

На правах рукописи



Биллер Анастасия Михайловна

**МЕЗОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ
МЕХАНИКИ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИХ
ПОЛИМЕРОВ**

Специальность 01.02.04 —
«Механика деформируемого твёрдого тела»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Пермь — 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте механики сплошных сред УрО РАН

Научный руководитель: **Райхер Юрий Львович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Налетова Вера Арсеньевна**,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры гидромеханики механико-математического факультета

Паньков Андрей Анатольевич,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», профессор кафедры механики композиционных материалов и конструкций

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Защита состоится 13 октября 2016 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 004.012.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1; тел: (342) 2378388; факс: (342) 2378487; сайт: www.icmm.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук и на его сайте.

Автореферат разослан ... сентября 2016 г..

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
доцент

Зуев Андрей Леонидович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Магнитореологический (МР) полимер представляет собой полимерную матрицу, наполненную намагничивающимися частицами. Механические свойства таких композитов можно контролируемо изменять с помощью внешнего магнитного поля. Уникальные свойства магниточувствительных композитов сделали их привлекательными для применения в промышленности: в качестве адаптивных демпферов, датчиков, микроманипуляторов, а также деталей приборов, управляемых или настраиваемых бесконтактно. Исследователи видят также широкие возможности применения этих материалов в биологии и медицине. Теоретические модели, призванные достоверно предсказывать поведение и свойства МР эластомеров в зависимости от их мезоструктуры, зачастую содержат значительные упрощения. Это является одной из явных причин расхождения между результатами экспериментальных и теоретических исследований.

Анализ теоретических работ, посвященных поведению и свойствам МР эластомеров, показывает, что пространственное распределение частиц является определяющим для эффектов магнитоиндуцированных деформации и упрочнения. В связи с этим принципиально важно располагать корректным описанием как магнитного, так и упругого взаимодействия частиц в полимерной матрице. При этом решение связанной задачи магнитоупругости представляет значительные трудности, в особенности при рассмотрении многочастичных ансамблей. В стремлении справиться с решением исследователи зачастую следуют интуитивным представлениям, оставляя вопрос о применимости использованных критериев открытым.

Одним из таких удобных, но нечётко определённых упрощений является модель точечных диполей, используемая для описания магнитного взаимодействия частиц. Она позволяет трактовать магнитные силы, действующие на частицы, как парное взаимодействие, что значительно облегчает рассмотрение ансамблей. Приближение дипольного взаимодействия предполагает, что расстояния между частицами значительно превышают их собственные размеры, поэтому напряжённость поля и намагниченность внутри каждой частицы можно считать однородными. В результате, частица заменяется материальной точкой, несущей магнитный момент. С целью получить наибольшие эффекты МР эластомеры изготавливают обычно с достаточно высоким

объёмным содержанием частиц: в диапазоне от 10 до 30 об.%. В структурированных композитах средней концентрации зазор между частицами составляет величину меньшую чем радиус. При таком расположении частиц поле внутри композита, складывающееся из приложенного извне и полей, создаваемых намагничивающимися частицами, существенно неоднородно. В этих условиях гипотеза об однородном намагничивании частиц, необходимая для использования модели точечных диполей, оказывается неприменимой.

Другое часто используемое приближение заключается в гипотезе о линейном законе намагничивания частиц. Типичные МР эластомеры наполнены микронными дисперсиями ферритов или ферромагнетиков. Примером служит карбонильное железо с размером частиц 1–10 мкм. Этот материал является магнитомягким; он характеризуется высокой начальной восприимчивостью, а его намагниченность насыщается в полях величиной в несколько сотен кА/м. Таким образом, микрочастицы железа в МР композите не имеют собственных магнитных моментов, а приобретают их лишь под действием приложенного поля. В слабом поле магнитный момент частицы, действительно, растёт пропорционально величине поля, однако в сильных полях (режим насыщения) он стремится к предельному значению, то есть становится постоянным. Неоднородность поля внутри частиц, вызванная их близким соседством друг с другом, приводит к значительному росту намагниченности в зонах потенциального контакта частиц. Из этих соображений вытекает необходимость учёта нелинейного закона намагничивания. Для описания закона намагничивания железа принято использовать эмпирическое соотношение Фрёлиха-Кеннели.

Ещё одно допущение, к которому прибегают исследователи МР эластомеров — линейный закон упругости для эластомерной матрицы. Как показывают эксперименты, соотношение напряжений и деформаций типичных материалов, использующихся как основа МР эластомеров, может считаться линейным вплоть до 50% относительной деформации испытываемого образца. Между тем, твёрдые частицы, движимые пондеромоторными силами в мягкой матрице, способны приводить к её значительной деформации, превышающей предел применимости линейного приближения. В этой связи учёт нелинейного характера упругости эластомерной матрицы композита, очевидно, необходим, так как может значительно повлиять на характер перерас-

пределения частиц в матрице под действием поля. По этой причине гораздо более оправдано использовать в качестве определяющего соотношения для матрицы МР эластомера модель Муни–Ривлина.

Теоретики, стремящиеся учесть мезоструктуру МР эластомеров при описании их свойств, часто пренебрегают нелинейностью геометрии рассматриваемой системы. Очевидно, что при смещении частиц навстречу друг другу наибольшие напряжения концентрируются в той области матрицы, которая находится между ними. Деформация эластомера в зазоре между частицами лишь весьма упрощённо может представляться как однородная деформация стержня определённого сечения, поскольку частицы наполнителя чаще всего имеют (квази)сферическую форму.

