 1 — Числовые параметры формулы (1.82)

$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$
3	-1	0	3	0
4	0	0	$3.42 \cdot 10^{-2}$	1.3976
5	0.111	-0.689	$2.83 \cdot 10^{-6}$	1.8947
6	0.509	0.589	$1.8 \cdot 10^{-13}$	1.9898
7	-0.424	0.592	0	0

Формула (1.82) позволяет вычислять компоненты межчастичной магнитной силы (1.15) и (1.16) аналитически, и тем самым кардинально облегчает расчёт.

### 1.3.6 Магнитное притяжение и отталкивание частиц

Как можно было ожидать, анизотропия взаимодействия близко расположенных ( $q \gtrsim 2$ ) намагничивающихся сфер качественно отличается от той, что

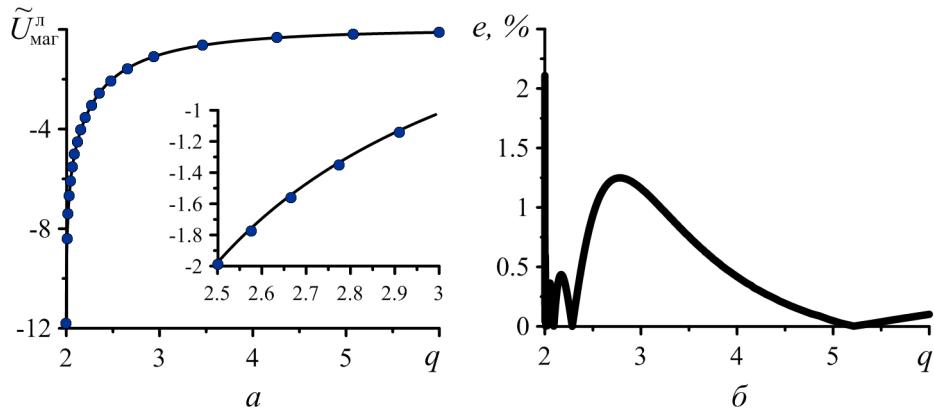


Рисунок 1.3 — а) Энергия двух частиц с проницаемостью  $\alpha = 10^4$  в конфигурации  $\gamma = 0^\circ$  в зависимости от межцентрового расстояния  $q$ , полученная численно (точки) и с помощью интерполяционной формулы (сплошная линия); б) погрешность интерполяционной формулы  $e = 100 \cdot [U_{\text{маг}}^{\text{л}}(q) - U_i(q)]/U_i(q)$  в зависимости от  $q$  в конфигурации  $\gamma = 0^\circ$

имеет место для таких же сфер в случае, если последние намагничены однородно. Сравним эти два случая. Возьмем сначала пару частиц, в которых намагниченность однородна по объему и параллельна приложенному полю. Взаимодействие таких частиц описывается стандартным дипольным потенциалом, таким, как если бы их магнитные моменты были точечными и сосредоточенными в их центрах (модель ЛД). Примем положение одной из частиц за начало координат. Как известно, для пары точечных диполей поверхностью нулевой силы ( $f_n(q, \gamma) = 0$ ) является пара прямых круговых конусов с углами раствора  $\gamma_0 \simeq 55^\circ$ . Конусы имеют общую вершину в центре выбранной частицы, а своими основаниями обращены в противоположные стороны; их общей осью является направление магнитных моментов частиц. Схема сечения пары частиц плоскостью, проходящей через межцентровый вектор и вектор магнитного момента, показана на рисунке 1.4а. Линией нулевой силы  $f_n = 0$  (нейтралью) является образующая конуса, которая изображена серой штриховой прямой; частица, центр которой лежит на этой линии, показана штриховым контуром. Для точечных магнитных моментов любая прямая, проведенная из вершины конуса, является направлением взаимного притяжения, если она лежит внутри конуса ( $\gamma < \gamma_0$ ), и отталкивания — если проходит вне его ( $\gamma > \gamma_0$ ). Максимальному притяжению соответствует расположение частиц «голова–хвост» ( $\gamma = 0^\circ$ ), а максимальному отталкиванию — расположение «бок–о–бок» ( $\gamma = 90^\circ$ ).

Рассмотрим теперь пару магнито-поляризующихся частиц, намагниченности которых точно «отслеживают» величину и направление локального поля. Точная формула (1.82) для  $U_{\text{маг}}^{\text{л}}$  имеет ту же осевую симметрию относительно направления  $\mathbf{H}_0$ , что и простой дипольный потенциал. Очевидно, то же относится и к межчастичным силам и, в частности, к нейтральной поверхности  $\mathbf{f}_n = 0$ . Однако, указанной азимутальной симметрией сходство и исчерпывается. Как показал расчёт, выполненный методом, описанным в этом разделе, в случае пары магнито-поляризующихся частиц сила  $f_n(q)$  вдоль луча  $\gamma = \text{const}$  уже не является знакоопределенной функцией межцентрового расстояния. Иными словами, взаимное притяжение частиц сменяется отталкиванием при их удалении друг от друга по прямой, то есть при  $\gamma = \text{const}$ . Ситуацию иллюстрирует рисунок 1.4 а, где сплошной жирной линией показана нейтральная кривая  $f(q, \gamma) = 0$  для частиц, проницаемость которых мы положили в  $10^4$  раз большей, чем проницаемость матрицы. Как видно, при близком расположении частиц интервал углов  $\gamma$ , соответствующий взаимному притяжению, заметно расширяется. Действительно, если для магнито-поляризующихся частиц взаимное притяжение имеет место при попадании центра частицы 2 в любую точку V-образной области между окружностью радиуса  $2a$  (слева) и жирной черной линией (справа), то для магнитных диполей правой границей области притяжения оказывается штриховая прямая  $\gamma_0 = 55^\circ$ . Нейтральные кривые  $\gamma(q)$ , отвечающие условию  $f(q, \gamma) = 0$ , показаны на рисунке 1.4 б. Случаю магнито-поляризующихся частиц отвечает сплошная линия, а случаю магнитных диполей — штриховая.

При сближении частиц увеличивается их взаимная поляризация, вследствие чего резко возрастает сила взаимодействия. Этот эффект иллюстрирует рисунок 1.5а, где сопоставлены силы притяжения для магнито-поляризующихся частиц и магнитных диполей (моделей ЛД и ЛВД) в конфигурации «голова–хвост» ( $\gamma = 0^\circ$ ). Как видно, рост  $f_n$  по сравнению с моделью ЛД становится заметным уже при  $q \sim 3.5$ , а при  $q \sim 2.5$  достигает многих десятков процентов. В условиях плотного контакта ( $q = 2$ ) значение  $f_n$  для пары магнито-поляризующихся частиц оказывается примерно в 50 раз больше, чем для пары дипольных. Иными словами, в области  $q \gtrsim 2$  функция  $f_n(q)$  при уменьшении своего аргумента растёт гораздо быстрее, чем дипольная сила  $f_n \propto q^{-4}$ .

Таким образом, по мере сближения частиц предсказания моделей ЛД и ЛВД всё сильнее отклоняются от точного решения. Аналогично, они недооцени-

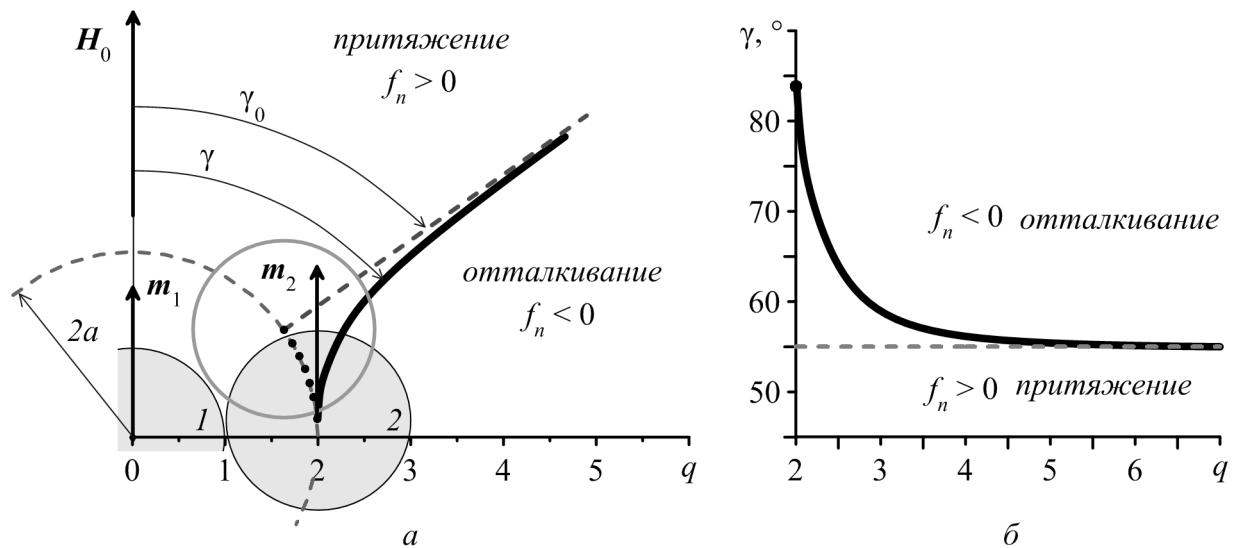


Рисунок 1.4 — а) Расположение областей взаимного притяжения / отталкивания частиц с однородной и неоднородной намагниченностью. Штриховая прямая — линия нулевой силы притяжения для диполей, жирная кривая — нейтральная линия, характеризующая магнито–поляризующиеся частицы; жирные точки — возможные положения центра частицы в угловом интервале  $54.7^\circ < \gamma < 84.3^\circ$  при сближении соседей до  $q = 2$ ;  
б) зависимость «нейтрального» угла, при котором обращается в нуль межчастичная сила  $f_n$ , от расстояния между частицами, см. формулу (1.82); для дипольных частиц «нейтральный» угол равен  $\gamma_0$  и не зависит от  $q$   
(штриховая линия)

вают величину  $f_\tau$  (рис. 1.5б). Однако модель ЛВ несколько лучше справляется с описанием ситуации, чем модель ЛД, в которой взаимной индукцией диполей пренебрегается.

### 1.3.7 Зависимость силы межчастичного взаимодействия от магнитной проницаемости

На графиках 1.6 приведены погрешности линейных моделей относительно точного решения. Они устанавливают также, что отличия в предсказании величины силы  $f_n$  тем меньше, чем ниже магнитная восприимчивость материала частиц. Значения материальных параметров, выбранные для графиков на пан-

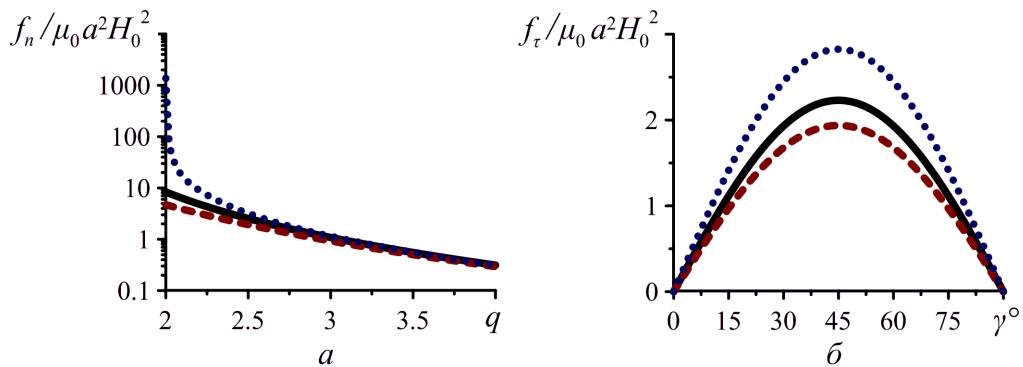


Рисунок 1.5 — Силы межчастичного взаимодействия при относительной проницаемости  $\alpha = 10^4$ , рассчитанные с помощью модели ЛВД (сплошная линия), модели ЛД (штрихи) и точного решения задачи магнитостатики (точки); а) зависимость компоненты  $f_n$  от межчастичного расстояния  $l$  при  $\gamma = 0^\circ$ ; б) угловая зависимость компоненты  $f_\tau$  при  $q = 2.1$

лях б и в рисунка 1.6 соответствуют двум типам реальных частиц (микросфер). Панель б относится к Dynabeads с восприимчивостью  $\chi = 1$  (в ед. СИ), полимерным композиционным намагничивающимся частицам, описанным в работе [60]; а панель в соответствует магнитным микросферам с восприимчивостью  $\chi = 0.25$ , изученным экспериментально в [91]. Видно, что для объектов, имеющих относительно низкую магнитную восприимчивость, даже простые модели оказываются вполне приемлемыми. Таким образом, вопрос об использовании той или иной модели дипольного взаимодействия, должен решаться исходя из магнитных свойств конкретных исследуемых частиц. Отметим также, что в предположении о том, что магнитная восприимчивость материала частиц постоянна (парамагнитное приближение), все силы растут квадратично с увеличением приложенного поля ( $f \propto H_0^2$ ), поэтому при подходящем масштабировании — таком как на ось ординат рисунка (1.6) — полученные зависимости являются универсальными.

С целью расширения диапазона значений магнитной проницаемости при описании сил, действующих между частицами из ферромагнетика, интерполяционная формула была усовершенствована. Следуя за общим видом интерполяционной формулы, мы предположили, что множитель  $(\alpha - 1)/(\alpha + 2)$  каждого

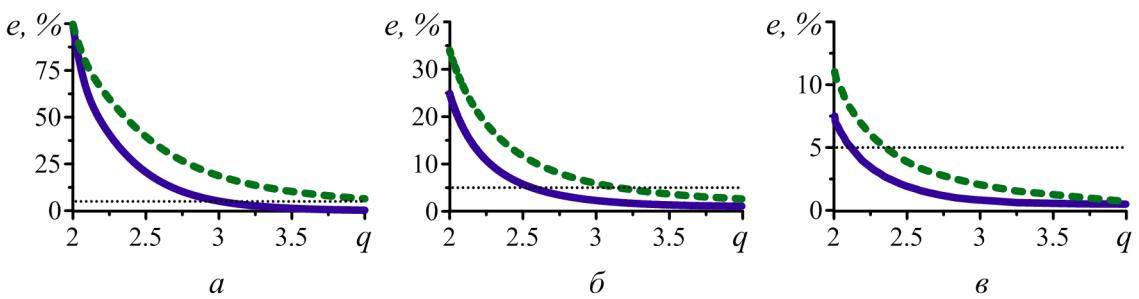


Рисунок 1.6 — Погрешность определения силы  $f_n$  с помощью моделей ЛВД (сплошная линия) и ЛД (штриховая линия) в конфигурации  $\gamma = 0^\circ$ ; магнитная восприимчивость  $\chi = 10^4$  (а); 1 (б); 0.25 (в)

слагаемого должен иметь свой собственный показатель степени.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\text{маг}}^{\text{л}}(q, \gamma) &= \frac{U_{\text{маг}}^{\text{л}}}{\mu_0 H_0^2 a^3} = \\ &= -\frac{4\pi}{3} \sum_{i=3}^7 \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} \right)^{p_i} \left[ \frac{a_i}{(q - b_i)^i} + \frac{c_i}{(q - d_i)^i} \cos^2 \gamma \right]. \quad (1.83) \end{aligned}$$

Наибольшее значение  $f_n$  наблюдается при малом расстоянии между частицами, расположенными вдоль направления внешнего поля. Методом простого перебора выбирались показатели степени, наилучшим образом описывающие силу взаимодействия между частицами в конфигурации ( $q = 2.01$  и  $\gamma = 0^\circ$ ) с проницаемостью в диапазоне от  $10^2$  до  $10^4$ , характерной для железа. Погрешность усовершенствованной интерполяционной формулы (1.83), при оценке по всему массиву числовых данных (он имеет максимальную плотность при  $q \sim 2$ ), не превышает 2%.

Таблица 2 — Числовые параметры усовершенствованной формулы (1.83)

$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$p_i$
3	-1	0	3	0	2
4	0	0	$3.42 \cdot 10^{-2}$	1.3976	3
5	0.111	-0.689	$2.83 \cdot 10^{-6}$	1.8947	11
6	0.509	0.589	$1.8 \cdot 10^{-13}$	1.9898	13
7	-0.424	0.592	0	0	20

## 1.4 Приближение нелинейного намагничивания точечных частиц

В предыдущих разделах принимался линейный закон намагничивания для частиц из ферромагнетика. При этом отмечалось, что это допущение корректно лишь в не очень сильных полях. С увеличением поля (для железа — до нескольких сотен кА/м) рост намагченности сначала замедляется, а затем прекращается, частица переходит в режим магнитного насыщения. Для описания такого поведения, магнитную восприимчивость  $\chi$  следует считать функцией приложенного поля:  $\mathbf{M} = \chi(H)\mathbf{H}$ . Поскольку типичным материалом частиц в МР композитах является железо, выберем закон нелинейного намагничивания в форме Фрёлиха-Кеннелли [71–73]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \frac{\chi_0 M_s \mathbf{H}}{M_s + \chi_0 H} = \begin{cases} \chi_0 H & \text{при } \chi_0 H \ll M_s, \\ M_s (1 - M_s / \chi_0 H) & \text{при } \chi_0 H \gg M_s. \end{cases} \quad (1.84)$$

Как видно, ферромагнетик Фрёлиха-Кеннелли имеет начальную восприимчивость  $\chi_0$ , а в сильных полях его намагченность стремится к значению  $M_s$  (насыщение). Переходя к безразмерным значениям напряжённости поля и намагченности придадим соотношению (1.84) вид:

$$\tilde{\mathbf{m}} = \frac{\chi_0 \mathbf{h}}{\chi_0 h + 1}, \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{M_s}, \quad \tilde{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{M}}{M_s}. \quad (1.85)$$

### 1.4.1 Модель нелинейных диполей

Для магнитореологических систем с малой концентрацией ( $l \ll a$ ) взаимодействие нелинейно намагничающихся частиц можно рассчитывать, пренебрегая их взаимной поляризацией. Отличие от случая линейного намагничивания одиночной частицы заключается лишь в том, что внутреннее поле определяется из уравнения

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 - \frac{1}{3} \frac{\chi_0 \mathbf{h}}{\chi_0 h + 1}, \quad (1.86)$$

полученного подстановкой в (1.16) соотношения Фрёлиха Коннелли (1.84).

В случае, когда взаимное влияние частиц не учитывается, направления векторов  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{h}_0$  совпадают, и уравнение (1.86), записанное для величины  $h = |\mathbf{h}|$ , превращается в квадратное. Оно имеет два решения, одно из которых не является физическим. Отбрасывая его, находим, что напряжённость поля внутри частицы выражается формулой

$$h = \frac{\sqrt{36\chi_0 h_0 + (\chi_0 - 3\chi_0 h_0 + 3)^2} - (\chi_0 - 3\chi_0 h_0 + 3)}{6\chi_0}. \quad (1.87)$$

Кривая намагничивания  $\tilde{m}(h_0)$  изолированной частицы, рассчитанная по формулам (1.85) и (1.87), приведена на рисунке 1.7. Как видно, при величине восприимчивости  $\chi_0 = 10^4$ , характерной для железа, кроссовер намагничивания сферической частицы ферромагнетика Фрёлиха–Кеннелли (переход от линейного режима к насыщению) имеет место в узком интервале полей вблизи  $h_0 = 1/3$ . В паре частиц то же поведение будет присуще и энергии пары, и межчастичной силе.

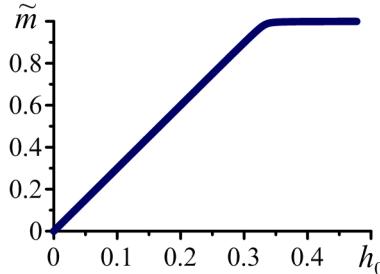


Рисунок 1.7 — Намагниченность уединённой частицы  $\tilde{m}$  с начальной восприимчивостью  $\chi_0 = 10^4$  в зависимости от напряжённости внешнего поля  $h_0$

Энергия двух нелинейно намагничивающихся частиц, поляризованных однородно, согласно (1.11) имеет вид

$$\tilde{U}_{\text{маг}}^{\text{H}} = \frac{U_{\text{маг}}^{\text{H}}}{\mu_0 M_s^2 a^3} = -\frac{4\pi}{3} \left[ \tilde{\mathbf{m}} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}_0) - 2 \int_0^h \tilde{\mathbf{m}} \cdot d\mathbf{h} \right]. \quad (1.88)$$

Подставляя сюда из (1.87) напряжённость внутреннего поля  $h$ , получим энергию взаимодействия нелинейно намагничивающихся дипольных частиц, не влияющих друг на друга. Её дифференцирование согласно (1.13) и (1.14) даёт силы взаимодействия  $\mathbf{f}_n$  и  $\mathbf{f}_\tau$ . Легко показать, что найденные функции совпадают с

компонентами силы (1.22), то есть с результатом прямого дифференцированием дипольной энергии.

Формулы (1.85-1.87) определяют простейший вариант описания парного взаимодействия намагничивающихся *нелинейно дипольных* частиц (модель НД), который обобщает представленную выше модель ЛД.

### 1.4.2 Нелинейные взаимодействующие диполи

Продолжая работу над дипольными моделями, построим для пары частиц модель *нелинейных взаимодействующих диполей* (модель НВД). Напряжённость поля внутри каждой из них определяется аналогично случаю линейного намагничивания (1.25) с тем отличием, что  $\chi(h)$  является теперь функцией поля. Учёт насыщения не изменяет общего вида системы уравнений (1.27) для внутреннего поля  $\mathbf{h}$ , но делает эту систему нелинейной:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h}_0, \quad \mathbf{A} = \left[ 1 + \frac{\chi(h)a^3}{3l^3} + \frac{\chi(h)}{3} \right] \mathbf{g} - \frac{\chi(h)a^3}{l^5} \mathbf{l}l. \quad (1.89)$$

Взяв конкретный вид зависимости  $\chi(h)$  из закона Фрёлиха–Кеннелли (1.85), систему (1.89) легко решить численно. Для расчёта межчастичных сил найденную напряжённость  $\mathbf{h}$  можно, следуя стандартной процедуре, подставить в энергию (1.88) и затем продифференцировать результат по  $\mathbf{l}$ . Однако гораздо проще сразу воспользоваться представлением (1.22) для силы взаимодействия.

На рисунке 1.8 приведены зависимости от внешнего поля сил притяжения–отталкивания  $f_n$  для четырёх ориентаций пары:  $\gamma = 0^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ , рассчитанные с помощью моделей взаимодействующих линейных и нелинейных диполей (ЛВД и НВД) и модели нелинейно намагничивающихся диполей (НД); здесь и далее для ферромагнетика Фрёлиха–Кеннелли (железо) мы полагаем  $\chi_0 = 10^4$ . Как видно, для пары диполей, описываемых моделью НД, насыщение силы притяжения/отталкивания действительно наступает вблизи  $h_0 = 1/3$ .

Для нелинейных взаимодействующих диполей (НВД) ситуация иная. В конфигурации «голова–хвост» поле, создаваемое одной частицей, усиливает поле в другой, а в конфигурации «бок–о–бок» — ослабляет его. Вследствие этого,

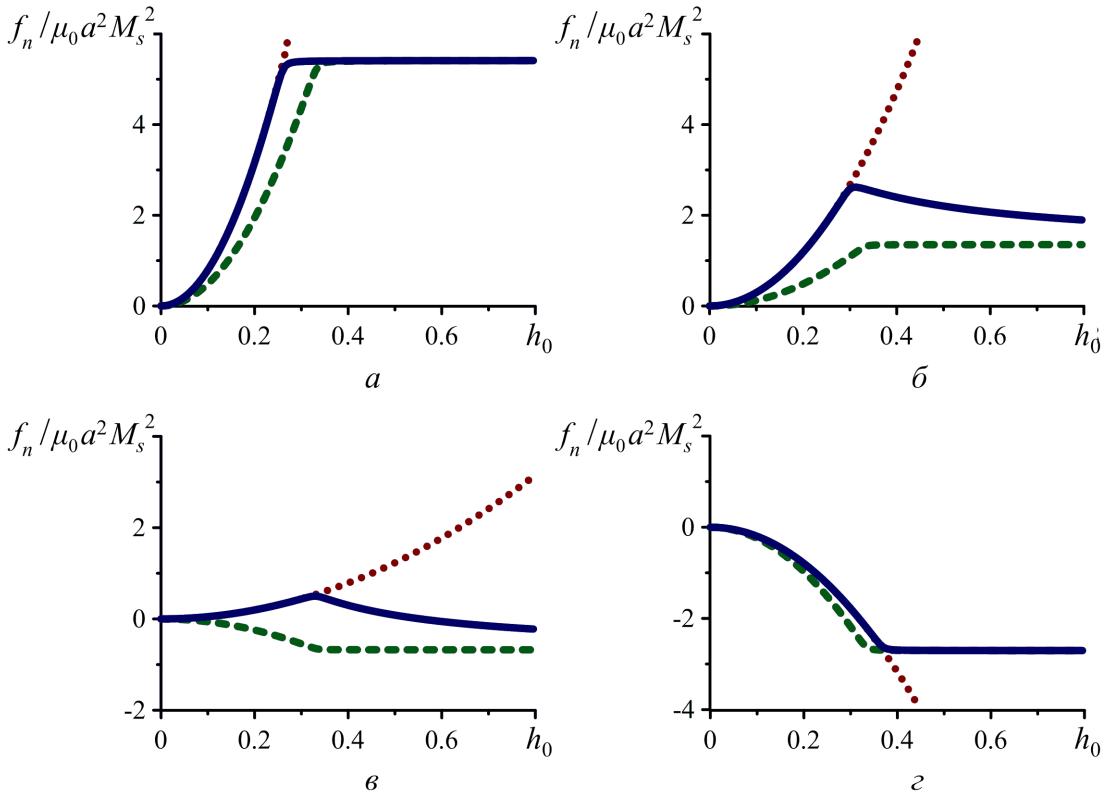


Рисунок 1.8 — Сила  $f_n$  при межцентровом расстоянии  $q = 2.1$  и различных ориентациях пары:  $\gamma = 0^\circ$  (а),  $45^\circ$  (б),  $60^\circ$  (в),  $90^\circ$  (г); сплошная линия — модель НВД, штриховая — НД, пунктирная — ЛВД

пара, ориентированная вдоль направления приложенного поля, насыщается в меньшем поле, чем пара, имеющая поперечную конфигурацию (см. рис. 1.8а и 1.8г). В тех случаях, когда межцентровый вектор направлен под промежуточным углом к полю (рис. 1.8б и 1.8в), в момент насыщения намагниченности сила притяжения/отталкивания достигает максимума, а при дальнейшем росте поля уменьшается. Этот неожиданный эффект имеет место только для частиц, намагниченность которых испытывает насыщение, и поэтому появляется только в модели НВД и в точном расчёте.

Поясним его происхождение. Внутреннее поле в рассматриваемой частице является векторной суммой внешнего поля  $\mathbf{h}_0$  и поля  $\mathbf{h}_d$ , созданного соседним диполем. При взятом для примера межцентровом расстоянии  $q = l/a = 2.1$  намагничающиеся частицы притягиваются друг к другу при углах ориентации пары в интервале  $0^\circ < \gamma < 75^\circ$  (см. рис. 1.4б). В линейном и квазилинейном режимах намагничивания магнитный момент частицы (и его вклад в поляризацию соседней) преимущественно растёт по величине, а не по направлению. В этой области силы взаимного притяжения частиц увеличивается с ростом поля

(см. рис. 1.8б и 1.8в). В режиме насыщения магнитные моменты частиц становятся постоянными по величине и в дальнейшем могут только поворачиваться. Это значит, что в сумме полей  $\mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_d$ , определяющей ориентацию вектора  $\mathbf{m}$ , модуль второго слагаемого перестаёт изменяться, между тем как вклад внешнего поля продолжает расти пропорционально  $\mathbf{h}_0$ . В результате, вектор внутреннего поля  $\mathbf{h}$  и, следовательно, магнитный момент частицы всё точнее выстраивается вдоль вектора внешнего поля, то есть угол  $\theta$  между  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{h}_0$  уменьшается. Функция  $\theta(h_0)$  показана на рисунке 1.9. Для неё также характерно кроссоверное поведение: угол  $\theta$ , оставаясь до некоторого значения поля практически постоянным, начинает затем асимптотически убывать до нуля.

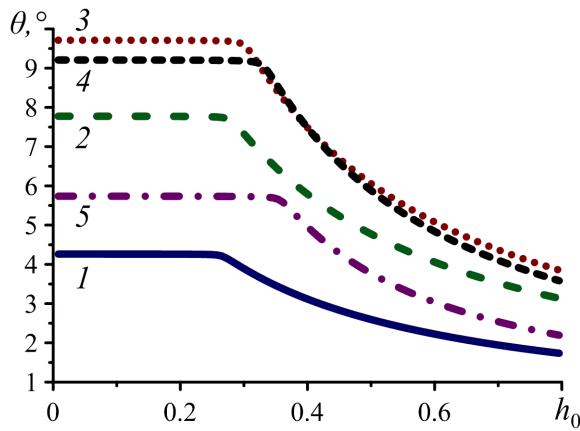


Рисунок 1.9 — Угол  $\theta$  между направлением внешнего поля  $\mathbf{h}_0$  и магнитным моментом диполя  $\mathbf{m}$  при  $q = 2.1$  в зависимости от величины  $h_0$  в конфигурациях:  $\gamma = 15^\circ$  (1),  $30^\circ$  (2),  $45^\circ$  (3),  $60^\circ$  (4) и  $90^\circ$  (5)

Поскольку в режиме насыщения магнитный момент не зависит от приложенного поля, взаимодействие таких частиц можно описывать моделью постоянных диполей [92]. Для них угловой интервал ориентаций пары, в котором имеется межчастичное притяжение, составляет  $0^\circ < \gamma < 54.7^\circ$ , то есть он существенно уже, чем для намагничивающихся частиц. Указанное обстоятельство позволяет понять, почему в сильных полях для пары с  $\gamma = 45^\circ$  взаимодействие остаётся притяжением (рис. 1.8б), а для пары с  $\gamma = 60^\circ$  увеличение поля приводит к тому, что взаимное притяжение сменяется отталкиванием (рис. 1.8в).

Сопоставим предсказания рассматриваемых моделей относительно зависимости силы  $f_n$  от расстояния между частицами. На рисунке 1.10 это сделано для конфигурации  $\gamma = 0^\circ$ . В слабом поле (рис. 1.10а) результаты моделей НВД и ЛВД (сплошная и пунктирная линии) очень близки. При промежуточном

значении поля (рис. 1.10б) зависимость, полученная по модели НВД (сплошная линия), хорошо аппроксимируется моделью НД (штриховая), а в сильных полях предсказания этих моделей фактически совпадают (рис. 1.10в).