Важность межчастичных взаимодействий для моделирования и предсказания свойств МР эластомеров диктует необходимость располагать точным представлением о магнитных и упругих силах, возникающих в композите на мезоскопическом уровне. Две частицы в некотором образце эластомера — это наименьший представительный элемент МР полимера, являющийся носителем свойств композита как целого. Кроме того, гипотеза парного взаимодействия является известным приёмом, с помощью которого строятся модели сложных многоуровневых сред.

Магнитоупругое взаимодействие частиц в матрице эластомера — это совместный, связанный механизм. Однако в некоторых случаях возможно раздельное решение силовой задачи магнитостатики для двух намагничивающихся частиц и задачи о конечных деформациях упругой матрицы, создаваемых их перемещениями. Объединение этих двух решений позволяет получить представление о поведении рассматриваемой системы и сделать некоторые выводы о влиянии межчастичных взаимодействий на макроскопические свойства МР эластомера в целом.

Из приведённых выше рассуждений вытекает Цель настоящего диссертационного исследования: теоретическое исследование магнитного и упругого взаимодействия двух намагничивающихся частиц в эластомерной матрице. В рамках поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Найти с высокой точностью распределение магнитного поля и намагниченности в системе из двух сферических частиц, намагничивающихся

неоднородно по линейному и по нелинейному законам; рассчитать энергию и силы магнитного взаимодействия в такой паре частиц.

2. Определить критерии применимости приближённых моделей для описания магнитного взаимодействия пары частиц.

3. Найти в рамках нелинейной теории упругости напряжённо–деформированное состояние гиперупругой матрицы, неограниченной или конечной, содержащей два абсолютно твёрдых сферических включения; вычислить энергию упругого взаимодействия такой пары включений.

4. Изучить поведение двух намагничивающихся частиц в эластомерной матрице под действием внешнего поля.

Научная новизна

— В настоящей диссертационной работе впервые в полной постановке получено решение задачи о магнитных силах, связывающих две сферические частицы, намагничивающиеся нелинейно. Для случая линейно намагничивающихся частиц решение задачи получено с точностью, необходимой для описания частиц с высокой восприимчивостью, что характерно для наполнителя МР эластомеров.

— Определены рамки применения приближённых дипольных моделей.

— Предложены интерполяционные формулы, которые описывают энергию гиперупругой среды, деформируемой двумя твёрдыми включениями.

— Исследовано магнитоупругое поведение модельного образца эластомера с двумя намагничивающимися частицами.

— Предложено теоретическое объяснение механизма образования, так называемых магнитных «скрепок» — плотных кластеров частиц, возникающих при приложении поля.

— На мезоскопическом уровне оценено влияние взаимодействия частиц на эффективные характеристики композиционного материала.

Практическая значимость работы заключается в построении мезоскопических моделей для представительного элемента МР эластомера, позволяющих учесть влияние структуры композита на его макроскопические свойства. Решения магнитостатической и упругой задач вместе с предложенными интерполяционными формулами дают возможность корректного выбора упрощений при описании магнитоупругого взаимодействия магнитомягких частиц в гиперупругой матрице.

Методология и методы исследования

В рамках исследования используются в основном численные методы решения краевых задач и задач оптимизации (метод конечных элементов, методы Нелдера–Мида и Пауэлла), реализованные средствами программных пакетов `esys.escript`, `sfery` и `fenics`, написанных для языка Python.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Результаты численного решения магнитостатической задачи для пары намагничивающихся сферических частиц, расположенных на произвольном расстоянии друг от друга, для двух вариантов закона намагничивания: линейного (парамагнетик) и нелинейного (ферромагнетик); расчёт сил магнитного взаимодействия частиц, выполненный на основе этого решения; интерполяционная формула для квазианалитического расчёта сил в случае линейно намагничивающихся частиц;

2. Сравнительный анализ различных приближений дипольного типа для расчёта межчастичных магнитных сил, установление критериев и областей применимости стандартных моделей, обоснование и формулировка новой модели, дополнительной к известным;

3. Результаты численного решения задачи о взаимных перемещениях пары твёрдых частиц, находящихся в гиперупругой среде (эластомер); расчёт энергии, накапливающейся в системе при конечных деформациях; интерполяционная формула для квази-аналитического расчёта в случае эластомера Муни-Ривлина;

4. Результаты исследования механического поведения системы из двух намагничивающихся частиц, погружённых в эластомерный массив; доказательство бистабильности такой системы; характеристики эффекта магнито-механического гистерезиса;

5. Выявление принципиальной роли магнито-механического гистерезиса, существующего на мезоскопическом уровне, как причины уникальных макроскопических эффектов, проявляемых реальными магнитореологическими эластомерами в ответ на приложение магнитного поля и механической нагрузки.

Достоверность полученных результатов основывается на корректной математической постановке задач, применении общепризнанных численных методов, выполнении тестовых расчётов, сопоставлении данных численных и

аналитических расчётов в предельных случаях, а также сравнении данных, полученных в рамках разных подходов, в том числе другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях: Всероссийской конференции молодых ученых «Неравновесные переходы в сплошных средах» (Пермь, 2011), XVIII и XIX Зимних школах по механике сплошных сред (Пермь, 2013 и 2015 гг.), VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твёрдого тела (Ростов-на-Дону, 2013), Moscow International Symposium on Magnetism (Москва, 2014), 14 International Conference on Electrorheological Fluids and Magnetorheological Suspensions (Гранада, Испания, 2014), 2 International Summer School and Workshop “Complex and Magnetic Soft Matter Systems: Physico-Mechanical Properties and Structure” (Дубна, 2014); Работа представлялась и обсуждалась на семинарах: кафедры механики композиционных материалов и конструкций ПНИПУ (рук. проф. А.Н. Аношкин), кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ (рук. проф. П.В. Трусков) и Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. акад. РАН В.П. Матвеев).

Личный вклад автора. Постановка задач, результаты исследования и их интерпретация обсуждались с руководителем работы Ю.Л. Райхером. Представленные в работе теоретические модели были разработаны автором совместно с Ю.Л. Райхером - для главы 1 и автором совместно с О.В. Столбовым - для глав 2 и 3. Подготовка компьютерных кодов проводилась совместно с О.В. Столбовым. Все данные компьютерного моделирования получены лично диссертантом и являются определяющими. Подготовка публикаций проводилась совместно с соавторами.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ, 1 статья в сборнике материалов конференции [1], 1 свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [2], 8 тезисов конференций и 4 статьи, изданные в журналах, рекомендованных ВАК [3–6].

Представляемая работа выполнена в рамках государственного задания Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук. Часть результатов была получена при выполнении проектов РФФИ

Содержание работы

Введение к диссертации начинается с обзора современного состояния исследований магнитоэологических (МР) эластомеров. Затем обосновывается актуальность настоящего исследования, отмечаются основные проблемы построения теоретических моделей МР эластомеров и формулируются цель и задачи работы. Основные полученные результаты, их новизна, значимость и достоверность также приведены во введении. Эту часть завершают положения, выносимые на защиту, и описание структуры диссертации.

Первая глава диссертации посвящена магнитному взаимодействию частиц в МР эластомере. Рассмотрим пару частиц, помещённых в однородное магнитное поле (см. рис. 1). Намагничиваясь, частицы становятся источником неоднородного магнитного поля. Для каждой из них внешнее поле складывается из приложенного однородного и неоднородного, создаваемого соседкой. Это взаимное влияние приводит к неоднородному распределению намагниченности внутри частиц, которое тем сильнее, чем меньше расстояние между ними.

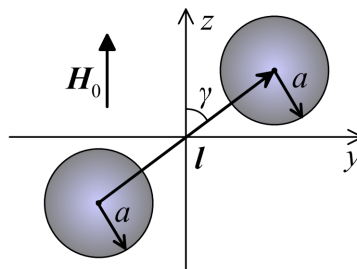


Рис. 1 — Две сферические частицы, помещённые в однородное магнитное поле

С увеличением поля рост намагниченности частиц ферромагнетика замедляется, а затем прекращается, и частицы переходят в режим магнитного насыщения. В этом случае закон намагничивания $\mathbf{M} = \chi(H)\mathbf{H}$ содержит восприимчивость χ , зависящую от величины напряжённости поля $H = |\mathbf{H}|$. Типичные для МР эластомеров железные частицы хорошо описываются эм-

пирическим законом Фр елиха-Кеннелли:

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \frac{\chi_0 M_s \mathbf{H}}{M_s + \chi_0 H} = \begin{cases} \chi_0 H & \text{при } \chi_0 H \ll M_s, \\ M_s & \text{при } \chi_0 H \gg M_s. \end{cases} \quad (1)$$

Для определения энергии и сил магнитного взаимодействия частиц, намагничивающихся неоднородно по нелинейному закону, необходимо решить задачу магнитостатики в полной постановке. Решение было найдено численно. С помощью формулы Фр елиха-Кеннелли исходная нелинейная задача сводилась к последовательности линеаризованных. Итерационный алгоритм состоял из чередования шагов: вычисления распределения восприимчивости внутри частиц и решения линеаризованной задачи с полученной восприимчивостью методом конечных элементов. В результате рас етов был получен массив данных об энергии системы в зависимости от расстояния между частицами $l = |\mathbf{l}|$, величины внешнего магнитного поля $h_0 = H_0/M_s$, обезразмеренной по намагниченности насыщения M_s , и угла γ ориентации пары частиц относительно этого поля.

В малых магнитных полях, при которых ферромагнетик можно уподобить парамагнетику, для пары рассматриваемых сферических частиц можно принять линейный изотропный закон намагничивания $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, с восприимчивостью χ не зависящей от поля. В таком случае задача магнитостатики имеет решение в виде разложения магнитного скалярного потенциала в ряд по степеням пространственных переменных и по кратным угловым гармоникам. Коэффициенты разложения, требуемые для описания частиц с высокой восприимчивостью $\chi \sim 10^4$, характерной для железа, были найдено численно. Для интерполяции данных о магнитной энергии взаимодействия двух частиц, намагничивающихся по линейному закону, была предложена формула:

$$\tilde{U}_{\text{маг}}^{\text{л}}(q, \gamma) = \frac{U_{\text{маг}}^{\text{л}}}{\mu_0 H_0^2 a^3} = -\frac{4\pi}{3} \sum_{i=3}^7 \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 2} \right)^{p_i} \left[\frac{a_i}{(q - b_i)^i} + \frac{c_i}{(q - d_i)^i} \cos^2 \gamma \right].$$

Здесь $q = l/a$ — расстояние между центрами частиц, обезразмеренное на их радиус a , μ_0 — магнитная постоянная, $\alpha = \chi + 1$ — относительная проницаемость частиц, a_i, b_i, c_i, d_i, p_i — числовые коэффициенты интерполяции.