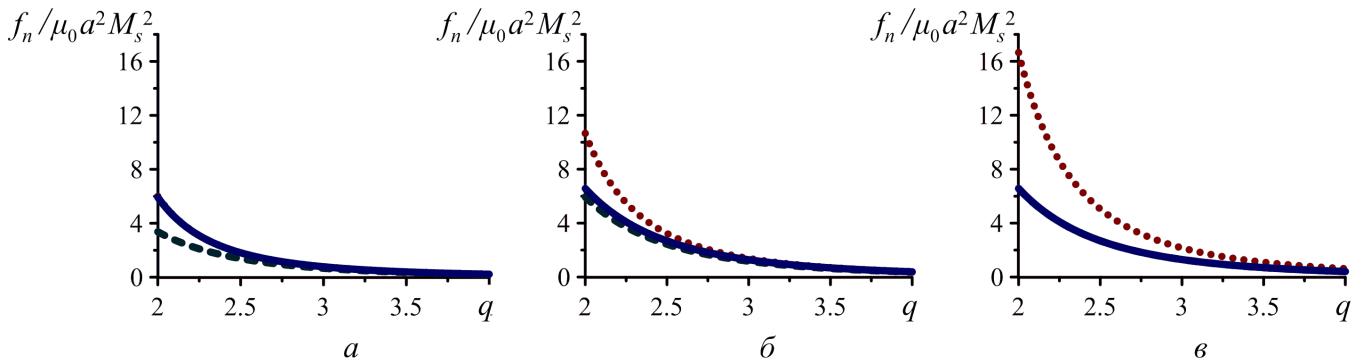


Рисунок 1.10 — Зависимость силы притяжения  $f_n$  от межчастичного расстояния в конфигурации  $\gamma = 0^\circ$ ; сплошная — модель НВД, штриховая — НД, пунктирная — ЛВД в полях  $h_0 = 0.24$  (а),  $0.32$  (б),  $0.4$  (в)

Как известно, пара дипольных частиц в конфигурации «голова–хвост» испытывает взаимное притяжение, а в фигуре «бок–о–бок» — отталкивание. В случае постоянных точечных диполей сила притяжения  $f_n$  меняет знак (превращается в силу отталкивания), когда угол  $\gamma$  превышает  $54.7^\circ$ , причём это критическое значение не зависит ни от расстояния между диполями, ни от величины приложенного поля. В случае намагничивающихся частиц учёт их взаимного влияния приводит к появлению других зависимостей.

Рисунок 1.11а схематически представляет пару частиц. Центр одной из них совпадает с началом координат. При максимальном сближении ( $q = l/a = 2$ ) вторая частица находится в плотном контакте с первой. В этом случае её центр располагается на дуге, изображённой жирной штриховой линией 1. Примерами других изолиний положения частицы ( $q = \text{const}$ ) являются дуги, также изображённые штрихами: 2, 3, 4, 5. Нейтральные линии на рисунке 1.11а, имеющие приблизительно радиальное направление — это геометрическое место точек, где  $f_n = 0$ . Область выше нейтралей соответствует притяжению частиц, а область под ней — их отталкиванию. Прямая линия, идущая под углом  $\gamma_0 = 54.7^\circ$  к оси ординат — это нейтраль для модели постоянных точечных диполей. Нейтральная линия модели ЛВД, как и должно быть, практически повторяет нейтраль модели НВД в полях ниже поля насыщения ( $h < 1/3$ ). Как видно, наибольший сдвиг нейтральной кривой и, соответственно, максимальная ширина углового интервала притяжения частиц имеет место в полях  $h < 1/3$ ,

так в поле  $h_0 = 0.32$  при плотном контакте частиц притяжение имеет место при  $0^\circ < \gamma < 64.6^\circ$ . В слабых полях ширина углового интервала притяжения максимальна; точное решение (в этом пределе модели НВД и ЛВД совпадают) даёт  $\gamma = 84^\circ$  (см. рис 1.4а в разделе 1.3.6). Зависимости нейтрального угла от приложенного поля в рассматриваемых дипольных моделях представлены на рисунке 1.11б для межцентровых расстояний, которые соответствуют штриховым дугам на рисунке 1.11а.

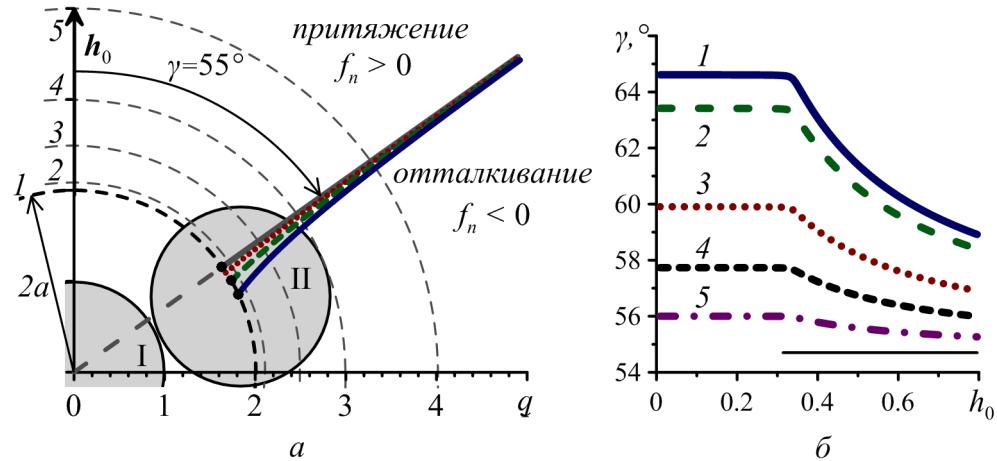


Рисунок 1.11 — а) Расположение областей взаимного притяжения / отталкивания частиц. Радиальные линии показывают нейтральные кривые для модели НВД при  $h_0 = 0.32$  (сплошная линия),  $0.64$  (штриховая линия),  $1.6$  (пунктирная линия); б) зависимость нейтрального угла ( $f_n = 0$ ) от величины приложенного поля при межцентровом расстоянии:  $q = 2$  (1),  $2.1$  (2),  $2.5$  (3),  $3$  (4),  $4$  (5)

На рисунке 1.12 приведены зависимости  $f_n$  от межцентрового расстояния при  $\gamma = 60^\circ$  в различных полях. Все кривые, соответствующие модели НД, расположены под осью абсцисс, что означает отталкивание частиц. Силы, определяемые моделью ЛВД, меняют знак при одном и том же расстоянии между диполями, вне зависимости от величины приложенного поля. Сила притяжения / отталкивания, вычисленная с помощью модели НВД, в поле  $h_0 = 0.32$  (то есть до перехода к насыщению) совпадает с той, что даёт модель ЛВД. Однако с ростом поля между ними появляется и увеличивается отличие; при этом значение межцентрового расстояния, при котором сила меняет знак, уменьшается.

В отношении касательной силы взаимодействия частиц  $f_\tau$  насыщение намагниченности играет неожиданную роль — оно является фактором, вызывающим нарушение угловой симметрии этой функции. Напомним, что в модели

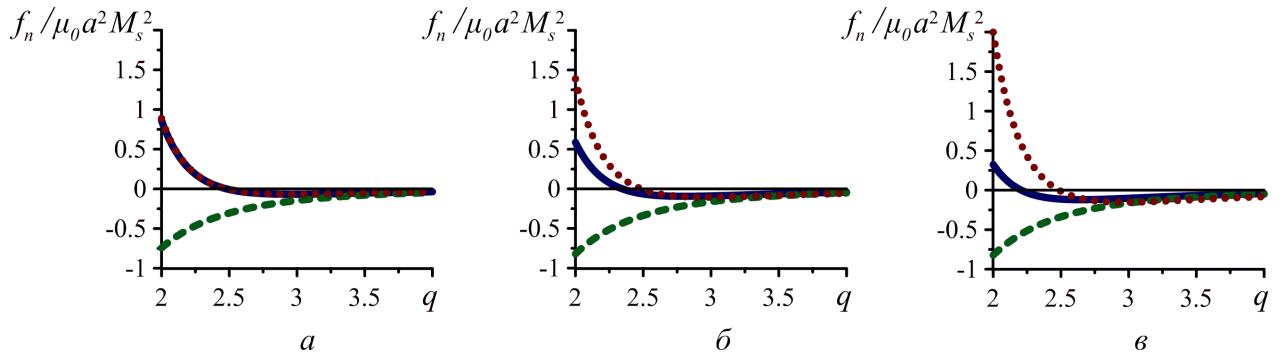


Рисунок 1.12 — Сила притяжения / отталкивания  $f_n$  в зависимости от межцентрового расстояния  $q$  при  $\gamma = 60^\circ$  в поле  $h_0 = 0.32$  (а), 0.4 (б), 0.48 (с); сплошная линия — модель НВД, штриховая линия — НД, пунктирная — ЛВД

постоянных диполей, а также в моделях ЛД, ЛВД и НД, зависимость парной энергии от угла  $\gamma$  находится точно и описывается функцией  $\cos^2 \gamma$  (см. разделы 1.3 и [7; 93]), что для касательной компоненты в любой из этих моделей даёт  $f_\tau \propto \sin 2\gamma$ . В частицах, намагничивающихся с насыщением, такая универсальность отсутствует. Модель НВД позволяет продемонстрировать этот эффект и указать его величину (см. рис. 1.13 и 1.14). Как видно, максимум  $f_\tau$  смещается в сторону больших углов тем сильнее, чем больше приложенное поле  $h_0$  и чем ближе друг к другу располагаются диполи.

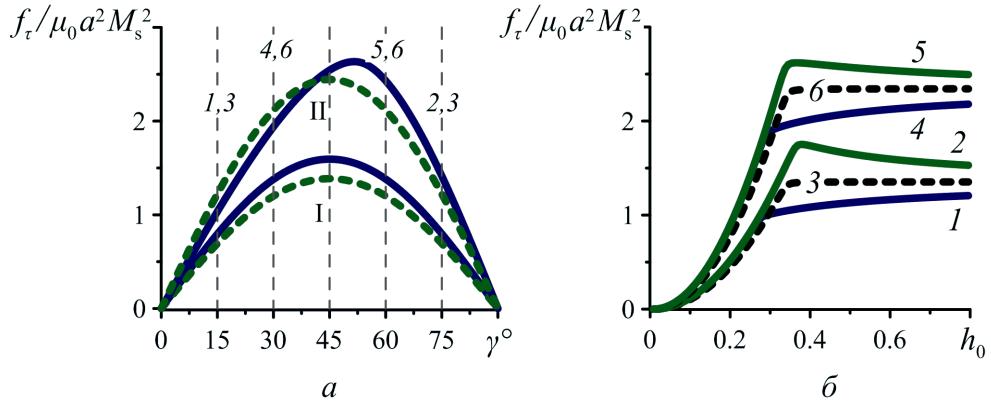


Рисунок 1.13 — а) угловая зависимость силы  $f_\tau$  при  $q = 2.1$  в полях  $h_0 = 0.24$  (I) и  $0.32$  (II); сплошная линия — модель НВД, штриховая линия — НД; б) сила  $f_\tau$  в зависимости от величины внешнего поля  $h_0$  при  $q = 2.1$ ; сплошные линии — модель НВД для углов  $\gamma = 15^\circ$  (1) и  $75^\circ$  (2),  $30^\circ$  (4) и  $60^\circ$  (5); штриховые — модель НД для углов  $\gamma = 15^\circ$  и  $75^\circ$  (3),  $\gamma = 30^\circ$  и  $60^\circ$  (6)

Отметим одно из следствий нарушения угловой симметрии  $f_\tau$ . Как видно из рисунка 1.13а, модель НД в полях меньших поля насыщения предсказывает равные значения силы  $f_\tau$  для пар углов равноотстоящих от  $\gamma = 45^\circ$ , например,

$30^\circ$  и  $60^\circ$ . Однако в результате взаимодействия диполи в первой конфигурации насыщаются быстрее, чем во второй. При этом в режиме насыщения сила взаимодействия частиц в парах с ориентациями  $\gamma < 45^\circ$  продолжает расти (кривые 1 и 4 на рис. 1.13б) и приближается к предельному значению (задаваемому моделью НД) снизу, в конфигурациях же, где  $\gamma > 45^\circ$ , эта сила, достигнув максимума, убывает и приближается к указанному пределу сверху (кривые 2 и 5 на рис. 1.13б).

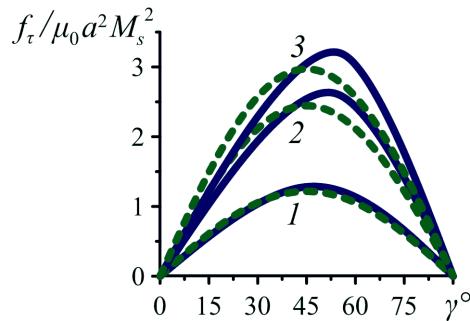


Рисунок 1.14 — Угловая зависимость силы  $f_\tau$  в поле  $h_0 = 0.32$  при различных межцентровых расстояниях:  $q = 2.5$  (1),  $2.1$  (2),  $2$  (3); сплошные линии — модель НВД, штриховые — модель НД

## 1.5 Численное решение задачи магнитостатики для пары нелинейно намагничивающихся частиц конечного размера

Несмотря на то, что модель НВД оказывается весьма полезна для того, чтобы понять, как влияет насыщение намагниченности на взаимодействие частиц, она остаётся приближенной. В разделе 1.3 показано, что в результате пренебрежения неоднородным намагничиванием внутри частиц, дипольные модели катастрофически недооценивают магнитные силы, возникающие между близко расположеннымми частицами. Именно поэтому необходимо получить решение задачи магнитостатики нелинейно намагничивающихся частиц в полной постановке.

Напомним постановку магнитостатической задачи. Две одинаковые сферические частицы радиуса  $a$  погружены в немагнитную  $\mu = 1$  матрицу, а их центры отстоят друг от друга на расстояние  $l$ . Вектор  $\mathbf{l}$  проведён от частицы 1

к частице 2 и составляет угол  $\gamma$  с направлением поля  $\mathbf{h}_0$ . Выбор системы координат представлен на рисунке 1.15, её центр совмещён с центром масс пары, ось  $Oz$  направлена вдоль  $\mathbf{h}_0$ , а плоскость  $Oyz$  проходит через вектор  $\mathbf{l}$ . Напомним также, что радиус  $a$  используется в качестве единицы длины и межцентровое расстояние определяется в виде  $q = l/a$ , так что значение  $q = 2$  соответствует плотному контакту частиц.

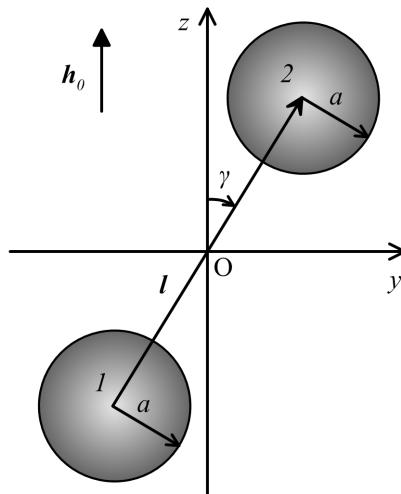


Рисунок 1.15 — Система координат, выбранная для решения задачи

Поскольку типичным материалом микрочастиц, которыми наполнены МР эластомеры, является железо, в разделе 1.4 для закона нелинейного намагничивания выбрана форма Фрёлиха–Кеннелли (1.84). После введения безразмерных напряжённостей внутреннего  $\mathbf{h}$  и внешнего  $\mathbf{h}_0$  (по отношению к частице) полей закон принимает вид:

$$\tilde{\mathbf{m}} = \chi(h)\mathbf{h} = \frac{\chi_0}{\chi_0 h + 1}\mathbf{h}. \quad (1.90)$$

Магнитостатический потенциал вводится таким образом, чтобы он измерялся в единицах  $M_s$  и включал в себя вклад однородного внешнего поля:

$$\mathbf{h} = -\nabla\psi. \quad (1.91)$$

Функция  $\psi(\mathbf{r})$  определена во всём пространстве и удовлетворяет уравнению (1.7), полученному из уравнений Максвелла, и граничным условиям (1.9) на поверхности каждой из частиц. Нелинейный характер уравнений делает невозможным аналитическое решение задачи, подобное полученному в разделе 1.3.

### 1.5.1 Алгоритм численного решения

Для численного решения уравнений (1.7) и (1.9) мы использовали итерационный алгоритм, представляющий нелинейную задачу через последовательность линейных. Магнитостатический потенциал рассчитывался в конечной области пространства, которая имеет форму куба со стороной  $d = \kappa(l + 2a)$ , где  $\kappa \gg 1$  — числовой коэффициент. Вне расчётной области  $\psi(\mathbf{r})$  задавался в виде суммы потенциалов точечных диполей, магнитные моменты которых равны магнитным моментам рассматриваемых частиц, подсчитанным на предыдущем шаге цикла.

В начале расчёта функцию  $\chi(\mathbf{r})$  (она отлична от нуля только внутри частиц) полагали однородной и равной начальному значению  $\chi_0$ . В этом приближении находили потенциал  $\psi(\mathbf{r})$ , а путём его дифференцирования — напряжённость поля  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ . Из её распределения внутри частиц по формулам (1.90) строили следующее приближение для функции  $\chi(\mathbf{r})$ , используемое на новом шаге цикла. Таким образом, каждая итерация представляла собой решение линейной задачи магнитостатики для системы с пространственно-неоднородной восприимчивостью. Вычисление  $\chi(\mathbf{r})$  продолжалось до тех пор, пока намагниченности частиц  $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$  не переставала изменяться.

Компьютерный код, реализующий указанный алгоритм, был написан на языке `python` с использованием библиотеки `esys.escript`, предназначеннай для решения трёхмерных задач методом конечных элементов [94]. Вычислительная сетка имела сгущения в областях, где ожидались наибольшие градиенты потенциала (см. рис. 1.16). Для этого, размер  $\xi_1$  элемента на поверхностях частиц, обращённых друг к другу, уменьшали по сравнению с размером  $\xi_2$  элемента на «удалённых» поверхностях частиц; здесь  $\xi_2 \ll \xi_3$ , где  $\xi_3$  — размер элемента сетки на границе расчётной области. Вариацией параметров  $\xi_{1-3}$  и  $\kappa$  подбиралось оптимальное соотношение между точностью решения и доступным вычислительным ресурсом.

Как выяснилось, при изменении размера элемента  $\xi_1$  при различных  $\xi_2$  и фиксированных значениях других параметров сетки, величина энергии практически не изменяется при  $\xi < 0.02$  в единицах радиуса частицы  $a$  (рис. 1.17а). При этом, уменьшение  $\xi_1$  и  $\xi_2$  ощутимо увеличивает число узлов сетки, а сле-

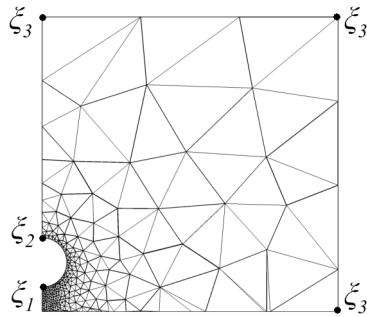


Рисунок 1.16 — Параметры построения сетки на примере сечения плоскостью  $Oyz$  половины ( $z > 0$ ) расчётной области

довательно время и требуемые для расчёта ресурсы. Хорошим сочетанием являются значения  $\xi_2 = 0.06$  и  $\xi_1 = 0.02$  дающие достаточно точное решение при относительно небольшом числе узлов сетки (рис. 1.17б).

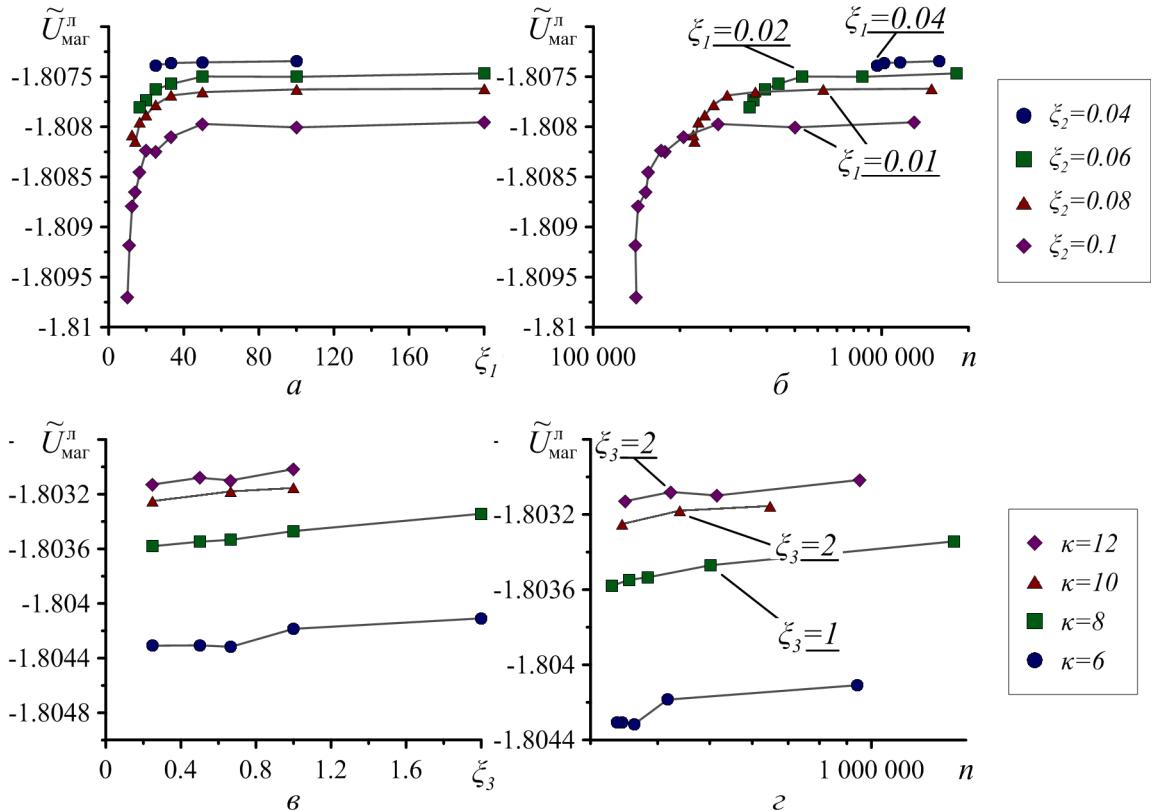


Рисунок 1.17 — а) Зависимость величины вычисляемой энергии от параметров сетки  $\xi_1$  при различных  $\xi_2$ ; б) то же в зависимости от числа узлов сетки; в) величина энергии в зависимости от  $\xi_3$  при различных  $\kappa$ ; г) то же в зависимости от числа узлов сетки. Параметры  $\xi_{1-3}$  и  $\kappa$  измеряются в единицах радиуса частиц  $a$ . Рассматривалась пара частиц в конфигурации  $q = 2.02$ ,  $\gamma = 0^\circ$  во внешнем поле  $h_0 = 0.16$

Рисунок 1.17в показывает, что размер области окружения  $\kappa$  значительно влияет на точность расчёта. Значимость параметра  $\xi_3$  при этом схожа с та-  
кой для параметров  $\xi_{1,2}$ . Параметры  $\xi_3 = 2$ ,  $\kappa = 12$  были выбраны в результате  
сопоставления графиков на рисунках 1.17в и 1.17г. Расчёты проводились с ис-  
пользованием суперкомпьютера «Уран» ИММ УрО РАН.

### 1.5.2 Силовое взаимодействие нелинейно намагничивающихся частиц

Магнитостатическая задача (1.7) и (1.9) решалась в широком диапазоне геометрических параметров пары,  $q = l/a$  и  $\gamma$ , и приложенного поля  $\mathbf{h}_0$  при начальной восприимчивости  $\chi_0 = 10^4$ . Магнитные поля, полученные в системе  $q = 2.5$  и  $\gamma = 0^\circ$  в зависимости от величины приложенного поля  $h_0$ , представле-  
ны на рисунке 1.18, отчетливо демонстрирующем неоднородность намагниченности внутри частиц. Те области, которыми частицы повёрнуты друг к другу, намагничиваются до насыщения значительно раньше остального объёма.

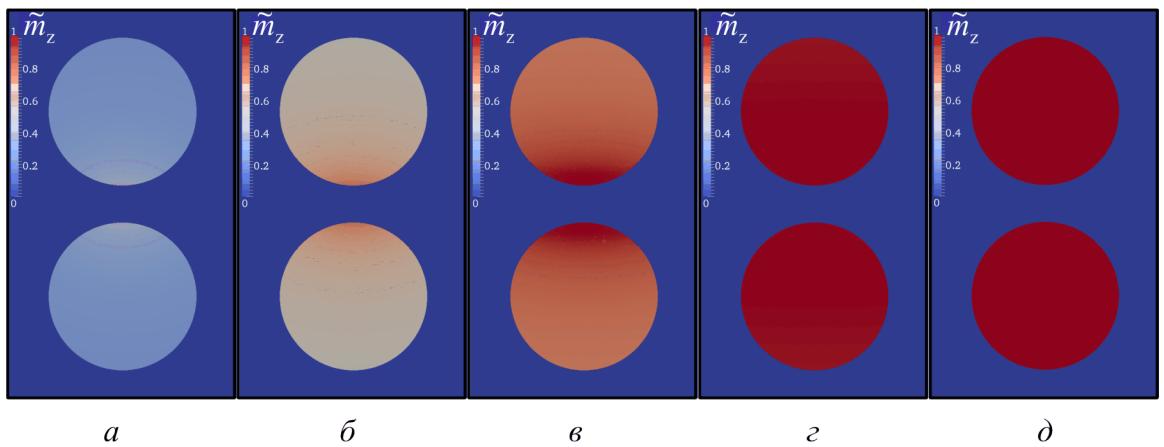


Рисунок 1.18 — Компонента  $z$  вектора намагниченности  $\tilde{\mathbf{m}}$  в системе из двух частиц в конфигурации  $q = 2.5$  и  $\gamma = 0^\circ$  во внешнем поле  $h_0$ : а) 0.08; б) 0.16;  
в) 0.24; г) 0.32; д) 0.4. На рисунке представлено сечение расчётной области  
плоскостью  $Oyz$ . Ось  $Oz$  направлена вертикально вверх

При выборе формулы Фрёлиха–Кеннелли в качестве закона намагничивания выражение для энергии (1.11) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{\text{маг}}^{\text{H}} &= \frac{1}{a^3} \int \left[ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{m}} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}_0) - \int_0^h \tilde{\mathbf{m}} \cdot d\mathbf{h} \right] dV = \\ &= \frac{1}{a^3} \int \left[ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{m}} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}_0) - \frac{\chi_0 |h| - \ln(\chi_0 |h| + 1)}{\chi_0} \right] dV, \quad (1.92)\end{aligned}$$

и используется для расчёта энергии взаимодействия пары частиц. Интегрирование в (1.92) ведётся по объёму частиц. Результатом является дискретный массив значений  $U_{\text{маг}}^{\text{H}}(h_0, l, \gamma)$ . На рисунке 1.19а представлены некоторые данные расчёта для конфигурации  $\gamma = 0^\circ$ . Функция  $U_{\text{маг}}^{\text{H}}(h_0, l, \gamma)$ , зависящая от трёх переменных, имеет нетривиальный характер, затрудняющий построение физически обоснованной интерполяционной формулы. Для удобства работы с полученными данными, в дальнейшем использовалась сплайн–интерполяция. На первом шаге для каждого межцентрового расстояния  $q$  при  $\gamma = 0^\circ$  дискретная функция  $U_{\text{маг}}^{\text{H}}(h_0)$  в области её определения  $h_0 \in [0, 0.48]$  пополнялась дополнительными значениями с помощью сплайн–интерполяции (рис. 1.19б). В результате этой процедуры для любого необходимого значения поля  $h_0$ , мы можем получить  $U_{\text{маг}}^{\text{H}}(l)$  и построить интерполяцию уже для неё. Аналогичным образом строится  $U_{\text{маг}}^{\text{H}}(\gamma)$ . После этого силы магнитного (пондеромоторного) взаимодействия частиц могут быть выражены с помощью производных от интерполяционной формулы магнитной энергии согласно (1.13) и (1.14).

Наиболее простая и часто используемая модель для описания сил магнитного взаимодействия частиц — приближение точечных диполей, описаное в разделе 1.4, которое справедливо в случае  $q \ll l/a$ . Тем самым оно вполне оправдано для таких магнитореологических систем, где концентрация частиц мала, а их распределение однородно. В плотных МР полимерах большинство частиц сближены настолько, что расстояния между ними оказываются порядка их собственного размера:  $q \gtrsim 2$ . Для этой ситуации приближение точечных диполей непригодно, поскольку значительный вклад в межчастичные силы вносят неоднородности намагничивания частиц, обусловленные их взаимным влиянием. В случае линейной поляризации ( $\chi = \text{const}$ ) указанная задача во всём интервале

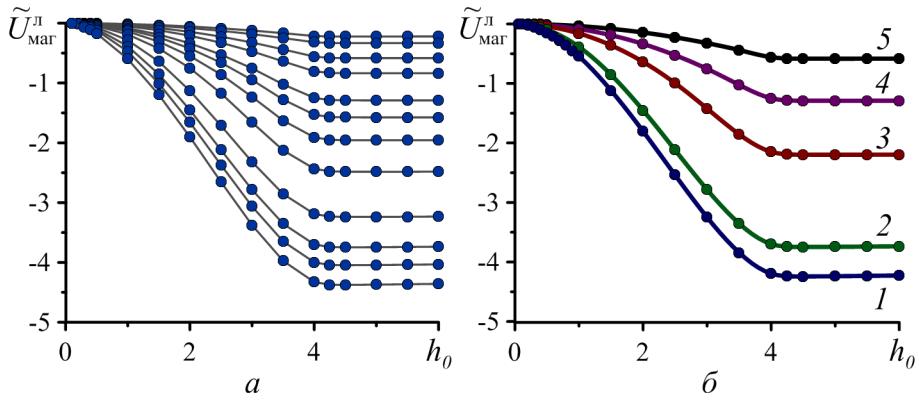


Рисунок 1.19 – а) Дискретный массив данных об энергии системы  $\tilde{U}_{\text{маг}}^{\text{H}}$  при  $\gamma = 0^\circ$  и некоторых различных  $q$ ; б) сплайн–интерполяция, построенная по дискретному массиву данных об энергии для межцентровых расстояний  $q = 2.02$  (1), 2.1 (2), 2.5 (3), 3 (4), 4 (5)

$0 \leq q \leq \infty$  может быть решена точно в терминах мультипольного разложения (см. раздел 1.3).

Как и следовало ожидать, различия между предсказаниями линейных моделей — дипольной и мультипольной — увеличиваются по мере сближения частиц ( $q \rightarrow 2$ ), и при плотном контакте вычисляемые величины могут отличаться в десятки раз (см. раздел 1.3 и [5; 95]). Однако общим свойством этих решений является квадратичный рост силы  $\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_\tau \propto h_0^2$  независимо от порядка мультипольного приближения. Как указано выше, для реальных МР полимеров предположение о линейности намагничивания может быть использовано только в слабых полях и обязательно нарушается при  $h_0 \gtrsim 0.08$ , когда зависимость  $\chi(h)$  становится существенно нелинейной.

Насыщение намагнченности означает и насыщение межчастичных сил: они перестают зависеть от величины приложенного поля. Это поведение иллюстрируют рисунки 1.20 и 1.21, где представлены результаты расчёта межчастичных сил в зависимости от  $h_0$ , а параметром служит межцентровое безразмерное расстояние  $q$ . На этих графиках сплошными линиями показаны результаты выполненного численного расчёта с учётом насыщения намагнченности, а параболические кривые (пунктирные линии) соответствуют решениям в приближении линейного намагничивания частиц при числе мультиполей около 100 (интерполяционная формула (1.82), описанная в разделе 1.3). Штриховые линии получены с помощью модели нелинейных взаимодействующих диполей (НВД), которая описана в разделе 1.4.

Как видно из рисунка 1.20, в положении «голова–хвост» ( $\gamma = 0^\circ$ ) насыщение намагниченности, связанное с взаимным влиянием частиц, может быть очень значительным. Например, при  $q = 2.05$  линейное мультипольное приближение (рис. 1.20а, пунктирная линия) нарушается уже при  $h_0 \lesssim 0.08$ . Из этого же рисунка видно, что на малых межчастичных расстояниях непригодна и модель НВД, которая учитывает насыщение намагниченности в предположении об однородности последней. Поскольку сила магнитного притяжения быстро уменьшается с ростом межчастичного расстояния, то масштабы графиков по вертикальным осям различны.