Принципиальное отличие случая линейного намагничивания частиц от нелинейного заключается в возможности насыщения их намагниченности, что отражается и на силах магнитного взаимодействия, возникающих между ними во внешнем магнитном поле. На рисунке 2 представлена сила притяжения намагничивающихся сфер при их расположении вдоль вектора внешнего поля. Как видно, насыщение намагниченности, связанное с взаимным влиянием частиц, может быть очень значительным. В поле, далёком от насыщения, сближение частиц влечёт за собой рост локального поля h и, как следствие, заметный рост намагниченности. По этой причине модель линейно намагничивающихся частиц (пунктирные линии) неплохо описывает точное решение (см. рис. 2а). Однако, при $q = 2.05$ линейное мультипольное приближение (рис. 2б, пунктирная линия) нарушается уже при $h_0 \gtrsim 0.08$. В сильном магнитном поле частицы практически достигают насыщения и распределение намагниченности в них становится близким к однородному, поэтому хорошим приближением для точного расчёта становится модель точечных нелинейных взаимодействующих диполей (см. рис. 2б штриховые линии).

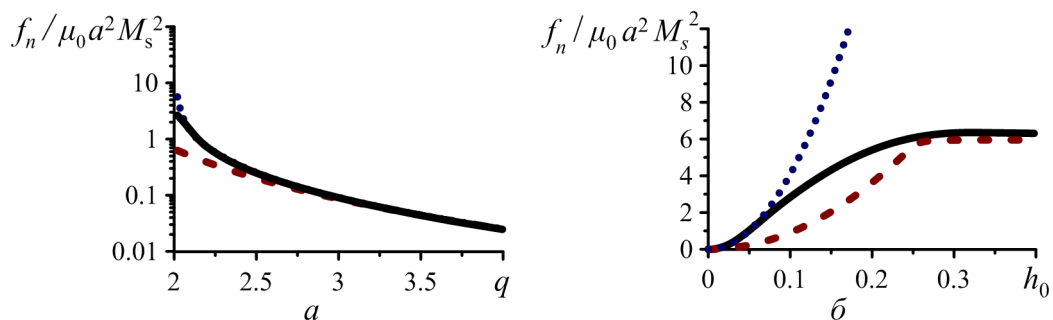


Рис. 2 — Силы притяжения частиц в конфигурации $\gamma = 0^\circ$, полученные в результате численного решения задачи магнитостатики (сплошные линии), вычисленные с помощью мультипольного приближения при линейном намагничивании (пунктирные) и предсказываемые моделью нелинейных взаимодействующих диполей (штриховые); а) в зависимости от межцентрового расстояния q в поле $h_0 = 0.08$; б) в зависимости от приложенного поля h_0 при межцентровом расстоянии $q = 2.05$

Значительная неоднородность намагничивания близко расположенных сфер, не учитываемая в приближениях точечных диполей, приводит также к расширению углового интервала притяжения частиц. В положении, близком к плотному контакту, частицы будут притягиваться при угле γ от 0° вплоть до 84° , в то время как интервал притяжения для двух однородно намагничивающихся частиц (точечных диполей) равен $0 - 55^\circ$ (см. рис. 3).

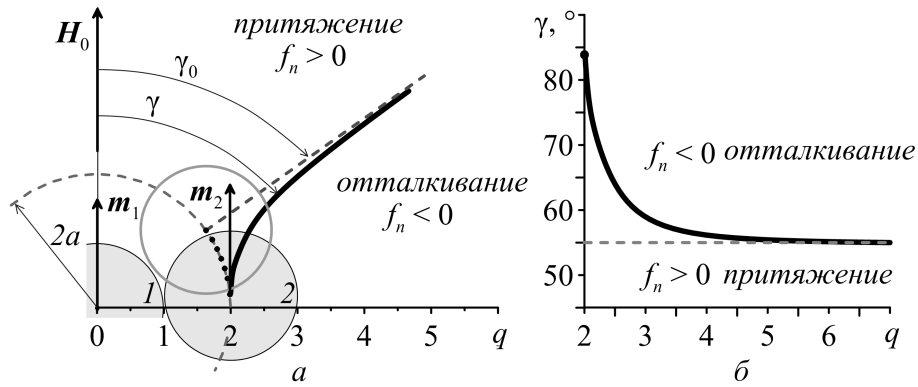


Рис. 3 — а) Расположение областей взаимного притяжения / отталкивания частиц с однородной и неоднородной намагниченностью. Штриховая прямая — линия нулевой силы притяжения для точечных диполей, сплошная кривая — нейтральная линия, характеризующая неоднородно намагничивающиеся частицы.

б) зависимость «нейтрального» угла, при котором обращается в нуль межчастичная сила f_n , от расстояния между частицами; для дипольных частиц «нейтральный» угол равен 55° и не зависит от q (штриховая линия)

Численное решение двухчастичной задачи с учётом насыщения намагниченности требует больших затрат вычислительных ресурсов, но не всегда его применение целесообразно. На рисунке 4 приведена диаграмма применимости дипольных моделей для описания взаимодействия сферических частиц в конфигурации $\gamma = 0^\circ$. Плоскость параметров (h_0, q) разделена на области, в каждой из которых одна из моделей точечных диполей заменяет точный расчёт с погрешностью не более 5%. Исключение составляет область 1, где частицы близки друг к другу, и по этой причине ни одна из моделей дипольного приближения не может обеспечить достаточной точности.

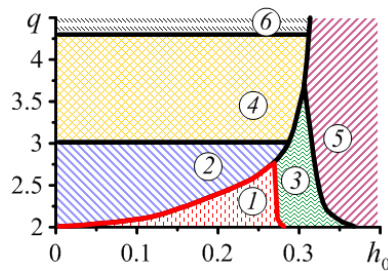


Рис. 4 — Диаграмма применимости моделей точечных диполей для описания взаимодействия неоднородно намагничивающихся сферических частиц в конфигурации $\gamma = 0^\circ$ с погрешностью менее 5%: 1 — необходимо точное решение задачи о нелинейно намагничивающихся частицах; 2 — необходимо точное решение задачи о линейно намагничивающихся частицах; 3 — применима модель нелинейных взаимодействующих диполей, 4 — применима модель линейных взаимодействующих диполей, 5 — применима модель нелинейных диполей, 6 — применима модель линейных диполей.

Подчеркнем, что области 1 и 2 диаграммы 4 закрываются представленными в этой работе моделями, основанными на решении задачи магнитостатики в полной постановке. Кроме того, предложенная в работе модель нелинейных взаимодействующих диполей закрывает на диаграмме рисунка 4 важную область 3 плотного контакта частиц $q = 2$ в интервале полей $0.28 < h_0 < 0.36$, где наступает насыщение намагниченности частиц.

Вторая глава посвящена исследованию упругого взаимодействия двух абсолютно твёрдых сферических частиц в гиперупругой среде. В МР эластомере, наполнителем которого являются намагничивающиеся частицы, в результате их смещений под действием магнитных сил полимерная матрица деформируется, в ней возникают упругие напряжения, которые порождают силу противодействия (возвращающую силу), приложенную к частице. В системе двух частиц поля напряжений, созданные каждой из них, взаимодействуют (в общем случае нелинейно), так что возвращающая сила, приложенная к одной частице, содержит вклад, обусловленный второй.

В начале главы приводится дифференциальная и вариационная постановка задачи нелинейной теории упругости. В качестве определяющего соотношения выбран закон Муни–Ривлина — известное приближение, успешно справляющееся с описанием конечных деформаций в механике эластомеров:

$$W(\mathbf{C}) = c_1 \tilde{W}(\mathbf{C}) = c_1 [(I_1(\mathbf{C}) - 3) + \tilde{c}_2 (I_2(\mathbf{C}) - 3)],$$

где $I_i(\mathbf{C})$ — инварианты меры деформации Коши–Грина \mathbf{C} , c_1 , $\tilde{c}_2 = c_2/c_1$ — числовые константы модели, $\tilde{W} = W/c_1$ — безразмерный потенциал.

Далее во второй главе получены оценки для упругой энергии, которая необходима для того, чтобы изменить относительное расположение двух частиц, находящихся в эластомерной матрице в условиях полной адгезии к ней. Рассматривались неограниченная эластомерная среда и конечный цилиндрический образец эластомера. Частицы помещались в матрицу в положении $\gamma = 0^\circ$, в котором магнитные силы стремятся сблизить частицы. Такая конфигурация позволяет решать магнитную и упругую задачи независимо, предполагая, что частицы двигаются строго вдоль межцентрового вектора \mathbf{l} . В системе координат, в которой ось Oz совпадает с \mathbf{l} , перемещение частицы 1 задаётся вектором $\mathbf{u}_1 = (0, 0, -u_{\text{ч}})$, а частицы 2 — вектором $\mathbf{u}_2 = (0, 0, u_{\text{ч}})$. Упругая энергия $U_{\text{упр}}$, накапливающаяся в полимерной матрице, зависит только от ве-

личины этого смещения $u_{\text{ч}}$. Задача решалась численно, в осесимметричной постановке, с использованием библиотек, реализующих метод конечных элементов. В расчётах величина перемещения $u_{\text{ч}}$ изменялась дискретно от нуля до $u_{\text{ч}}^{\text{max}} = (1/2)l_0 - a$, то есть до плотного контакта частиц.

Вычисления показывают значительную неоднородность деформации матрицы вокруг частиц. Напряжения концентрируются преимущественно в зазоре между сферами. В результате расчётов были получены массивы значений энергии деформирования неограниченной полимерной матрицы и конечного образца эластомера в зависимости от безразмерных параметров начального q_0 и конечного q расстояния между частицами.

Для аппроксимации полученных числовых массивов были построены аналитические выражения с использованием эвристических моделей, показанных на рисунке 5. В этих схемах пара частиц заключена в систему цилиндрических стержней различной длины, описываемых моделью несжимаемой среды Муни–Ривлина. Радиусы стержней r_i выступали в качестве интерполяционных параметров и подбирались так, чтобы упругая энергия эвристической модели максимально точно описывала энергию образца эластомера, полученную численно. Интерполяционные формулы позволяют для различных значений q_0 и q аналитически рассчитывать энергии неограниченной эластомерной матрицы $U_{\text{упр}}^{\infty}$ и конечного цилиндрического образца эластомера $U_{\text{упр}}^{\text{к}}$.