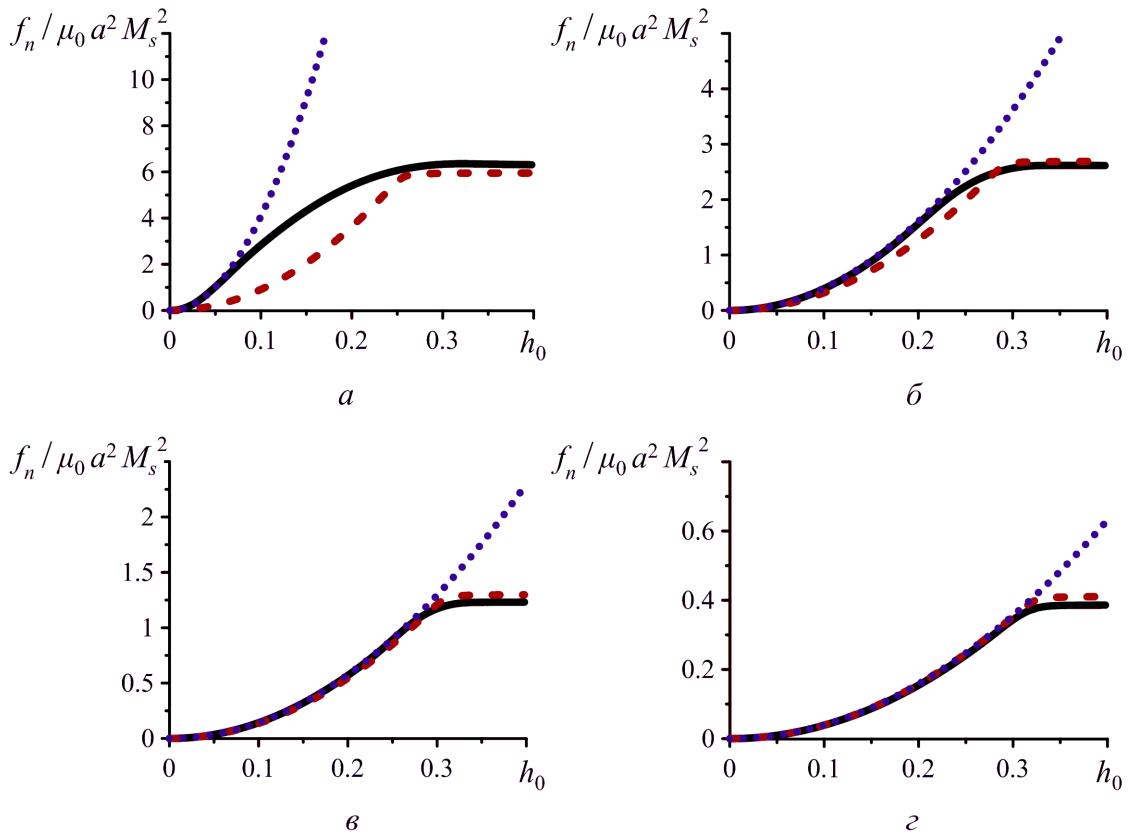


Рисунок 1.20 — Силы притяжения частиц в положении «голова–хвост» ( $\gamma = 0^\circ$ ) в зависимости от приложенного поля  $h_0$  для межцентровых расстояний  $q$ : 2.05 (а); 2.5 (б); 3 (в); 4 (г); сплошные линии — численное решение, пунктирные — мультипольное приближение при линейном намагничивании, штриховые — модель НВД

В случае, когда частицы расположены не слишком близко друг к другу ( $q \gtrsim 3$ ), все решения хорошо согласуются между собой вплоть до области перехода намагниченности от возрастания к насыщению. При дальнейшем росте напряжённости поля модель НВД продолжает близко следовать за числен-

ным решением, в то время как приближение линейного намагничивания начинает завышать величину межцентровой силы. Однако, как показывает рисунок 1.21, для сил отталкивания ( $\gamma = 90^\circ$ ) модель НВД вполне приемлема уже при  $q > 2.5$ .

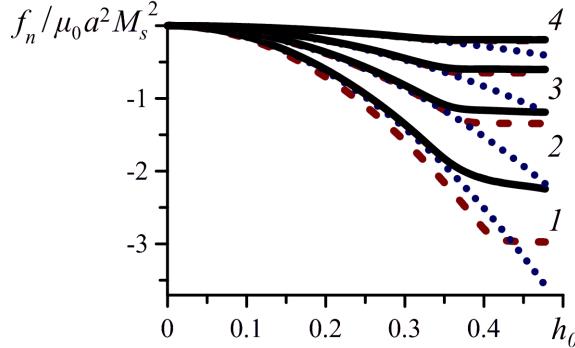


Рисунок 1.21 — Силы отталкивания частиц в положении «бок–о–бок» ( $\gamma = 90^\circ$ ) в зависимости от приложенного поля  $h_0$  для межцентровых расстояний  $q$ : 2.05 (кривая 1), 2.5 (2), 3 (3) и 4 (4). Сплошные линии — численное решение, точки — мультипольное приближение при линейном намагничивании, штрихи — модель НВД

Сравнение рисунков 1.20 и 1.21 показывает, что силы взаимодействия частиц в положениях «голова–хвост» и «бок–о–бок» насыщаются при различных значениях поля. Так, например, для  $q = 2.5$  сила притяжения достигает наибольшего значения при  $h_0 \sim 0.28$  (рис. 1.20), но при этом сила отталкивания составляет лишь около половины максимально возможной (рис. 1.21). Подобное поведение сил имеет простое объяснение: в положении «голова–хвост» взаимное влияние частиц усиливает поля внутри них и тем самым приближает намагниченность к насыщению; в положении «бок–о–бок» магнитное взаимодействие частиц уменьшает внутренние поля, снижая тем самым намагниченность. Аналогичное поведение демонстрирует и модель НВД (см. рис. 1.8)

Из–за нелинейности задачи сила межчастичного взаимодействия при промежуточных значениях  $\gamma$  не является точной суперпозицией указанных выше предельных случаев и для любого угла должна рассчитываться отдельно. Рисунок 1.22 иллюстрирует один такой случай:  $\gamma = 45^\circ$ . Как видно, для частиц, находящихся друг от друга на расстоянии  $q \geq 3$ , модель НВД очень хорошо аппроксимирует численное решение (см. рис. 1.22в и 1.22г). Это означает, что неоднородности намагниченности, вызванные взаимным влиянием частиц, весьма малы. Если же частицы находятся в достаточно близком соседстве, между

численным решением и моделью НВД в области умеренных полей прослеживается лишь качественное сходство (см. рис. 1.22а и 1.22б). Соответствующие кривые (сплошная и штриховая) асимптотически сближаются только в сильных полях, где частицы намагничены однородно и, таким образом, неотличимы от точечных диполей. Рисунок 1.22 указывает также на немонотонность функции  $f_n(h_0)$ : сила притяжения достигает максимума при конечном значении поля, а затем убывает. Эта особенность, которую обнаруживают как численный расчёт, так и модель НВД, есть результат конкуренции двух противоположных эффектов: увеличения магнитного момента каждой из частиц и их взаимного размагничивания.

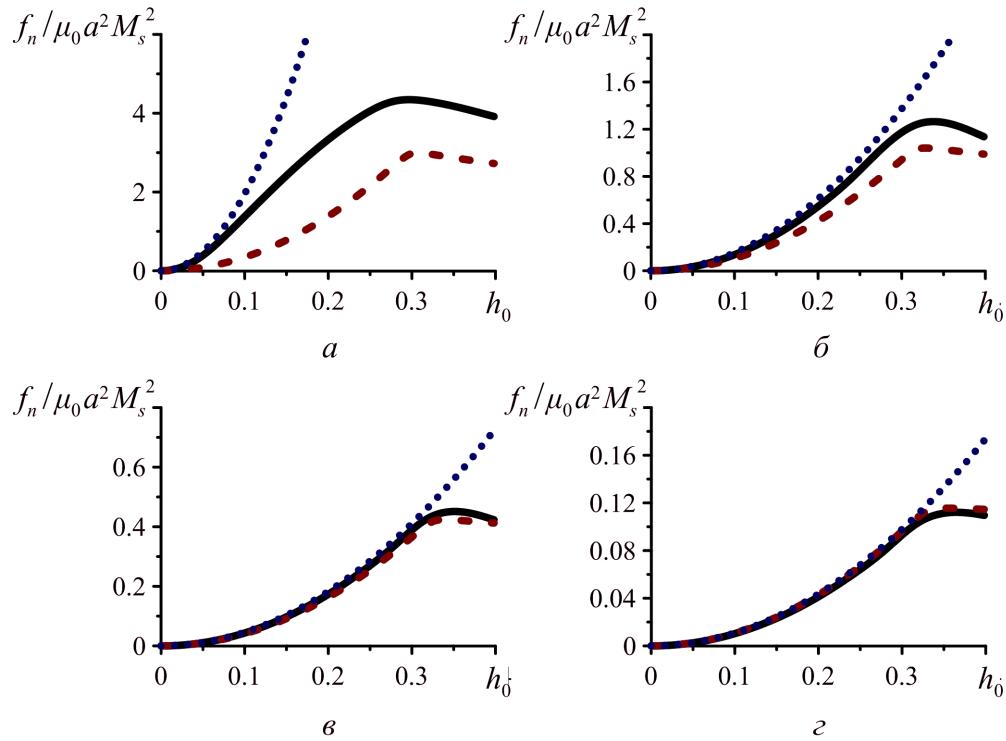


Рисунок 1.22 — Силы притяжения частиц в положении  $\gamma = 45^\circ$  в зависимости от приложенного поля  $h_0$  для различных межцентровых расстояний  $q$ : 2.05 (а); 2.5 (б); 3 (в) и 4 (г); сплошные линии — численное решение, пунктирные линии — мультипольное приближение при линейном намагничивании, штриховые линии — модель НВД

Рисунок 1.23 иллюстрирует зависимость парных сил от межчастичного расстояния в конфигурации «голова–хвост». Как показывают графики, при учёте насыщения применимость той или иной аппроксимации зависит от величины приложенного поля  $h_0$ . Так в поле, далёком от насыщения, сближение частиц влечёт за собой рост локального поля  $h$  и, как следствие, заметный

рост намагнченности. По этой причине модель линейно намагничивающихся частиц (пунктирные линии) неплохо описывает точное решение (см. рис. 1.23а). В сильном внешнем поле, которое само по себе насыщает намагнченность — ситуация, показанная на рисунках 1.23в и 1.23г — хорошим приближением для точного расчёта становится модель НВД (штриховые линии).

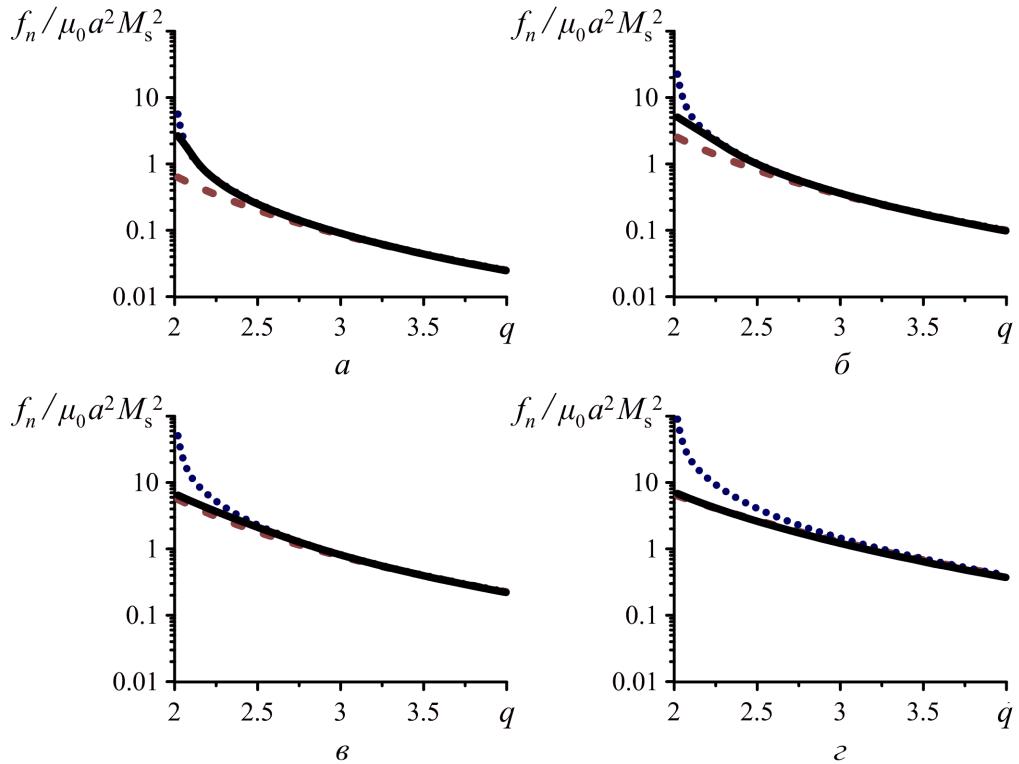


Рисунок 1.23 — Силы притяжения частиц в положении «голова–хвост» в зависимости от межцентрового расстояния  $q$  в поле  $h_0$ : 0.08 (а); 0.16 (б); 0.24 (в); 0.32 (г); сплошные линии — численное решение, пунктирные — мультипольное приближение при линейном намагничивании, штриховые — модель НВД

В положении «бок–о–бок» (см. рис. 1.24) даже, казалось бы, сильное внешнее поле внутри частиц ослабляется настолько, что переход к насыщению намагнченности заметно «откладывается». В результате, во всём изученном интервале полей модель, предполагающая линейное намагничивание частиц (пунктирные линии), неплохо описывает точное решение.

Насыщение намагнченности нетривиально влияет на касательную компоненту межчастичной силы  $f_\tau$ , аналогично той же компоненте, определяемой в рамках модели НВД. Как уже упоминалось, в случае линейного намагничивания частиц угловая зависимость парной энергии магнитного взаимодействия подчиняется закону  $\cos^2 \gamma$ , то есть остаётся той же, что для пары нелинейных

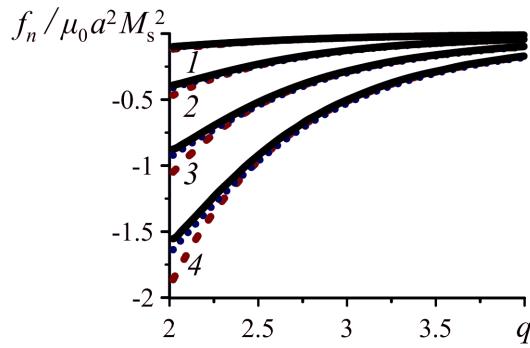


Рисунок 1.24 — Силы отталкивания частиц в положении «бок–о–бок» в зависимости от межцентрового расстояния  $q$  в магнитном поле  $h_0$ : 0.08 (кривая 1), 0.16 (2), 0.24 (3), 0.32 (4); сплошные линии — численное решение, пунктирные — мультипольное приближение при линейном намагничивании, штриховые — модель НВД

диполей (НД) (см. раздел 1.4) или пары частиц с постоянными магнитными моментами. Таким образом, для всех указанных моделей функция  $f_\tau(\gamma) \propto \sin 2\gamma$  достигает максимума при  $\gamma = 45^\circ$  и является чётной относительно этого значения. Однако в частицах, намагничающихся с насыщением, указанная симметрия отсутствует. Рисунок 1.25а представляет угловую зависимость  $f_\tau$  при различных значениях поля. Из него отчётливо видно, что максимум  $f_\tau$  располагается вблизи  $\gamma = 45^\circ$  только в слабом поле; с ростом последнего максимум кривой монотонно смещается в сторону больших углов (см. кривые II и III на рис. 1.25а).

Чтобы пояснить причину нарушения угловой симметрии, рассмотрим значения  $f_\tau$  для углов, равноотстоящих от  $\gamma = 45^\circ$ , например,  $(15^\circ, 75^\circ)$  и  $(30^\circ, 60^\circ)$ . На рисунке 1.25а эти углы отмечены штриховыми вертикалями, а соответствующие им зависимости  $f_\tau$  от величины поля представлены на рисунке 1.25б (для  $\gamma = 15^\circ, 75^\circ$ ) и 1.25в (для  $\gamma = 30^\circ, 60^\circ$ ). В слабом поле ( $h_0 < 0.08$ ) частицы мало влияют друг на друга, и значения  $f_\tau(45^\circ \pm \Delta\gamma)$  практически совпадают. При повышении поля в парах частиц, имеющих ориентацию  $\gamma < 45^\circ$ , взаимное намагничивание ускоряет переход к насыщению, а в парах с  $\gamma > 45^\circ$  замедляет его. Это видно из того, что на рисунках 1.25б и 1.25в параболические участки кривых для ориентаций  $\gamma > 45^\circ$  заметно протяжённее, чем их «аналоги» из интервала  $\gamma < 45^\circ$ .

Для сравнения на рисунках 1.25б и 1.25в штриховыми кривыми изображены зависимости  $f_\tau(45^\circ \pm \Delta\gamma)$ , рассчитанные по модели НД, которая не уч-

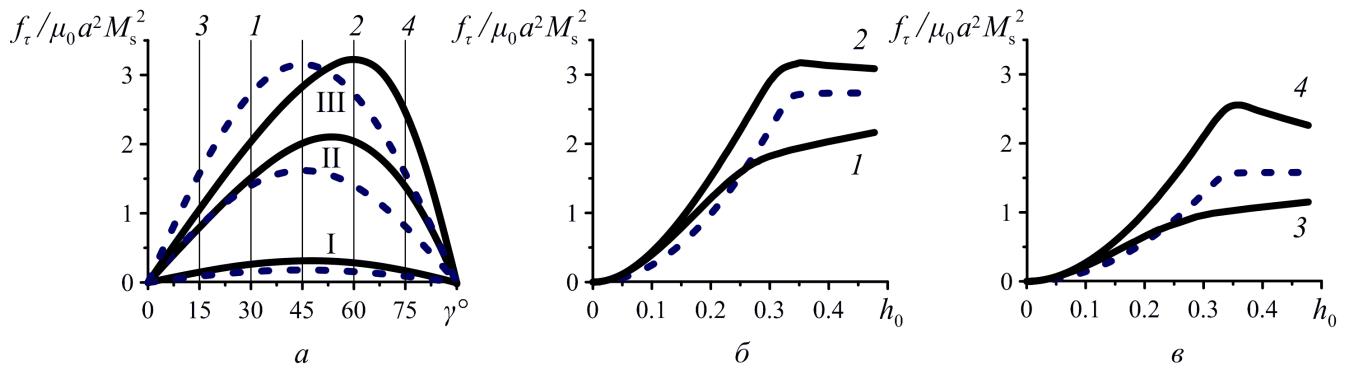


Рисунок 1.25 — Результаты численного расчёта касательной силы  $f_\tau$  при  $q = 2.02$ ; а) угловая зависимость для полей  $h_0$ : 0.08 (кривая I); 0.24 (II); 0.4 (III);

б) зависимость от величины внешнего поля: сплошные линии — численное решение для углов  $30^\circ$  (линия 1) и  $60^\circ$  (2), штриховая линия — результат по модели НД для  $f(45^\circ \mp 15^\circ)$ ; в) зависимость от величины внешнего поля: сплошные линии — численное решение для углов  $\gamma = 15^\circ$  (линия 3) и  $75^\circ$  (4); штриховая линия — результат согласно модели НД для  $f(45^\circ \mp 30^\circ)$

тывает изменение магнитных моментов, вызванное их взаимным влиянием. К такой схеме обсуждаемая задача сводится в пределе сильного поля, когда намагниченность каждой из частиц полностью насыщается и магнитный момент становится постоянным по величине:  $m = M_s V$ . Как видно, угловая асимметрия функции  $f_\tau(\gamma)$  отсутствует во всём диапазоне полей. Примечательно, что угловая симметрия  $f_\tau(\gamma)$  сохраняется не только в простой модели НД (частицы считаются точками), но и в модели с неоднородным распределением намагниченности, если только частицы парамагнитны (магнитная восприимчивость  $\chi$  постоянна), в чём мы убедились в разделах 1.3 и 1.4.

Сопоставление этих фактов с результатами численного расчёта, представленными на рисунках 1.25б и 1.25в, приводит к выводу, что нарушение симметрии  $f_\tau(\gamma)$  (отклонение сплошных кривых от штриховых) есть следствие специфических неоднородностей намагничивания, которые возникают вследствие «неполного» насыщения намагниченности внутри частиц. Конкретно речь идёт о ситуациях, когда под действием неоднородного внутреннего поля некоторая доля объёма частицы уже насыщена (то есть намагничен однородно), в то время как для остального объёма насыщение ещё не наступило (см. рис. 1.18в; очевидно, что в парамагнитных частицах такие состояния невозможны). В случае, представленном на рисунке 1.25, частицы расположены очень близко и их

взаимное влияние значительно. Поэтому асимметрия  $f_\tau$ , приводящая к расхождению линий на рисунках 1.25б и 1.25в, проявляется уже в относительно слабых внешних полях.

## 1.6 Области применения приближений дипольного типа

Даже двухчастичная задача с учётом насыщения намагниченности частиц является нелинейной и может быть решена полностью только численно, что требует большой затраты вычислительных ресурсов. Однако численное решение необходимо только в достаточно сильных полях. В области ниже поля насыщения оценку решения с приемлемой погрешностью (менее 5%) можно получить, полагая, что частицы намагничиваются линейно, а такая задача решается точно. Другой случай, где можно использовать простое решение — ситуация, когда межчастичные расстояния не слишком малы. Здесь в зависимости от величины межцентрового расстояния  $l$  и приложенного поля  $h_0$  можно использовать одну из дипольных моделей. Диаграмма пригодности моделей для расчёта межчастичных сил в паре, ориентированной в направлении «голова–хвост», то есть для  $\gamma = 0^\circ$ , приведена на рисунке 1.26. Плоскость параметров ( $h_0, q = l/a$ ) разделена на области, в каждой из которых одна из дипольных моделей заменяет точный расчёт с погрешностью не более 5%. Исключение составляет область 1, где частицы сближены почти до плотного контакта, и по этой причине ни одна из дипольных моделей не может обеспечить достаточной точности.

Предложенная в разделе 1.3 модель НВД закрывает на диаграмме рисунка 1.26 важную область плотного контакта частиц  $q = 2$  в интервале полей  $0.28 < h_0 < 0.36$ , где наступает насыщение намагниченности частиц. Без этой модели весь указанный «домен» пришлось бы отмакировать как доступный для рассмотрения только с помощью численного решения. Свою полезность и предсказательную силу модель НВД доказала также тем, что позволила обнаружить (i) немонотонную зависимость межцентровой силы  $f_n$  от приложенного поля и (ii) нарушение угловой симметрии силы  $f_\tau$ . Эти эффекты впоследствии обнаружились и при численном решении задачи о взаимодействии нелинейно поляризующихся частиц. Модель НВД, существенно упростив анализ межча-

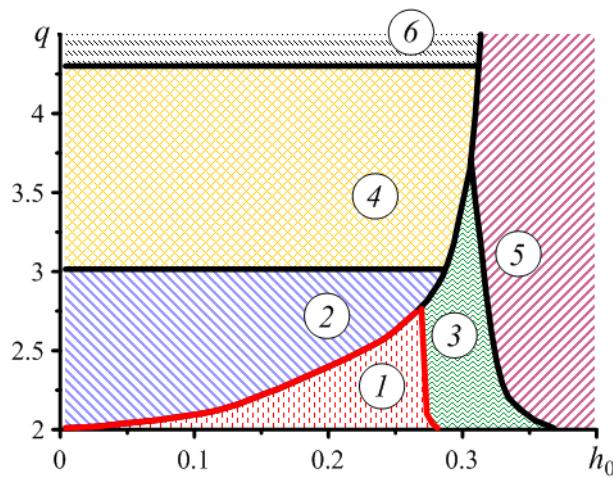


Рисунок 1.26 — Диаграмма применимости дипольных моделей для описания взаимодействия сферических частиц в конфигурации «голова–хвост» ( $\gamma = 0^\circ$ ) с погрешностью менее 5%: 1 — необходимо точное решение задачи о нелинейно намагничивающихся частицах; 2 — необходимо точное решение задачи о линейно намагничивающихся частицах, 3 — применима модель НВД, 4 — применима модель ЛВД, 5 — применима модель НД, 6 — применима модель ЛД

стичных сил, позволила дать ясные доказательства того, что причиной указанных нелинейных эффектов является магнитное насыщение частиц.

Очевидно, что изменение угла  $\gamma$  должно приводить к изменению границ областей на рисунке 1.26. Не приводя аналогичных диаграмм для других значений угла  $\gamma$ , отметим, что при расположении частиц «бок–о–бок» ( $\gamma = 90^\circ$ ) поле, созданное соседом, ослабляет действие внешнего поля внутри частицы, и поэтому области валидности приближенных моделей могут только увеличиться по сравнению с конфигурацией  $\gamma = 0^\circ$ . При этом, в конфигурациях, в которых частицы расположены под углом к внешнему полю  $\gamma \neq 0^\circ, 90^\circ$  погрешность дипольных моделей растёт (ср. рис. 1.20 и 1.22) и области точных решений становятся больше.

## Заключение к Главе 1

В настоящей главе изучено магнитостатическое (пондеромоторное) взаимодействие, возникающее между двумя частицами изотропного ферромагнетика, помещёнными во внешнее поле. Показано, что магнитный отклик систем взаимодействующих микрочастиц существенно зависит от того, являются эти частицы парамагнитными или ферромагнитными. Последние отличаются тем, что их восприимчивость нелинейна, и рост намагниченности ограничен уровнем насыщения  $M_s$ . В результате, для ферромагнитных частиц межчастичные силы зависят от приложенного поля  $H_0$  только в некотором диапазоне, а затем остаются постоянными.

По этой причине взаимодействие пары нелинейно намагничивающихся частиц имеет существенные отличия от случая простого парамагнетика. В частности, получаемое решение не масштабируется по величине приложенного поля, в то время как для парамагнетиков существует универсальная зависимость  $\propto H_0^2$ . Именно поэтому в задаче о насыщающемся магнетике не удается построить удобных аппроксимаций численного решения, подобных тем, что предложены для парамагнетиков (см. раздел 1.3 и [60]). Количественная разница с парамагнитным случаем обусловлена ещё и тем, что ферромагнетик (железо) имеет начальную магнитную восприимчивость  $\chi_0$  порядка  $10^2 - 10^4$ , в то время как для реальных (супер)парамагнетиков она на порядки ниже. Например, согласно [60], восприимчивость материала микросфер Dynabead составляет  $\sim 1$ .

Кроме того, в главе представлены результаты сопоставления различных моделей, используемых для описания магнитного взаимодействия частиц в магнитореологических суспензиях и полимерах и очерчены области их применения.

## Глава 2. Упругое взаимодействие двух твёрдых частиц в гиперупругой среде

В МР эластомере, наполнителем которого являются намагничивающиеся частицы, в результате их смещений под действием магнитных сил эластомерная матрица деформируется и в ней возникают упругие напряжения, которые порождают силу противодействия (возвращающую силу), приложенную к частице. В системе двух частиц поля напряжений, созданные каждой из них, взаимодействуют (в общем случае нелинейно), так что возвращающая сила, приложенная к одной частице, содержит вклад, обусловленный второй. Таким образом, изменение конфигурации пары частиц, вызванное намагничиванием, является результатом конкуренции между магнитными и упругими силами. Получив в Главе 1 магнитную энергию и силы взаимодействия частиц, перейдем к количественной оценке упругой энергии, которая необходима для того, чтобы изменить относительное расположение двух частиц, находящихся в эластомерной матрице в условиях полной адгезии к ней. Рассмотрим случай  $\gamma = 0^\circ$ , то есть ситуацию, когда магнитные силы стремятся сблизить частицы. Такая конфигурация позволяет решать магнитную и упругую задачи независимо, предполагая, что частицы двигаются строго вдоль межцентрового вектора  $\mathbf{l}$ . Используем введённую ранее систему координат, в которой ось  $Oz$  совпадает с  $\mathbf{l}$ . В ней перемещение частицы 1 задаётся вектором  $\mathbf{u}_1 = (0, 0, -u_\chi)$ , а частицы 2 — вектором  $\mathbf{u}_2 = (0, 0, u_\chi)$ . Тем самым мы полагаем, что упругая энергия  $U_{\text{упр}}$ , накапливающаяся в полимерной матрице, зависит только от величины смещения  $u_\chi$ . В этих условиях удобно ввести эффективный парный потенциал упругого взаимодействия частиц, параметры которого определяются через характеристики материала матрицы.

Существуют аналитические подходы к решению задачи о взаимодействии двух твёрдых сферических включений в упругой матрице, являющихся, вследствие разницы упругих свойств, концентраторами напряжений. Среди различных работ, посвященных этой теме, отметим работу [96], в которой напряжения, возникающие в бесконечной среде с двумя сферическими частицами, представляются в виде ряда с использованием дипольных сферических гармоник. Несколько менее громоздко взаимодействие твёрдых включений можно рас-

сматривать в двумерной постановке. Исследователи, использующие этот подход, с помощью аналитических методов изучают напряжённо–деформированное состояние (НДС) среды с парой частиц, подвергающейся внешней нагрузке, учитывая так же специфические условия на границе «матрица–частицы» (см. например [97]). Однако, все аналитические методы, рассматривающие взаимодействие сферических включений в упругой среде, пригодны только в рамках линейной теории упругости. Большие деформации эластомера в зазоре между частицами изучаются в работах, посвященных наполненным резинам [98; 99]. НДС матрицы определяется численно в предположении о нелинейном характере её упругости. Численный подход к решению подобных задач является, очевидно, единственным приемлемым при необходимости учёта больших деформаций среды. Важно отметить, что в композиционных материалах, состоящих из немагнитных фракций различных по упругим характеристикам, сила, смещающая частицы, не является результатом их силового взаимодействия, как в МР эластомерах, а возникает только в результате внешних нагрузок. Этим постановка задачи которую нам предстоит решить, отличается от любой из тех, что рассматриваются в механике обычных композитов.

## 2.1 Постановка задачи нелинейной теории упругости

Рассмотрим эластомерную среду, в которую помещены две сферические абсолютно твёрдые частицы радиуса  $a$ . Характерный размер (диаметр) частиц наполнителя МР эластомера 1 – 10 мкм. В механике композитов при анализе напряжённо–деформированного состояния материала на мезоуровне принимается гипотеза о том, что каждая из фаз композита является однородной сплошной средой [100]. В связи с этим, в рассматриваемых масштабах поведение эластомера может описываться с помощью аппарата механики сплошных сред. Положим, что полимерная матрица является гиперупругой, то есть её напряжённо–деформированное состояние не зависит от истории нагружения. Учитывая способность МР эластомеров к значительными деформациям с сохранением объёма, будем описывать полимерную матрицу моделью Муни–Ривлина, соответствующей несжимаемому материалу [101]. Среда Муни–Ривлина — хо-

рошо известное приближение, успешно справляющееся с описанием конечных деформаций в механике эластомеров [75]. Выражение для упругого потенциала несжимаемой матрицы имеет вид

$$W(\mathbf{C}) = c_1 \tilde{W}(\mathbf{C}) = c_1 [(I_1(\mathbf{C}) - 3) + \tilde{c}_2 (I_2(\mathbf{C}) - 3)], \quad (2.1)$$

где  $I_1(\mathbf{C})$  и  $I_2(\mathbf{C})$  — инварианты меры деформации Коши–Грина  $\mathbf{C}$ ,  $c_1$  и  $\tilde{c}_2 = c_2/c_1$  — числовые константы модели. Здесь также введён обезразмеренный потенциал  $\tilde{W} = W/c_1$ .