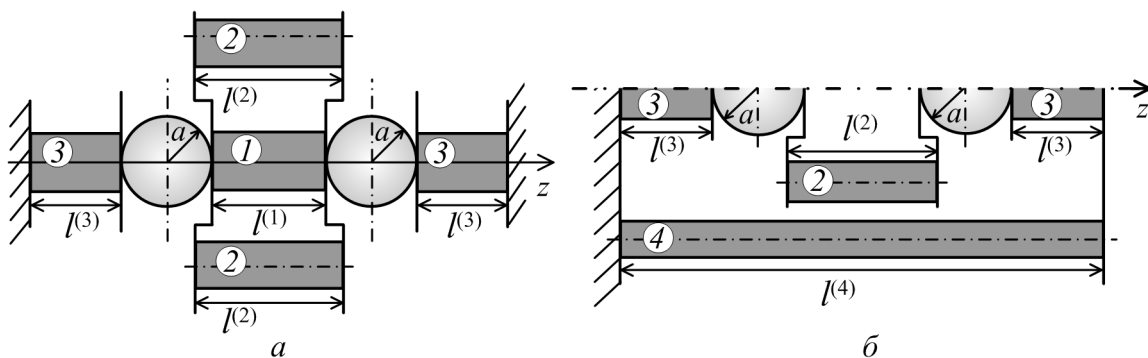


Рис. 5 — а) Стержневая модель для построения интерполяции упругой энергии неограниченной эластомерной матрицы; б) Стержневая модель для построения интерполяции упругой энергии конечного цилиндрического образца эластомера

Предложенные функции оказались пригодны для описания всех полученных числовых данных для различных межчастичных расстояний, поэтому они использовались для оценки упругой энергии матрицы при относительном

удлинении межчастичного стержня $\lambda_1 \rightarrow 0$, где прямой численный расчёт теряет устойчивость из-за недопустимых деформаций конечных элементов.

В третьей главе объединяются результаты, полученные в первых двух, и рассматривается поведение двух модельных мезоскопических образцов. Первая модель описывает пару линейно намагничивающихся частиц в неограниченной гиперупругой среде, представляя энергию этой системы как сумму соответствующих магнитной $U_{\text{маг}}^{\text{л}}$ и упругой $U_{\text{упр}}^{\infty}$ составляющих.

$$\tilde{U} = U(q, q_0, h_0)/(c_1 a^3) = \tilde{H}_0^2 \tilde{U}_{\text{маг}}^{\text{л}}(q, h_0) + \tilde{U}_{\text{упр}}^{\infty}(q, q_0).$$

Здесь введён параметр $\tilde{H}_0 = H_0 \sqrt{\mu_0/c_1}$, представляющий собой отношение величины напряжённости внешнего поля и упругой константы среды Муни–Ривлина. Он определяет, как соотносятся магнитный и упругий вклады в общую энергию образца. В результате магнитного взаимодействия частицы в конфигурации $\gamma = 0^\circ$ двигаются навстречу друг другу, стремясь достичь минимума магнитной составляющей общей энергии этой системы при плотном контакте частиц ($\lambda_1 \rightarrow 0$). Это перемещение вызывает сопротивление матрицы, окружающей их. Эластомерная среда стремится вернуться в начальное недеформированное состояние ($\lambda_1 = 1$), в котором упругая энергия минимальна. Магнитные и упругие силы вступают в противоборство, в результате которого частицы занимают в матрице некоторое равновесное положение, отвечающее минимуму общей энергии системы. Конфигурации, в которых возможен баланс упругих и магнитных сил, можно увидеть из рисунка 6а, где показана зависимость энергии системы от расстояния между частицами. В определённом интервале полей такая система проявляет бистабильность: для энергии свойственны два минимума, локализованных при различных значениях q (см. кривую 2 на рис. 6а). При циклическом изменении внешнего магнитного поля это приводит к возникновению гистерезиса межчастичного расстояния пары (см. рис. 6б).

Вторая мезоскопическая модель представляет собой цилиндрический образец гиперупругого эластомера с двумя внедрёнными в него частицами, намагничивающимися нелинейно. Общая энергия такого образца складывается из соответствующих магнитной $U_{\text{маг}}^{\text{н}}$ и упругой $U_{\text{упр}}^{\text{к}}$ составляющих:

$$\tilde{U} = U(q, q_0, h_0)/(c_1 a^3) = (\mu_0 M_s^2/c_1) \tilde{U}_{\text{маг}}^{\text{н}}(q, h_0) + \tilde{U}_{\text{упр}}^{\text{к}}(q, q_0).$$

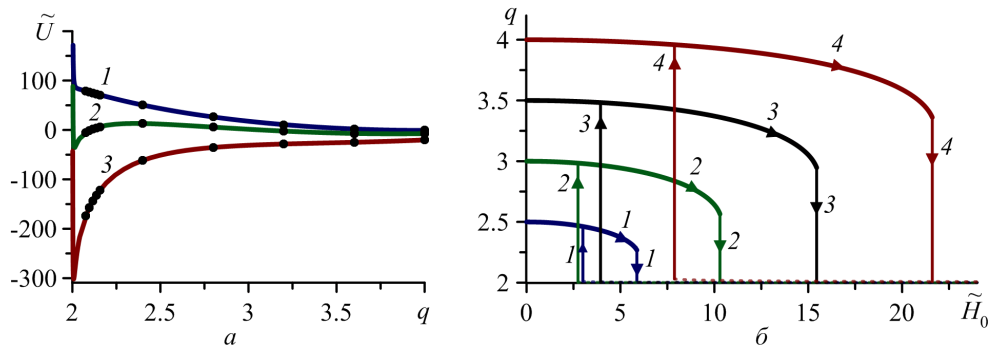


Рис. 6 — а) Полная энергия системы при начальном расстоянии между частицами $q_0 = 4$ и значениях параметра $\tilde{H}_0 = 5$ (1), 15 (2), 25 (3); параметр модели Муни–Ривлина $\tilde{c}_2 = 0.2$; б) Стационарное значение расстояния между частицами в конфигурации $\mathbf{l} \parallel \mathbf{H}_0$ («голова–хвост») в зависимости от величины приложенного поля; начальное межчастичное расстояние $q_0 = 2.5$ (1), 3.0 (2), 3.5 (3) и 4 (4); Стрелки показывают направления смещения частиц при циклическом намагничивании системы: поле сначала возрастает, а затем убывает; штриховые линии – участки, полученные с помощью экстраполяционной формулы $U_{\text{упр}}^{\infty}$

Минимизация энергии U по q при заданных значениях внешнего поля h_0 и начального межцентрового расстояния q_0 обуславливает равновесный размер пары в намагниченном состоянии, а появление более чем одного минимума означает мультистабильность системы. Записанная функция энергии даёт возможность впервые изучить вопрос о магнитомеханическом гистерезисе в паре ферромагнитных, а не парамагнитных, частиц и сделать важный шаг на пути к построению мезоскопической теории реальных МР систем.

Уникальная особенность системы с насыщением намагниченности заключается в том, что при определённых условиях возникающая в ней бистабильность не приводит к образованию кластера. Это происходит в случае, если два минимума энергии в системе образуются в полях, в которых намагниченность частиц близка к насыщению. При дальнейшем увеличении поля полная энергия U становится независимой от его величины. В такой ситуации существующий минимум энергии при $q \simeq 2$ допускает переход в состояние кластера, однако осуществление его за счёт намагничивания системы невозможно. Количественной характеристикой относительного влияния магнитных и упругих сил служит параметр, называемый относительной податливостью системы $\beta = \mu_0 M_s^2 / c_1$. Сравним две модели с разной β (см. рис. 7а и б). В системе с $\beta = 46$ бистабильность появляется в средних полях (кривая 2 на рис. 7а) и с ростом поля исчезает. В системе с податливостью $\beta = 26$, профи-

ли энергии которой представлены на рисунке 7б, возникшая бистабильность (кривая 3) «доживает» до значений поля, близких к отвечающим насыщению (кривая 4). В результате потенциал сохраняет двухъямный профиль в сколь угодно большом поле (см. кривые 4 и 5 на рис. 7б). По этой причине магнитомеханический гистерезис оказывается «латентным»: состояние кластера возможно, но не реализуется под действием только магнитного поля. Если всё-таки в сильном поле кластер был каким-либо образом создан, то при понижении величины поля он обязательно распадётся и частицы разойдутся на исходное расстояние. Такой «латентный» гистерезис проиллюстрирован рисунком 7в в системе с $\beta = 18$ и $q_0 = 3.5$. В интервале $2.5 < q_0 < 3.5$ магнитомеханический гистерезис существует явно. На кривых 2 и 3 хорошо видны области бистабильности, ограниченные «ступеньками» (по q), которые соответствуют: справа — входу в состояние кластера при увеличении поля; слева — выходу из этого состояния при снижении напряжённости поля.

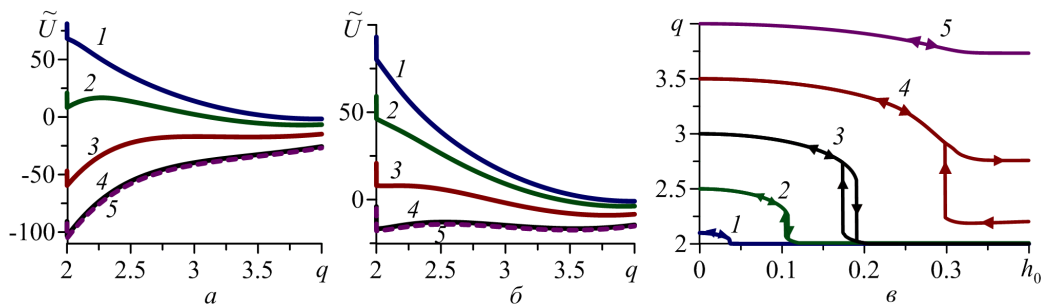


Рис. 7 — Изменение профилей энергии взаимодействия частиц при $q_0 = 4$ для матриц разной жёсткости β : 46 (а) и 26 (б), и различной величине приложенного поля h_0 : 0.08 (кривая 1), 0.16 (2), 0.24 (3), 0.32 (4) и 0.4 (5) (для различия кривых 4 и 5 последняя показана штрихами); в) Смещение частиц в зависимости от начального размера пары q_0 : 2.1 (кривая 1); 2.5 (2); 3 (3); 3.5 (4); 4 (5); параметр $\beta = 18$

Области существования магнитомеханического гистерезиса в модельном «двухчастичном» МР эластомере представлены на рисунке 8 в координатах q_0 и β . Сплошная линия — это граница, выше которой гистерезисный переход в состояние кластера можно вызвать приложением внешнего поля. Между сплошной и штриховой линиями располагается область латентного гистерезиса, где для формирования кластера требуется сочетание намагничивания и некоторой сторонней (немагнитной) силы.