Запишем постановку задачи нелинейной теории упругости [101]. Введём отсчётную конфигурацию с радиус–вектором  $\mathbf{r}$ , в которой эластомер не деформирован. Под действием магнитных сил частицы сдвигаются, что вызывает смещение каждой точки матрицы. Это перемещение будем описывать вектором  $\mathbf{u}$ , связывающим  $\mathbf{r}$  с радиус–вектором  $\mathbf{R}$  в текущей (деформированной) конфигурации. Выберем некоторую систему координат и определим локальный базис начальной и текущей конфигураций  $\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}/\partial q^i$  и  $\mathbf{R}_i = \partial\mathbf{R}/\partial q^i$  с помощью обобщённых координат  $q^i$ . По метрическому тензору  $\mathbf{g} = (\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j) \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j$  можно определить вид базиса. Если он ортогональный и нормированный, то метрический тензор равняется единичному  $\mathbf{g} = \mathbf{I}$ . Определим оператор Гамильтона для обеих конфигураций:  $\tilde{\nabla} = \mathbf{R}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$  и  $\nabla = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ . Переход из начальной конфигурации в текущую описывается градиентом места

$$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{R})^T = \mathbf{g} + (\nabla \mathbf{u})^T, \quad (2.2)$$

где  $T$  — символ операции транспонирования. Обратный переход из текущей конфигурации в начальную выражается обратным тензором

$$\mathbf{F}^{-1} = (\tilde{\nabla} \mathbf{r})^T. \quad (2.3)$$

Поскольку градиент места не индифферентен и не инвариантен по отношению к преобразованиям жесткого движения, обычно используют другие величины для описания деформации тела, например, меру деформации Коши–Грина:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{g} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T; \quad (2.4)$$

и тензор деформации Коши–Грина:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{g}). \quad (2.5)$$

Формулировка объёмной плотности энергии среды Муни–Ривлина (2.1) включает инварианты меры деформации Коши–Грина:  $\mathbf{C}$ . Запишем их:

$$I_1(\mathbf{C}) = \text{sp}(\mathbf{C}) = C_{ii}, \quad I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} (I_1^2(\mathbf{C}) - I_1(\mathbf{C}^2)), \quad I_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}). \quad (2.6)$$

Поскольку эластомер рассматривается как несжимаемый материал, необходимо потребовать выполнение равенства  $J = \sqrt{I_3(\mathbf{C})} = 1$ , где  $J$  — якобиан, величина, которая описывает изменение объёма материала при деформации.

Для описания напряжений, возникающих в деформируемом теле, чаще всего используется тензор напряжений Коши  $\mathbf{T}$ , определяемый соотношением Коши:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{p}, \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{N}$  — нормаль к сечению тела в точке с усилием  $\mathbf{p}$  в текущей конфигурации. В случае больших деформаций вводят тензоры Пиолы–Кирхгофа 1-ого и 2-ого рода, определённые в начальной конфигурации:

$$\mathbf{P}_I = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{P}_{II} = \mathbf{P}_I \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.8)$$

Тензор  $\mathbf{P}_{II}$  связан с упругим потенциалом материала соотношением

$$\mathbf{P}_{II} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}. \quad (2.9)$$

Любое деформируемое тело должно удовлетворять уравнению равновесия, вытекающему из закона сохранения импульса. Запишем его в локальной форме в начальной конфигурации:

$$\nabla \cdot \mathbf{P}_I + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.10)$$

Здесь, кроме уже введённых набла–оператора в начальной системе координат  $\nabla$  и тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа  $\mathbf{P}_I$ , используются  $\rho$  — плотность среды и  $\mathbf{f}$  — вектор массовых сил. Отметим, что никакие массовые силы в задачу

не входят. Считается также, что образец эластомера деформируется квазистатически. В этом случае уравнение (2.10) упрощается:

$$\nabla \cdot \mathbf{P}_I = 0. \quad (2.11)$$

Завершают постановку задачи граничные условия. Частицы закреплены в матрице при условии полной адгезии. Поэтому, поверхность матрицы, прилегающая к частице, перемещается вместе с ней на одинаковую величину по всей границе, что выражается условием:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_2} = \mathbf{u}_2. \quad (2.12)$$

Запишем полную систему уравнений, составляющую постановку задачи о деформировании гиперупругой матрицы:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T) &= 0, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{g} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T, \\ \widehat{W} &= W(\mathbf{C}) - P(J - 1), \\ \mathbf{P}_{II} &= \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} - P J \mathbf{C}^{-1}, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_1} &= \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_2} = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_{II}|_{\Gamma} = 0, \\ J &= 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь  $\Gamma$  — внешняя граница рассматриваемого образца эластомера.

Приближенное решение задачи численными методами требует её вариационной постановки, основанной на применении принципа Лагранжа [102]. Запишем её для задачи (2.13):

$$\int_{\Omega_0} (\nabla \cdot \mathbf{P}_I) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{S_0} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_I) \cdot \delta \mathbf{u} dS_0 = 0. \quad (2.14)$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса–Остроградского, имеем:

$$\int_{\Omega_0} (\nabla \cdot \mathbf{P}_I) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \nabla \cdot (\mathbf{P}_I \cdot \delta \mathbf{u}) d\Omega_0 = 0. \quad (2.15)$$

Преобразуем полученное выражение к виду:

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{P}_I \cdot \nabla \delta \mathbf{u} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \mathbf{P}_I \cdot \delta \mathbf{F} d\Omega_0 = 0, \quad (2.16)$$

и получим вариационное уравнение Лагранжа в слабой постановке, позволяющее ослабить требования к гладкости искомого решения. Используя связь между тензорами Пиолы–Кирхгофа первого и второго рода:

$$\mathbf{P}_I = \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (2.17)$$

перепишем вариационное уравнение

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{P}_I \cdot \delta \mathbf{F} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \mathbf{P}_{II} \cdot \delta \mathbf{E} d\Omega_0 = 0. \quad (2.18)$$

Связь между упругим потенциалом  $W$  и тензорами напряжений позволяет переписать это выражение в следующем виде:

$$\int_{\Omega_0} \delta W d\Omega_0 = 0, \quad (2.19)$$

где  $\delta W = (\partial W / \partial \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{E}$ . Представленная вариационная постановка задачи не учитывает еще одно ограничение из системы уравнений (2.13). Условие несжимаемости требует введения новой функции объёмной плотности энергии  $\widehat{W} = W - P(J - 1)$ , после чего уравнение (2.19) принимает вид:

$$\int_{\Omega_0} \delta [W - P(J - 1)] d\Omega_0 = 0 \quad (2.20)$$

где  $P$  — среднее давление. В такой форме вариационная постановка задачи будет использоваться в дальнейшем для приближенного решения поставленной задачи методом конечных элементов.

## 2.2 Численное решение задачи о двух включениях в неограниченной гиперупругой среде

В этом параграфе мы рассмотрим численное решение поставленной задачи о деформировании неограниченной гиперупругой матрицы двумя твёрдыми частицами, смещающимися навстречу друг другу.

### 2.2.1 Постановка задачи и алгоритм решения

Для расчёта упругой энергии, накапливающейся в «двухчастичном» МР эластомере при смещении частиц внутри него, была написана программа на языке `python` с включением библиотеки `fenics` [19], реализующей метод конечных элементов. Расчётная область была выбрана в форме цилиндра с двумя одинаковыми сферическими полостями, расположенными вдоль его оси. В отсутствие поля расстояние между центрами полостей, моделирующими намагничивающиеся частицы, составляет  $q_0 = l_0/a$ . Цилиндрическая система координат выбрана таким образом, что её ось  $Oz$  направлена вдоль оси модельного цилиндрического «двухчастичного» МР эластомера (см. рис. 2.1).

Вариационная задача конечного деформирования упругой несжимаемой среды была сформулирована в отсчётной конфигурации:

$$\int_{\Omega_0} \delta[\tilde{W} - P(J - 1)]d\Omega = 0. \quad (2.21)$$

Здесь  $\Omega_0$  — начальный объём образца,  $P$  — среднее давление и  $J = \sqrt{I_3(\mathbf{C})}$ . Для безразмерного упругого потенциала  $\tilde{W} = W/c_1$  использовалась упругая константа  $\tilde{c}_2 = c_2/c_1 = 0.2$ , типичная для широкого класса эластомеров [103].

Осьевая и инверсионная симметрия системы (см. рис. 2.1) даёт возможность решать задачу только в квадранте ( $z > 0$ ) и рассматривать, таким образом, лишь одну частицу — сферу радиуса  $a$  с поверхностью  $\Gamma_1$  и граничными

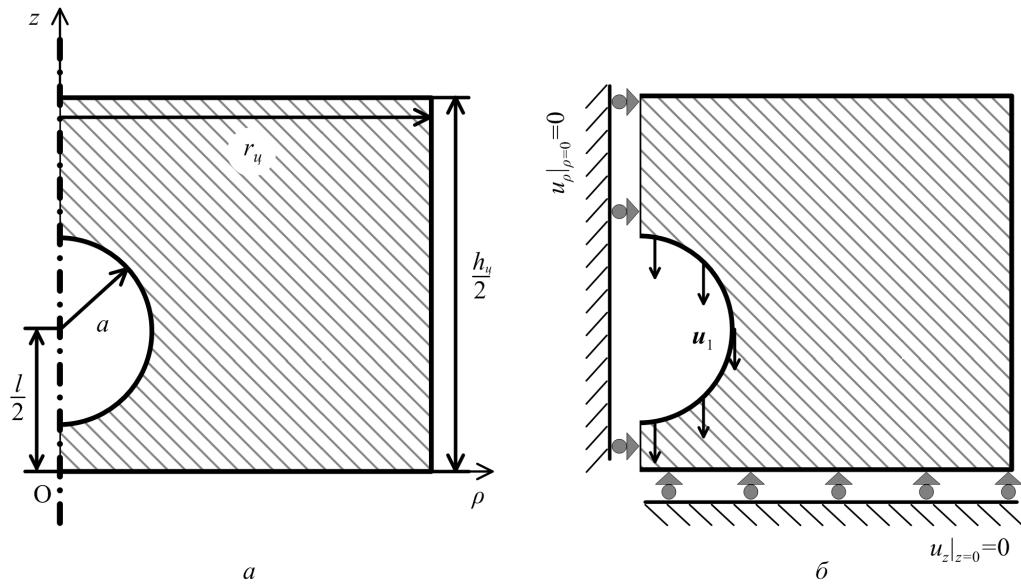


Рисунок 2.1 — а) Геометрия расчётной области; б) схема нагружения образца.  
Пропорции расчётной области не соблюдены

условиями для поля перемещений:

$$u_\rho|_{\rho=0} = 0, \quad u_z|_{z=0} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{u}_1 = (0, 0, -u_\chi). \quad (2.22)$$

Последнее из условий показывает, что перемещения точек, лежащих на поверхности полости, задаются введённым постоянным вектором  $\mathbf{u}_1$ , и поэтому форма и объём полости остаются неизменными. Очевидно, что по своему воздействию на окружающую матрицу такое отверстие полностью эквивалентно твёрдой частице того же радиуса  $a$ . На границах расчётной области никаких условий не задается, то есть внешняя поверхность остаётся свободной.

В расчётах величина перемещения  $u_\chi$  изменялась дискретно от нуля до  $u_\chi^{\max} = (1/2)l_0 - a$ , то есть до плотного контакта частиц. На каждом шаге по  $u_\chi$  задача нелинейной упругости решалась методом Ньютона, начальным приближением служило решение, найденное на предыдущем шаге. Решая упругую задачу, получали поле перемещений, по которому затем вычисляли объёмную плотность энергии  $W$ . Затем интегрированием находили упругую энергию  $U_{\text{упр}}^\infty = \int W dV$  всего образца. Варьируемым параметром было исходное расстояние  $l_0$  между центрами частиц, по которому выбирался размер модельного образца:  $h_\chi = \zeta_a(l_0 + 2a)$ . Величина  $\lambda_1 = (l - 2a)/(l_0 - 2a)$ , выражющая относительное изменение величины межчастичного зазора будет далее использоваться для описания степени деформации образца. В результате расчётов был получен

массив значений энергии  $U_{\text{упр}}^\infty$  в зависимости от безразмерных значений начального,  $q_0 = l_0/a$ , и конечного,  $q = l/a$ , расстояний между частицами.

Для моделирования бесконечной полимерной среды размер выбранного цилиндрического образца должен быть достаточно большим. Его величина определялась параметром  $\zeta_a$  так, чтобы высота цилиндра  $h_{\text{пп}}$  равнялась его диаметру  $2r_{\text{пп}} = h_{\text{пп}} = \zeta_a(l_0 + 2a)$ .

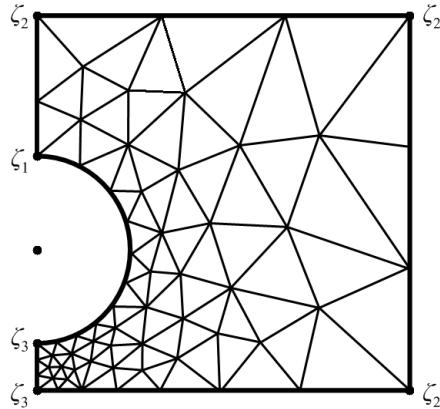


Рисунок 2.2 — Параметры сетки и её сгущение в области наибольших деформаций. Пропорции расчётной области не соблюдены

Основными параметрами, влияющими на точность расчёта, являются размер  $\zeta_1$  элемента сетки на границе отверстия и размер  $\zeta_2$  элемента на внешней границе расчётной области (см. рис. 2.2). Из общих соображений очевидно, что сетка должна сгущаться вокруг частиц, где неоднородность упругих полей максимальна. С другой стороны, увеличение плотности сетки означает рост затрат вычислительных ресурсов. Рисунки 2.3а и б показывают, что с ростом расчётной области уменьшается влияние размера элемента на внешней границе  $\zeta_2$  на точность расчёта. При этом размеры элементов на границе полости  $\zeta_1$  и в центре образца  $\zeta_3$  влияют значительно. Применяясь к доступным нам вычислительным ресурсам, мы остановились на сетке с параметрами:  $\zeta_a = 14$ ,  $\zeta_1 = 0.02$ ,  $\zeta_2 = 1$  и  $\zeta_3 = 0.01$ , измеряемыми в единицах радиуса частиц  $a$ . Для интерполяции искомой функции по элементу были выбраны полиномы второго порядка.

Выбранный метод решения задачи позволяет наглядно продемонстрировать поля напряжений в исследуемом образце. На рисунке 2.4 представлено распределение компонент тензора напряжений Коши вблизи твёрдого включения при относительном удлинении межчастичного зазора  $\lambda_1 = 0.1$ . Из рисунка видно, что напряжения концентрируются преимущественно в зазоре между частицами.

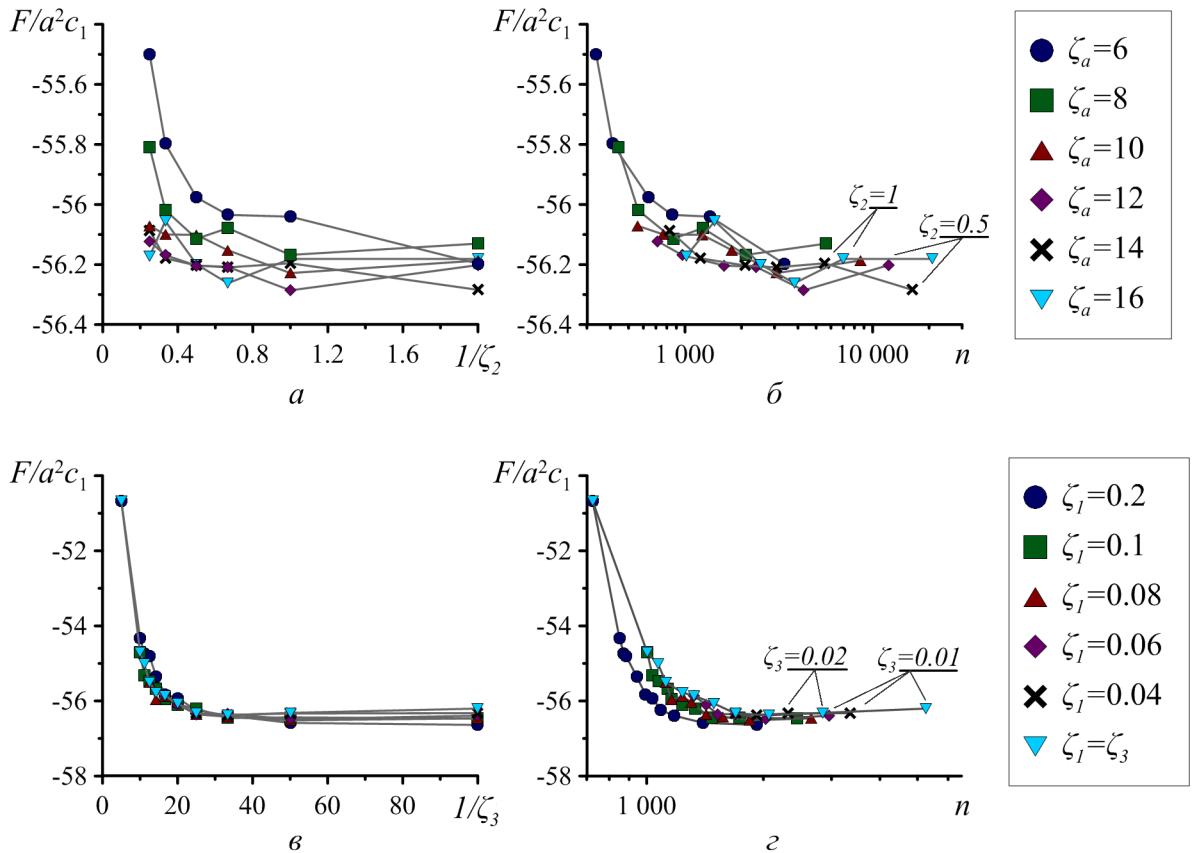


Рисунок 2.3 — Сила, действующая на поверхность частиц, при относительном изменении величины межчастичного зазора  $\lambda_1 = 0.2$  в зависимости от: а)  $1/\zeta_2$  при различных  $\zeta_a$  и параметрах  $\zeta_1 = 0.1$  и  $\zeta_3 = 0.05$ ; б) числа узлов сетки  $n$  при тех же параметрах  $\zeta_2$  и  $\zeta_a$ , что и на части а рисунка; в)  $1/\zeta_3$  при различных  $\zeta_1$  и параметрах  $\zeta_a = 10$  и  $\zeta_2 = 2$ ; г) числа узлов сетки  $n$  при тех же параметрах  $\zeta_3$  и  $\zeta_1$ , что и на части в рисунка. Значения варьируемых параметров приведены на легенде. Начальное расстояние между центрами

частиц  $q_0 = 3$

цами: в узком цилиндре, ось которого совпадает с осью  $Oz$ , немного расширяющемся вблизи поверхности частицы.

### 2.2.2 Решение задачи в трёхмерной постановке

Решение задачи, сформулированной в предыдущем подпараграфе, было выполнено так же в трёхмерной постановке с помощью пакета `sphere` на языке Python, специализированного для решения 3D задач методом конечных элемен-

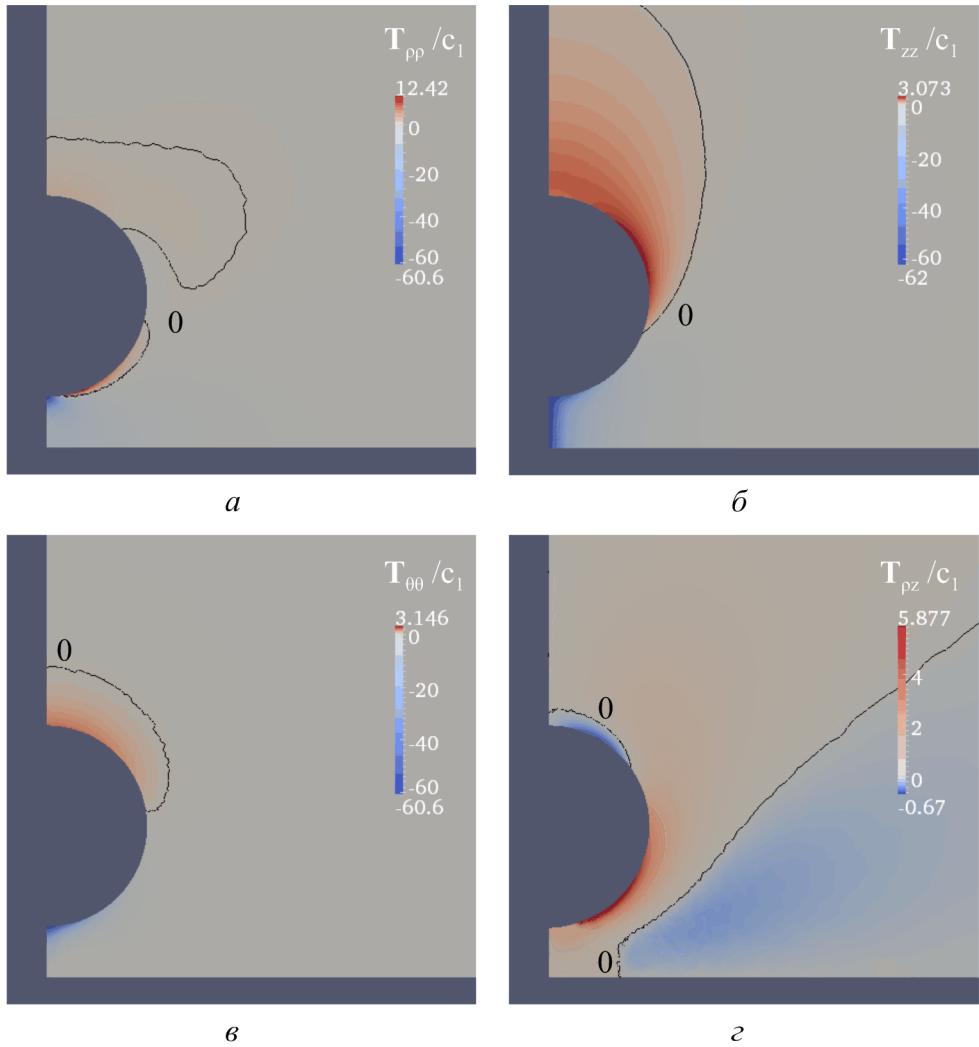


Рисунок 2.4 — Компоненты тензора напряжений Коши  $\mathbf{T}$  при относительном удлинении межчастичного зазора  $\lambda_1 = 0.1$  и начальном расстоянии между сферами  $q_0 = 3$ ; а)  $\mathbf{T}_{\rho\rho}$ ; б)  $\mathbf{T}_{zz}$ ; в)  $\mathbf{T}_{\theta\theta}$ ; г)  $\mathbf{T}_{\rho z}$

тов. Полимерная матрица описывалась моделью Муни–Ривлина, соответствующей материалу с малой, но конечной сжимаемостью. В этом случае выражение для упругого потенциала имеет вид

$$W(\mathbf{C}) = c_1 \left[ \left( J^{-2/3} I_1(\mathbf{C}) - 3 \right) + \tilde{c}_2 \left( J^{-4/3} I_2(\mathbf{C}) - 3 \right) + \tilde{\eta}/2(J-1)^2 \right]. \quad (2.23)$$

Для числовых констант модели выберем значения  $\tilde{c}_2 = 0.2$  и  $\tilde{\eta} = 10^3$ , тем самым конкретизируя предположение о слабой сжимаемости рассматриваемого эластомера.

В качестве модели МР эластомера был взят куб, в котором находились две одинаковые сферические полости, расположенные вдоль линии, проведён-

ной через центры противолежащих граней. Для удобства записи оси  $Ox$  и  $Oy$  системы координат направлены параллельно граням куба.

Задача теории гиперупругости (конечные деформации) формулировалась в отсчётной конфигурации в предположении о наличии симметрии  $x \leftrightarrow x$  и  $y \leftrightarrow y$  [104]:

$$\int_{\Omega_0} c_1 \left[ \tilde{\mathbf{S}}_{\vartheta\Phi}(\mathbf{u}) + \tilde{K}(J-1)J\mathbf{C}^{-1} \right] \cdot \delta \mathbf{E} d\Omega_0 = 0, \quad (2.24)$$

что позволяло решать её для четверти куба ( $x > 0, y > 0$ ), требуя выполнения условий

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{u}_1 = (0, 0, -u_\chi), \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_2} = \mathbf{u}_2 = (0, 0, u_\chi), \quad (2.25)$$

$$\mathbf{u}_x|_{x=0} = 0, \quad \mathbf{u}_y|_{y=0} = 0. \quad (2.26)$$

Эффективные напряжения в формуле (2.24) определены согласно

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_{\vartheta\Phi}(\mathbf{u}) = 2J^{-2/3} & \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \right] + \\ & + 2\tilde{c}_2 J^{-4/3} \left[ I_1(\mathbf{C}) \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Перемещения точек, лежащих на поверхностях отверстий, задавались введёнными выше постоянными векторами  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ , так что форма и объём вырезов оставались неизменными.

В расчётах применялся тот же алгоритм, что и в параграфе 2.2.1, при котором перемещение  $u_\chi$  изменялось от нуля до максимума. На каждом шаге по  $u_\chi$ , в результате решения задачи получали поле перемещений, по которому вычисляли меру деформации Коши–Грина и упругий потенциал  $W$ . Затем интегрированием находили упругую энергию  $U_{\text{упр}}^\infty = \int W dV$  всего образца. Задача решалась при различных начальных расстояниях  $l_0$  между центрами частиц, по которым выбиралась длина ребра кубической расчётной области:  $6(l_0 + 2a)$ . В результате был получен массив значений энергии  $U_{\text{упр}}^\infty$  в зависимости от безразмерных начального,  $q_0 = l_0/a$ , и конечного,  $q = l/a$ , расстояний между частицами. Как показала практика, основными параметрами, влияющими на точность, являются размер  $s_1$  элемента сетки на границе отверстия и размер  $s_2$  элемента на внешней границе расчётной области. В трёхмерном расчёте использовалась сетка с параметрами  $s_1 = 0.05a$ ,  $s_2 = 0.4d$ .

На рисунке 2.5 приведено сравнение упругой энергии, полученной в результате решения осесимметричной и трёхмерной задач, в зависимости от текущего межцентрового расстояния  $q$  при исходном расстоянии  $q_0 = 4$ . Относительная разница в результатах расчёта не превышает 10%. Полученное совпадение подтверждает, что в рамках выбранных библиотек, реализующих метод конечных элементов, рассматриваемая задача сформулирована верно.

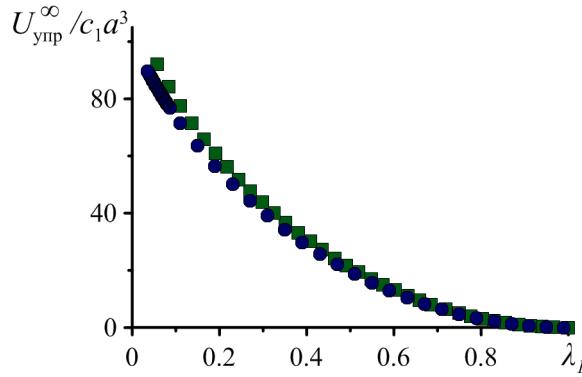


Рисунок 2.5 — Упругая энергия бесконечного образца эластомера в зависимости от межцентрового расстояния  $q$  при численном решении задачи в а) осесимметричной и б) трёхмерной постановке.

### 2.2.3 НДС матрицы в межчастичном зазоре: сопоставление с литературными данными

В обзоре работ, посвященных МР эластомерам, уже была упомянута статья [47], в которой исследовалось поведение структурированных образцов с невысокой концентрацией намагничивающихся частиц в отсутствии магнитного поля. Внимание авторов было обращено на взаимодействие частиц в идеальных цепочках, и в рамках этой задачи они изучали напряжённо-деформированное состояние в зазоре между двумя сферическими частицами. В частности, в работе представлены результаты эксперимента по растяжению цилиндрического образца эластомера двумя частицами. Судя по представленным в статье фотографиям, частицы имели радиус чуть меньший, чем радиус полимерного цилиндра, и были погружены в него наполовину (см. рис. 2.6а). Полученная

экспериментально зависимость напряжений образца от его деформаций была подтверждена данными численного моделирования авторов.

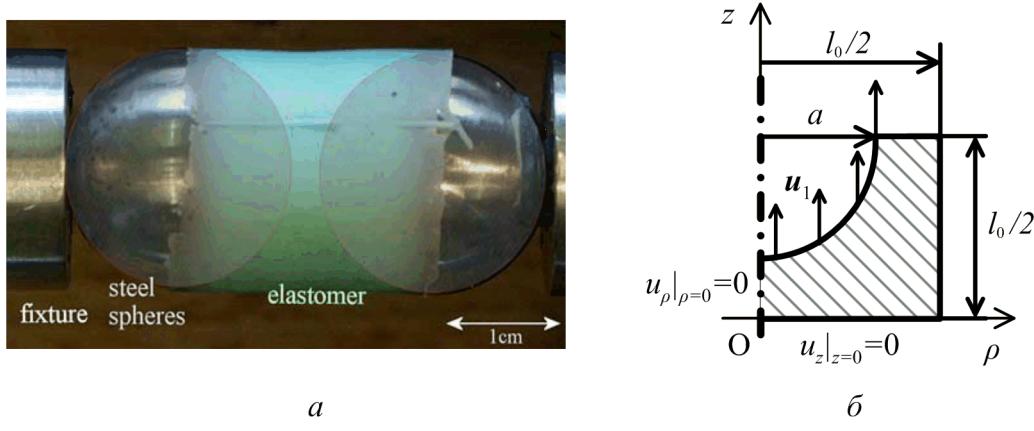


Рисунок 2.6 — а) Фотография экспериментальной системы, опубликованная в работе [47]; б) Геометрия области расчёта и схема нагружения. Пропорции не соблюдены

Программный модуль, разработанный в подпараграфе 2.2.1, может быть использован для решения подобной задачи. Геометрия расчётной области представлена на рисунке 2.6б. Эксперимент описан в работе недостаточно подробно, поэтому размеры образца были определены на основе косвенной информации, которую можно извлечь из текста статьи. Так, расстояние между центрами частиц составляло  $q_0 = 2.25$ , диаметр цилиндрического образца был равен  $q_0$ . Эластомер покрывал частицы ровно наполовину. В расчётах авторов определяющее соотношение для эластомера выбиралось в виде модифицированного потенциала Муни–Ривлина, пять коэффициентов которого подбирались по экспериментальным данным о нагружении чистого полимера. Аналогичным образом мы подобрали значения упругих констант  $c_1$  и  $c_2$  для используемого нами потенциала. Оказалось, что с достаточной точностью кривая зависимости напряжений от деформаций чистого эластомера может быть описана потенциалом Муни–Ривлина с параметрами  $c_1 = 43$  кПа и  $c_2 = 0$  (см. рис. 2.7а). Результаты нашего численного эксперимента по растяжению образца эластомера представлены на рисунке 2.7б в сравнении с данными натурного эксперимента из работы [47].

Рисунок 2.7б показывает хорошее согласие между экспериментальными данными и результатами вычислений вплоть до 250% деформаций. Согласно [47] именно в этой области экспериментальная кривая  $T_{zz}(\varepsilon)$  содержит точку

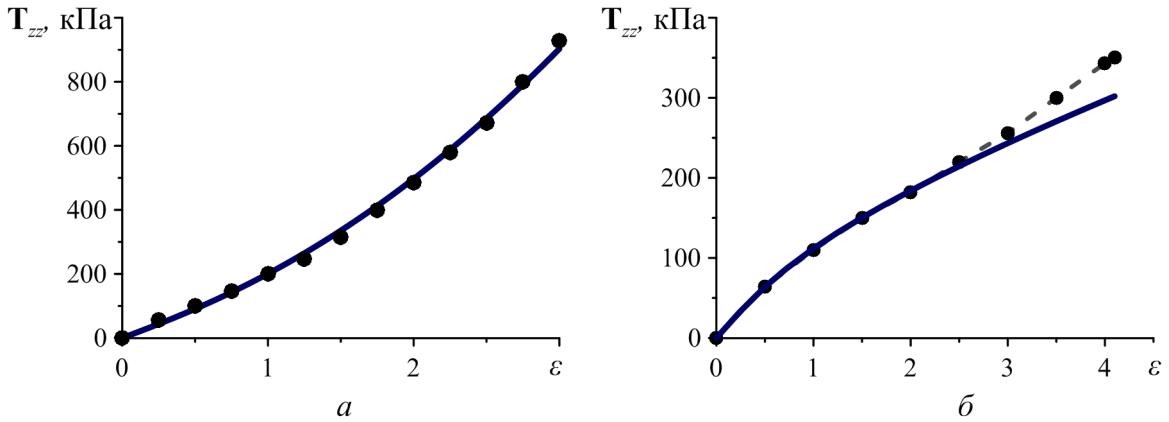


Рисунок 2.7 – а) Экспериментальная кривая зависимости напряжений от деформаций чистого эластомера (точки) и напряжения, полученные с помощью двухпараметрического потенциала Муни–Ривлина с коэффициентами  $c_1 = 43$  кПа и  $c_2 = 0$  (сплошная линия); б) диаграмма напряжения–деформации, полученная экспериментально в работе [47] (точки), и в результате численного расчёта (сплошная линия)

перегиба. Однако наши расчёты не позволяют воспроизвести эту особенность, поскольку мы использовали иной упругий потенциал.

#### 2.2.4 Гипотеза об однородном деформировании матрицы между частицами

Оценим в простейшем приближении упругую энергию, которую создают намагниченные частицы в полимерной матрице МР эластомера. Напомним, что после включения поля частицы наполнителя приобретают магнитные моменты и между ними возникают силы магнитного взаимодействия. В рассматриваемой конфигурации, когда внешнее поле  $\mathbf{H}_0$  направлено вдоль межцентрового вектора  $\mathbf{q}$ , частицы будут притягиваться, сжимая, прежде всего, материал матрицы, заключенный между ними (см. рис. 2.1). Наиболее простым способом для аппроксимации упругой энергии в деформируемой матрице является стержневая модель. Будем считать, что к поверхностям частиц прикреплены абсолютно твёрдые пластины, параллельно друг к другу и перпендикулярно вектору  $\mathbf{q}$ . Между пластинами вложен стержень круглого сечения с некоторым радиусом  $r_1$ , сделанный из несжимаемого материала, подчиняющегося закону Муни–Рив-

лина. В начальном состоянии длина стержня равна  $q_0 - 2$ , где  $q_0$  — расстояние между центрами частиц до включения магнитного поля, то есть в естественной конфигурации. Его относительное удлинение совпадает с введённым ранее относительным изменением межчастичного зазора  $\lambda_1$ . Предположим, что под действием магнитостатических сил, передаваемых пластинками, стержень претерпевает однородное одноосное сжатие. В этом случае его энергия есть

$$U_{\text{упр}}^{\infty} = \pi r_1^2 (q_0 - 2) c_1 (I_1(\mathbf{C}) + \tilde{c}_2 I_2(\mathbf{C})) , \quad (2.28)$$

согласно определяющему отношению для гиперупругой среды Муни–Ривлина (2.1). Полученные в подразделе 2.2.1 численные данные об энергии системы позволяют подобрать радиус стержня  $r_1$  так, чтобы он хорошо описывал энергию системы хотя бы в области малых деформаций. Подобранные радиусы стержня для различных начальных межцентровых расстояний представлены в таблице 3. Погрешность такой интерполяции при относительном сжатии стержня не более 20% составила менее 0.1%.

Таблица 3 — Значения параметра  $r_1$  интерполяционной формулы (2.28)

$q_0$	$r_1/a$
2.5	1.11
3	1.34
3.5	1.52
4	1.67

На рисунке 2.8 представлены графики полученной функции, описывающей энергию однородно деформируемого стержня. Очевидна неспособность такой модели описать энергию матрицы, деформируемой двумя сферическими частицами. Представим область между двумя частицами как массив стержней бесконечно малого радиуса. Оказывается, чем длиннее стержень, то есть чем дальше он расположен от межцентровой линии, тем меньшую относительную деформацию он испытывает. При этом стержень, находящийся точно на линии, соединяющей центры частиц, деформируется сильнее всего, вплоть до плотного контакта частиц, при котором его энергия возрастает до бесконечности. Таким образом, модель, использующая лишь один стержень с длиной, в точности сов-

падающей с величиной межчастичного зазора, в области больших деформаций безнадежно завышает значение упругой энергии.

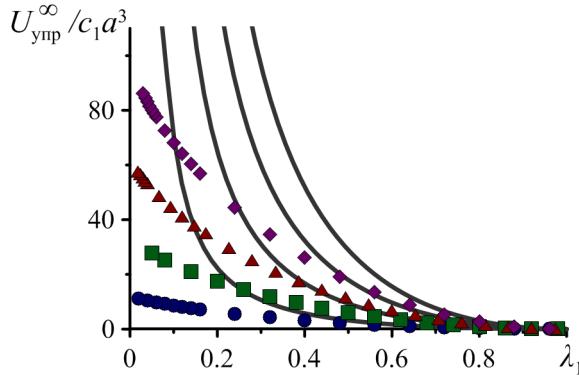


Рисунок 2.8 — Дискретный набор численных данных об упругой энергии при начальном межцентровом расстоянии  $q_0 = 2.5$  (круг),  $q_0 = 3$  (квадрат),  $q_0 = 3.5$  (треугольник),  $q_0 = 4$  (ромб) и соответствующие им непрерывные интерполяции (сплошные линии), построенные по формуле (2.28)

## 2.2.5 Аппроксимация упругой энергии

Аналогично тому, как это было сделано при расчёте магнитной энергии, построим аналитическое выражение, аппроксимирующее полученный числовой массив  $U_{\text{упр}}^\infty(q_0, q)$ . Используем для этого эвристическую модель, показанную на рисунке 2.9. Пусть к каждой частице с противоположных сторон прикреплены две абсолютно жёсткие пластины, одна из которых имеет ступенчатую форму. Между ступенчатыми пластинами вставлены три несжимаемых стержня цилиндрического сечения. Один радиусом  $r_1$  и длиной  $l_0^{(1)} = l_0 - 2a$ , лежит на оси  $Oz$  между частицами. Два других стержня, оба радиусами  $r_2$  и длинами  $l_0^{(2)} = l_0 - a$ , расположены параллельно первому по обе стороны от него. Жесткие пластины, между которыми заключены стержни, обеспечивают их однородное сжатие при сближении частиц. С внешней стороны к каждой частице присоединён ещё один стержень, лежащий вдоль оси  $Oz$ . Один его конец через пластинку находится в контакте с частицей, другой — закреплён на противоположной пластине. Обозначим длины этих «внешних» стержней через  $l_0^{(3)} = l_0 - 2a$ , а их радиусы — через  $r_3$ .

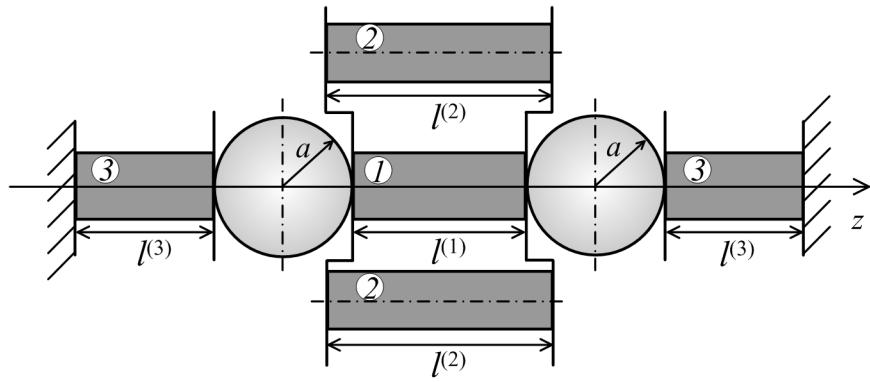


Рисунок 2.9 — Стержневая модель для интерполяции упругой энергии

При сближении частиц «внутренние» стержни будут сжиматься, а «внешние» — растягиваться, претерпевая относительные деформации, которые простым образом выражаются через смещение частиц  $u_{\text{q}}$ :

$$\lambda_1 = \frac{l_0^{(1)} - 2u_{\text{q}}}{l_0^{(1)}} = 1 - \frac{2u_{\text{q}}}{l_0^{(1)}}, \quad (2.29)$$

$$\lambda_2 = \frac{l_0^{(2)} - 2u_{\text{q}}}{l_0^{(2)}} = 1 - \frac{2u_{\text{q}}}{l_0^{(2)}}, \quad (2.30)$$

$$\lambda_3 = \frac{l_0^{(3)} + u_{\text{q}}}{l_0^{(3)}} = 1 + \frac{u_{\text{q}}}{l_0^{(3)}}. \quad (2.31)$$

Эти соотношения позволяют рассчитать для каждого стержня меру деформации Коши–Грина

$$\mathbf{C}_m = \frac{1}{\lambda_m} \mathbf{i}\mathbf{i} + \frac{1}{\lambda_m} \mathbf{j}\mathbf{j} + \lambda_m^2 \mathbf{k}\mathbf{k}, \quad m = 1,2,3; \quad (2.32)$$

а по ней — упругие потенциалы стержней в модели несжимаемого материала Муни–Ривлина:

$$W_m = c_1 [(I_1(\mathbf{C}_m) - 3) + \tilde{c}_2 (I_2(\mathbf{C}_m) - 3)]. \quad (2.33)$$

Так как стержни деформируются однородно, здесь инварианты суть  $I_1(\mathbf{C}_m) = 2/\lambda_m + \lambda_m^2$  и  $I_2(\mathbf{C}_m) = 1/\lambda_m^2 + 2\lambda_m$ , где  $m = 1,2,3$ . Поскольку объём каждого стержня равен  $V_m = \pi r_m^2 l_0^{(m)}$  и неизменен, упругая энергия всей конструкции

составляет

$$\begin{aligned} U_{\text{упр}}^{\infty} &= \pi W(\lambda_1) r_1^2 l_0^{(1)} + 2\pi W(\lambda_2) r_2^2 l_0^{(2)} + 2\pi W(\lambda_3) r_3^2 l_0^{(3)} \\ &= \pi \sum_{k=1}^3 (2 - \delta_{k1}) W(\mathbf{C}_k) r_k^2 l_0^{(k)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

К обозначению энергии  $U_{\text{упр}}$  здесь добавлен индекс  $\infty$  показывающий связь этой энергии стержневой модели с энергией неограниченного упругого образца.

Роль параметров аппроксимации в формуле (2.34) играют радиусы стержней. Их безразмерные числовые значения для некоторых исходных межчастичных расстояний при  $\tilde{c}_2 = 0.2$  приведены в таблице 4.

Таблица 4 — Числовые параметры интерполяционной формулы (2.34)

$q_0$	$r_1/a$	$r_2/a$	$r_3/a$	$\varepsilon, \%$
2.5	$1.26 \cdot 10^{-2}$	1.47	0.10	1.87
3	$1.54 \cdot 10^{-3}$	1.17	1.06	0.59
3.5	$2.03 \cdot 10^{-3}$	0.95	1.81	0.37
4	$1.66 \cdot 10^{-2}$	0.81	2.31	0.64

На рисунке 2.10а представлены значения упругой энергии, полученные численно, и построенные по ним интерполяции для начальных межцентровых расстояний, указанных в таблице. Заметим, что наличие центрального стержня в интерполяционной схеме заставляет энергию образца неограниченно расти при сближении частиц.

Предложенная аппроксимация оказалась пригодной для описания всех полученных числовых данных при межчастичном расстояниях более  $2.5a$ . Погрешность, оценённая по формуле:

$$e = 100 \cdot \frac{\sqrt{\sum_i \left( U_{\text{упр}}^{(i)}(q_i, q_0) - U_{\text{упр}}(q_i, q_0) \right)^2}}{\sqrt{\sum_i \left( U_{\text{упр}}^{(i)}(q_i, q_0) \right)^2}} \quad (2.35)$$

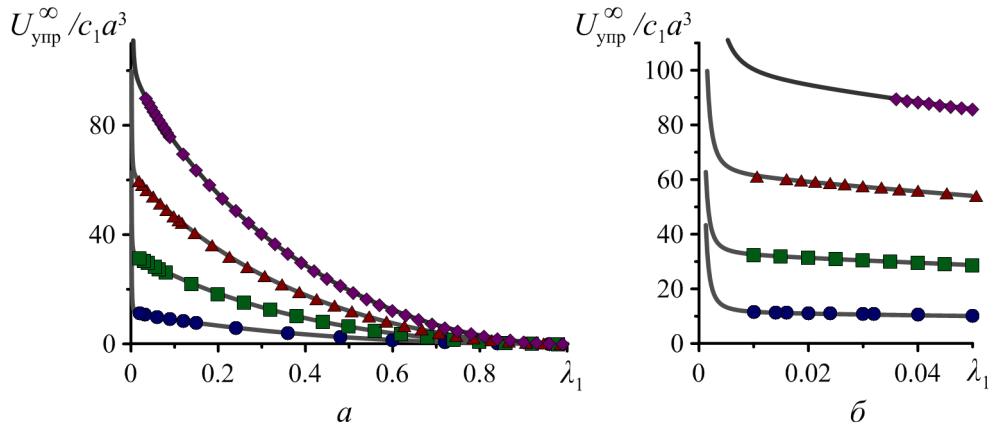


Рисунок 2.10 — Набор численных данных об упругой энергии при начальном межцентровом расстоянии  $q_0 = 2.5$  (круг),  $q_0 = 3$  (квадрат),  $q_0 = 3.5$  (треугольник),  $q_0 = 4$  (ромб) и соответствующие им интерполяции (сплошные линии)

составила не более 2% (см. таблицу 4) Основываясь на этом факте, мы использовали формулу (2.34) для того, чтобы оценивать упругую энергию матрицы при  $q \gtrsim 2$ , где прямой численный расчёт теряет устойчивость (см. рис. 2.10б).

## 2.3 Численное решение задачи о двух включениях в конечном гиперупругом массиве

### 2.3.1 Постановка задачи и алгоритм решения

Постановка задачи для конечного эластомерного образца в целом аналогична задаче параграфа 2.2.1. Пусть теперь две сферические частицы радиуса  $a$  помещены в конечный эластомерный цилиндр, ось которого совпадает с вектором  $\mathbf{l}$  пары; в отсутствие поля расстояние между центрами частиц составляет  $l_0$ . Используем уже введённую в 2.2.1 цилиндрическую систему координат, в которой ось  $Oz$  направлена вдоль  $\mathbf{l}$ . В этой системе перемещение частицы 1 задаётся вектором  $\mathbf{u}_1 = (0, 0, -u_\chi)$ , а частицы 2 — вектором  $\mathbf{u}_2 = (0, 0, u_\chi)$ , так что накапливаемая упругая энергия  $U_{\text{упр}}^{\text{K}}$  зависит только от величины смещения  $u_\chi$ .

Напомним, что в предположении о несжимаемости среды упругий потенциал Муни–Ривлина можно представить в виде

$$\tilde{W}(\mathbf{C}) = W(\mathbf{C})/c_1 = [I_1(\mathbf{C}) - 3] + \tilde{c}_2[I_2(\mathbf{C}) - 3], \quad (2.36)$$

где  $c_1$  и  $\tilde{c}_2 = c_2/c_1 = 0.2$  — уже введённые материальные константы.

Расчёт упругой энергии, обусловленной смещением частиц, производился с помощью пакета `fenics` на языке `Python`, специализированного для решения задач методом конечных элементов. Вариационная задача деформирования образца из упругого несжимаемого материала была сформулирована в отсчётной конфигурации:

$$\int_{\Omega_0} \delta[W - P(J - 1)]d\Omega_0 = 0. \quad (2.37)$$

Формулировка полностью совпадает с выражением 2.21, записанным в подпараметре 2.2.1. Напомним, что  $\Omega_0$  — начальный объём образца,  $W$  — упругий потенциал,  $P$  — среднее давление и  $J = \sqrt{I_3(\mathbf{C})}$ .

Задача может быть решена в половине образца ( $z > 0$ ) при выполнении условий:

$$u_\rho|_{\rho=0} = 0, \quad u_z|_{z=0} = 0, \quad \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{u}_1 = (0, 0, -u_u); \quad (2.38)$$

последнее из условий обеспечивает смещение частицы как абсолютно твёрдого тела.

Так же, как в задаче о перемещении частиц в неограниченной эластомерной матрице, величина перемещения  $u_u$  изменялась дискретно от нуля до максимума, соответствующего плотному контакту частиц. Результатами расчёта определены поле перемещений, в том числе величина  $u_t$  — смещение торцов вмещающего частицы цилиндра вдоль  $Oz$ , и среднее давление. По этим данным вычислялись мера деформации Коши–Грина и, при подстановке её инвариантов в (2.36), — объёмная плотность энергии  $W$ . Расчёты выполнялись для значений межцентровых расстояний частиц из интервала  $2.1 \leq q \leq 6$  при фиксированной полной начальной длине образца  $l_0^{(4)}/a = 12$ . Для выбранного цилиндра, моделирующего конечный образец эластомера, был вновь проведён подбор параметров сетки. Очевидно, что теперь параметр  $\zeta_2$ , определяющий размер элементов на границе расчётной области, должен быть выбран значительно меньшим. Результаты некоторых расчётов, выполненных для определе-

ния параметров сетки, приведены на рисунке 2.11. Хорошей комбинацией параметров, обеспечивающих оптимальное соотношение точности решения и затрат вычислительных ресурсов, представляется:  $\zeta_1 = 0.08$ ,  $\zeta_2 = 0.2$  и  $\zeta_3 = 0.01$ , где  $\zeta_k$  измеряются в единицах радиуса частиц  $a$ .

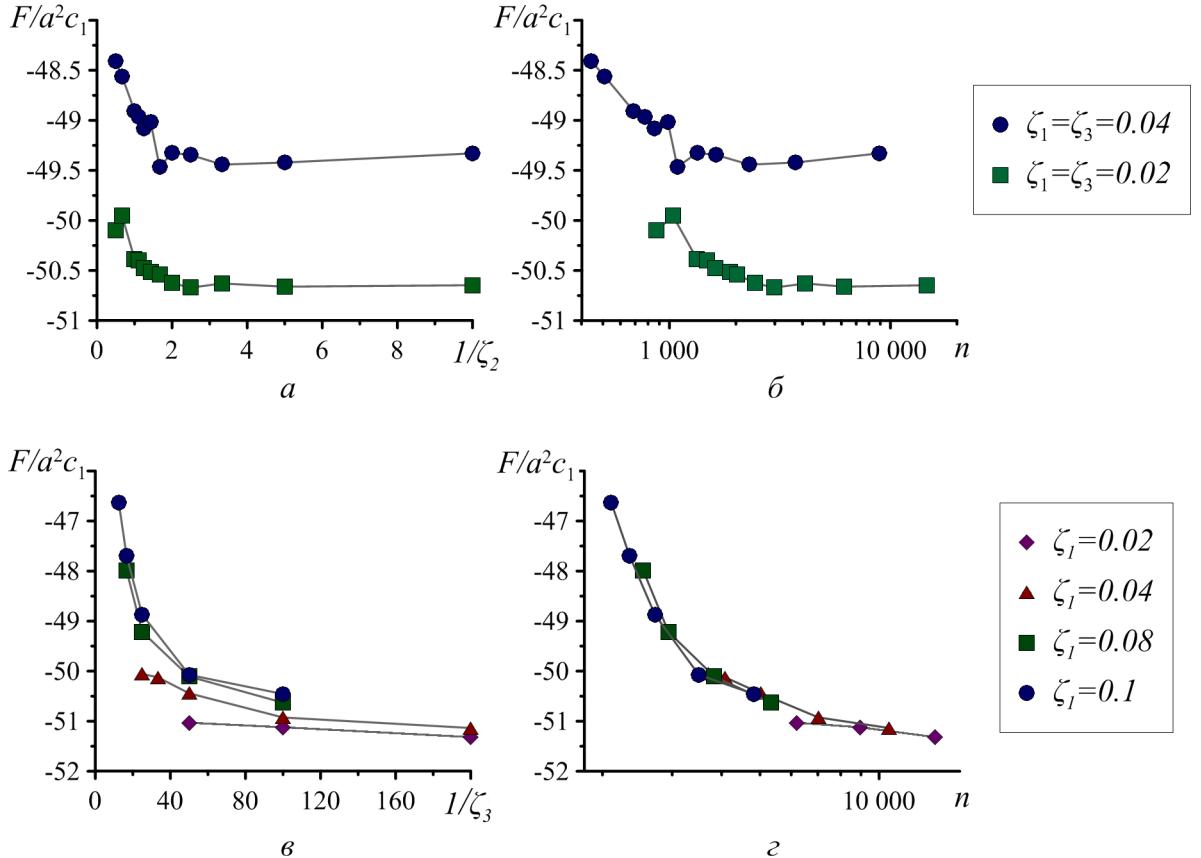


Рисунок 2.11 — Сила, действующая на поверхность частиц, при относительном изменении величины межчастичного зазора  $\lambda_1 = 0.2$  в зависимости от: а)  $1/\zeta_2$  при  $\zeta_1 = \zeta_3 = 0.04$  (круг) и  $\zeta_1 = \zeta_3 = 0.02$  (квадрат); б) числа узлов сетки  $n$  при тех же параметрах  $\zeta_2$  и  $\zeta_1 = \zeta_3$ , что и на части а рисунка; в)  $1/\zeta_3$  при  $\zeta_2 = 0.2$  и различных  $\zeta_1$ ; г) числа узлов сетки  $n$  при тех же параметрах  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , что и на части в рисунка. Значения варьируемых параметров приведены на легенде. Начальное расстояние между центрами частиц  $q_0 = 3$ .

В итоге формировался дискретный массив  $U_{\text{упр}}^{\kappa}(q, q_0)$ , определяющий зависимость упругой энергии образца  $U_{\text{упр}}^{\kappa} = \int W dV$  от безразмерных значений начального  $q_0 = l_0/a$  и конечного  $q = l/a$  расстояний между центрами частиц.

### 2.3.2 Стержневая модель для интерполяции упругой энергии

Полученные численные результаты использовались далее для построения и верификации интерполяционной формулы, позволяющей для различных  $q_0$  рассчитывать функцию  $U_{\text{упр}}^k$  при любых значениях  $q$ . Указанная интерполяция основана на эвристической схеме, представленной на рисунке 2.12. Моделью «двуихчастичного» МР образца служит механическая ячейка, содержащая две твёрдые сферические частицы и набор упругих стержней из несжимаемого полимера Муни–Ривлина. Ячейка имеет размер  $l^{(4)}$ , задаваемый положением внешних стенок, неподвижной — слева, и подвижной — справа. Каждая частица заключена между двумя абсолютно жёсткими пластинами (одна из них обладает ступенчатой формой), к которым прикреплены стержни. В зазоре между частицами расположены два одинаковых цилиндрических стержня радиусами  $r_2$  и длинами  $l_0^{(2)} > (q_0 - 2)a$ ; и пластины обеспечивают однородное сжатие/растяжение внутренних стержней при деформировании по оси  $Oz$ . Частицы соединены с внешними стенками ячейки стержнями радиуса  $r_3$  и длинами  $l_0^{(3)}$ . Параллельно цепочке частиц между стенками ячейки вложен ещё один стержень радиуса  $r_4$  и длины  $l_0^{(4)} = q_0 + 2a + 2l_0^{(3)}$ .

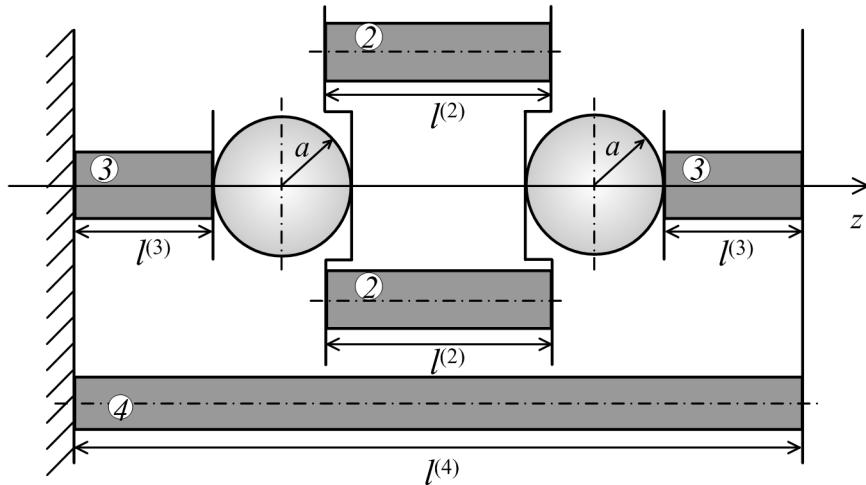


Рисунок 2.12 — Стержневая модель без центрального стержня для построения интерполяции упругой энергии.

Отметим, что в настоящей схеме, по сравнению со схемой на рисунке 2.9, использованной для интерполяции упругой энергии бесконечного образца, отсутствует центральный стержень, приводящий к расходности энергии при  $q \rightarrow 2$ .

Итак, при сближении частиц «внутренние» стержни (стержни 1) модельной ячейки будут сжиматься, а «периферийные» (стержни 2) — растягиваться; при этом ячейка в целом будет сжиматься. Относительные удлинения стержней простым образом выражаются через заданное смещение частиц  $u_{\text{ч}}$  и удлинение всей системы  $u_{\text{т}} = l^{(4)} - l_0^{(4)}$ :

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \frac{l_0^{(2)} - 2u_{\text{ч}}}{l_0^{(2)}} = 1 - \frac{2u_{\text{ч}}}{l_0^{(2)}}, \\ \lambda_3 &= \frac{l_0^{(3)} + \Delta l^{(3)}}{l_0^{(3)}} = \frac{l_0^{(3)} + (u_{\text{ч}} - u_{\text{т}})}{l_0^{(3)}} = 1 + \frac{u_{\text{ч}} - u_{\text{т}}}{l_0^{(3)}}, \\ \lambda_4 &= \frac{l_0^{(4)} - 2u_{\text{т}}}{l_0^{(4)}} = 1 - \frac{2u_{\text{т}}}{l_0^{(4)}}.\end{aligned}\tag{2.39}$$

Уравнения связи (2.39) позволяют вычислить инварианты меры деформации Коши–Грина согласно формулам:

$$I_1(\mathbf{C}_k) = 2/\lambda_k + \lambda_k^2, \quad I_2(\mathbf{C}_k) = 1/\lambda_k^2 + 2\lambda_k \quad (k = 1, 2, 3),\tag{2.40}$$

а затем по формуле (2.36) — упругий потенциал каждого стержня. Общая упругая энергия системы будет иметь вид:

$$\begin{aligned}U_{\text{упр}}^{\text{к}}/c_1 &= 2\pi\tilde{W}(\lambda_2)r_2^2l_0^{(2)} + 2\pi\tilde{W}(\lambda_3)r_3^2l_0^{(3)} + \pi\tilde{W}(\lambda_4)r_4^2l_0^{(4)} \\ &= \pi \sum_{k=2}^4 (2 - \delta_{k4})\tilde{W}(\mathbf{C}_k)r_k^2l_0^{(k)},\end{aligned}\tag{2.41}$$

где  $r_k$  и  $l_0^{(k)}$  — радиусы и начальные длины стержней соответственно.

Поскольку полная начальная длина образца  $l_0^{(4)}/a$  фиксирована, длина «внешних» стержней  $l_0^{(3)}/a$  вычисляется для любого межцентрового расстояния  $q_0$ . Радиусы всех стержней и длина «внутренних» из них —  $l_0^{(2)}$ , рассматриваются как подгоночные параметры и могут быть подобраны по критерию наилучшего согласия между модельной функцией (2.41) и массивом данных об упругой энергии, полученным численным расчётом.

Проведённые расчёты энергии образца показывают как система откликается на деформацию матрицы при перемещении частиц внутри неё. При этом нам ничего не известно о реакции образца на внешнее воздействие. Для более

полного и корректного описания системы необходимо учесть отклик образца на совместное действие внешней приложенной силы и перемещения частиц, и использовать его при интерполяции с помощью описанной стержневой модели. Рассмотрим такую задачу.

### 2.3.3 Малые деформации конечного образца эластомера

Пусть  $\mathbf{p} = (0,0,p)$  вектор усилия, которое оказывается на внешнюю границу образца, расположенную перпендикулярно оси, на которой лежат частицы (см. рис. 2.13). Торец цилиндра при этом смещается на некоторую величину  $u_t$ :  $\mathbf{u} = (0,0,u_t)$ , которую мы будем определять в среднем  $u_t = \int_S u_z dS$  для всей поверхности  $S$ :  $z = h_{\Pi}/2$ . Перемещение частиц внутри матрицы описывается вектором  $\mathbf{u}_1 = (0,0,u_{\chi})$ .

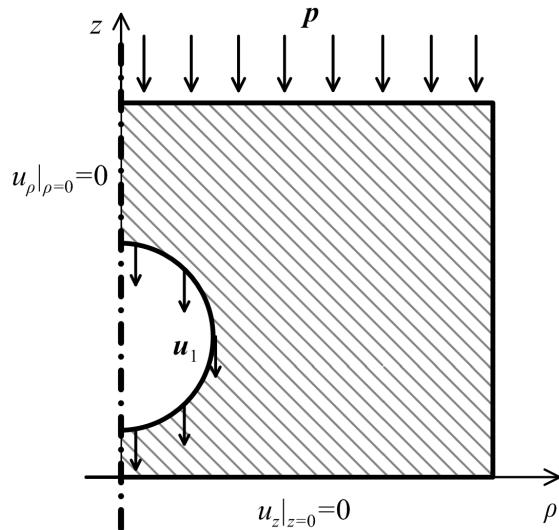


Рисунок 2.13 — Схема осесимметричного расчёта при малых деформациях с внешней нагрузкой.

Если давление  $p$  и перемещение  $u_{\chi}$  невелики, то мы можем рассматривать этот процесс в приближении малых деформаций. В таком случае, энергия упругой матрицы представляется в виде разложения:

$$U_{\text{упр}}^{\kappa}(u_{\chi}, p) = D_1 u_{\chi}^2 + D_2 p^2 + D_3 u_{\chi} p, \quad (2.42)$$

где  $D_{1,2,3}$  — неизвестные коэффициенты. Они могут быть определены из серии простейших численных испытаний:

$$\begin{aligned} 1. u_{\text{ч}} = 0, p \neq 0 &\rightarrow U_{\text{упр}}^{\kappa} = D_2 p^2 \rightarrow D_2 = \frac{U_{\text{упр}}^{\kappa}}{p^2} \\ 2. u_{\text{ч}} \neq 0, p = 0 &\rightarrow U_{\text{упр}}^{\kappa} = D_1 u_{\text{ч}}^2 \rightarrow D_1 = \frac{U_{\text{упр}}^{\kappa}}{u_p^2} \\ 3. u_{\text{ч}} \neq 0, p \neq 0 &\rightarrow D_3 = \frac{U_{\text{упр}}^{\kappa} - D_1 u_{\text{ч}}^2 - D_2 p^2}{u_{\text{ч}} p}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Кроме того, из тех же самых вычислительных экспериментов определяется зависимость  $u_{\text{т}} = k_1 u_{\text{ч}} + k_2 p$ . С её помощью можно установить соответствие между разложением энергии (2.42) и разложением:

$$\begin{aligned} U_{\text{упр}}^{\kappa}(u_{\text{ч}}, u_{\text{т}}) &= B_1 u_{\text{ч}}^2 + B_2 u_{\text{т}}^2 + B_3 u_{\text{ч}} u_{\text{т}} = \\ &= (B_1 + B_2 k_1^2 + B_3 k_1) u_{\text{ч}}^2 + B_2 k_2^2 p^2 + (2B_2 k_1 k_2 + B_3 k_2) u_{\text{ч}} p, \end{aligned} \quad (2.44)$$

и, таким образом, найти коэффициенты  $B_{1,2,3}$ :

$$\begin{aligned} (B_1 + B_2 k_1^2 + B_3 k_1) &= D_1, \quad B_2 = D_2 / k_2^2, \\ B_2 k_2^2 &= D_2, \quad \rightarrow B_3 = D_3 / k_2 - 2D_2 k_1 / k_2^2, \\ (2B_2 k_1 k_2 + B_3 k_2) &= D_3, \quad B_1 = D_1 - D_2 k_1^2 / k_2^2 - k_1 (D_3 - 2D_2 k_1 / k_2) / k_2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Значения коэффициентов  $D_i$  и  $B_i$ , полученные в результате серии численных экспериментов, представлены в таблице 5.