Очевидно, что обсуждаемая двухчастичная модель не может претендовать на достоверное описание реального материала. Однако оценки, полученные с её помощью, интересны, поскольку дают представление о порядках

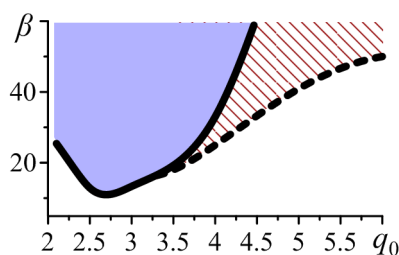


Рис. 8 — Области существования магнитомеханического гистерезиса пары частиц ферромагнетика, заключённых в упругом образце эластомера и намагничиваемых в конфигурации «голова–хвост»; затемнённая область соответствует реализующемуся магнитомеханическому гистерезису, заштрихованная — латентному

величин, при которых следует ожидать мезоскопического гистерезисного отклика МР эластомера. Согласно критерию, следующему из модели парного взаимодействия частиц, в реальном композите выполняются все необходимые условия для реализации магнитомеханического гистерезиса.

Опираясь на результаты вычислений, можно предложить следующую качественную картину намагничивания образца МР эластомера. Наложение внешнего однородного магнитного поля вызывает образование кластеров из частиц, которые по статистическим причинам оказались наиболее близкими друг к другу. Такие агрегаты принимают на себя роль «магнитных скрепок»: они создают и поддерживают внутренние напряжения в композите до тех пор, пока поле не будет выключено. Именно образованием таких «скрепок» и вызван рост упругого модуля и переход МР эластомеров к пластичности. Оценка изменения эффективных упругих свойств модельного мезоскопического образца выполнена в подпараграфе 3.2.4. «Латентный» гистерезис вносит свой вклад в структурирование, объясняя формирование добавочных кластеров под внешней механической нагрузкой образца композита. Эти соображения дают основание полагать, что магнитомеханический гистерезис является одним из главных, а возможно, и единственным путём кластеризации реальных МР эластомеров, произведённых на основе микрочастиц железа.

В **заключении** приведены основные результаты представленного теоретического исследования магнитоупругого взаимодействия двух намагничивающихся частиц в эластомере. Они заключаются в следующем:

1. Путём численного решения полной задачи магнитостатики для двух нелинейно и неоднородно намагничивающихся частиц найдены энергия и силы их магнитного взаимодействия. Предложена и апробирована интерполя-

ционная формула для квазианалитического расчёта сил в случае линейного, но неоднородного намагничивания частиц.

2. Сформулированы критерии применимости приближений дипольного типа для расчёта межчастичных магнитных сил. Путём сопоставления с решением полной задачи определены области применимости известных дипольных приближений и предложено новое: модель нелинейных взаимодействующих диполей, специализированная для случая частиц из магнитомягкого ферромагнетика.

3. На основе данных численного расчёта упругой энергии, накапливающейся в эластомерной матрице при взаимном перемещении двух твёрдых частиц, предложены интерполяционные формулы, позволяющие с высокой точностью получать указанную энергию при непрерывном изменении параметров системы.

4. Анализом профилей магнитомеханической энергии системы из двух намагничивающихся частиц, погружённых в эластомер, доказано, что во внешнем магнитном поле в ней возникает бистабильность. Вследствие этого, по достижении магнитным полем порогового значения межчастичное расстояние изменится скачком. Эффект имеет гистерезисный характер: пороговые значения поля при его увеличении и уменьшении существенно различны.

5. Указана ключевая роль магнитомеханического гистерезиса, существующего на мезоскопическом уровне, как причины уникальных макроскопических эффектов, проявляемых реальными магнитореологическими эластомерами в ответ на приложение магнитного поля и механической нагрузки.

Построенные мезоскопические модели для пары намагничивающихся частиц в гиперупругой матрице показывают, что даже такая система отвечает сложным поведением на приложение магнитного поля и механической нагрузки. Мы использовали изученную нами двухчастичную систему как эвристическую модель наименьшего представительного элемента МР эластомера. Она вполне справляется с объяснением на качественном уровне причины возникновения уникальных эффектов, присущих МР эластомерам: магнитоиндуцированного упрочнения, деформации и псевдопластичности. Это даёт серьёзные основания полагать, что представленные в работе мезоскопические модели полезны для следующего важного шага в изучении магнитомеханики МР эластомеров — перехода к моделированию многочастичных систем.

Публикации автора по теме диссертации

1. Коновалова А. М., Столбов О. В., Райхер Ю. Л. Взаимодействие неоднородно намагниченных частиц, заключённых в эластомер // Сборник трудов VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твёрдого тела. ЮФУ, Ростов-на-Дону. — 2013. — Т. 1. — С. 26—30.
2. Биллер А. М., Столбов О. В. — Решение задачи магнитостатики для двух сферических нелинейно намагничивающихся частиц. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2014619074 от 08.09.2014.
3. *Biller A. M., Stolbov O. V., Raikher Y. L.* Modeling of particle interactions in magnetorheological elastomers // *Journal of Applied Physics*. — 2014. — Vol. 116. — 114904 (8 pages).
4. *Biller A. M., Stolbov O. V., Raikher Y. L.* Dipolar models of ferromagnet particles interaction in magnetorheological composites // *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*. — 2015. — Vol. 17. — Pp. 1106–1113.
5. *Biller A. M., Stolbov O. V., Raikher Y. L.* Mesoscopic magnetomechanical hysteresis in a magnetorheological elastomer // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 92. — 023202 (9 pages).
6. Биллер А. М., Столбов О. В., Райхер Ю. Л. Бистабильное магнитомеханическое поведение ферромагнитных частиц в эластомерной матрице // Вычислительная механика сплошных сред. — 2015. — Т. 8. — С. 273—288.