Таблица 5 — Коэффициенты  $D_i$  и  $B_i$  разложений в ряд энергии (2.42) и (2.44) соответственно

$q_0$	$k_1$	$k_2$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
2.5	0.114	1.611	30.0	91.0	0	31.0	35.1	-12.9
3	0.123	1.599	21.5	90.3	0	22.7	35.3	-13.9
3.5	0.131	1.586	18.0	89.8	0	19.3	35.7	-14.9
4	0.139	1.573	16.0	89.0	0	17.5	36.0	-15.8

Вычисленная упругая энергия рассматриваемого образца эластомера, представленная в виде разложения (2.44), зависит только от перемещения частиц  $u_{\text{ч}}$  и перемещения границ цилиндра  $u_{\text{т}}$ . Те же величины определяют энергию стержневой модели (2.41). Запишем её, явно обозначив зависимость объёмной плотности энергии от перемещений:

$$\begin{aligned} U_{\text{упр}}^{\text{K}}(u_{\text{ч}}, u_{\text{т}}) &= \\ &= 2W \left( 1 - \frac{2u_{\text{ч}}}{l_0^{(2)}} \right) V_2 + 2W \left( 1 + \frac{u_{\text{ч}} - u_{\text{т}}}{l_0^{(3)}} \right) V_3 + W \left( 1 - \frac{2u_{\text{т}}}{l_0^{(4)}} \right) V_4 \end{aligned} \quad (2.46)$$

В рамках малых деформаций упругие константы среды Муни–Ривлина связаны с модулем сдвига  $G$  соотношением:  $G = 2(c_1 + c_2)$ . Представим энергию стержневой модели в виде разложения аналогичного (2.44):

$$\begin{aligned} U_{\text{упр}}^{\text{K}}(u_{\text{ч}}, u_{\text{т}}) &= 3G \left( -\frac{2u_{\text{ч}}}{l_0^{(2)}} \right)^2 V_2 + 3G \left( \frac{u_{\text{ч}} - u_{\text{т}}}{l_0^{(3)}} \right)^2 V_3 + \frac{3G}{2} \left( -\frac{2u_{\text{т}}}{l_0^{(4)}} \right)^2 V_4 = \\ &= 3G \left( \frac{V_3}{\left( l_0^{(3)} \right)^2} + \frac{4V_2}{\left( l_0^{(2)} \right)^2} \right) u_{\text{ч}}^2 + 3G \left( \frac{V_3}{\left( l_0^{(3)} \right)^2} + \frac{2V_4}{\left( l_0^{(4)} \right)^2} \right) u_{\text{т}}^2 + \\ &\quad + 3G \left( \frac{-2V_3}{\left( l_0^{(3)} \right)^2} \right) u_{\text{ч}} u_{\text{т}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

В этом выражении неизвестными являются объёмы всех стержней и длина стержня  $l_0^{(2)}$ , находящегося между частицами. Сопоставляя коэффициенты разложений (2.44) и (2.47), мы можем вычислить объём  $V_3$ :

$$B_3 = 3G \left( \frac{-2V_3}{\left( l_0^{(3)} \right)^2} \right) \rightarrow V_3 = -\frac{B_3 \left( l_0^{(3)} \right)^2}{6G}. \quad (2.48)$$

Затем объём общего стержня  $V_4$ :

$$B_2 = 3G \left( \frac{V_3}{\left( l_0^{(3)} \right)^2} + \frac{2V_4}{\left( l_0^{(4)} \right)^2} \right) \rightarrow V_4 = \frac{\left( l_0^{(4)} \right)^2}{2} \left( \frac{B_2}{3G} - \frac{V_3}{\left( l_0^{(3)} \right)^2} \right). \quad (2.49)$$

Оставшийся коэффициент  $B_1$  разложения (2.44) даёт соотношение между объёмом  $V_2$  и длиной  $l_0^{(2)}$  межчастичного стержня:

$$B_1 = 3G \left( \frac{V_3}{\left(l_0^{(3)}\right)^2} + \frac{4V_2}{\left(l_0^{(2)}\right)^2} \right) \quad \rightarrow \quad V_2 = \left( \frac{l_0^{(2)}}{2} \right)^2 \left( \frac{B_1}{3G} - \frac{V_3}{\left(l_0^{(3)}\right)^2} \right). \quad (2.50)$$

Все стержни рассматриваемой эвристической схемы имеют форму цилиндра и их объём не изменяется при деформации. Вычислив  $V_i$  легко найти радиусы  $r_i$  по известному соотношению:  $V_i = \pi r_i^2 l_0^{(i)}$ . Преобразуем связь  $V_2$  и  $l_0^{(2)}$  из (2.50):

$$r_2 = \sqrt{\frac{l_0^{(2)}}{4\pi} \left( \frac{B_1}{3G} - \frac{V_3}{\left(l_0^{(3)}\right)^2} \right)}. \quad (2.51)$$

Таким образом, интерполяцию численных данных об энергии деформируемого образца можно проводить по одной переменной. При условии соблюдения соотношения (2.51) стержневая модель будет в точности описывать поведение упругого образца в области малых деформаций.

### 2.3.4 Аппроксимация упругой энергии

Значения интерполяционных коэффициентов, соответствующие некоторым значениям начального межцентрового расстояния, представлены в таблице 6. При их использовании аппроксимация (2.41) воспроизводит результаты вычислений  $U_{\text{упр}}^k(q, q_0)$  при  $q_0 \geq 2.1$  с погрешностью не более 2.5%. С учётом этого факта формула (2.41) была применена для экстраполяции функции  $U_{\text{упр}}^k(q, q_0)$  в область  $q_0 \gtrsim 2$ , где прямой численный расчёт теряет устойчивость.

На графике 2.14 представлена экстраполяция упругой энергии по эвристической схеме без центрального стержня. Для удобства дальнейших вычислений в схему была добавлена штрафная функция, приводящая к росту энергии при малых расстояниях между частицами. Если бы в этой интерполяционной схеме использовался межчастичный стержень 1 из схемы 2.9, то критерием «вклю-

Таблица 6 — Числовые параметры интерполяционной формулы (2.41)

$q_0$	$r_2/a$	$r_3/a$	$r_4/a$	$l_0^{(2)}/a$
2.5	1.082	1.849	5.514	1.077
3	1.228	1.919	5.488	2.167
3.5	1.272	1.986	5.477	3.072
4	1.309	2.045	5.459	4.034

чения» этой функции можно было назвать его относительную деформацию более 99.9%. Иначе этот штраф можно представить как два диска толщиной  $0.001 \cdot (q_0 - 2)/2$ , прикреплённые к ступенчатым пластинам друг напротив друга в области потенциального контакта частиц.

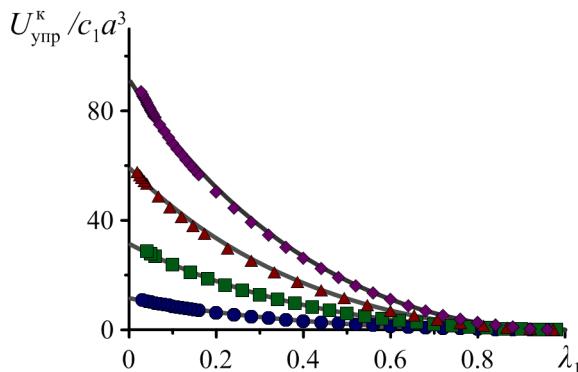


Рисунок 2.14 — Дискретный набор численных данных об упругой энергии при начальном межцентровом расстоянии  $q_0 = 2.5$  (круг),  $q_0 = 3$  (квадрат),  $q_0 = 3.5$  (треугольник),  $q_0 = 3.5$  (ромб), и соответствующие им непрерывные интерполяции (сплошные линии)

Подчеркнём, что достижение плотного контакта частиц в матрице реального МР эластомера маловероятно, хотя бы потому, что они не являются идеальными сферами. Кроме того, при сжатии эластомер между ними растягивается в радиальном направлении, полимерная сетка вытягивается настолько, насколько позволяет степень её сшивки и прикрепление к частицам. Таким образом, эластомер не может покинуть область между частицами совсем. Это означает, что между ближайшими точками поверхностей частиц всегда останется достаточноное количество полимера, которое не позволит им соприкоснуться.

ся. Присутствие эластомера в межчастичном зазоре подтверждено даже для структурированных композитов, где его наличие не ожидалось [47].

Центральный межчастичный стержень в эвристических схемах отвечает за то, как именно упругая энергия будет экстраполироваться в области малых межчастичных расстояний, соответствующих положению частиц близко-му к плотному контакту. Решение об использовании такого стержня должно приниматься на основе данных о конкретном рассматриваемом композите. К примеру, в пользу последней схемы, не содержащей центрального стержня и, соответственно, не дающей роста энергии в бесконечность, приведём следующее рассуждение. Область плотного контакта двух сфер — точка, находящаяся непосредственно на линии, соединяющей центры частиц. И только в этом бесконечно малом объёме упругая энергия бесконечно возрастает. Общая же энергия должна иметь конечную величину. Отличие полученной энергии образца с двумя включениями от энергии однородного стержня подкрепляет это соображение. С другой стороны, существуют исследования, описывающие особый слой эластомера вокруг частиц наполнителя, обладающий повышенными упругими характеристиками [105]. Увеличение модуля Юнга матрицы по направлению к частице неизбежно приведет к значительному росту энергии.

Обратим внимание на особую конфигурацию частиц в эластомере, при которой частицы находятся рядом друг с другом в расположении близком к плотному контакту. Пусть такой образец подвергается некоторому воздействию: к нему прикладываются внешние силы, вызывающие смещение его внешней границы. При построении интерполяционной формулы (2.41) для упругой энергии такая ситуация не рассматривалась. Проверим её в задаче о смещении внешней границы конечного цилиндрического образца эластомера, деформированного при перемещении двух абсолютно твёрдых включений навстречу друг другу и зафиксированных в таком положении. Результаты численного расчёта представлены на рисунке 2.15а. Значения упругой энергии образца, полученные с помощью моделирования и интерполяционной формулы неплохо согласуются. Относительное различие между ними  $\varepsilon$  приведено на рисунке 2.15б.

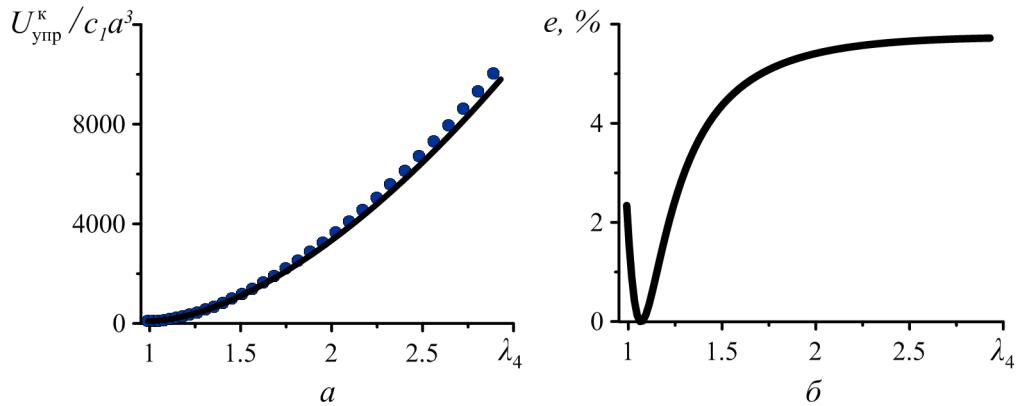


Рисунок 2.15 — а) Упругая энергия образца эластомера, деформированного двумя частицами внутри него, переместившимися до плотного контакта из начального положения  $q_0 = 4$ , в зависимости от его общего относительного удлинения, полученная в результате численного расчёта (круг) и с помощью интерполяционной формулы (сплошная линия); б) оценённая по формуле 2.35 разница между двумя этими энергиями

## Заключение к Главе 2

В настоящей главе рассмотрена задача об упругом взаимодействии двух твёрдых сферических включений в гиперупругой матрице. Показан значительный рост напряжений в матрице между частицами и неоднородный характер деформаций при их смещении навстречу друг другу. Предложены интерполяционные формулы для описания энергии матрицы, представляющие её в виде гладкой функции, что упрощает работу с полученными численными данными. Необходимо отметить, что для целей настоящей диссертации не столь важно поведение системы в области близкого контакта частиц, необходимо лишь само достижение подобной конфигурации. Для других же мезоскопических моделей вопрос об использовании той или иной экстраполяции упругой энергии должен решаться на основе дополнительных данных о рассматриваемом композите.

## Глава 3. Магнитомеханика двухчастичной модели магнитореологического эластомера

В рассматриваемом образце упругого эластомера с двумя намагничивающимися частицами, внесённом во внешнее магнитное поле, действуют одновременно магнитные и упругие силы. Под влиянием магнитных сил частицы в конфигурации «голова–хвост» стремятся сдвинуться навстречу друг другу. Это перемещение вызывает упругое сопротивление матрицы, которая стремится сохранить начальное недеформированное состояние. Магнитные и упругие силы вступают в противоборство, в результате чего частицы занимают в матрице некоторое равновесное положение, отвечающее минимуму полной энергии системы. Результаты, полученные в Главах 1 и 2, позволяют записать эту энергию для конфигурации «голова–хвост» в аналитическом виде.

### 3.1 Линейно намагничающиеся частицы в неограниченной гиперупругой среде

#### 3.1.1 Энергия пары намагничающихся линейно частиц в неограниченной гиперупругой среде

Полагая  $\gamma = 0^\circ$ , просуммируем выражения (1.71) для энергии линейно намагничающихся частиц в общем виде и (2.34) упругой энергии стержневой модели, описывающей неограниченную эластомерную среду. Полученная формула даёт полную энергию рассматриваемой пары магнито–поляризующихся частиц в конфигурации «голова–хвост» ( $\gamma = 0^\circ$ ).

$$U = \mu_0 H_0^2 a^3 [\omega_0(\lambda_1 q_0) + \omega_2(\lambda_1 q_0)] + c_1 a^3 \pi \sum_{k=1}^3 (2 - \delta_{k1}) \tilde{W}(\lambda_k) \frac{r_k^2 l_0^{(k)}}{a^3}. \quad (3.1)$$

Записывая её в безразмерной форме, имеем

$$\tilde{U} = U(q, q_0) / (c_1 a^3) = \tilde{H}_0^2 \tilde{U}_{\text{маг}}^{\lambda} + \tilde{U}_{\text{упр}}^{\infty}, \quad (3.2)$$

где введён параметр  $\tilde{H}_0 = H_0 \sqrt{\mu_0/c_1}$ .

Очевидно, что минимум магнитной составляющей выражения (3.2) достигается при плотном контакте частиц ( $\lambda_1 \rightarrow 0$ ), в то время как упругая энергия минимальна в отсутствие деформаций ( $\lambda_m = 1$ ). Конфигурации, в которых реализуется баланс упругих и магнитных сил, можно определить по рисунку 3.1, где показана зависимость энергии системы от расстояния между частицами. В слабом поле, когда магнитные силы невелики, энергия имеет единственный минимум (кривая 1 на рис. 3.1а); при этом деформация мала. С ростом поля ситуация изменяется: наряду с равновесием при малом сжатии, появляется второй минимум энергии, соответствующий существенному сближению частиц (кривая 2 на рис. 3.1а). Тем самым система приобретает бистабильность. При дальнейшем увеличении поля возможность равновесия при малых смещениях исчезает, и устойчивой оказывается только сильно сжатая конфигурация (кривая 3 на рис. 3.1а). Отметим, что использование аппроксимации (2.34) для  $U_{\text{упр}}^{\infty}$  в области  $q \sim 2$ , для которой нет данных численного расчёта, не позволяет точно найти количественные характеристики минимумов (их положение и глубину), соответствующих сильно сжатым состояниям пары (см. рис. 3.1б). Однако в качественном отношении поведение кривых рисунка 3.1 не вызывает сомнения.

Как указано, средний диаметр частиц магнитного наполнителя в типичных МР полимерах составляет единицы микронов. Тепловое движение объектов такого размера в полимерной матрице чрезвычайно слабо. Поэтому стационарное значение расстояния между частицами в приложенном поле  $\tilde{H}_0$  можно определить, находя минимумы энергетической функции  $\tilde{U}(q_0, \tilde{H}_0)$ . Рассмотрим случай, когда внешнее поле является слабым и, вследствие этого, малы и вызываемые им деформации. Чтобы упростить оценку, будем считать, что напряжения в матрице подчиняются закону Гука, а межчастичные магнитные силы можно описывать дипольной моделью. Выполняя расчёт, аналогичный приведённому в [106], и полагая, что материал частиц имеет высокую магнитную

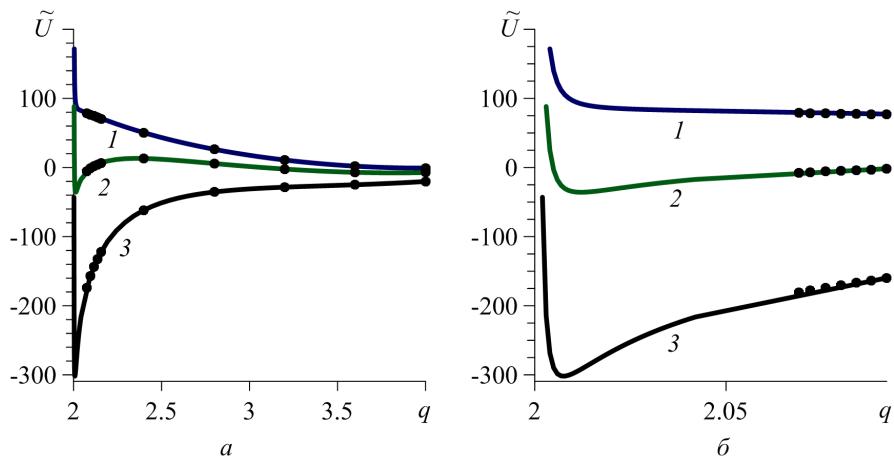


Рисунок 3.1 — а) Полная энергия системы при начальном расстоянии между частицами  $q_0 = 4$  и значениях параметра  $\tilde{H}_0 = 5$  (1), 15 (2), 25 (3); параметр модели Муни–Ривлина  $\tilde{c}_2 = 0.2$ ; символами показаны значения  $\tilde{U}$ , найденные с использованием численного расчёта упругой энергии; б) то же в области вблизи  $q = 2$

проницаемость, находим

$$q = q_0 \left[ 1 - 96\pi^2 \left( \frac{a}{l_0} \right)^6 \tilde{H}_0^2 \right], \quad (3.3)$$

откуда следует, что в слабом поле система всегда имеет единственный минимум энергии, соответствующий малому сближению частиц.

### 3.1.2 Гистерезис межчастичного расстояния при изменении внешнего магнитного поля

При увеличении поля, как показывает рисунок 3.1, потенциальный рельеф  $\tilde{U}(q_0)$  «двухямным» — два минимума, разделённых максимумом — что означает бистабильность системы. В отсутствие флюктуационных возмущений конфигурация бистабильной системы должна изменяться гистерезисным образом. Пусть, например, после включения слабого поля частица оказалась в минимуме потенциала, соответствующем слабой ( $l_0 - l \ll l_0$ ) деформации. Очевидно, что она будет находиться там, пока увеличение поля не приведёт к исчезновению указанного минимума. Лишь после этого — когда потенциальный рельеф снова

превратится в «одноярмный» (см. рис. 3.1) — возможно реальное перемещение частицы, то есть образование парного кластера. По тем же причинам скачкообразный характер будет иметь и восстановление исходного расстояния между частицами при уменьшении поля. Гистерезис межчастичного расстояния пары при циклическом изменении поля показан на рисунке 3.2. Вертикальные участки каждой петли указывают границы области бистабильности пары на оси  $\tilde{H}_0$ .

Отметим, что в стационарной конфигурации, возникающей при конечных значениях поля, частицы сближаются на расстояние  $l - 2a \ll a$ , то есть образуют парный кластер. Это следует из того, что «ближний» минимум  $\tilde{U}(q)$  всегда появляется в области  $q \simeq 2$  (см. кривые 2 и 3 на рис. 3.1). Физическая причина такого «коллапса» ясна: сила магнитного притяжения чрезвычайно быстро растёт с уменьшением межчастичного расстояния (см. рис. 1.5), и уравновесить её упругой силой при близком расположении частиц возможно только при очень больших относительных деформациях матрицы. В указанной ситуации использованная нами технология конечно-элементного расчёта оказывается неприменимой: как можно видеть из рис. 3.1, в области  $q \sim 2$  символы, показывающие численные результаты, отсутствуют. Именно поэтому для продолжения зависимостей  $\tilde{U}(q)$  в область  $q \simeq 2$  нам пришлось воспользоваться схемой рис. 2.9, допускающей экстраполяцию. Таким образом, ветви петель функции  $q(\tilde{H}_0)$ , прилегающие к оси  $\tilde{H}_0$  на рис. 3.2 (коллапс пары), не могут претендовать на количественную точность. Однако в любом случае они полностью согласуются с качественными предсказаниями.

Способность различных магнитоупругих систем проявлять бистабильность хорошо известна. Приведённые исследования подтвердили наличие этого свойства у рассматриваемой модели: пары линейно поляризующихся частиц, находящихся в упругом массиве. Как выяснилось, для этой системы бистабильность возникает лишь в определённом интервале полей. При этом переход между стационарными конфигурациями характеризуется существенным изменением межчастичного расстояния. В частности, с ростом поля происходит фактический коллапс частиц в плотный парный кластер. Отметим также, что в силу неограниченного роста магнитных сил с увеличением внешнего поля в рамках линейного закона намагничивания, бистабильность обнаруживается в образцах любой жесткости и при сколь угодно больших межчастичных расстояниях.

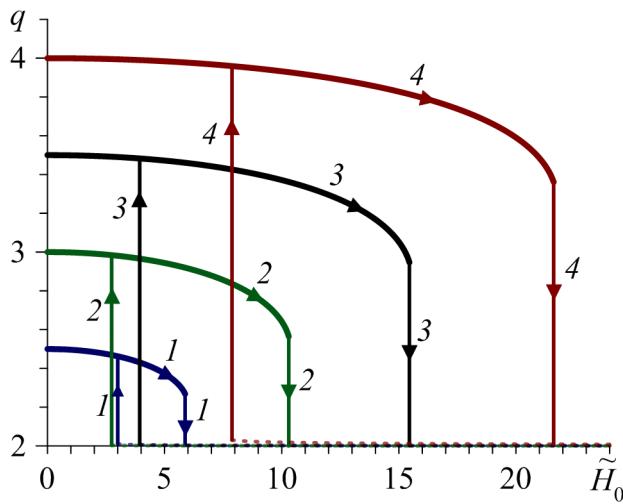


Рисунок 3.2 — Стационарное значение расстояния между частицами, занимающими конфигурацию  $\mathbf{l} \parallel \mathbf{H}_0$  («голова–хвост»), в зависимости от величины приложенного поля; начальное межчастичное расстояние  $q_0 = 2.5$  (1), 3.0 (2), 3.5 (3) и 4 (4); упругая константа  $\tilde{c}_2 = 0.2$ . Стрелки показывают направления смещения частиц при циклическом намагничивании системы: поле сначала возрастает, а затем убывает; штриховые линии – участки, полученные с помощью экстраполяционной формулы

### 3.2 Нелинейно намагничающиеся частицы в конечном гиперупругом массиве

#### 3.2.1 Энергия пары намагничающихся нелинейно намагничающихся частиц в конечном гиперупругом массиве

Рассмотрим гиперупругий образец эластомера в форме цилиндра конечных размеров с двумя нелинейно намагничающимися частицами, объединив магнитный (1.92) и упругий (2.41) вклады в выражение для энергии системы. Это даёт полную энергию пары нелинейно намагничающихся частиц, находящихся в конфигурации «голова–хвост» (относительно поля  $\mathbf{H}_0$ ) в образце эластомера конечного размера:

$$\tilde{U} = \frac{U(q, q_0, h_0)}{c_1 a^3} = \frac{\mu_0 M_s^2}{c_1} \tilde{U}_{\text{маг}}^{\text{H}}(q, h_0)|_{\gamma=0} + \tilde{U}_{\text{упр}}^{\text{K}}(q, q_0); \quad (3.4)$$

Здесь  $h_0$  модуль вектора  $\mathbf{h}_0 = \mathbf{H}_0/M_s$ . Поскольку материал частиц намагничивается нелинейно, то функция  $U_{\text{маг}}^{\text{н}}(q, h_0)$  зависит от параметров  $\chi_0$  и  $M_s$  (см. формулу (1.85)). Минимизация энергии  $U$  по  $q$  при заданных значениях внешнего поля  $h_0$  и обезразмеренного начального межцентрового расстояния  $q_0$  обуславливает равновесный размер пары в намагниченном состоянии, а появление более чем одного минимума означает мультистабильность системы.

В предыдущем параграфе анализировались функции  $U(q, q_0, h_0)$  для пары частиц из линейно намагничивающегося (то есть парамагнитного) материала. Показано, что в определённом интервале полей такая система проявляет бистабильность: энергия имеет два минимума, локализованных при различных значениях  $q$ , одно из которых соответствует близкому соседству частиц ( $q \simeq 2$ ). При усилении поля до некоторой величины  $h_0^{(1)}$  бистабильность исчезает, и состояние равновесия при  $q \simeq 2$  становится единственным. Это означает, что выше порога  $h_0^{(1)}$  происходит образование двухчастичного кластера. Эффект имеет гистерезисный характер: кластер, возникший в поле  $h_0^{(1)}$ , при снижении величины поля до значения  $h_0^{(2)} < h_0^{(1)}$  распадается, то есть в системе наблюдается переход первого рода. Для парамагнитных частиц ширина области магнитомеханического гистерезиса  $h_0^{(1)} - h_0^{(2)}$  неограниченно растёт с увеличением  $q_0$ .

Функция (3.4) даёт возможность впервые изучить вопрос о магнитомеханическом гистерезисе в паре ферромагнитных, а не парамагнитных частиц, и тем самым сделать важный шаг на пути к построению мезоскопической теории реальных МР систем.

Перед обсуждением количественных результатов полезно качественно проанализировать магнитомеханический отклик пары ферромагнитных частиц. Пусть частицы находятся в плотном контакте, то есть  $q_* \simeq 2$ . В режиме насыщения энергия  $U_{\text{маг}}^{\text{н}}$  достигает максимума и перестаёт зависеть от приложенного поля, следовательно при любом начальном размере пары  $q_0$  выигрыш магнитной энергии не может превышать конечную величину  $\Delta U_{\text{маг}}^{\text{н}} = |U_{\text{маг}}^{\text{н}}(q_*, \infty)|$ , где формально положено  $h_0 = \infty$ . Вместе с тем приращение упругой энергии  $\Delta U_{\text{упр}}^{\text{к}} = U_{\text{упр}}^{\text{к}}(q_*, q_0)$  не зависит от поля и неограниченно растёт с увеличением  $q_0$ . Отсюда следует, что для ферромагнитных частиц (в отличие от парамагнитных) интервал значений  $q_0$ , где магнитная и упругая энергии могут конкурировать между собой, создавая бистабильность, ограничен сверху некоторой

величиной  $q_0^{\text{up}}$ . Последняя тем больше, чем выше намагниченность насыщения ферромагнетика  $M_s$  и ниже упругость материала, характеризуемая параметром  $c_1$  потенциала Муни–Ривлина.

Следует заметить, что интервал значений  $q_0$ , допускающий бистабильность, должен также иметь и конечную нижнюю границу. Действительно, в модели Муни–Ривлина эластомер становится тем жёстче, чем сильнее он деформирован. Для близко расположенных частиц ( $q_0 \gtrsim 2$ ) даже малое абсолютное смещение означает заметную относительную деформацию и, следовательно, высокую энергию упругого отталкивания. Иными словами, если частицы находятся по соседству уже в исходном состоянии, то бистабильность не возникает из-за того, что паре «некуда» коллапсировать. Это и доказывает наличие конечной нижней границы  $q_0^{\text{dn}}$  интервала начальных расстояний  $q_0$ , внутри которого система проявляет бистабильность. В противоположность  $q_0^{\text{up}}$ , величина  $q_0^{\text{dn}}$  должна убывать с ростом намагниченности насыщения ферромагнетика  $M_s$  и увеличением мягкости матрицы.

Уникальная особенность системы с насыщением намагниченности заключается в том, что при определённых условиях возникшая в ней бистабильность не приводит к образованию кластера. Пусть при некотором значении  $h_0$  вследствие изменения  $U_{\text{маг}}^{\text{h}}$  профиль энергии  $U(q, q_0, h_0)$  превратился из однокомпонентного в двухъярусный, то есть возникла бистабильность. Если при этом значении  $h_0$  намагниченность близка к насыщению, то дальнейшее увеличение поля уже не влияет на  $U_{\text{маг}}^{\text{h}}$ , и значит полная энергия  $U$  — см. (3.4) — становится независимой от величины поля. В такой ситуации бистабильность системы, обусловленная двухъярусным профилем функции  $U(q)$ , оказывается «латентной»: хотя её минимум энергии при  $q \simeq 2$  допускает переход в состояние кластера, однако осуществление его за счёт намагничивания системы невозможно.

Пример численного расчёта энергии  $U(q, h_0)$  при заданном начальном размере пары  $q_0$  приведён на рисунке 3.3; количественной характеристикой относительного влияния магнитных и упругих сил служит параметр

$$\beta = \mu_0 M_s^2 / c_1. \quad (3.5)$$

Назовём его относительной податливостью системы. Левая панель (рис. 3.3а) показывает поведение пары в «мягком» материале ( $\beta = 46$ ). Как видно, в слабом поле имеется только один минимум энергии, соответствующий незначительному

изменению исходного размера (кривая 1). С ростом величины поля возникает состояние с двумя минимумами (кривые 2 и 3), но затем « дальний » минимум исчезает (кривая 4) и единственным устойчивым состоянием оказывается состояние кластера. Положение и глубина соответствующего минимума перестают меняться после того, как намагниченность частицы насыщается (кривые 4 и 5).

Иначе обстоит дело в системе с меньшей податливостью ( $\beta = 26$ , рис. 3.3б). В этом случае возникшая бистабильность (кривая 3) « доживает » до значений поля, близких к отвечающим насыщению (кривая 4). В результате потенциал сохраняет двухъядерный профиль в сколь угодно большом поле (см. кривые 4 и 5). По этой причине магнитомеханический гистерезис оказывается « латентным »: состояние кластера возможно, но не реализуется. Если всё—таки в сильном поле кластер был каким—либо образом создан, то при понижении величины поля он обязательно распадётся и частицы разойдутся на исходное расстояние.

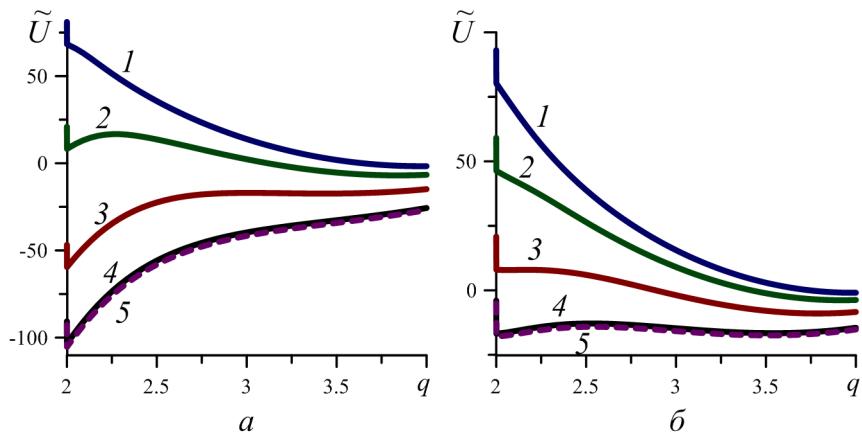


Рисунок 3.3 — Изменение профилей энергии взаимодействия частиц при  $q_0 = 4$  для систем с разной относительной податливостью  $\beta$ : 46 (а) и 26 (б), и различной величине приложенного поля  $h_0$ : 0.08(кривая 1), 0.16 (2), 0.24 (3), 0.32 (4) и 0.4 (5) (для различения кривых 4 и 5 последняя показана штрихами)

### 3.2.2 Гистерезис межчастичного расстояния при изменении внешнего магнитного поля

На рисунке 3.4 представлены деформационные отклики пар частиц в системе с фиксированным значением магнитомеханического параметра  $\beta$ . Для наглядности удобно полагать, что речь идёт о композиции полимер/ферромагнетик одного и того же состава, при этом пары частиц отличаются только своим начальным размером  $q_0$ . Проведённый выше качественный анализ позволяет легко разобраться в изображённых кривых. Так, кривая 1 показывает, что при очень близком расположении частиц альтернативные минимумы энергии почти совмещены, вследствие чего уплотнение пары до состояния кластера мало сказывается на её размере и происходит плавно. Магнитомеханический гистерезис существует явно в интервале  $2.5 < q_0 < 3.5$ . На кривых 2 и 3 хорошо видны области бистабильности, ограниченные «ступеньками» (по  $q$ ), которые соответствуют: справа — входу в состояние кластера при увеличении поля; слева — выходу из этого состояния при снижении напряжённости поля.

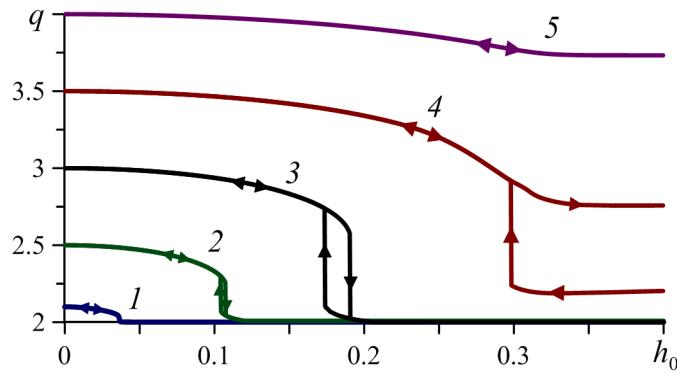


Рисунок 3.4 — Смещение частиц в зависимости от величины внешнего магнитного поля при начальном размере пары  $q_0$ : 2.1 (кривая 1); 2.5 (2); 3 (3); 3.5 (4); 4 (5); параметр  $\beta = 18$

Для пары частиц с начальным размером  $q_0 = 3.5$  магнитомеханический гистерезис является «латентным» (кривая 4). Действительно, при любом увеличении/уменьшении величины поля размер пары меняется плавно, реализуется только верхняя ветвь кривой 4. Наличие бистабильности (область двузначности кривой 4) означает, однако, что если двухчастичный кластер создастся посредством стороннего (немагнитного) воздействия, то система придёт к балансу магнитных и упругих сил, и этот объект станет устойчив во всей области,

где существует нижняя ветвь кривой 4. Для пар большого размера гистерезис невозможен (см. кривую 5), поскольку даже в состоянии насыщения магнитные силы много слабее упругих.

Таким образом, разработанное описание силового взаимодействия ферромагнитных частиц использовано для изучения магнитомеханического гистерезиса пары частиц в полимерной матрице. Этот эффект был обнаружен также в разделе 3.1 для парамагнитного случая. Как оказалось, для ферромагнетиков он также возможен, однако не всегда, а лишь в ограниченном диапазоне значений  $q_0$  — начального расстояния между частицами (размера пары). Действительно, для ферромагнитных частиц абсолютным верхним пределом выигрыша по парной энергии магнитного взаимодействия является величина  $(4\pi^2/9) M_s^2 a^3$ , которая соответствует плотному контакту частиц, построенных в конфигурацию «голова–хвост» и намагниченных до насыщения. В то же время, упругая энергия при изменении межчастичного расстояния может расти фактически неограниченно.

Проиллюстрируем гистерезисное поведение двух намагничающихся частиц в эластомере следующей серией картинок на рисунке 3.6. Рассмотрим систему с межцентровым расстоянием  $q_0 = 3.5$  и параметром  $\beta = 20$ . Согласно анализу энергии этого образца, для него существует магнитомеханический гистерезис, с двумя устойчивыми состояниями в диапазоне значений внешнего поля  $h_0$  между 2.2 и 3.1 (см. рис. 3.5). При изменении внешнего поля, меняется как намагниченность частиц, так и расстояния между ними, что соответствует движению по линиям графика 3.5. На рисунке 3.6 это изменение представлено последовательно по характерным точкам, отмеченным на рисунке 3.5.

### 3.2.3 Условия существования магнитомеханического гистерезиса

Области существования магнитомеханического гистерезиса в модельном «двуихчастичном» МР эластомере (см. рис. 2.9) представлены на рисунке 3.7 в координатах  $q_0$  и  $\beta = \mu_0 M_s^2 / c_1$ , где параметр  $\beta$  определён формулой (3.5). Сплошная линия — это граница, выше которой гистерезисный переход в состояние кластера можно вызвать приложением внешнего поля. Между сплошной

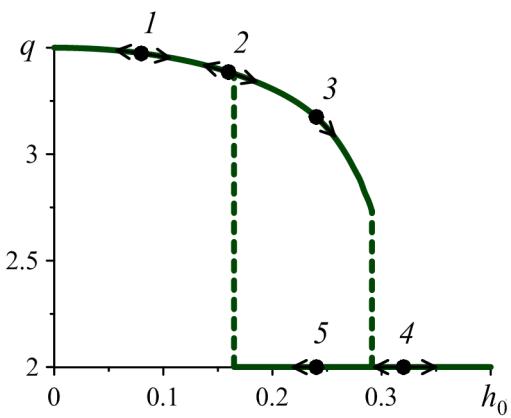


Рисунок 3.5 — Магнитомеханический гистерезис межцентрового расстояния в системе из двух частиц с  $q_0 = 3.5$  и параметром  $\beta = 20$ . Точками на графике отмечены состояния системы при значениях внешнего магнитного поля: точка 1:  $h_0 = 0.08$ ; 2:  $h_0 = 0.16$ ; 3 и 5:  $h_0 = 0.24$ ; 4:  $h_0 = 0.32$

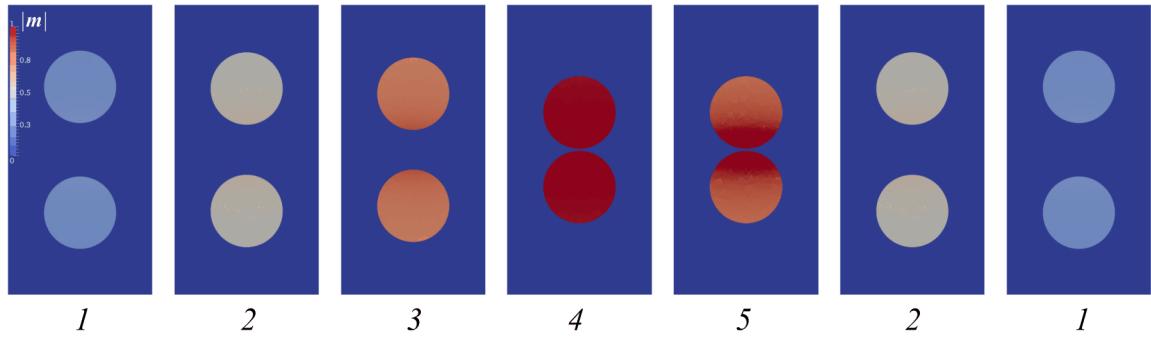


Рисунок 3.6 — Смещение частиц и величина их намагниченности в мезоскопическом образце с  $q_0 = 3.5$  и параметром  $\beta = 20$  в зависимости от величины внешнего поля: а)  $h_0 = 0.08$ ; б)  $h_0 = 0.16$ ; в)  $h_0 = 0.24$ ; г)  $h_0 = 0.32$ ; д)  $h_0 = 0.24$ ; е)  $h_0 = 0.16$ ; ё)  $h_0 = 0.08$  соответствующие пронумерованным точкам на рисунке 3.5

и штриховой линиями располагается область латентного гистерезиса, где для формирования кластера требуется сочетание намагничивания и некоторой сторонней (немагнитной) силы.

Самая нижняя точка границы на рисунке 3.7 имеет координаты  $\beta \simeq 11$ ,  $q_0 \simeq 2.7$ . Ветви сплошной и штриховой границ, уходящие от неё направо вверх указывают, что чем выше намагниченность насыщения ферромагнетика (при заданной упругости матрицы), тем более удалённые частицы могут объединяться в кластер. Это может происходить либо за счёт магнитной силы как таковой (область над сплошной линией), либо при добавлении к магнитному притяжению некоторой сторонней механической силы (область между сплошной и

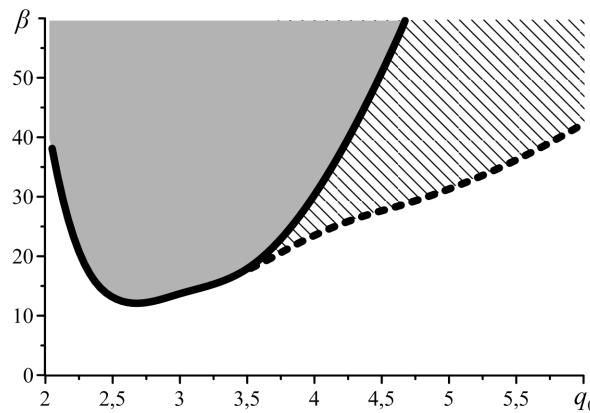


Рисунок 3.7 — Области существования магнитомеханического гистерезиса пары частиц ферромагнетика, заключённых в упругую матрицу и намагничиваемых в конфигурации «голова–хвост»; затемнённая область соответствует реализующемуся магнитомеханическому гистерезису, заштрихованная — латентному

штриховой линиями). Следует отметить, что для линейно намагничивающихся частиц, рассмотренных в параграфе 3.1, величину  $M_s$  формально следует положить бесконечной. Таким образом, на рисунке 3.7 случаю линейного намагничивания соответствует бесконечно удалённая область  $\beta = \infty$ ; то есть для идеально парамагнитных частиц магнитный гистерезис существует всегда, при любых  $q_0$ . Подъём границы  $\beta(q_0)$  слева от точки минимума обусловлен нелинейностью модели Муни–Ривлина: с ростом относительной деформации жёсткость полимера увеличивается. По этой причине, чем ближе располагаются частицы в исходном состоянии, тем большая магнитная сила требуется для того, чтобы они объединились в кластер.

Очевидно, что обсуждаемая двухчастичная модель не может претендовать на достоверное описание реального материала. Однако оценки, полученные с её помощью, интересны, поскольку дают представление о порядках величин, при которых следует ожидать мезоскопического гистерезисного отклика МР эластомера. Это тем более важно, что макроскопическими следствиями кластерообразования должны быть, в частности, наблюдавшиеся в эксперименте рост модуля упругости и возникновение индуцированной пластичности.

Характерное значение параметра  $\beta$  в нижней точке диаграммы на рисунке 3.7 составляет  $\beta \sim \mu M_s^2 / c_1 \sim 10$ . Подстановка в это выражение значения  $M_s^2 \sim 2.25 \times 10^6 \text{ A/m}^2$  (для железа) и учёт того, что коэффициенты  $c_{1,2}$  потенциала Муни–Ривлина (2.1) связаны с начальным модулем Юнга  $E$  матрицы

соотношением  $E = 6c_1(1 + \tilde{c}_2)$  [75], дают  $E_* \sim 280$  кПа. Как вытекает из определения  $\beta$ , оценка  $E_*$  есть максимальное значение модуля, при котором возможен магнитомеханический гистерезис. У типичных МР эластомеров модуль Юнга  $E_{\text{exp}}$ , найденный экспериментально, лежит в диапазоне  $30 - 100$  кПа [17; 27], то есть для таких эластомеров выполняется соотношение  $E_{\text{exp}} < E_*$ . Кроме того, следует учесть, что рассматриваемый магнитомеханический гистерезис — это результат решения мезоскопической задачи, так что величина  $E$  (или  $c_1$ ), входящая в выражение для  $\beta$ , имеет смысл модуля Юнга самой полимерной матрицы, а не модуля композита в целом. Чтобы произвести оценку  $E$ , соответствующего заданному  $E_{\text{exp}}$ , можно обратиться к резиноподобному эластомеру, наполненному химически инертными твёрдыми сферическими микрочастицами. При объёмной концентрации частиц около  $25 - 30\%$  соотношение между макроскопическим модулем  $E_{\text{exp}}$  такой системы и модулем Юнга матрицы составляет  $E_{\text{exp}} \simeq 3E$  [107]. Отсюда следует, что для указанных выше значений  $E_{\text{exp}}$  величина  $E$  находится в интервале  $10 - 30$  кПа, то есть условие  $E < E_* \sim 280$  кПа оказывается выполненным с большим запасом. Таким образом, по крайней мере согласно критерию, следующему из модели парного взаимодействия частиц, в реальном композите выполняются все необходимые условия для реализации магнитомеханического гистерезиса.

Опираясь на результаты вычислений, можно предложить следующую качественную картину намагничивания образца МР эластомера. Наложение внешнего однородного магнитного поля вызывает массовое объединение двух— (а, возможно, и многочастичных) кластеров из частиц, которые по статистическим причинам оказались наиболее близко отстоящими друг от друга. Такие агрегаты принимают на себя роль «магнитных скрепок» [106; 108]: они создают и поддерживают внутренние напряжения в композите до тех пор, пока поле не будет выключено. Именно образованием таких «скрепок» и вызван рост упругого модуля и переход МР эластомера к пластичности [17]. Свой вклад в структурирование вносит и «латентный» гистерезис. Как показано выше, этот механизм агрегирования не может проявиться, если образец свободен от внешних нагрузок. Однако любой эксперимент по измерению механических свойств подразумевает деформацию образца. Нагрузки, сопровождающие деформацию, способны превратить потенциальный (латентный) гистерезис в реальный, то есть вызвать формирование добавочных кластеров. Согласно рисунку 3.7, учёт латентного

гистерезиса значительно расширяет диапазон материальных параметров, в котором возможна кластеризация. Все эти соображения дают основание полагать, что магнитомеханический гистерезис является одним из главных, а возможно, и единственным путём кластеризации реальных МР полимеров, произведённых на основе микрочастиц железа.

Итак, установлено, что для пары ферромагнитных частиц, помещённых в эластомерную матрицу, как и для (супер)парамагнитных частиц в тех же условиях, возможно образование кластера по сценарию магнитомеханического гистерезиса. Однако из-за насыщения намагниченности эффект существенно отличается от парамагнитного случая. Во-первых, бистабильность системы и её гистерезис наблюдаются только в ограниченной области значений материальных параметров системы. Во-вторых, наряду с гистерезисом, возникающим только под воздействием поля, осуществим также и «латентный» гистерезис, для реализации которого требуется дополнительный фактор, например, приложение извне механических напряжений и/или деформаций.

### **3.2.4 Магнитоиндуцированная деформация образца магнитореологического эластомера: сопоставление с литературными данными**

С целью проведения натурного эксперимента, авторы работы [48] синтезировали образцы магнитореологического эластомера из силиконовой резины и крупных железных частиц диаметром 4 и 8 миллиметров. Такие миллиметровые частицы в магнитном отношении эквивалентны микронным. Они имеют высокую восприимчивость  $\chi = 10^4$  и намагниченность насыщения  $M_s = 1600$  кА/м. Эксперименты, проведённые на образце из чистого эластомера, показали, что он обладает модулем Юнга  $E$  порядка 165 кПа. Образцы композита имели одинаковую объёмную концентрацию и частицы в них располагались в узлах кубической решётки. Таким образом один образец содержал 27 одинаковых частиц с диаметром 8 миллиметров, а другой — 216 частиц с диаметром 4 миллиметра. Во внешнем однородном магнитном поле образцы сжимались вдоль его направления (см. рис. 3.8). К примеру, в поле максимальной напря-

жённости 282 кА/м магнитострикция образца с 27 частицами достигала почти 4%.

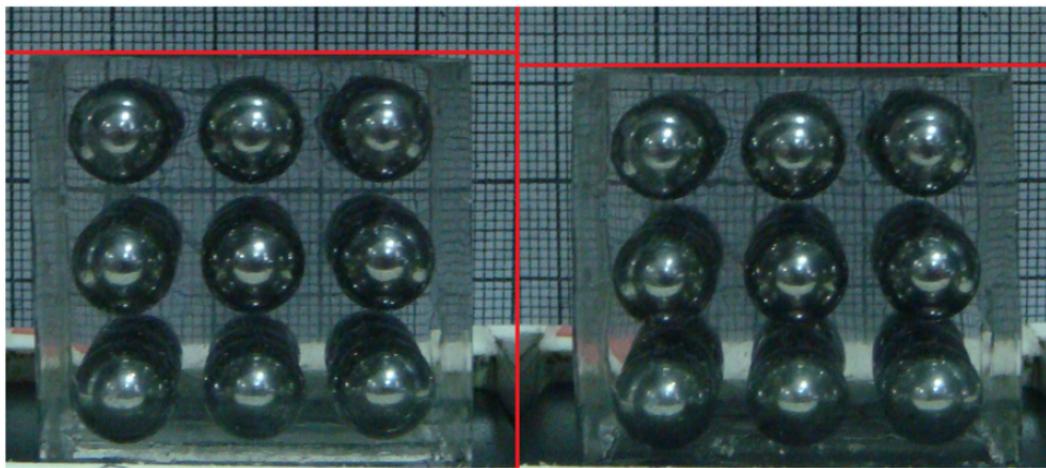


Рисунок 3.8 – Деформация образца МР эластомера (с частицами диаметром в 8 мм) в магнитном поле напряжённостью  $H_0$  равной а) 0 кА/м и б) 282 кА/м [48]

Используя нашу модель двухчастичного образца эластомера, мы можем оценить вклад в магнитодеформационный эффект, который вносят частицы, располагающиеся в образце вдоль вектора магнитного поля. Рассмотрим мезоскопический образец МР эластомера с двумя частицами, обладающий теми же упругими и магнитными характеристиками, что и образцы, представленные в работе [48]: частицы обладают восприимчивостью  $\chi = 10^4$  и намагниченностью насыщения  $M_s = 1600$  кА/м, а матрица упругими константами модели Муни-Ривлина  $c_1 = 230$  кПа и  $\tilde{c}_2 = c_1/c_2 = 0.2$ , найденными по их связи с модулем Юнга  $E = 6c_1(1 + \tilde{c}_2)$ . Начальное безразмерное расстояние между центрами частиц  $q_0 = 3$  определено по фотографиям образца. Изменение расстояния между частицами в такой системе с ростом приложенного магнитного поля представлено на рисунке 3.9. Параметр  $\beta$  такого мезоскопического образца равен 11.1. Согласно диаграмме 3.7 в таком МР эластомере не реализуется магнитомеханический гистерезис, и на графике 3.9 частицы плавно перемещаются навстречу друг другу по мере роста магнитного поля. При  $h_0$  более 0.34, соответствующей величине напряжённости поля  $H_0 = 545$  кА/м, достигнув насыщения намагниченности, частицы занимают равновесное положение в матрице с расстоянием между их центрами  $q = 2.53$ .

Изменение общей длины образца вдоль вектора внешнего магнитного поля, совпадающего с направлением оси  $Oz$ , может быть записано через измене-

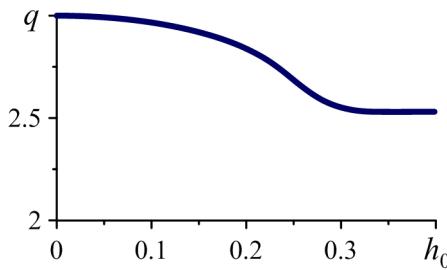


Рисунок 3.9 — Смещение частиц в зависимости от величины приложенного магнитного поля при начальном межцентровом расстоянии пары  $q_0 = 3$  в образце с параметром  $\beta = 11.1$

ние расстояний между частицами в парах, расположенных также вдоль  $Oz$  (см. рис. 3.10). Деформация образца запишется следующим образом:

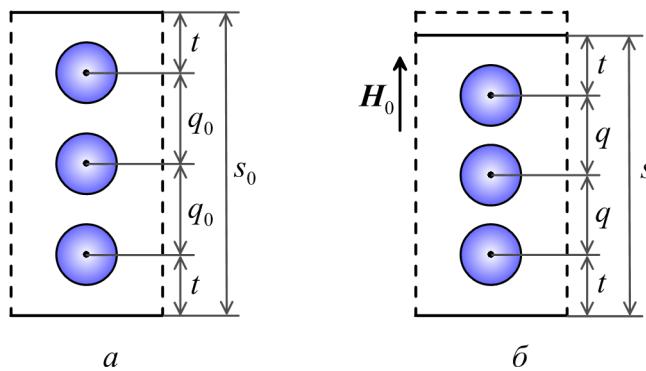


Рисунок 3.10 — Схематическое изображение изменения общей длины образца во внешнем магнитном поле, вызванного перемещением частиц внутри него

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{s_0} = \frac{s}{s_0} - 1 = \frac{2q + 2t}{2q_0 + 2t} - 1 = \frac{q - q_0}{q_0 + t}, \quad (3.6)$$

где  $s_0$  и  $s$  — начальная и текущая длина образца,  $q_0$  и  $q$  — начальное и текущее расстояние между центрами частиц,  $t$  — величина зазора между центром крайней частицы и внешней границей эластомера, недеформируемого при приложении магнитного поля. Все эти величины измеряются в единицах радиуса частиц. Вклад пар, расположенных в образце поперёк поля, не учитывается. В этой связи, деформация образца, предсказанная с помощью нашей модели, не может претендовать на количественную точность, но качественно совпадает с экспериментальными данными (см. рис. 3.11). В том числе, верным оказывается указание на отсутствие магнитомеханического гистерезиса в такой системе. В таблице 7 представлены значения магнитоиндуцированной деформации об-

разца, полученные экспериментально, и найденные с помощью нашей двухчастичной модели.

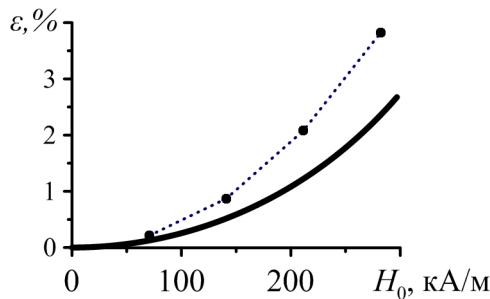


Рисунок 3.11 — Магнитоиндуцированная деформация  $\varepsilon$  образца МР эластомера с частицами диаметром 8 мм (точки) в сравнении с деформацией, вычисленной по формуле (3.6) с помощью модели мезоскопического образца (сплошная линия)

Таблица 7 — Магнитоиндуцированная деформация образца МР эластомера с частицами диаметром 8 мм в сравнении с деформацией, полученной с помощью модели мезоскопического образца

$H_0, \text{ кA/m}$	$\varepsilon_{\text{эксп}}, \%$	$\varepsilon_{\text{модл}}, \%$
70.5	0.21	0.13
141	0.87	0.53
211.5	2.08	1.20
282	3.82	2.34

### 3.2.5 Механические характеристики двухчастичной модели

Построенная интерполяционная формула для энергии  $U_{\text{упр}}^k$  конечного цилиндрического эластомера (2.41) учитывает связь между изменением его общего размера  $u_t$  в результате изменения расстояния между частицами  $u_c$  под действием магнитных сил. Следовательно, она пригодна для описания поведения образца, если к его краям прикладывается некоторая нагрузка. В этом случае

$\lambda_1$  и  $\lambda_4$  становятся независимыми и общая энергия теперь  $U = U(\lambda_1, \lambda_4, q_0, h_0)$ . Это позволяет нам определить характеристики отклика модельного образца эластомера с двумя частицами на внешнюю механическую нагрузку.

Рассматриваемый образец, упругий отклик которого мы описываем системой стержней (рис. 2.12), располагается так, что вектор  $\mathbf{l}$ , соединяющий центры частиц, лежит вдоль оси  $z$ . Внешнее поле также направлено вдоль этой оси. Система ограничена плоскостями  $z = z_1$  и  $z = z_2$ . Под действием внешнего магнитного поля образец деформируется так, что относительные деформации 1 и 4 стержней принимают значения  $\varepsilon_1^* = \lambda_1^* - 1$  и  $\varepsilon_4^* = \lambda_4^* - 1$  соответственно. Эта конфигурация системы является равновесной. Необходимо пояснить, что деформация стержня 1 рассматривается умозрительно, как характеристика изменения межчастичного зазора, несмотря на то, что в эвристической схеме 2.12 этот стержень отсутствует. Теперь приложим к плоскостям, ограничивающим образец, малые силы величиной  $f$ , сжимающие или растягивающие его. Разложим энергию образца в ряд в окрестности указанного положения равновесия:

$$U(\varepsilon_1^*, \varepsilon_4^*) = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_1^2} \right|_{\varepsilon_4 = \varepsilon_4^*}, \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_4^2} \right|_{\varepsilon_4 = \varepsilon_4^*}, \varepsilon_4^2 + \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_4} \right|_{\varepsilon_4 = \varepsilon_4^*}, \varepsilon_1 \varepsilon_4. \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^* \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_1^* \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_1^*$$

Производные первого порядка зануляются, поскольку рассматривается равновесие. Приложенная нагрузка вызывает дополнительную малую деформацию образца, уравновешивающую как магнитные силы взаимодействия частиц, так и внешнюю механическую нагрузку. Следовательно сумма энергии образца и работа этих сил должны стремиться к минимуму:

$$U(\varepsilon_1, \varepsilon_4) - f u_t \rightarrow \min. \quad (3.8)$$

Перепишем работу внешних сил в виде  $f u_t = f \varepsilon_4 l_0^{(4)}$ , используя соотношение между деформацией и перемещением  $\varepsilon_4 = u_t / l_0^{(4)}$ . Кроме того, введём обозначения для частных производных энергии второго порядка, и задача оптимизации (3.8) запишется в виде

$$U - f \varepsilon_4 l_0^{(4)} = \frac{1}{2} A_{11} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} A_{22} \varepsilon_4^2 + A_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_4 - f \varepsilon_4 l_0^{(4)} \rightarrow \min. \quad (3.9)$$

Следуя стандартной процедуре поиска экстремума функции запишем производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} &= A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_4 = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_4} &= A_{22}\varepsilon_4 + A_{12}\varepsilon_1 = fl_0^{(4)}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Отношение  $f/\varepsilon_4$ , определяющее способность рассматриваемой модели сопротивляться деформации, может быть легко выведено из найденной системы уравнений:

$$K = \frac{f}{\varepsilon_4} = \left( A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) \frac{1}{l_0^{(4)}}. \quad (3.11)$$

Обозначим эту величину  $K$ . По смыслу она является жёсткостью мезоскопического образца с двумя частицами.

Равновесие рассматриваемой системы есть магнитоиндукционная равновесная деформация  $(\varepsilon_1, \varepsilon_4)$ , которая, как показано в этой главе, имеет гистерезисный характер. Отсюда следует, что её жёсткость зависит от магнитного поля и должна меняться подобным гистерезисным образом. Введём относительную жёсткость мезоскопического образца  $\tilde{K}$ , определив её как отношение найденной  $K$  системы, к жёсткости матрицы  $K_m$ , связанной с константами модели Муни–Ривлина и площадью торца цилиндрического образца соотношением  $K_m = 6c_1(1 + \tilde{c}_2)S$ . На рисунке 3.12а приведен график изменения равновесного состояния системы с начальным межчастичным расстоянием  $q_0 = 4$  и общей длиной образца 12 (в единицах радиуса  $a$ ). Соответствующее ему изменение относительной жёсткости образца  $\tilde{K}$  представлено на рисунке 3.12б. С ростом внешнего поля модуль системы уменьшается. Затем, при определённой величине поля, в системе появляется второй модуль. Переход к нему осуществляется с дальнейшим увеличением поля, скачкообразно, при исчезновении первоначального модуля. Таким образом, изменяя величину поля можно задавать упругие свойства мезоскопического образца. В диапазоне полей, при которых существуют одновременно оба значения жёсткости, переход между ними можно осуществить лишь приложением некоторой внешней нагрузки.

Предположим, что рассматриваемый мезоскопический образец с расстоянием между частицами  $q_0 = 4$  и параметром  $\beta = 37.5$  помещён в магнитное поле. Приложим внешнее давление  $p$  к торцам образца. Связь между возникаю-

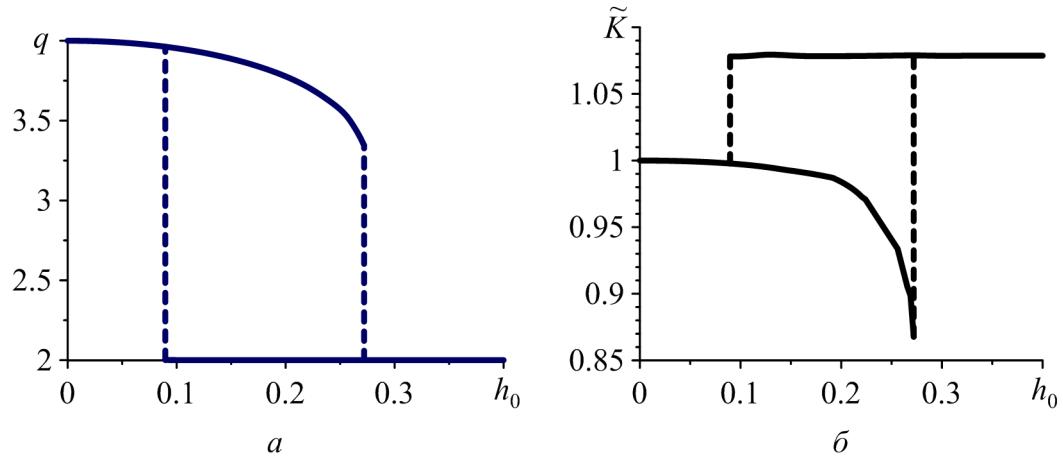


Рисунок 3.12 — а) Гистерезис в системе с  $q_0 = 4$  и  $\beta = 37.5$ ; б) изменение жёсткости той же системы в зависимости от приложенного поля

щими в нём напряжениями и деформацией показана на рисунке 3.13б. Каждая точка на сплошных линиях графика — равновесное состояние системы с энергией  $U - p\varepsilon_4 V$  при соответствующих  $p$  и  $\varepsilon_4$ . Из графика видно, что в некотором диапазоне величин сжимающего усилия существуют две равновесные деформации системы  $\varepsilon_4$ , лежащие на двух разных кривых диаграммы. Каждая кривая отвечает различному значению жёсткости системы, и переход между ними осуществляется скачком, по гистерезисному сценарию. Очевидно, что в образ-

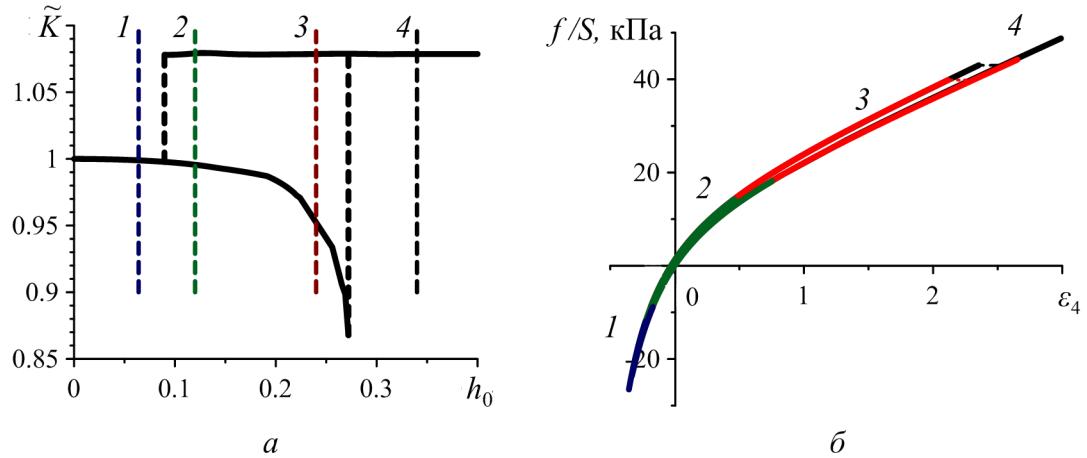


Рисунок 3.13 — а) Изменение жёсткости системы с  $q_0 = 4$  и  $\beta = 37.5$ ; б) Диаграммы напряжения–деформации той же системы в различных магнитных полях: 1)  $h_0 = 0.064$ , 2)  $h_0 = 0.12$ , 3)  $h_0 = 0.24$ , 4)  $h_0 = 0.34$ , показанных вертикальными штриховыми прямыми на панели а графика

це, имеющем первоначально одну равновесную конфигурацию, под действием внешнего механического усилия возникает второе равновесие, соответствующее

плотному контакту частиц (см. например рис. 3.14а). Если мы посмотрим на эту же систему в поле  $h_0 = 0.12$ , при котором она уже имеет два различных значения  $K$  (см. вертикальное сечение 2 на рисунке 3.13а), то на диаграмме напряжения–деформации обнаружим ту же петлю, образованную двумя кривыми (см. рис. 3.14б). При этом для перевода системы в режим большей жёсткости, возникающего при «слипании» частиц, необходимо приложить сжимающее усилие, а для возврата к меньшему значению  $K$  придётся растянуть образец. Аналогичная диаграмма для образца в поле  $h_0 = 0.24$  и  $h_0 = 0.34$  представлена на рисунках 3.14в и 3.14г.

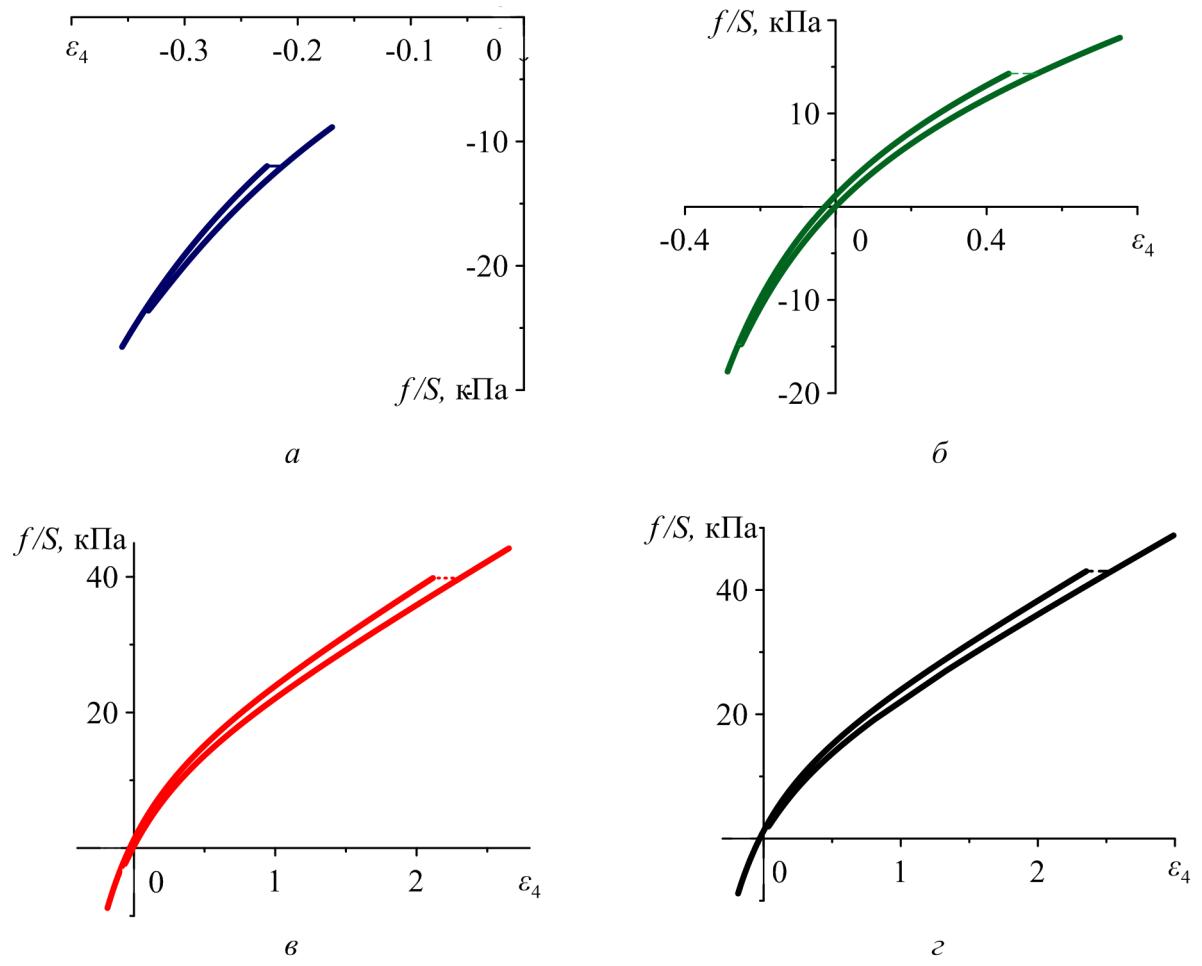


Рисунок 3.14 – Диаграмма напряжения–деформации для системы в магнитных полях: а)  $h_0 = 0.064$ ; б)  $h_0 = 0.12$ ; в)  $h_0 = 0.24$ ; г)  $h_0 = 0.34$ .

Масштаб на панелях рисунка различен

## Заключение к Главе 3

В настоящей главе изучено магнито–упругое взаимодействие, возникающее между двумя частицами ферромагнетика, заключёнными в эластомерную матрицу, в присутствие магнитного поля. Продемонстрировано различное поведение системы в случае парамагнитных частиц и частиц, намагничивающихся с насыщением. Полученное решение задачи о взаимодействии двух ферромагнитных частиц использовано для оценки возможностей кластерообразования в ансамблях микрочастиц железа, которыми наполнены реальные магнитореологические эластомеры. Обоснована важная роль гистерезисного механизма в изменении структуры этих композиционных материалов. Определено, как отражается мезоскопическая бистабильность парных кластеров на механических свойствах модельных образцов.

## Заключение

В настоящей работе проведено теоретическое исследование магнито-упругого взаимодействия двух намагничающихся частиц в эластомере. Основные полученные результаты заключаются в следующем:

1. Путём численного решения полной задачи магнитостатики для двух нелинейно и неоднородно намагничающихся частиц найдены энергия и силы их магнитного взаимодействия. Предложена и апробирована интерполяционная формула для квазианалитического расчёта сил в случае линейного, но неоднородного намагничивания частиц.
2. Сформулированы критерии применимости приближений дипольного типа для расчёта межчастичных магнитных сил. Путём сопоставления с решением полной задачи определены области применимости известных дипольных приближений и предложена новая модификация: модель нелинейных взаимодействующих диполей, специализированная для случая частиц из магнитомягкого ферромагнетика, то есть обладающих высокой начальной восприимчивостью и сильной нелинейностью намагничивания.
3. На основе данных численного расчёта упругой энергии, накапливающейся в эластомерной матрице при взаимном перемещении двух твёрдых частиц, предложены интерполяционные формулы, позволяющие с высокой точностью получать указанную энергию при непрерывном изменении параметров системы.
4. Анализом профилей магнитомеханической энергии системы из двух намагничающихся частиц, погруженных в эластомер, доказано, что под действием внешнего магнитного поля в ней возникает бистабильность. Вследствие этого, по достижении магнитным полем порогового значения межчастичное расстояние изменяется скачком. Эффект имеет гистерезисный характер: пороговые значения поля при его увеличении и уменьшении существенно различны.
5. Указана принципиальная роль магнитомеханического гистерезиса, существующего на мезоскопическом уровне, как причины уникальных макроскопических эффектов (в частности, индуцированной пластично-

сти), проявляемых реальными магнитореологическими эластомерами в ответ на приложение магнитного поля и механической нагрузки.

Результаты настоящего исследования углубляют представления о влиянии внутренней структуры МР эластомера на его макроскопические свойства. Понимание этих механизмов должно пролить свет на целый ряд экспериментальных результатов. Дело в том, что различные измерения, а именно видеофиксация перемещения частиц МР полимеров на поверхности образца при его намагничивании, наблюдения квазипластического поведения в механических испытаниях и им подобные указывают на то, что в МР эластомере частицы группируются в «магнитные скрепки». Главными кандидатами на эту роль как раз и являются образовавшиеся при намагничивании образца плотные группы (кластеры) из двух–трёх частиц [106]. В результате, материал претерпевает значительную структурную перестройку, которая радикально изменяет его макроскопическую реологию.

Построенные мезоскопические модели для пары намагничающихся частиц в гиперупругой матрице показывают, что даже такая система отвечает весьма сложным поведением на приложение магнитного поля и механической нагрузки. Мы использовали изученную нами двухчастичную систему (при полном отсутствии альтернатив) как эвристическую модель наименьшего представительного элемента МР эластомера. Как оказалось, она вполне справляется с объяснением на качественном уровне причины возникновения уникальных эффектов, присущих МР эластомерам: магнитоиндукционного упрочнения, деформации и псевдопластичности. Это даёт серьёзные основания полагать, что представленные в работе мезоскопические модели будут полезны для следующего важного шага в изучении магнитомеханики МР эластомеров – перехода к моделированию многочастичных систем.

## Список литературы

1. *Stangroom J.* Electrorheological fluids // Physics in Technology. — 1983. — Vol. 14. — Pp. 290–299.
2. *Halsey T. E.* Electrorheological fluids // Science. — 1992. — Vol. 258. — Pp. 760–766.
3. *Adriani P. M., Gast A. P.* A microscopic model of electrorheology // Physics of Fluids. — 1988. — Vol. 31. — Pp. 2757–2768.
4. *Clercx H. J. H., Bossis G.* Many-body electrostatic interactions in electrorheologocal fluids // Physical Review E. — 1993. — Vol. 48. — Pp. 2721–2729.
5. *Tao R., Jiang Q., Sim H. K.* Finite-element analysis of electrostatic interactions in electrorheological fluids // Physical Review E. — 1995. — Vol. 52. — Pp. 2727–2735.
6. *Gast A. P., Zukoski C. F.* Electrorheological fluids as colloidal suspensions // Advances in Colloid and Interface Science. — 1989. — Vol. 30. — Pp. 153–202.
7. *Klingenberg D. J., Zukoski C. F.* Studies of the steady-shear behavior of electrorheological suspensions // Langmuir. — 1990. — Vol. 6. — Pp. 15–24.
8. *Vicente J. de, Klingenberg D. J., Hidalgo-Alvarez R.* Magnetorheological fluids: a review // Soft Matter. — 2011. — Vol. 7. — Pp. 3701–3710.
9. *Carlson J. D., Jolly M. R.* MR fluid, foam and elastomer devices // Mechatronics. — 2000. — Vol. 10. — Pp. 555–569.
10. *Kallio M.* The elastic and damping properties of magnetorheological elastomers: PhD thesis / Kallio M. — Tampere University of Technology, 2005.
11. Anisotropic polyurethane magnetorheological elastomer prepared through in situ polycondensation under a magnetic field / J. Wu [et al.] // Smart Materials and Structures. — 2010. — Vol. 19. — P. 105007.

12. *Bellan C., Bossis G.* Field dependence of viscoelastic properties of MR elastomers // International Journal of Modern Physics B. — 2002. — Vol. 16. — Pp. 2447–2453.
13. Magnetostriuctive phenomena in magnetorheological elastomers / J. M. Ginder [et al.] // International Journal of Modern Physics B. — 2002. — Vol. 16. — Pp. 2412–2418.
14. *Lokander M., Stenberg B.* Perfomance of isotropic magnetorheological materials // Polymer Testing. — 2003. — Vol. 22. — Pp. 245–251.
15. Novel highly elastic magnetic materials for dampers and seals: Part I. Preparation and characterization of the elastic materials / S. S. Abramchuk [и др.] // Polymers for Advanced Technologies. — 2007. — T. 18. — C. 883–890.
16. A state-of-the-art review on magnetorheological elastomer devices / Y. Li [et al.] // Smart Materials and Systems. — 2014. — Vol. 23. — 123001 (24 pages).
17. Effect of a homogeneous magnetic field on the viscoelastic behavior of magnetic elastomers / G. V. Stepanov [et al.] // Polymer. — 2007. — Vol. 48. — Pp. 488–495.
18. Влияние магнитного поля на упругие и вязкие свойства магнитоэластиков / Л. В. Никитин [и др.] // Высокомолекулярные соединения, Серия А. — 2001. — Т. 43. — С. 698–706.
19. The magnetic, elastic, structural, and magnetodeformational properties of magnetoelastics / L. V. Nikitin [et al.] // Polymer Science. Ser. A. — 2004. — Vol. 46. — Pp. 498–509.
20. Magnetodeformational effect and effect of shape memory in magnetoelastics / L. V. Nikitin [et al.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2004. — Vol. 272–276. — Pp. 2072–2073.
21. *Leblanc J. L.* Rubber-filler interactions and rheological properties in filled compounds // Progress in Polymer Science. — 2002. — Vol. 27. — Pp. 627–687.
22. Microstructure and magnetorheology of graphite-based elastomers / T. F. Tian [et al.] // Rheol Acta. — 2011. — Vol. 50. — Pp. 825–836.

23. Development of a real-time tunable stiffness and damping vibration isolator based on magnetorheological elastomer / G. J. Liao [et al.] // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. — 2012. — Vol. 23. — Pp. 25–33.
24. *Shen Y., Golnaraghi M. F., Heppeler G.* Experimental research and modeling of magnetorheological elastomers // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. — 2004. — Vol. 15. — Pp. 27–35.
25. A highly adjustable magnetorheological elastomer base isolator for applications of real-time adaptive control / Y. Li [et al.] // Smart Materials and Structures. — 2013. — Vol. 22. — 095020 (19 pages).
26. *Deng H. X., Gong X. L., Wang L. H.* Development of an adaptive tuned vibration absorber with magnetorheological elastomer // Smart Materials and Structures. — 2006. — Vol. 15. — n111–n116.
27. *Gong X. L., Chen L., Li J. F.* Study of utilizable magnetorheological elastomers // Internationa Journal of Modern Physics B. — 2007. — Vol. 21. — Pp. 4875–4882.
28. New Composite Elastomers with Giant Magnetic Response / A. V. Chertovich [et al.] // Macromolecular Theory and Simulations. — 2010. — Vol. 295. — Pp. 336–341.
29. *Farshad M., Benine A.* Magnetoactive elastomer composites // Polymer Testing. — 2004. — Vol. 23. — Pp. 347–353.
30. *Li W. H., Zhang X. Z., Du H.* Magnetorheological elastomers and their applications // Advanced Structured Materials. — 2013. — Vol. 11. — Pp. 357–374.
31. Magnetic Field-Responsive Smart Polymer Composites / G. Filipcsei [et al.] //. Vol. 206 / ed. by S. Kobayashi. — Springer Berlin Heidelberg, 2007. — Pp. 137–189.
32. *Zrinyi M., Barsi L., Buki A.* Ferrogel: a new magneto-controlled elastic medium // Polymer Gels and Networks. — 1997. — Vol. 5. — Pp. 415–427.

33. Axial strain of ferrogels under cyclic magnetic fields / L. E. Faidley [et al.] // Smart Materials and Structures. — 2010. — Vol. 19. — 075001 (7 pages).
34. Zrinyi M., Barsi L., Buki A. Deformation of ferrogels induced by nonuniform magnetic fields // Journal of Chemical Physics. — 1996. — Vol. 104. — Pp. 8750–8756.
35. Direct observation of abrupt shape transition in ferrogels induced by nonuniform magnetic field / M. Zrinyi [et al.] // Journal of Chemical Physics. — 1997. — Vol. 106. — Pp. 5685–5692.
36. Zhou G. Y., Jiang Z. Y. Deformation in magnetorheological elastomer and elastomer-ferromagnet composite driven by a magnetic field // Smart Materials and Structures. — 2004. — Vol. 13. — Pp. 309–316.
37. Diguet G., Beaugnon E., Cavaille J. Y. From dipolar interactions of a random distribution of ferromagnetic particles to magnetostriction // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2009. — Vol. 321. — Pp. 396–401.
38. Magnetostriction of field-structured magnetoelastomers / J. E. Martin [et al.] // Physical Review E. — 2006. — Vol. 74. — 051507 (17 pages).
39. Райхер Ю. Л., Столбов О. В. Магнитодеформационный эффект в ферроэласте // Письма в ЖТФ. — 2000. — Т. 26. — С. 47–52.
40. Borcea L., Bruno O. On the magneto-elastic properties of elastomer-ferromagnet composites // Journal of Mechanics and Physics of Solids. — 2001. — Vol. 49. — Pp. 2887–2919.
41. Kankanala S. V., Triantafyllidis N. On finitely strained magnetorheological elastomers // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2004. — Vol. 52. — Pp. 2869–2908.
42. Stolbov O. V., Raikher Y. L., Balasoiu M. Modelling of magnetodipolar striction in soft magnetic elastomers // Soft Matter. — 2011. — Vol. 7. — Pp. 8484–8487.
43. Magneto-sensitive elastomers in a homogeneous magnetic field: a regular rectangular lattice model / D. Ivaneyko [et al.] // Macromolecular Theory and Simulations. — 2011. — Vol. 20. — Pp. 411–424.

44. Zubarev A. Magnetodeformation of ferrogels and ferroelastomers. Effect of microstructure of the particles spatial disposition // Physica A. — 2013. — Vol. 392. — Pp. 4824–4836.
45. Mechanical properties of magneto-sensitive elastomers: unification of the continuum-mechanics and microscopic theoretical approaches / D. Ivaneyko [et al.] // Soft Matter. — 2014. — Vol. 10. — Pp. 2213–2225.
46. Столбов О. В., Райхер Ю. Л. моделирование магнитострикционных деформаций в мягких магнитных эластомерах // Вычислительная механика сплошных сред. — 2009. — Т. 2. — С. 85–95.
47. Micromechanical analysis of an elastomer filled with particles organized in chain-like structure / E. Coquelle [et al.] // Journal of Materials Science. — 2006. — Vol. 41. — Pp. 5941–5953.
48. Numerical investigation on the magnetostrictive effect of magnetosensitive elastomers based on a magneto-structural coupling algorithm / W. Chen [et al.] // Smart Materials and Structures. — 2013. — Vol. 22. — P. 105012.
49. Effects of particle distribution on mechanical magneto-sensitive elastomers in a homogeneous magnetic field / D. Ivaneyko [et al.] // Condensed Matter Physics. — 2012. — Vol. 15. — Pp. 411–424.
50. The magnetoviscoelastic effect of elastomer composites consisting of ferrous particles embedded in a polymer matrix / M. R. Jolly [et al.] // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. — 1996. — Vol. 7. — Pp. 613–622.
51. Zhou G. Y. Shear properties of a magnetorheological elastomer // Smart Materials and Structures. — 2003. — Vol. 12. — Pp. 139–146.
52. Deng H. X., Gong X. L. Adaptive Tuned Vibration Absorber based on Magnetorheological Elastomer // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. — 2007. — Vol. 18. — Pp. 1205–1210.
53. Bose H., Roder R. Magnetorheological elastomers with high variability of their mechanical properties // Journal of Physics: Conference Series. — 2009. — Vol. 149. — 102090 (6 pages).

54. *Boczkowska A., Awietjan S. F.* Smart composites of urethane elastomers with carbonyl iron // Journal of Materials Science. — 2009. — Vol. 44. — Pp. 4104–4111.
55. *Wei B., Gong X., Jiang W.* Influence of polyurethane properties on mechanical performances of magnetorheological elastomers // Journal of Applied Polymer Science. — 2010. — Vol. 116. — Pp. 771–778.
56. Experimental study of magnetoelastics / L. V. Nikitin [et al.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2006. — Vol. 300. — e234–e238.
57. *Varga Z., Filipcsei G., Zrinyi M.* Magnetic field sensitive functional elastomers with tuneable elastic modulus // Polymer. — 2006. — Vol. 47. — Pp. 227–233.
58. *Davis L. C.* Model of magnetorheological elastomers // Journal of Applied Physics. — 1999. — Vol. 85. — Pp. 3348–3351.
59. *Han Y., Hong W., Faidley L. E.* Field-stiffening effect of magnetorheological elastomers // International Journal of Solids and Structures. — 2013. — Vol. 50. — Pp. 2281–2288.
60. *Du D., Toffoletto F., Biswal S. L.* Numerical calculation of interaction forces between paramagnetic colloids in two-dimensional systems // Physical Review E. — 2014. — Vol. 89. — 043306 (8 pages).
61. *Jeffrey D. J.* Conduction through a random suspension of spheres // Proceedings of Royal Society of London. Ser. A. — 1973. — Vol. 335. — Pp. 355–367.
62. *Keaveny E. E., Maxey M. R.* Modeling the magnetic interactions between paramagnetic beads in magnetorheological fluids // Journal of Computational Physics. — 2008. — Vol. 227. — Pp. 9554–9571.
63. *Ginder J. M., Davis L. C., Elie L. D.* Rheology of magnetorheological fluids: Models and measurements // International Journal of Modern Physics B. — 1996. — Vol. 10. — Pp. 3293–3303.
64. *Lacis S., Volkova O., Bossis G.* Application of FEM for magnetic force calculation between ferromagnetic spheres // International Scientific Colloquium Modeling of Material Processing. University of Latvia Riga, May 28-29 1999. — 1999. — Vol. 1. — Pp. 222–227.

65. Synthesis and magnetorheology of suspensions of submicron sized cobalt particles with tunable particle size / M. T. Lopez-Lopez [et al.] // Journal of Physics: Condensed Matter. — 2010. — Vol. 22. — 324106 (1 pages).
66. Zrinyi M., Szabo D., Kilian H.-G. Kinetics of the shape change of magnetic field sensitive polymer gels // Polymer Gels and Networks. — 1998. — Vol. 6. — Pp. 441–454.
67. Menzel A. Bridging from particle to macroscopic scales in uniaxial magnetic gels // Journal of Chemical Physics. — 2014. — Vol. 141. — 194907 (13 pages).
68. Zhu X., Jing X., Cheng L. Magnetorheological fluid dampers: A review on structure design and analysis // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. — 2012. — Vol. 23. — P. 114904.
69. The pressure-dependent MR effect of magnetorheological elastomers / X. Dong [et al.] // Smart Materials and Structures. — 2012. — Vol. 21. — P. 075014.
70. The influence of a magnetic field on the elastic and viscous properties of magnetoelastics / L. V. Nikitin [et al.] // Polymer Science. Ser. A. — 2001. — Vol. 43. — Pp. 443–450.
71. Bozorth R. M. Ferromagnetism. — Wiley-IEEE Press, 1993.
72. Piecewise linear model for field-responsive fluids / C. H. Lee [et al.] // IEEE Transactions on Magnetics. — 2001. — Vol. 37. — Pp. 558–560.
73. Yield behavior of magnetorheological suspensions / G. Bossis [et al.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2003. — Vol. 258–259. — Pp. 456–458.
74. Lopez-Lopez M., Kuzhir P., Bossis G. Yield stress in magnetorheological suspensions near the limit of maximum-packing fraction // Journal of Rheology. — 2012. — Vol. 56. — Pp. 1209–1224.
75. Oswald P. Rheophysics: The Deformation and Flow of Matter. — Cambridge University Press, 2009.

76. Коновалова А. М., Столбов О. В., Райхер Ю. Л. Взаимодействие неоднородно намагниченных частиц, заключённых в эластомер // Сборник трудов VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твёрдого тела. ЮФУ, Ростов-на-Дону. — 2013. — Т. 1. — С. 26—30.
77. Biller A. M., Stolbov O. V., Raikher Y. L. Modeling of particle interactions in magnetorheological elastomers // Journal of Applied Physics. — 2014. — Vol. 116. — P. 114904.
78. Биллер А. М., Столбов О. В. — Решение задачи магнитостатики для двух сферических нелинейно намагничивающихся частиц. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2014619074 от 08.09.2014.
79. Biller A. M., Stolbov O. V., Raikher Y. L. Dipolar models of ferromagnet particles interaction in magnetorheological composites // Journal of Optoelectronics and Advanced Materials. — 2015. — Vol. 17. — Pp. 1106–1113.
80. Biller A. M., Stolbov O. V., Raikher Y. L. Mesoscopic magnetomechanical hysteresis in a magnetorheological elastomer // Physical Review E. — 2015. — Vol. 92. — P. 023202.
81. Биллер А. М., Столбов О. В., Райхер Ю. Л. Бистабильное магнитомеханическое поведение ферромагнитных частиц в эластомерной матрице // Вычислительная механика сплошных сред. — 2015. — Т. 8. — С. 273—288.
82. Коновалова А. М., Столбов О. В., Райхер Ю. Л. Точный расчёт сил и моментов взаимодействия двух магнитомягких частиц на малых расстояниях // Сборник трудов конференции “Неравновесные процессы в сплошных средах”. — 2011.
83. Коновалова А. М., Столбов О. В., Райхер Ю. Л. Потенциал парного взаимодействия магнитомягких частиц в однородном внешнем поле // XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. — 2013.

84. Коновалова А. М., Столбов О. В., Раихер Ю. Л. Взаимодействие пары неоднородно намагниченных частиц, заключённых в эластомер // VII Всероссийская (с международным участием) конференции по механике деформируемого твёрдого тела. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону. — 2013.
85. Biller A. M., Stolbov O. V., Raikher Y. L. Interaction of magnetically soft microparticles embedded in an elastomer matrix // Moscow International Symposium on Magnetism. Abstracts. Moscow, Russia. — 2014.
86. Initial stage of aggregation of magnetically soft particles: Molecular dynamics simulation / P. V. Melenev [et al.] // 14 International Conference on Electrorheological Fluids and Magnetorheological Suspensions. Abstracts. Granada, Spain. — 2014.
87. Biller A. M., Stolbov O. V., Raikher Y. L. Modeling of particle interactions in magnetorheological elastomers // 2 International Summer School and Workshop “Complex and Magnetic Soft Matter Systems: Physico-Mechanical Properties and Structure”. Book of Abstracts. Dubna, Russia. — 2014.
88. Biller A. M., Stolbov O. V., Raikher Y. L. Two magnetically soft microparticles interactions inside an elastomer in an external field // 2 International Summer School and Workshop “Complex and Magnetic Soft Matter Systems: Physico-Mechanical Properties and Structure”. Book of Abstracts. Dubna, Russia. — 2014.
89. Биллер А. М., Столбов О. В., Раихер Ю. Л. Взаимодействие частиц ферромагнетика, заключенных в эластомер, с учетом насыщения намагниченности // XIX Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. — 2015.
90. Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — Москва : Наука, 1982. — С. 620.
91. Probing of Pair Interaction of Magnetic Microparticles with Optical Tweezers / M. N. Skryabina [et al.] // JETP Letters, — 2012. — Vol. 95. — Pp. 560–564.

92. *Bagaev V. N., Buyevich Y. A., Tetyukhin V. V.* A microscopic model of electrorheology // Magnetohydrodynamic. — 1986. — Vol. 22. — Pp. 146—.
93. *Ross D. K.* The potential due to two point charges each at the centre of a spherical cavity and embedded in a dielectric medium // Australian J. Physics. — 1968. — Vol. 21. — Pp. 817–822.
94. Interface Modeling in Incompressible Media using Level Sets in Escript / L. Gross [и др.] // Physics of the Earth and Planetary Interiors. — 2007. — T. 163. — C. 23—34.
95. *Chen Y., Sprecher A. F., Conrad H.* Electrostatic particle-particle interactions in electrorheological fluids // Journal of Applied Physics. — 1991. — Vol. 70. — Pp. 6796–6803.
96. *Shelley J. F., Yu Y.-Y.* The effect of two rigid spherical inclusions on the stresses in an infinite elastic solid // Journal of Applied Mechanics. — 1966. — Vol. 33. — Pp. 68–74.
97. *Kushch V. I., Mogilevskaya S. G., Stolarski H. K.* Elastic interaction of spherical nanoinhomogeneities with Gurtin-Murdoch type interfaces // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2011. — Vol. 59. — Pp. 1702–1716.
98. *Morozov I. A., Komar L. A.* Hyperelastic structural-mechanical model of filled rubber. Influence of filler dispersion and interfacial properties // Proceedings of XLIII International Summer School Conference APM. — St. Petersburg, Russia : SPBSPU, IPME RAS St. Petersburg, 2015.
99. *Morozov I. A., Komar L. A., Lauke B.* Structural-mechanical model of filled rubber: Influence of filler arrangement // International Journal of Mechanical Sciences. — 2016. — Vol. 107. — Pp. 160–169.
100. Компьютерное моделирование и конструирование наполненных композиций / Б. А. Люкшин [и др.]. — Новосибирск : Издательство СО РАН, 2005.
101. *Лурье A. И.* Нелинейная теория упругости. — Москва : Наука, 1980. — C. 512.

102. *Оден Д.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — Москва : Мир, 1980. — С. 464.
103. *Виноградов Г. В., Малкин А. Я.* Реология полимеров. — Москва : Химия, 1977. — С. 440.
104. *Cimrman R.* SfePy - Write Your Own FE Application // Proceedings of the 6th European Conference on Python in Science (EuroSciPy 2013) / ed. by P. de Buyl, N. Varoquaux. — 2014. — Pp. 65–70.
105. *Litvinov V. M., Steeman P. A. M.* EPDM-carbon black interactions and the reinforcement mechanism, as studied by low-resolution  $^1\text{H}$  NMR // Macromolecules. — 1999. — Vol. 32. — Pp. 8476–8490.
106. *Melenev P. V., Rusakov V. V., Raikher Yu. L.* Magnetic behavior of in-plane deformable dipole clusters // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2006. — Vol. 300. — e187–e190.
107. *Kalfus J.* Nano- and micromechanics of polymer blends and composites. — Hanser Publishers, 2009.
108. Modeling of the field-induced plasticity of soft magnetic elastomers / P. V. Melenev [et al.] // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. — 2011. — Vol. 22. — Pp. 531–538.